О. М. ЦУБЕРБІЛЛЕР

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

ДЕРЖТЕХВИДАВ УРСР

О. М. ЦУБЕРБІЛЛЕР

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Переклад з російського вісімнадцятого, стереотипного, видання 1954 р., допущеного Головним Управлінням вищої освіти як навчальний посібник для втузів.

Переклад Р. ЗАЙЧЕНКА

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО
ТЕХНІЧНОЇ ЛІТЕРАТУРИ УРСР
Київ—1955

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА ДО СІМНАДЦЯТОГО ВИДАННЯ

Цей збірник розраховано на студентів втузів і педвузів. В ньому по можливості використані задачі із області фізики, механіки і інших прикладних наук. Звернуто увагу на графіки, на механічне утворення кривих і поверхень, дано поняття про найпростіші механізми в зв'язку з задачами на геометричні місця.

При складанні збірника мали на увазі також заочників і осіб, які вивчають математику сомостійно, внаслідок чого на початку кожного розділу дано не лише формули, але і всі теоретичні пояснення, необхідні для правильного і свідомого їх застосування. Типові задачі розв'язані в тексті, відповіді до більшості задач мають вказівки, а іноді і докладні розв'язання. Кожний розділ починається з легких прикладів, і задачі підібрані так, щоб трудність їх зростала поступово.

Окремими вказівками, примітками і питаннями ми намагалися весь час нагадувати студентам, що, користуючись аналітичним методом, вони все ж мають справу з геометрією, що кожному кроку в аналітичних викладках відповідає геометричний зміст і кожний одержаний результат має просте конкретне тлумачення.

Матеріал розміщено так, що студенти ще до вивчення загальної теорії кривих (або поверхень) другого порядку одержують грунтовні поняття про їх геометричні властивості. В загальній теорії головну увагу звернено на дослідження кривих (або поверхень), тобто на проробку двох питань: як за рівнянням кривої (поверхні) робити висновок про її властивості і про особливості в її розміщенні відносно вибраної системи координат.

Починаючи з другого видання, збірник поповнювався новими задачами в тих розділах, які під час роботи у втузах виявилися дещо бідними матеріалом, а в дальшому, в зв'язку з ростом вимог до молодих спеціалістів, збірник перероблявся і доповнювався більш трудними задачами.

Для XI і всіх наступних видань була написана нова четверта частина, яка відноситься до векторної алгебри і її застосування в геометрії. Введення векторів не вплинуло на матеріал перших трьох частин, що відповідає інтересам студентів тих втузів, в яких векторна алгебра не вивчається або вивчається окремо, після проходження аналітичної геометрії. Для студентів, які вивчають векторну алгебру в курсі аналітичної геометрії, знайомство з векторами природно приурочити до того моменту, коли приступають до вивчення геометрії в просторі. Все ж розділ XV містить матеріал, який не потребує ніяких попередніх знань, а тому в інтересах суміжних дисциплін його можна проробляти значно раніше.

§ 1 розд. XVI основується на розд. VII і повинен безпосередньо йти за ним. До § 2 розд. XVI треба перейти, коли матеріал розд. VIII закріплено достатньою кількістю вправ. § 3 розд. XVI можна проробляти паралельно з розд. IX, а § 4 і 5 — паралельно з розд. X.

Задачі розд. XVI не вводять істотно нового геометричного матеріалу, але дають можливість застосовувати різні методи до задач однакового змісту.

Дуже рекомендується студентам порівнювати формули і рівняння, які дано в координатах і векторних позначеннях, порівнювати хід розв'язань і одержані результати і переходити від векторних позначень до координатних, і навпаки, щоб оцінити перевагу кожного методу при розв'язанні того чи іншого питання.

Перед виходом XV видання було старанно перевірено, чи не містить збірник таких наукових положень, які могли б невірно зрозуміти студенти молодших курсів, як недостатньо пов'язані з конкретними уявленнями.

В свій час збірник складався на основі класичного підручника професора Б. К. Млодзеєвського, курсу професора А. К. Власова і інших представників школи геометрів Московського університету, які будували курс аналітичної геометрії, користуючись початками проективної геометрії, а тому вводили досить рано поняття про невласні елементи, дуже старанно пояснюючи зміст і значення цього поняття.

Але за останні роки паралельно блискучому розвиткові радянської науки змінився і характер курсів, що читаються. З одного боку, курс аналітичної геометрії для студентів-математиків базується тепер на афінно-метричній геометрії і лише наприкінці курсу даються основи проективної геометрії. З другого боку, у втузах в загальний, надзвичайно насичений, курс математики виявилося неможливим включити початки проективної геометрії, а тому в сучасних підручниках, спеціально складених для втузів, невласні елементи зовсім виключено.

У зв'язку з цим в XV виданні цього збірника були змінені теоретичні пояснення і змінена редакція усіх задач, в яких раніше згадувалися невласні (нескінченно-віддалені) елементи.

Після цих змін виявилося недоцільним зберігати попередню класифікацію кривих і поверхонь другого порядку, основану на особливостях їх перетину з прямою лінією. Тому для XVI видання цього збірника перероблено і перегруповано матеріал, який належить до загальної теорії кривих другого порядку (розд. VI) і до загальної теорії поверхень другого порядку (розд. XIV). Першим питанням при дослідженні кривих другого порядку ставиться питання про існування центра; безпосередньо до нього прилягає розгляд і дослідження кривих, що розклалися на пару прямих. Остаточна класифікація кривих, що не розклалися, зв'язується з зведенням їх рівнянь до найпростішого виду.

Аналогічний план проведено і в загальній теорії поверхень другого порядку. Такий розподіл матеріалу більше відповідає сучасній постановці викладання у втузах.

Видання XVII друкується без змін. Виправлені лише друкарські помилки і окремі помилки, які були помічені автором і видавництвом.

ЧАСТИНА ПЕРША
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПРЯМІЙ

РОЗДІЛ І
ПОЛОЖЕННЯ ТОЧКИ НА ПРЯМІЙ. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

Одна з головних особливостей методу аналітичної геометрії полягає в застосуванні чисел для визначення положення геометричних образів. Числа, що визначають положення геометричних образів, називаються координатами.

Обмежимось поки що розглядом точок, розміщених на одній прямій лінії. Щоб мати можливість визначати положення точок на цій прямій, встановимо на ній систему координат таким чином:

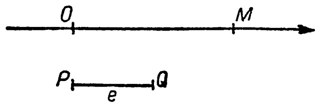

Рис. 1.

1) виберемо початок координат. тобто точку O (рис. 1), відносно до якої визначається положення решти точок;

2) виберемо одиницю довжини ($e = PQ$) для вимірювання віддалі розглядуваної точки від початку координат;

3) виберемо додатний напрям на прямій (на рисунку він показаний стрілкою), що дозволить розрізняти відрізки прямої не тільки за абсолютною величиною їх, але й за знаком: відрізок вважається додатним або від'ємним залежно від того, чи збігається напрям від початкової точки його до кінцевої з додатним напрямом прямої чи з напрямом протилежним (на рис. 2 відрізок OA — додатний, OB — від'ємний).

Після того як система координат на прямій установлена, кожній точці M цієї прямої відповідає єдине абстрактне число, яке характеризує її положення, — одна координата $x = \frac{OM}{PQ}$, абсолютна величина якої дає віддаль точки M від початку координат, виміряну даною одиницею довжини, а знак указує, з якого боку від початку координат розміщена точка.

Навпаки, кожному числу відповідає єдина точка на прямій. Припустимо, треба побудувати точку A, координата якої $x = +3$, тобто $\frac{OA}{PQ} = 3$, або $OA = 3PQ$. Точка A визначиться однозначно, як кінець відрізка, відкладеного вправо від початку координат (рис. 2) і довжина якого становить 3 одиниці масштабу.

Якщо координата точки B дорівнює $-{}^1/_2$ (відзначимо це, поставивши в дужках біля позначення точки її координату: $B\,(-{}^1/_2)$, то точку B ми побудуємо, відклавши вліво від початку координат половину вибраної одиниці PQ (рис. 2). Побудуємо ще точку $C\,(+\sqrt{2})$; в даному випадку $OC = \sqrt{2}\,PQ$; щоб дістати відрізок зазначеної довжини, будуємо квадрат на відрізку PQ, як на стороні: діагональ квадрата $a = \sqrt{2}PQ$; тому, відклавши рівний їй відрізок у додатному напрямі від початку координат, дістанемо точку C (рис. 3).

Коли ми говоримо, що дано точку, це значить, що відома її координата; коли за тих чи інших умов треба знайти точку, це значить, що треба обчислити її координату.

Таким чином, встановлена **взаємно однозначна відповідність** між точками прямої і дійсними числами. Цією відповідністю ми можемо скористатися для графічного зображення зміни якої-небудь змінної величини.

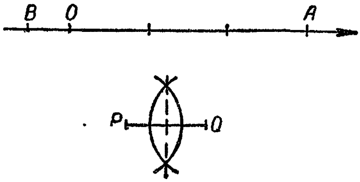

Рис. 2.

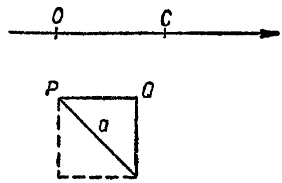

Рис. 3.

Припустимо, що змінна величина x приймає послідовно значення, що дорівнюють членам геометричної прогресії:

$$^1/_4,\ ^1/_2,\ 1,\ 2,\ 4,\ \ldots;$$

ці значення змінної зобразяться на прямій точками:

$$A_1\,(+^1/_4);\ A_2\,(+^1/_2);\ A_3\,(+1);\ A_4\,(+2);\ A_5\,(+4);\ A_6\,(+8)\ \ldots$$

(рис. 4), і ми ясно бачимо, що змінна величина змінюється стрибками і що кожного разу вона дістає приріст вдвоє більший від попереднього.

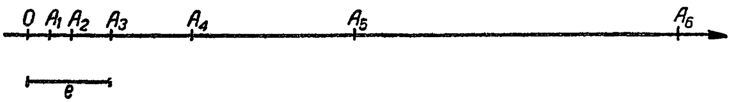

Рис. 4.

Якщо змінна величина змінювалась би за законом зміни членів арифметичної прогресії, наприклад: 1, 1,5, 2, 2,5, 3, ..., то ми дістали б на прямій ряд точок, розміщених на рівних віддалях одна від одної (рис. 5).

У багатьох вимірювальних приладах зміна величини, яку вивчають, фіксується положенням точки на прямій. Наприклад, температура визначається поло-

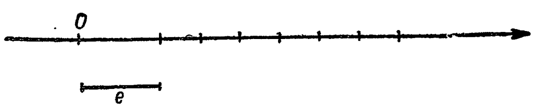

Рис. 5.

женням рівня ртутного стовпа на прямолінійній вертикальній шкалі. В цьому випадку за початкову точку взято положення рівня ртуті при температурі танення льоду, за додатний напрям вибрано напрям знизу вгору, і одиниця довжини дорівнює $^1/_{100}$ підняття ртуті при переході від температури танення льоду до температури кипіння води (шкала Цельсія).

Якщо змінити початок координат, напрям на прямій або одиницю довжини, то відповідність між точками прямої і числами буде вже інша: кожна точка дістане нову координату.

1. Формули перетворення координат

Якщо перенести початок координат у точку $O'(a)$, то між старою координатою (x) будь-якої точки прямої і новою координатою (x') тієї ж таки точки існує співвідношення:

$$x = x' + a. \tag{1}$$

Якщо взяти за додатний напрям на прямій напрям, протилежний початковому, то координати всіх точок змінять знак, не змінюючи своєї абсолютної величини:

$$x = -x'. \tag{2}$$

Якщо вибрати нову одиницю довжини $e' = PQ$, то координати тієї самої точки будуть обернено пропорціональні відповідним одиницям, тобто

$$x = \frac{e'}{e} x'. \tag{3}$$

2. Основні формули

Якщо дано дві точки A і B своїми координатами x_1 і x_2, то віддаль між ними обчислюється за формулою:

$$AB = x_2 - x_1, \tag{4}$$

тобто довжина відрізка дорівнює різниці координат його кінців, причому від координати кінцевої точки треба відняти координату початку.

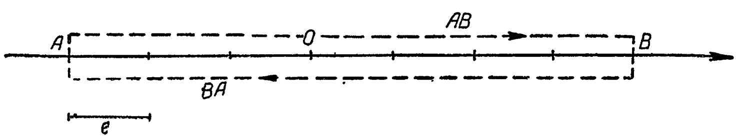

Рис. 6.

Оскільки ця формула справедлива при всякому розміщенні точок, то треба звертати увагу на правильне позначення відрізків і ставити на першому місці ту букву, якою позначено початок, а на другому — букву, якою позначено кінець відрізка (рис. 6).

П р и к л а д. Дано дві точки

$$A(-3);\ B(+4);$$

тоді

$$AB = 4 - (-3) = +7,$$
$$BA = -3 - 4 = -7$$

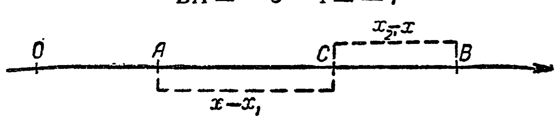

Рис. 7.

Якщо на прямій дано дві точки $A(x_1)$ і $B(x_2)$, то всяка третя точка $C(x)$ поділяє відрізок AB в якомусь певному відношенні $\frac{AC}{CB}$ (рис. 7); ми позначатимемо його буквою λ, тобто

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{\text{Відрізок від початкової точки до поділяючої}}{\text{Відрізок від поділяючої точки до кінцевої}}$$

Для обчислення λ маємо формулу;

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}; \tag{5}$$

λ приймає додатні або від'ємні значення залежно від того, чи лежить поділяюча точка $C(x)$ всередині відрізка AB, чи поза ним.

Якщо, навпаки, дано відношення λ, то координата відповідної поділяючої точки C визначається формулою:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{6}$$

Зокрема, коли $\lambda = 1$ і $AC = CB$, ми маємо:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \tag{7}$$

тобто координата середини відрізка дорівнює півсумі координат його кінців.

Складним (ангармонічним) відношенням чотирьох точок A, B, C і D називається відношення двох відношень, у якому точка C поділяє відрізок AB і в якому D поділяє той самий відрізок AB. Позначається це так:

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Якщо $(ABCD) = -1$, то відповідні чотири точки називаються гармонічними.

1. Побудувати такі точки:

$$A(+4);\ B(-2{,}5);\ C(-{}^2/_3);$$
$$D(+\sqrt{3});\ E(-0,\ (4)\ \ldots);\ F(\sqrt{5}-1).$$

2. Побудувати точки, координати яких задовольняють рівняння:

a) $\frac{5x-2}{3} - \frac{2x-1}{7} = \frac{3x+4}{2} - 3$; d) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$;

b) $x^2 - 4 = 0$; e) $x^2 + 4x + 4 = 0$;

c) $x^2 + x - 6 = 0$; f) $x^2 - x + 6 = 0$.

3. Положення точки, яка рівномірно рухається по прямій, дається для якого завгодно моменту t формулою: $x = vt + c$, де v — швидкість руху, c — початкове положення точки. Відзначити на рисунку положення точки в початковий момент і наприкінці кожної з перших п'яти секунд, якщо закон руху дано рівнянням: $x = 3t - 7$; перевірити, що за рівні проміжки часу точка проходить рівні шляхи.

4. Знайти координату точки, симетричної з точкою $A(+3)$, відносно: a) початку координат; b) точки $B(-2)$; c) точки $C(+5)$.

5. Дано точки:

$$A(+9);\ B(+5);\ C(-3);\ D(-8);\ M(x).$$

Визначити координати цих же точок при умові, що одиницю довжини буде взято: a) втроє більшу початкової; b) вдвоє меншу початкової; c) так, що $e' : e = 5 : 2$.

6. Знаючи, що один кілометр дорівнює 468,7 саж., написати формулу, користуючись якою можна робити нові позначки на верстових стовпах, розставлених уздовж залізничної колії, при переході на метричну систему вимірювання *.

* 1 верста становить 500 саженів.

7. Скласти формулу, яка визначала б температуру в градусах Цельсія, якщо вимірювання зроблено термометром Реомюра.

Примітка. На шкалі Реомюра 0° відзначена температура танення льоду і 80° — температура кипіння води.

8. Якими будуть координати точок $A(+6)$, $B(+2)$, $C(0)$, $D(-2)$, $E(-7)$ і $M(x)$ після того, як початок координат буде перенесено: a) в точку $O_1(+3)$; b) в точку O_2 (-5)?

9. В яку точку треба перенести початок координат, щоб точка $A(+7)$ дістала нову координату $x' = -1$?

10. Перевірка термометра виявила, що ртуть піднімається до $+96°$ при вимірюванні температури кипіння води і опускається тільки до $+1°$ при вимірюванні температури танення льоду. Як обчислити справжню температуру в градусах Цельсія, користуючись показами цього термометра?

11. Як перетворити систему координат, щоб усі точки, координати яких $x < -7$, дістали додатні координати, а всі точки, для яких $x > -7$, дістали координати від'ємні?

12. Перетворити систему координат так, щоб точка $A(+5)$ зберегла свою координату, а точки, симетричні відносно неї, обмінялися своїми координатами.

13. Яке зроблено перетворення координат, якщо первісна координата x якої завгодно точки прямої зв'язана з новою координатою x' тієї ж таки точки однією з таких рівностей:

a) $x = 5x'$; e) $x = -\frac{x'}{2} + 5$;

b) $x = -3x'$; f) $x = nx'$;

c) $x = 2x' - 1$ g) $x = x' + a$;

d) $x = -x' + 3$; h) $x = nx' + a$?

14. Перетворити систему координат так, щоб точки, які мали координати $+3$ і $+7$, дістали нові координати $+2$ і -6.

15. При вимірюванні довжини бруска ділення основної лі-

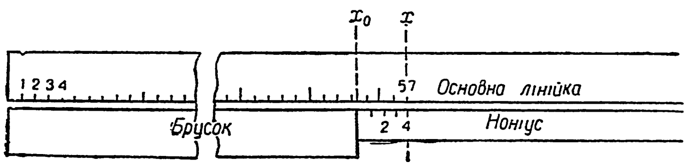

Рис. 8.

нійки, що відповідає 57 *см*, збіглося з четвертим діленням ноніуса. Визначити довжину бруска (рис. 8).

Примітка. При вимірюванні довжин, які точно не виражаються в цілих одиницях основної лінійки, використовують допоміжну лінійку — ноніус. Ноніус приставляють до предмета, який вимірюють, так, щоб він становив продовження його. Довжина ноніуса дорівнює дев'яти одиницям основної лінійки; він поділений на 10 рівних частин.

16. Знайти віддаль між точками: $A\ (-2)$ і $B\ (+5)$; $C\ (+3)$ і $D\ (-8)$; $E\ (-1)$ і $F\ (-4)$; $O\ (0)$ і $G\ (+6)$; $G\ (+6)$ і $O\ (0)$; $K\ (-3)$ і $O\ (0)$; $M\ (-5)$ і $N\ (-2)$.

17. Знайти координату точки P, знаючи віддаль її від даної точки Q. Припустимо:

a) $Q\,(+2)$ і $PQ = -5$; c) $Q\,(-3)$ і $QP = -1$;

b) $Q\,(-7)$ і $PQ = +2$; d) $Q\,(+1)$ і $QP = +8$.

17*. Якщо дано будь-які три точки A, B і C на прямій, то незалежно від їх взаємного розміщення між їх віддалями існує таке співвідношення: $AB + BC = AC$. Перевірити справедливість цієї рівності для точок:

a) $A\,(-3)$, $B\,(+5)$ і $C\,(+12)$;

b) $A\,(+4)$, $B\,(+1)$ і $C\,(+6)$;

c) $A\,(+3)$, $B\,(-7)$ і $C\,(-2)$;

d) $A\ (x_1)$, $B\,(x_2)$ і $C\,(x_3)$.

18. Дано три точки: $A\,(-1)$, $B\,(+5)$, $C\,(+3)$. Визначити відношення, в якому кожна з цих точок поділяє відрізок між двома іншими.

19. Знайти точку M, що поділяє відрізок між точками $A\,(-1{,}5)$ і $B\,(+7{,}5)$ у відношенні λ, причому λ матиме значення 1; 4; $-2{,}5$; 0; -1.

20. Знайти координату точки B, знаючи, що точка $C\,(-2)$ поділяє відрізок між $A\,(+3{,}5)$ і $B\,(x)$ у відношенні $\lambda = {}^5/_2$.

21. Дано три точки: $A\,(-3)$, $B\,(+1)$ і $C\,(+2)$. Знайти до кожної з них четверту гармонічну відносно двох інших.

22. Стержень важеля поділено на сантиметри і міліметри. В точках, що відповідають діленням 23,7 і 74,3 *см*, підвішені тягарі в 350 і 475 *г*. Визначити точку стержня, під яку треба підвести опору, щоб важіль був у рівновазі.

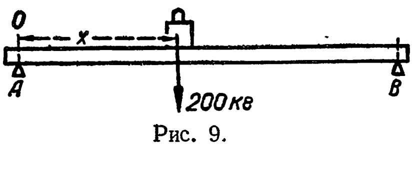

Рис. 9.

23. Горизонтальна балка завдовжки 3 *м* і вагою 80 *кг* вільно лежить своїми кінцями на двох нерухомих опорах A і B (рис. 9). На якій віддалі від кінця A треба розмістити тягар в 200 *кг*, щоб тиск на опору B дорівнював 110 *кг*?

24. Стержень завдовжки 60 *см* підвішений на двох віровках. Одна з цих віровок не може витримати натягу, більшого за 20 *кг*.

На якій віддалі від відповідного кінця стержня можна прикріпити до нього тягар в 96 *кг*?

25. На прямій дано дві точки A і B, які розбивають її на три частини: відрізок AB, промінь, що йде вправо від B, і промінь, що йде вліво від A. На тій же прямій дано рухому точку M, яка поділяє відрізок AB у відношенні λ. Дослідити, як змінюється λ, коли M переміщається між A і B, коли M збігається з однією з цих точок, коли M необмежено віддаляється вправо від B або вліво від A.

ЧАСТИНА ДРУГА
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

РОЗДІЛ II
КООРДИНАТИ ТОЧКИ НА ПЛОЩИНІ. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Прямокутні координати. Графіки

Положення точки на площині визначається найпростіше відносно так званої прямокутної декартової системи координат, яку ми встановимо таким чином:

1) виберемо дві взаємно перпендикулярні прямі — дві осі координат: вісь x, або вісь абсцис, і вісь y, або вісь ординат (рис. 10); точку перетину їх O називають початком координат;

2) на кожній з осей координат виберемо додатний напрям;

3) для кожної осі виберемо одиницю довжини (на рис. 10 для обох осей взято ту саму одиницю $e = PQ$).

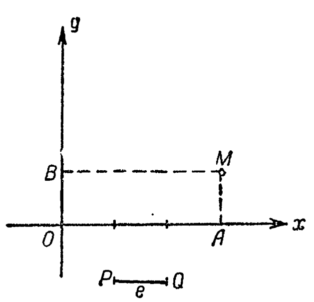

Рис. 10.

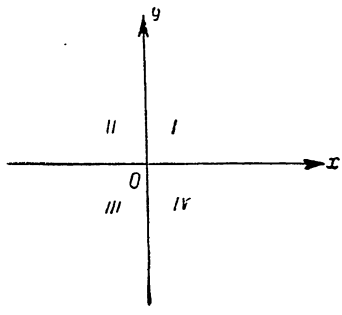

Рис. 11.

Положення точки M відносно вибраної системи координат визначається двома координатами: абсцисою $x = \frac{BM}{PQ} = \frac{OA}{PQ}$ і ординатою $y = \frac{AM}{PQ} = \frac{OB}{PQ}$. Абсциса x дає віддаль точки M від осі ординат, причому знак указує, чи знаходиться точка M праворуч чи ліворуч від неї. Ордината y дорівнює віддалі точки M від осі абсцис, і знак її вказує, чи знаходиться точка вгорі чи внизу від осі абсцис. На рис. 10 точка M має координати: $x = +3$ і $y = +1$. Позначається це так: $M\ (+3;\ +1)$.

Осі координат поділяють усю площину (рис. 11) на чотири частини (чотири квадранти). Координати точок різних квадрантів мають різні знаки, а саме:

Квадрант	Знак абсциси	Знак ординати
I	+	+
II	—	+
III	—	—
IV	+	—

Точки, розміщені на осі абсцис, мають ординати, що дорівнюють нулеві; точки осі ординат мають абсциси, що дорівнюють нулеві; початок координат має обидві координати, що дорівнюють нулеві. Якщо дано значення двох координат, то можна побудувати лише єдину точку.

Побудуємо, наприклад, точку $P(-4;\ +2)$; для цього відкладемо по осі абсцис вліво від початку координат відрізок OA, що дорівнює чотирьом одиницям довжини (рис. 12); в кінці відрізка OA проводимо перпендикуляр до осі x і на ньому, вгору від точки A, відкладаємо дві одиниці масштабу; кінець цього другого відрізка і буде шукана точка $P(-4;\ +2)$.

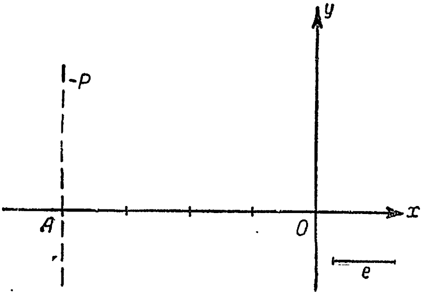

Рис. 12.

Таким чином, установлено взаємно однозначну відповідність між точками площини і парами чисел (x, y).

З цього ми можемо скористатися для графічного зображення одночасної зміни двох величин, щоб наочно зобразити залежність між ними.

Припустимо, що потрібно графічно зобразити залежність між пружністю насиченої пари і температурою, причому результати зроблених спостережень дано таблицею:

Температура (в град.):	—10°	—5°	0°	+ 5°	+10°	+15°	+20°
Пружність насиченої пари (в *мм*)	+2,0	+3,1	+4,6	+6,6	+9,1	+12,7	+17,4

По осі абсцис відкладаємо значення незалежної змінної, в даному випадку температури; по осі ординат — значення функції, а саме — пружності насиченої пари (рис. 13).

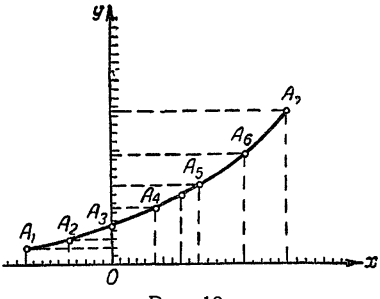

Рис. 13.

За одиницю довжини візьмемо на обох осях один міліметр, тобто переміщення на 1 *мм* вправо по осі абсцис відповідає підвищенню температури на 1°, а переміщення на 1 *мм* вгору по осі ординат — збільшенню тиску на 1 *мм* ртутного стовпа. Дістаємо сім точок:

$$A_1\,(10;\ +2{,}0);\ A_2\,(-5;\ +3{,}1);\ \ldots;$$

$$A_7\,(+20;\ +17{,}4),$$

які відповідають даній таблиці. Оскільки із зміною температури пружність змінюється плавно, без різких стрибків, то для більш наочного зображення зміни пружності пари в залежності від зміни температури здобуті точки сполучаємо плавною кривою, це й буде графік пружності насиченої пари.

Ця крива дає можливість наближено визначити пружність пари для якої завгодно проміжної температури; наприклад, 8° пружність дорівнює 8 *мм*.

26. Побудувати такі точки:

$A(+2;\ +7)$, $B(+3;\ 0)$, $C(+1;\ -4)$, $C(0;\ +5)$,
$E(-1;\ +2)$, $F(-4;\ -3)$, $G(-2;\ 0)$, $H(0;\ -3)$,
$K(-3^1/_2\ \ +2^1/_3)$, $L(+\sqrt{2};\ -\sqrt{3})$, $N(0;\ +\sqrt{5})$.

27. Побудувати точки, координати яких задовольняють рівняння:

a) $\begin{cases} 5x + 2y = -1, \\ 2x - y = 14; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y^2 - 4x = 0, \\ x^2 - 4y = 0. \end{cases}$

28. Побудувати точки, абсциси яких дорівнюють: -4, -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, а ординати визначаються з рівняння: a) $y = 3x - 5$; b) $y = x^2$.

29. Дано точку $M(+3;\ +2)$; побудувати точки, симетричні з нею відносно осі абсцис, осі ординат, початку координат. Визначити координати цих точок.

30. Віддаль між точками $A(-2;\ +5)$ і $M(x,\ y)$ дорівнює трьом одиницям масштабу. Визначити координати точки M, знаючи, що: a) A і M лежать на прямій, паралельній осі x; b) A і M лежать на прямій, паралельній осі y.

31. Яке співвідношення існує між координатами точки, що лежить на одній з бісектрис координатного кута?

32. Сторона квадрата дорівнює 1. Визначити координати його вершин, взявши за осі координат:

a) дві непаралельні сторони його;

b) дві діагоналі;

c) прямі, паралельні сторонам квадрата і які перетинаються в його центрі.

33. Знайти координати вершин правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a, знаючи, що початок координат міститься в центрі шестикутника, а вісь абсцис проходить через дві протилежні вершини його.

34. Зобразити графічно залежність між середнім зростом і віком людини, користуючись такими даними:

Вік (у роках)	Зріст (у *см*)	Вік (у роках)	Зріст (у *см*)	Вік (у роках)	Зріст (у *см*)
0	50	7	111	14	147
1	71	8	116	15	152
2	80	9	122	16	156
3	87	10	128	17	162
4	93	11	133	18	166
5	99	12	137	19	167
6	105	13	142	20	168

35. Зобразити графічно залежність між середньою річною температурою і висотою місцевості над рівнем моря. Відповідні спостереження дано в таблиці:

h (в *км*)	t (в град.)	h (в *км*)	t (в град.)	h (в *км*)	t (в град.)
0	+ 7,9	6	—23,7	12	—54,2
1	+ 4,6	7	—30,8	13	—54,4
2	+ 0,1	8	—38,0	14	—54,4
3	— 5,0	9	—44,4	15	—54,4
4	—10,7	10	—49,6		
5	—16,9	11	—52,8		

36. Відомості про вік студентів, яких прийнято на перший курс одного інституту, дано в такій таблиці:

Вік (у роках)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Число студентів	2	23	85	146	129	62	10	8	6	3	1

Побудувати графік складу першокурсників цього інституту щодо віку, з'єднавши ламаною лінією всі добуті точки.

37. Скласти графік залізничного руху між Москвою і Дмитровим за таким розкладом поїздів:

	км	№ 1	№ 3	№ 5	№ 7	№ 9
Москва	—	9.0	14.10	16.39	18.40	20.30
Ліанозово	13	9.31	14.37	17.07	—	21.0
Лобня	27	10.14	15.18	17.48	—	21.53
Ікша	46	10.53	15.54	18.24	20.14	22.30
Дмитров	66	11.30	16.29	19.0	20.55	23.05

	км	№ 2	№ 4	№ 6	№ 8	№ 10
Дмитров	—	3.08	5.18	7.14	17.44	19.34
Ікша	20	4.07	5.58	7.56	18.23	20.18
Лобня	39	4.51	6.42	8.41	19.02	21.04
Ліанозово	53	5.28	7.19	—	19.40	21.44
Москва	66	5.55	7.45	9.40	20.07	22.11

За складеним графіком визначити:

а) які з зазначених поїздів зустрічаються і на якій саме віддалі від Москви;

b) які поїзди знаходяться на шляху свого руху опівдні і які о 8 год. вечора;

c) о якій годині проходять поїзди повз будку на 50-му кілометрі від Москви;

d) які поїзди переганяють і які поїзди зустрічаються пішоходові, який вийшов з Ліанозова о 7 год. ранку і йде до Лобні з швидкістю 5 *км/год* (на графіку відзначити пересування пішохода).

38. Тіло падає з висоти 50 *м* під дією сили ваги. Зобразити положення тіла в той момент, коли почалося падіння, коли воно закінчилося, і проміжні положення, обчислені для кожної $^1/_2$ сек. Добуті точки з'єднати плавною кривою.

Вказівка. Якщо знехтувати опором повітря, то шлях, пройдений падаючим тілом за t сек., можна обчислити за формулою:

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

де $g \approx 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

39. По горизонтальній балці, яка лежить на двох опорах A і B, іде людина. Тиск, якого зазнає опора B, змінюється залежно від положення людини на балці. Зобразити графічно залежність між цим тиском і віддаллю людини від другого кінця балки A при таких числових даних: вага балки $P = 120$ *кг*, довжина її $l = 5$ *м*, вага людини $p = 65$ *кг*.

40. Найпростіший підіймальний коловорот складається з барабана і колеса, які обертаються на спільній горизонтальній осі. На барабан намотана вірьовка, до кінця якої підвішений тягар Q, а колесо обмотане вірьовкою, за яку тягнуть, щоб підняти тягар. Сила P, якої треба при цьому вжити, обчислюється за формулою:

$$P = \frac{r}{R} \cdot Q,$$

де r — радіус барабана, R — радіус колеса. Зобразити графічно залежність між силою P і радіусом колеса R, якщо $r = 10$ *см* і $Q = 12$ *кг* (вага відра води).

2. Віддаль між двома точками. Напрям відрізка. Площа трикутника

Якщо дано дві точки своїми координатами A $(x_1;\ y_1)$ і B $(x_2;\ y_2)$, то віддаль між ними (рис. 14) обчислюється за формулою:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \qquad (1)$$

тобто довжина відрізка дорівнює квадратному кореневі з суми квадратів різниць однойменних координат його кінців.

Визначаючи віддаль між двома точками на площині, ми звертаємо увагу тільки на абсолютну величину віддалі і приписуємо їй той чи інший знак лише в тому випадку, коли на прямій, яка сполучає ці точки, встановлено додатний напрям.

Зокрема, віддаль точки $M(x, y)$ від початку координат визначається за формулою:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Кут φ, утворений відрізком AB (з додатним напрямом осі абсцис рис. 14), визначається через координати кінців відрізка так:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{3}$$

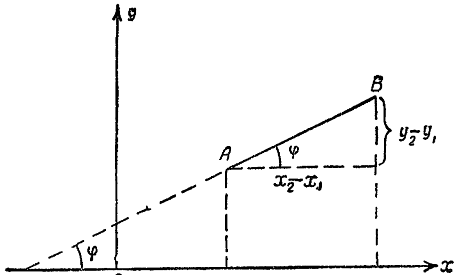

Рис. 14.

Якщо дано координати трьох вершин трикутника $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ і $C(x_3;\ y_3)$, то можна обчислити його площу за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\,[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]. \tag{4}$$

Користуючись цією формулою, ми можемо дістати для площі S як додатні, так і від'ємні значення, залежно від того, чи відповідатиме обхід периметра від вершини A до B і до C (рис. 15) додатному обертанню (проти годинникової стрілки) або від'ємному (за годинниковою стрілкою).

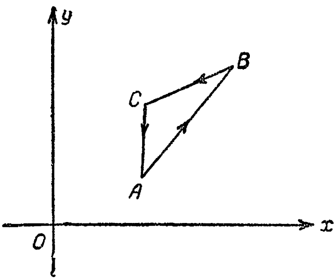

Рис. 15.

За ознаку того, що три точки лежать на одній прямій, може служити рівність нулеві площі відповідного трикутника, тобто

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0. \tag{5}$$

41. Визначити віддаль між двома точками:

$A(+5;\ +2)$ і $B(+1;\ -1)$; $C(-6;\ +3)$ і $D(0;\ -5)$; $O(0;\ 0)$ і $P(-3;\ +4)$; $Q(+9;\ -7)$ і $R(+4;\ +5)$.

42. Дано вершини трикутника: $A(+3;\ +2)$, $B(-1;\ -1)$ і $C(+11;\ -6)$. Визначити довжину його сторін.

43. Довести, що трикутник з вершинами $A(0;\ 0)$, $B(+3;\ +1)$ і $C(+1;\ +7)$ прямокутний.

43*. Знаючи вершини трикутника $P(-2;\ +1)$, $Q(+4;\ +8)$ і $R(+10;\ +6)$, перевірити, чи немає тупого кута серед внутрішніх кутів цього трикутника.

44. Визначити ординату точки M, знаючи, що абсциса її дорівнює $+7$, а віддаль до точки $N(-1;\ +5)$ дорівнює 10.

45. На осі ординат знайти точку, яка відстоїть від точки $A(+4;\ -6)$ на віддалі 5 одиниць.

46. На бісектрисах координатного кута знайти точки, віддаль яких від точки $M(-2;\ 0)$ дорівнює 10.

47. Точка, рухаючись прямолінійно, перемістилася з точки $A(-1;\ -3)$ в точку $B(+4;\ +2)$. Яка величина пройденого шляху і під яким кутом до осі абсцис нахилена траєкторія точки?

48. Який кут утворює з віссю x пряма, що проходить через точки $M(0;\ +2)$ і $N(-2;\ +4)$?

49. Пряма лінія проходить через точку $A(+3;\ +1)$ і утворює з віссю x кут 45°. На цій прямій знайти точку, ордината якої $y = +4$.

50. Визначити положення точки, яка, вийшовши з $A(+3;\ 0)$, перемістилась на 8 одиниць довжини по прямій, що утворює кут 30° з віссю x.

51. На осі x знайти точку, рівновіддалену від початку координат і від точки $A(+9;\ -3)$.

52. Яку умову мають задовольняти координати точки $M(x,\ y)$, якщо вона однаково віддалена від точок $A(+7;\ -3)$ і $B(-2;\ +1)$?

52*. Знайти центр правильного шестикутника, знаючи дві суміжні його вершини: $A(+2;\ 0)$ і $B(+5;\ +3\sqrt{3})$.

53. Дано трикутник своїми вершинами: $A(+2;\ -3)$, $B(+1;\ +3)$ і $C(-6;\ -4)$. Визначити координати точки M, з якою збігається вершина A, якщо перегнути рисунок по прямій BC.

53*. Знаючи дві протилежні вершини ромба $A(+8;\ -3)$, $C(+10;\ +11)$ і довжину його сторони $AB = 10$, визначити координати інших вершин ромба.

54. Знайти точку, рівновіддалену від трьох даних точок: $A(+2;\ +2)$, $B(-5;\ +1)$ і $C(+3;\ -5)$.

55. Знайти центр круга, що проходить через точку $A(-4;\ +2)$ і дотикається до осі абсцис у точці $B(+2;\ 0)$.

56. Знайти центр і радіус круга, що проходить через точку $(+2;\ -1)$ і дотикається до обох осей координат.

57. Обчислити площу трикутника, вершинами якого є точки: $A(+4;\ +2)$, $B(+9;\ +4)$ і $C(+7;\ +6)$.

58. Обчислити периметр і площу трикутника за координатами його вершин: $(-2;\ +1)$, $(+2;\ -2)$ і $(+8;\ +6)$.

58.* Обчислити площу пятикутника, вершинами якого є точки: $A(-2;\ 0)$, $B(0;\ -1)$, $C(+2;\ 0)$, $D(+3;\ +2)$ і $E(-1;\ +3)$.

59. Перевірити, чи лежать на одній прямій три дані точки:

a) $(0;\ +5)$, $(+2;\ +1)$, $(-1;\ +7)$;

b) $(+3;\ +1)$, $(-2;\ -9)$, $(+8;\ +11)$;

c) $(0;\ +2)$, $(-1;\ +5)$, $(+3;\ +4)$.

60. Точка, рухаючись прямолінійно, пройшла через точки $M(+5;\ +5)$ і $N(+1;\ +3)$.

Визначити точку, в якій вона перетне вісь x.

Вказівка. Визначити абсцису шуканої точки $P(x;\ 0)$ з умови, що ця точка повинна лежати на одній прямій з двома даними точками.

61. Пряма означена двома своїми точками: $A(-1;\ +4)$ і $B(+2;\ +1)$. На цій же прямій знайти точку, абсциса якої $x = +5$.

61*. Дано точки: $A(+1;\ +3)$, $B(+4;\ +7)$, $C(+2;\ +8)$ і $D(-1;\ +4)$. Перевірити, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, і обчислити його висоту, прийнявши сторону AB за основу.

3. Поділ відрізка в даному відношенні

Якщо дано дві точки $A(x_1,\ y_1)$ і $B(x_2,\ y_2)$, то координати всякої третьої точки C, яка лежить з ними на одній прямій, визначаються формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \text{ і } y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \tag{6}$$

де λ означає відношення, в якому точка C поділяє відрізок AB, тобто $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$. Кожній точці прямої AB відповідає певне значення параметра λ, і, навпаки, кожному значенню λ відповідає єдина точка на прямій AB.

Зокрема, якщо точка $C(x,\ y)$ поділяє відрізок AB пополам, то $\lambda = 1$, і ми маємо:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ і } y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \tag{7}$$

тобто координати середини відрізка дорівнюють півсумі одноіменних координат кінців його.

62. Дано вершини трикутника: $A(+3;\ -7)$, $B(+5;\ +2)$ і $C(-1;\ 0)$. Знайти середини його сторін.

62*. Обчислити довжину медіан трикутника, знаючи координати його вершин: $A(+3;\ -2)$, $B(+5;\ +2)$ і $C(-1;\ +4)$.

63. Центр ваги однорідного стержня знаходиться в точці $M(+5;\ +1)$; один з кінців його збігається з точкою $A(-1;\ -3)$. Визначити положення другого кінця.

64. Відрізок AB переміщається так, що кінці його весь час залишаються на двох нерухомих прямих: кінець A ковзає по прямій, що паралельна осі x і проходить над нею на віддалі трьох одиниць; кінець B ковзає по прямій, що паралельна осі y і проходить зліва від неї на віддалі двох одиниць. Визначити положення кінців відрізка в той момент, коли середина відрізка збігається з точкою $M(+3;\ +1)$.

65. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін: $P(+3;\ -2)$, $Q(+1;\ +6)$ і $R(-4;\ +2)$.

65*. Точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ служать суміжними вершинами ромба, діагоналі якого паралельні осям координат. Як виразити координати інших вершин через координати даних точок?

66. Дано координати двох суміжних вершин паралелограма $A(-4^1/_2;\ -7)$ і $B(+2;\ +6)$ і точку перетину діагоналей $M(+3;\ +1^1/_2)$. Обчислити координати двох інших його вершин.

67. Дано три вершини паралелограма: $A(+4; +2)$, $B(+5; +7)$ і $C(-3; +4)$. Знайти четверту вершину D, протилежну вершині B.

68. Відрізок між точками $A(+3; +2)$ і $B(+15; +6)$ поділено на п'ять рівних частин. Визначити координати точок поділу.

69. На промені, що виходить з початку координат і проходить через точку $M(+4; +3)$, знайти точку P, віддаль якої від початку координат дорівнює 9.

69.* Пряма лінія відсікає на осі x відрізок $OA = 4$ і на осі y відрізок $OB = 7$. Знайти координати основи перпендикуляра, опущеного з початку координат на дану пряму.

70. Знайти точку перетину медіан трикутника, знаючи координати вершин його: $(+1; +4)$, $(-5 : , 0)$ і $(-2; -1)$.

71. Як виражаються координати центра ваги трикутника[1] через координати вершин його?

72. Центр ваги трикутника збігається з початком координат; одна з вершин лежить на осі абсцис на віддалі a від початку координат; друга вершина лежить на осі ординат на віддалі b від початку. Знайти координати третьої вершини.

73. Дано трикутник $A(+4; +1)$, $B(+7; +5)$, $C(-4; +7)$. Знайти точку перетину бісектриси кута A з протилежною стороною BC.

74. Два подібні трикутники мають спільну вершину $A(+3; -6)$ і при ній спільний кут. Знайти дві інші вершини більшого трикутника, якщо відомі вершини меншого: $B(+6,2; -3,6)$ і $C(+5; +1)$, а відношення схожих сторін дорівнює $^5/_2$.

75. Знайти точку перетину спільних дотичних двох кіл, центри яких збігаються з точками $C_1(+2; +5)$ і $C_2(+7^1/_3; +10\,^1/_3)$, а радіуси відповідно дорівнюють трьом і семи одиницям.

76. Визначити точку, в якій пряма, що сполучає точки $A(+4; +1)$ і $B(-2; +4)$, перетинає вісь абсцис.

77. На прямій, що сполучає точки $(-3; +5)$ і $(-1; +2)$, знайти точку, яка має абсцису $x = 5$.

78. Знайти точку перетину діагоналей AC і BD чотирикутника: $A(+3; -2)$, $B(+3; +5)$, $C(0; +4)$, $D(-1; -1)$.

79. В трьох точках $A(+7; +1^1/_2)$, $B(+6; +7)$ і $C(+2; +4)$ розміщені тягарі відповідно 60, 100 і 40 *г*. Визначити центр ваги цієї системи.

80. Довести, що коли важка система складається з n точок $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2), \ldots, A_n(x_n; y_n)$, в яких зосереджені маси m_1,

---

[1] Під центром ваги трикутника, якщо немає інших вказівок, ми розуміємо центр ваги однорідної трикутної пластинки.

m_2, m_3, ..., m_n, то центр ваги цієї системи визначиться такими формулами:

$$x = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$y = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + \ldots + y_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

80*. У трьох точках $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$ зосереджені однакові маси. Знайти центр ваги цієї системи.

81. Однорідна дротина зігнута у вигляді прямого кута з сторонами a і b. Знайти центр ваги цієї дротини.

82. Знайти координати центра ваги дротяного трикутника, знаючи, що вершини його містяться в точках $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$. Довжини сторін для скорочення позначимо так: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

83. Визначити положення центра ваги симетричної стержневої ферми $ADBC$ (рис. 16), у якої $AB = 6$ *м*, $CD = 3$ *м*, і $DE = 1$ *м*.

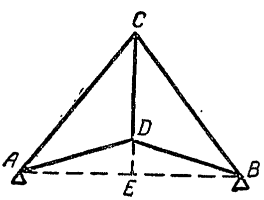

Рис. 16.

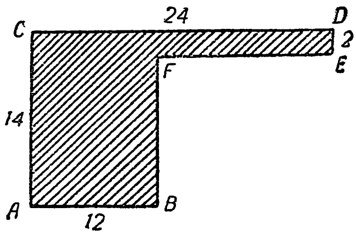

Рис. 17.

84. Знайти центр ваги чотирикутної однорідної дошки, знаючи, що кути дошки містяться в точках: $A(+4; +4)$, $B(+5; +7)$, $C(+10; +10)$ і $D(+12; +4)$.

85. Обчислити координати центра ваги фігури, розміри і форму якої дано на рис. 17, взявши за осі координат сторони AB і AC.

4. Косокутна система координат

Замість того, щоб брати дві взаємно перпендикулярні осі координат, ми можемо взяти які завгодно дві прямі, що перетинаються, і визначати положення точок площин відносно них. Кут ω між додатним напрямом осі x і додатним напрямом осі y називається координатним кутом (рис. 18).

Якщо координатний кут відрізняється від прямого кута, система координат називається косокутною.

Щоб визначити координати точки M (рис. 18), проводимо через неї прямі MA і MB, паралельні осям; тоді абсциса $x = \frac{BM}{PQ} = \frac{OA}{PQ}$ і ордината $y = \frac{AM}{PQ} = \frac{OB}{PQ}$. Косокутні координати точки не дорівнюють віддалям цієї точки від осей координат.

Побудуємо точку $P(+3; -1)$ при умові $\omega = 60°$. За осі координат візьмемо дві прямі, що перетинаються під кутом 60° (рис. 19); на кожній з них виберемо додатний напрям і одиницю довжини. Від початку координат O вправо по осі x відкладаємо відрізок $OA = 3e$; через точку A проводимо пряму, паралельну осі y, і на ній відкладаємо вниз від точки A відрізок AP, що дорівнює одиниці довжини; кінець цього відрізка і буде шукана точка.

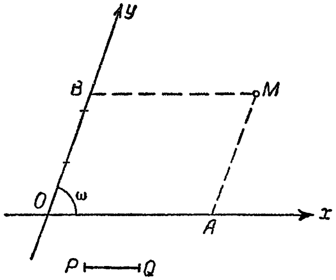

Рис. 18.

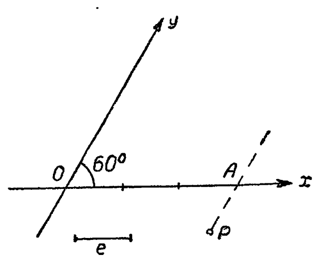

Рис. 19.

У косокутній системі координат доводиться обчислювати величини всякого роду (довжини, кути, площі) за більш складними, узагальненими формулами, що містять координатний кут ω. Для віддалі між двома точками $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2,\ y_2)$ ми маємо (рис. 20):

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cdot\cos\omega}. \qquad (1')$$

Віддаль точки $M(x;\ y)$ від початку координат виражається формулою

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cdot\cos\omega}. \qquad (2')$$

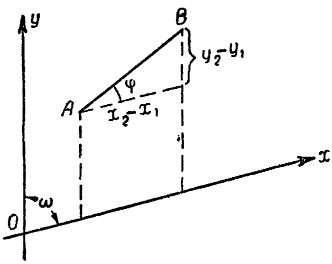

Рис. 20.

Між координатами кінців відрізка AB і кутом φ, утвореним цим відрізком з додатним напрямом осі x, існує співвідношення:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\omega - \varphi)}. \qquad (3')$$

Перетворивши цю рівність, можна дістати для обчислення кута φ формулу:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(y_2 - y_1)\cdot\sin\omega}{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\cdot\cos\omega}. \qquad (3'')$$

Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S = \frac{\sin\omega}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]. \qquad (4')$$

Щождо формул, які характеризують взаємне розміщення точок, то вони залишаються без зміни. Умова того, що три точки лежать на одній прямій, виражається, як і раніше, рівністю:

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0. \qquad (5')$$

Координати точки, яка поділяє відрізок між $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ у відношенні λ, будуть:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

Якщо в наступних задачах координатний кут не вказаний, то можна вважати, що система координат прямокутна.

86. Побудувати трикутник, вершини якого дано його координатами $(+3;\ +5)$, $(-4;\ +7)$ і $(+5^1/_2;\ -3^1/_2)$ відносно косокутної системи з кутом $\omega = \frac{\pi}{4}$.

87. Відносно косокутної системи координат з координатним кутом $\omega = 150°$ дано точку $M(+6;\ +4)$. Визначити віддаль цієї точки від осей координат.

88. Визначити координати точки M, якщо віддалі її від осей координат містять відповідно 1 і 1,5 одиниці довжини. $\omega = \frac{\pi}{6}$.

89. Точки $M\ (-3;\ -5)$ і $N\ (x;\ y)$ симетричні відносно осі x. Знайти координати точки N при умові, що координатний кут $\omega = 60°$.

90. Визначити координати вершин правильного шестикутника, сторона якого $a = 1$, якщо за осі координат взято такі дві суміжні його сторони, що вершина, протилежна початкові координат, має обидві координати додатні.

91. Обчислити віддаль між двома точками $M(+3;\ 0)$, $N(+1;\ -2)$ при умові, що $\omega = 120°$.

92. Відносно косокутної системи координат з кутом $\omega = 60°$ дано трикутник: $A\,(0;\ 0)$, $B(+7;\ +4)$, $C(-1;\ +6)$. Обчислити довжину медіани, проведеної з вершини A.

93. Обчислити довжину сторін трикутника $A(+14;\ +3)$, $B(+9;\ -2)$, $C(+4;\ +1)$ при умові, що $\omega = {}^2/_3\pi$.

94. Відносно косокутної системи координат з кутом $\omega = \arccos(-{}^3/_5)$ дано дві вершини правильного трикутника $A\,(+2;\ -2)$ і $B(+7;\ +1)$. Знайти третю його вершину.

95. Визначити координатний кут ω, знаючи, що віддаль між точками $A(+10;\ -4)$ і $B(+7;\ -1)$ дорівнює 3.

96. Пряма лінія проходить через дві точки $M\ (+2;\ +3\sqrt{2})$ і $N(+6;\ -\sqrt{2})$. Обчислити довжину того відрізка цієї прямої, який замкнений між осями координат, якщо відомо, що $\omega = \frac{\pi}{4}$.

97. Під яким кутом до осі x нахилений відрізок, що сполучає точки $P(-1;\ +4)$ і $Q(+2;\ +7)$? $\omega = 60°$.

98. Відомо, що пряма, яка проходить через дві точки $A\,(+4;\ +1)$ і $B\,(-2;\ y)$, утворює рівні кути з обома осями координат. Обчислити невідому ординату точки B. Система координат — довільна.

99. На віддалі $3^1/_2$ одиниць від точки $A(+5;\ +2)$ знайти таку точку M, щоб пряма OM, яка сполучає її з початком координат, була нахилена до осі x під кутом $\varphi = 30°$; $\omega = 120°$.

100. Дано коло з центром у точці $C\ (-7;\ +4)$ і радіусом $R = 6$; знайти кінці тих діаметрів, які паралельні бісектрисам координатного кута; $\omega = 2\frac{\pi}{3}$.

101. Визначити площу трикутника, одна з вершин якого збігається з початком координат, а дві інші — з точками $A(+3;\ +1)$ і $B(-1;\ +4)$; $\omega = 150°$.

102. Обчислити координатний кут ω, якщо відомо, що площа трикутника $A(-5;\ -1)$, $B(+3;\ -2)$, $C(+1;\ +4)$ дорівнює 11,5 кв. одиницям.

5. Полярна система координат

Основними елементами полярної системи координат є точка і промінь, що виходить з неї, — полюс O і полярна вісь Ox (рис. 21).

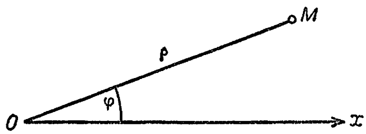

Рис. 21.

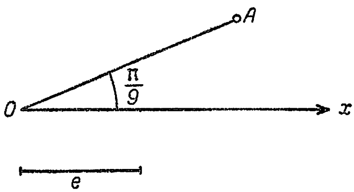

Рис. 22.

Положення точки M на площині визначається віддаллю цієї точки від полюса — радіусом-вектором ρ і полярним кутом φ, утвореним радіусом-вектором з полярною віссю.

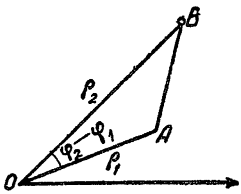

Рис. 23.

Дві координати (ρ, φ), визначають єдину точку. На рис. 22 побудована точка A за координатами $\rho = 2$, $\varphi = \pi/9$.

Якщо ми хочемо встановити взаємно однозначну відповідність між точками площини і парою координат (ρ, φ), то досить давати ρ тільки додатні значення, а φ — значення, що містяться між 0 і $+2\pi$ (додатні кути утворюються обертанням променя проти годинникової стрілки). Якщо не додержуватися цих обмежень, то та ж сама точка визначається координатами (ρ, $\varphi + 2n/\pi$) або ($-\rho$, $\varphi + (2n+1)\pi$), де n — будь-яке ціле число.

Віддаль між двома точками A (ρ_1, φ_1) і B (ρ_2, φ_2), даними в полярних координатах, обчислюється за формулою (рис. 23):

$$AB = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \qquad (1'')$$

103. Побудувати точки, полярні координати яких мають такі значення:

$$\left(3;\ \frac{\pi}{6}\right);\ \left(1;\ \frac{5\pi}{3}\right);\ \left(5;\ \frac{7\pi}{6}\right);\ \left(0{,}5;\ \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\left(2{,}5;\ \frac{2\pi}{3}\right);\ (6;\ \pi);\ \left(3;\ \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\left(\sqrt{3};\ -\frac{\pi}{6}\right);\ \left(-2;\ \frac{\pi}{4}\right).$$

104. Як розміщені точки, полярні координати яких задовольняють одне з таких рівнянь:

$$\text{a)}\ \rho = 1;\ \text{b)}\ \rho = 5;\ \text{c)}\ \rho = a;\ \text{d)}\ \varphi = \frac{\pi}{6};\quad \text{e)}\ \varphi = \frac{\pi}{3};$$

$$\text{f)}\ \varphi = \frac{\pi}{2};\ \text{g)}\ \varphi = \text{const.?}$$

105. Знайти полярні координати точок, симетричних з точками

$$\left(1;\ \frac{\pi}{4}\right);\quad \left(3;\ \frac{2\pi}{3}\right);\quad \left(\frac{2}{3};\quad -\frac{\pi}{6}\right);\ M(\rho, \varphi)$$

а) відносно полюса;

б) відносно полярної осі.

106. Визначити полярні координати вершин правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a, взявши за полюс одну з його вершин, а за полярну вісь — сторону, що проходить через неї.

107. Побудувати точки, полярні кути яких дорівнюють 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, а відповідні радіуси-вектори обчислюються з рівняння $\rho = a \cdot \sin 2\varphi$.

Добуті точки з'єднати плавною кривою.

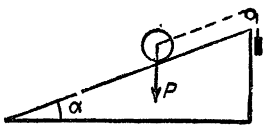

Рис. 24.

108. Щоб зрівноважити важке тіло P на похилій площині, яка утворює з горизонтальною площиною кут α, треба прикласти сили $Q = P \cdot \sin\alpha$ (рис. 24). Ця зрівноважуюча сила Q при тому самому тягарі P залежить від кута нахилу α. Виразити цю залежність графічно, користуючись полярними координатами.

109. Обчислити віддаль між двома даними точками:

$$A\left(2;\ \frac{\pi}{12}\right) \text{ і } B\left(1;\ \frac{5\pi}{12}\right);\ C\left(4;\ \frac{\pi}{5}\right) \text{ і } D\left(6;\ \frac{6\pi}{5}\right);$$

$$E\left(3;\ \frac{11\pi}{18}\right) \text{ і } F\left(4;\ \frac{\pi}{9}\right).$$

110. Дано вершини трикутника (у полярних координатах):

$$A\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right),\ B\left(8;\ \frac{5\pi}{6}\right),\ C\left(3;\ \frac{7\pi}{6}\right).$$

Перевірити, що цей трикутник правильний.

111. На полярній осі знайти точку, розміщену від точки $A\left(4\sqrt{2};\ \frac{\pi}{4}\right)$ на віддалі 5 одиниць.

112. Вивести формулу для обчислення площі трикутника, одна з вершин якого збігається з полюсом.

113. Обчислити площу трикутника, одна з вершин якого міститься в полюсі, а дві інші мають полярні координати $\left(4;\ \frac{\pi}{9}\right)$; $\left(1;\ \frac{5\pi}{18}\right)$.

114. Обчислити площу трикутника, заданого своїми вершинами (в полярних координатах):

$$A\left(9;\ \frac{\pi}{10}\right);\ B\left(12;\ \frac{4\pi}{15}\ \text{і}\ C\left(10;\ \frac{3\pi}{5}\right).$$

6. Проекції. Перетворення координат

Проекцією точки M на вісь називається основа перпендикуляра, опущеного з цієї точки, на вісь, тобто точка M' (рис. 25).

Проекцією відрізка AB на вісь називається геометричне місце проекцій усіх точок його, або, інакше, відрізок осі $(A'\ B')$, замкнений між проекціями кінців відрізка.

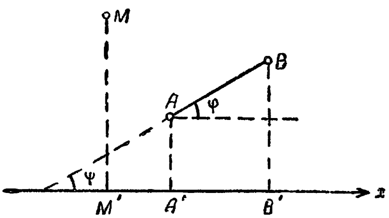

Рис. 25.

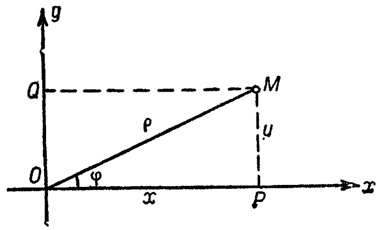

Рис. 26.

Довжина проекції відрізка дорівнює довжині проектованого відрізка, помноженій на косинус кута між цим відрізком і додатним напрямом осі проекції

$$A'B' = AB \cdot \cos\varphi. \tag{8}$$

Проекція ламаної дорівнює алгебраїчній сумі проекцій її ланок і дорівнює проекції замикаючого відрізка.

Залежність між полярними координатами $(\rho;\ \varphi)$ точки і прямокутними декартовими координатами $(x;\ y)$ тієї ж таки точки, якщо полюс взято за початок координат, а полярну вісь за вісь абсцис (рис. 26), виражається формулами:

$$x = \rho \cdot \cos\varphi;\quad y = \rho \cdot \sin\varphi \tag{9}$$

і обернено

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{10}$$

При переході від однієї декартової системи координат до другої ми будемо позначати через x і y координати точки відносно первісної системи, а через x' і y' — координати тієї ж таки точки відносно нової системи.

Якщо перенести початок координат у точку O' $(a,\ b)$ і не змінювати напряму осей, то

$$x = x^1 + a;\quad y = y^1 + b. \tag{11}$$

Якщо, не змінюючи початку, взяти за нові осі прямі, що утворюють з старою віссю абсцис кути α і β, то

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \cdot \sin(\omega - \alpha) + y' \cdot \sin(\omega - \beta)}{\sin\omega}; \\ y &= \frac{x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \sin\beta}{\sin\omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Якщо одночасно зробити обидва перетворення, то

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \cdot \sin(\omega - \alpha) + y' \cdot \sin(\omega - \beta)}{\sin\omega} + a; \\ y &= \frac{y' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \sin\beta}{\sin\omega} + b. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Зокрема, якщо обидві системи координат прямокутні, то $\omega = \frac{\pi}{2}$ і $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, і ми маємо

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha + a; \\ y &= x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha + b. \end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

115. Знайти прямокутні координати точок, заданих своїми полярними координатами: $A\left(2;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3;\ -\frac{\pi}{6}\right)$, причому вісь абсцис збігається з полярною віссю, а початок координат — з полюсом.

116. Знаючи прямокутні координати точок $(+3;\ -4)$, $(-1;\ +1)$, $(0;\ +2)$, $(+5;\ 0)$, знайти їх полярні координати.

117. Координати всіх точок прямої, паралельної осі ординат, задовольняють рівняння: $x = a$. Яке рівняння задовольняють полярні координати цих самих точок?

118. Полярні координати всіх точок кола, описаного навколо полюса радіусом, що дорівнює a, задовольняють умову: $\rho = a$. Яку умову мають задовольняти прямокутні координати тих самих точок?

119. Сила $P = 6$ *кг* прикладена до точки, що збігається з початком координат; напрям сили утворює з віссю абсцис кут $\alpha = 30°$. Визначити складові цієї сили по осях координат.

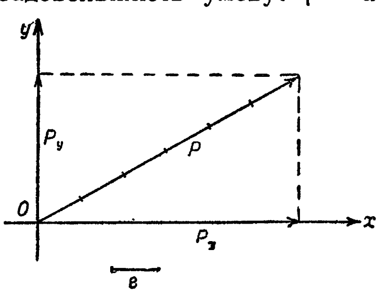

Рис. 27.

Вказівка. Сила зображається вектором (напрямленим відрізком), довжина якого відповідає величині сили. Складові всякої сили по двох перпендикулярних напрямах дорівнюють проекціям на ці напрями того вектора, яким зображається сила (рис. 27).

120. Визначити величину і напрям сили P, знаючи, що її складові по осях x і y відповідно дорівнюють 8 і 6 *кг*.

121. Дано дві точки: $A(+3;\ +7)$ і $B(+5;\ +6)$. Знайти величину проекцій відрізка AB на осі координат.

122. До однієї точки прикладено три сили P, Q і S, причому дано їх складові по обох координатних осях: $P_x = 3$, $P_y = 8$, $Q_x = 7$, $Q_y = 0$, $S_x = 2$, $S_y = -3$. Обчислити рівнодіючу R цих сил.

Вказівка. Скористатися тим, що рівнодіюча сила зображається замикаючим відрізком тієї ламаної, ланками якої є складові сили.

123. Як перетворяться координати довільної точки $M(x,\ y)$, якщо, залишивши вісь абсцис без зміни, змінити напрям на осі ординат; якщо за вісь абсцис взяти колишню вісь ординат і за вісь ординат — колишню вісь абсцис? (Координатний кут довільний).

124. Як треба змінити систему координат, щоб координати всякої точки зберегли свою початкову абсолютну величину, але змінили знаки на супротивні; щоб абсолютна величина абсциси всякої точки збільшилася втроє, а абсолютна величина її ординати зменшилася вдвоє?

125. Як треба змінити систему координат, щоб абсциси всіх точок збільшилися на п'ять одиниць; щоб ординати всіх точок зменшилися на дві одиниці; щоб одночасно абсциси всіх точок зменшилися на три одиниці, а ординати збільшилися на три одиниці?

126. Відносно певної системи координат точка A має координати: $x = +7$ і $y = -5$. Обчислити координати цієї ж таки точки при умові, що початок координат перенесено в одну з таких точок: $O_1(+2;\ +3)$, $O_2(-4;\ +7)$, $O_3(+3;\ -9)$, $O_4(-1;\ -2)$, $O_5(+3;\ -5)$.

127. Знайти віддаль між двома точками, які мають однакові координати ($x = 1$ і $y = 2$) відносно двох різних прямокутних систем координат, причому друга система утворюється з початкової перенесенням початку в точку $O'(+3;\ +4)$ (без зміни напряму осей).

128. Знайти віддаль між точками $A(+1;\ +2)$ і $B(+2;\ -1)$, причому координати точки B обчислені відносно нової системи координат, добутої з попередньої перенесенням початку в точку $O'(-1;\ +3)$.

129. Та сама точка має відносно двох різних систем координат координати $(+2;\ +5)$ і $(-3;\ +6)$. Визначити координати початку кожної з цих систем відносно другої, знаючи, що осі їх мають однаковий напрям.

130. Якими будуть координати трьох точок $A(+2;\ -3)$, $B(-1;\ +5)$ і $M(x,\ y)$ після того, як прямокутні осі координат, до яких вони віднесені, повернути навколо початку: a) на прямий кут проти годинникової стрілки; b) на прямий кут за годинниковою стрілкою; c) на два прямих кути?

131. Відносно прямокутної системи координат дано точки $A\left(+\sqrt{8}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $M(x, y)$. Знайти координати тих самих точок, виходячи з припущення, що осі координат замінені бісектрисами координатного кута.

132. Дано квадрат $ABCD$, сторона якого $a = 1$. За осі координат взято один раз сторони AB і AD, а другий раз діагоналі AC і BD. Знайти залежність між координатами тієї самої точки відносно цих двох систем координат.

133. Дві сторони прямокутника $ABCD$ спочатку збігалися з осями координат ($AB = 5$ і $AD = 2$). Потім прямокутник був пересунутий так, що вершина A, яка збігалася раніше з початком координат, потрапила в точку $A_1(+4; -1)$, а сторона AB, яка збігалася з віссю x, виявилася повернутою на кут $\alpha = 30°$. Визначити нове положення інших трьох вершин.

134. Осі координат спочатку збігалися з катетами CA і CB прямокутного трикутника ABC ($CA = 3$; $CB = 4$). Потім за осі координат були вибрані: перпендикуляр, опущений з вершини прямого кута на гіпотенузу, і сама гіпотенуза даного трикутника. Визначити координати вершин відносно цієї нової системи і дати відповідні формули перетворення координат.

135. Дано рівнобедрений прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють a. За осі координат взято катети CA і CB; потім вісь абсцис була залишена без зміни, а вісь ординат була замінена гіпотенузою AB. Дати формули перетворення координат при переході від однієї системи до другої.

136. Відносно косокутної системи координат ($\omega = 60°$) дано точку $M(-1; +4)$. Знайти координати цієї ж таки точки, взявши за нові осі координат бісектриси старого координатного кута.

137. Дано ромб, сторона якого $a = 2$. Осі координат спочатку збігалися з двома сторонами, кут між якими $\omega = 120°$, а потім з його діагоналями. Визначити координати вершин ромба відносно другої системи і дати відповідні формули перетворення координат.

138. Відомо, що площа трикутника, одна з вершин якого знаходиться в початку координат, виражається через прямокутні координати двох інших вершин $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, таким чином: $S = {}^1/_2(x_1y_2 - y_1x_2)$. Як виразиться площа того самого трикутника через нові координати його вершин, якщо: a) початок координат перенесено в точку $O'(a, b)$, а напрям осей залишився той самий; b) початок координат і вісь абсцис залишилися ті самі, але прямокутну систему замінено косокутною з координатним кутом ω?

139. Координати ряду точок задовольняють рівняння $x^2+y^2+2x-10y+22=0$. Яке рівняння задовольнятимуть координати тих самих точок, якщо стару систему координат замінено новою, а саме — початок координат перенесено в точку $O'(-1;\ +5)$, а напрям осей не змінився?

140. Координати певних точок задовольняють рівняння $xy+3x-2y-6=0$. Яке рівняння задовольнятимуть координати тих самих точок після того, як початок координат буде перенесено в точку $O'(+2;\ -3)$?

140*. Координати ряду точок задовольняють рівняння $x^2+2xy-y^2+4x+8y-5=0$.

Як вибрати новий початок координат, щоб нові координати тих самих точок були зв'язані рівнянням, яке б не містило членів першого степеня?

141. Прямокутні координати ряду точок задовольняють рівняння $y^2-x^2=a^2$. Як буде виражена залежність між координатами тих самих точок, якщо за осі координат взяти бісектриси старого координатного кута?

142. На який кут треба повернути прямокутні осі координат, щоб рівняння $2x^2-5xy+2y^2+3x-4=0$ після перетворення координат не містило члена з добутком координат?

РОЗДІЛ III

ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ РІВНЯНЬ

1. Побудова кривої за її рівнянням

Одне рівняння, яке зв'язує дві змінні величини x і y, має простий геометричний смисл, якщо розглядати x і y як координати точки на площині. Одне рівняння задовольняє незліченна кількість пар значень $(x,\ y)$, і кожна така пара дає певну точку площини, — таким чином, існує безліч точок, координати яких задовольняють одне рівняння. Сукупність цих точок являє певну лінію, певну криву, отже, одне рівняння між двома координатами визначає криву.

Візьмемо яке-небудь рівняння, наприклад

$$x^2-y-4=0,$$

і побудуємо відповідну криву. З цією метою розв'яжемо рівняння відносно y:

$$y=x^2-4;$$

далі, надаючи x різних значень і вставляючи їх у перетворене рівняння, будемо обчислювати відповідні значення y. Добуті результати обчислень запишемо у вигляді таблички. В кожному рядку таблиці ми маємо пару координат, які задовольняють дане рівняння, тобто координати однієї з точок кривої. Побудуємо ці точки (рис. 28) і з'єднаємо їх плавною кривою. Ця крива і буде шукана лінія, яку зображає дане рівняння. Якщо нам неясний перебіг кривої між відміченими точками, то, надаючи x додаткових значень, будуємо проміжні точки. Наприклад, в нашому випадку корисно обчислити ординати, які відповідають:

$$x=\pm{}^1/_2,\ x=\pm{}^1/_4.$$

За рівнянням кривої ми можемо міркувати про найважливіші її властивості. Наприклад, завдяки тому, що до розгляданого рівняння абсциса входить тільки в квадраті, — відповідна крива симетрична відносно осі ординат, бо, надаючи x значень, рівних абсолютною величиною, але супротивних знаком, ми дістанемо те саме значення для y; інакше кажучи, якщо на кривій лежить точка (a, b), то на ній має лежати й точка $(-a, b)$, а такі дві точки симетричні відносно осі y.

Якщо ми маємо рівняння, в правій частині якого стоїть нуль, а ліва частина являє добуток двох або кількох співмножників, то крива, визначувана цим рівнянням, являє сукупність двох або кількох ліній, рівняння яких дістанемо, прирівнюючи до нуля кожний множник окремо. Наприклад, рівняння:

$$(x^2 + y^2 - 4)(x - 1) = 0 \qquad (1)$$

становить дві лінії:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \text{ і } x - 1 = 0, \qquad (2)$$

x	y
0	-4
$+1$	-3
$+2$	0
$+3$	$+5$
$+4$	$+12$
.	.
.	.
.	.
-1	-3
-2	0
-3	$+5$
.	.
.	.
.	.

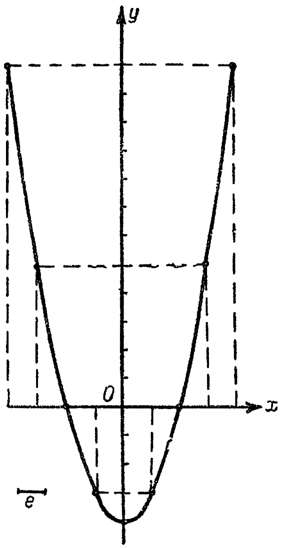

Рис. 28.

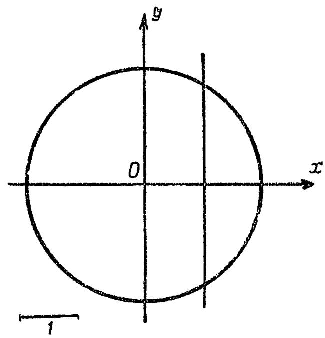

Рис. 29.

бо координати, які задовольняють одне з цих рівнянь (2), задовольняють і рівняння (1). Мало того, тільки ті координати задовольняють рівняння (1), які задовольняють одно з рівнянь (2).

Рівняння $x^2 + y^2 - 4 = 0$, або $x^2 + y^2 = 4$, являє собою коло з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює двом одиницям, тому що квадрат віддалі всякої точки його від початку $(x^2 + y^2)$ дорівнює 4.

Друге рівняння, $x - 1 = 0$, зображає сукупність усіх точок, які мають абсцису, що дорівнює одиниці, тобто пряму, яка паралельна осі y і проходить з правої сторони від неї на віддалі одиниці (рис. 29).

Якщо залежність між двома змінними величинами виражена формулою, тобто дано рівняння, яке зв'язує їх, то побудова відповідного графіка (див. розд. II, п. 1) сходить до побудови кривої, визначуваної цим рівнянням, при умові, що змінні розглядаються як координати точки на площині.

143. Дослідити, які геометричні образи визначаются рівняннями:

1) $x - y = 0$; 6) $y = a$;
2) $x + y = 0$; 7) $(x - 1)(x + 3) = 0$;
3) $x^2 - y^2 = 0$; 8) $xy = 0$;
4) $x^2 + y^2 = 0$; 9) $x(x + 1)(x - 2) = 0$;
5) $x^2 + y^2 = a^2$; 10) $(x + a)(y - b) = 0$.

144. Побудувати лінії, що відповідають рівнянням:

a) $2x + 3y = 6$; b) $y = x - 5$; c) $y = x^2$;
d) $y = (x-1)^2 + 2$; e) $y = x^3$.

145. Побудувати криві, дані такими рівняннями:

a) $xy = 4$; b) $y = \frac{1}{x^2}$; c) $(x^2 + 1)y = 4x$.

146. Побудувати графіки тригонометричних функцій:

$$y = \sin x;\ y = \cos x;\ y = \operatorname{tg} x.$$

147. Побудувати криву, знаючи, що полярні координати її точок задовольняють рівняння:

$$\rho = \frac{\varphi}{2}.$$

(Спіраль Архімеда).

148. Побудувати криву:

$$\rho = \frac{\pi}{\varphi}.$$

(Гіперболічна спіраль).

149. Побудувати криву: $\rho = a\,(1 - \cos\varphi)$. (Кардіоїда).

150. Побудувати криву:

$$\rho = \frac{4}{1 - \cos\varphi}.\quad \text{(Парабола)}.$$

151. Перевірити, чи лежать точки $A\,(0;\ +5)$, $B\,(-2;\ +3)$ і $C\,(+1;\ -1{,}5)$ на кривій $2x^2 - 3xy + y - 5 = 0$.

152. Чи проходить крива: $x^2 + 4y^2 - 2\,(x + y) - 6 = 0$ через точку $(+2;\ -1)$?

153. Показати, які з кривих:

a) $x^2(2x + y) - 3y^2(x + 5) = 4$; b) $(x^2 + y^2)^2 - 2\,(x - y) = 6x^3$;

c) $3x^3 + 5y^2 - 7x^2 - y + 4x + 8 = 0$; d) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

e) $ax - by = 0$

проходять через початок координат.

154. Яку особливість повинно мати рівняння кривої, якщо вона проходить через початок координат?

2. Складання рівняння кривої за її геометричними властивостями

Криву можна визначити як певне геометричне місце точок, тобто можна дати їй геометричну властивість, яку мають усі точки кривої і тільки точки кривої, властивість, що відрізняє точки кривої від решти точок площини. В такому разі виникає питання про знаходження рівняння кривої. Задача зводиться до того, щоб виразити аналітично той факт, що всі точки кривої мають певну властивість. Але немає потреби розглядати всі точки кривої: ми можемо уявити собі, що крива описана рухомою точкою $M(x;\ y)$, і тоді досить буде виразити, що точка $M(x,\ y)$ незмінно має зазначену властивість.

Складемо, наприклад, рівняння кривої (о в а л а К а с с і н і), визначеної як геометричне місце точок, добуток віддалей яких від двох даних точок P і Q є величина стала, що дорівнює a^2.

Віддаль між даними точками P і Q позначимо через $2b$. Перше ніж складати рівняння кривої, треба вибрати певну систему координат. Від вибору системи координат залежить більша чи менша складність шуканого рівняння (див. задачі 139—142). У даному випадку виберемо за вісь абсцис прямокутної системи координат пряму, що з'єднує дані дві точки P і Q (щоб координати даних точок були якомога простіші); початок координат помістимо в середині між ними (рівноправність точок дозволяє сподіватися на симетрію кривої, тому ми розміщаємо точки P

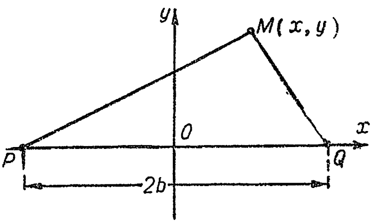

Рис. 30.

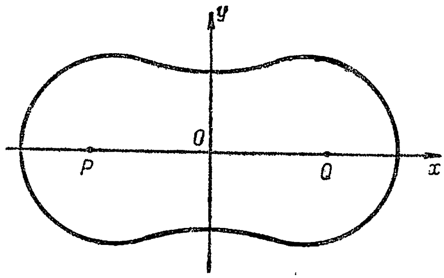

Рис. 31.

і Q симетрично відносно осі y). Відносно встановленої системи (рис. 30) координати постійних точок P і Q будуть $(-b;\ O)$ і $(+b;\ O)$. Нехай буде $M(x;\ y)$ — рухома точка, що описує криву; в такому разі x і y будуть змінні, так звані т е к у ч і к о о р д и н а т и; вони можуть набувати значень, що дорівнюватимуть координатам якої завгодно точки кривої. Рівняння кривої ми дістанемо, виразивши формулою, що добуток віддалей точки M від двох точок P і Q дорівнює a^2, тобто:

$$MP \cdot MQ = a^2,$$

або, виражаючи відрізки MP і MQ через координати їх кінців, дістанемо:

$$\sqrt{(x+b)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-b)^2+y^2} = a^2.$$

Це і є рівняння овала Кассіні (рис. 31). Лишається тільки спростити його: звільнитися від радикалів, зробити можливі скорочення тощо:

$$(x^2+y^2+b^2+2bx)(x^2+y^2+b^2-2bx) = a^4;$$

$$(x^2+y^2+b^2)^2-4b^2x^2 = a^4;\quad (x^2+y^2)^2+2b^2(x^2+y^2)-4b^2x^2 = a^4-b^4;$$

і остаточно

$$(x^2+y^2)^2-2b^2(x^2-y^2) = a^4-b^4.$$

155. Знайти геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних точок $A(+2;\ +1)$ і $B(-1;\ +4)$. (Скласти рівняння і визначити вид кривої).

155*. Дано дві точки: $M(-1;\ +3)$ і $N(+5;\ -3)$. Скласти рівняння прямої лінії, перпендикулярної до відрізка MN і яка поділяє його у відношенні $\lambda = 2$.

156. Визначити траєкторію точки M, яка при своєму русі весь час лишається вдвоє ближче до точки $A(+1;\ 0)$, ніж до точки $B(+4;\ 0)$.

157. Треба розкласти силу $P = 15$ *кг* на дві сили, відношення яких дорівнює 2 : 3. Знайти геометричне місце вершин силових трикутників, які задовольняють цю умову.

158. Точка рухається так, що віддалі її від двох прямих, які перетинаються, залишаються весь час в постійному відношенні. Написати рівняння її траєкторії.

158*. Скласти рівняння геометричного місця центрів ваги трикутників, які мають дві вершини $A(+1;\ 0)$ і $B(+5;\ 0)$, якщо треті їх вершини лежать на бісектрисі координатного кута.

159. Знайти геометричне місце кінців векторів, які зображають сили, що прикладені до точки A і мають відносно центра O момент даної величини M. Віддаль центра O до точки прикладання сил $OA = a$.

Вказівка. Моментом сили P відносно центра O називається добуток сили на віддаль прямої, по якій вона напрямлена, від центра. Розв'язати задачу спочатку в полярних координатах.

160. Два стержні обертаються навколо двох нерухомих точок, віддаль між якими дорівнює $2a$ (рис. 32). При цьому обертанні стержні лишаються весь час перпендикулярними один до одного. Знайти геометричне місце точок перетину стержнів.

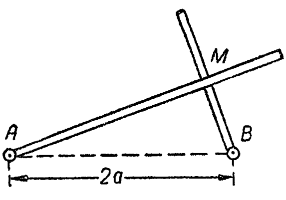

Рис. 32.

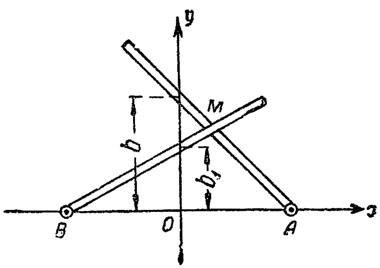

Рис. 33.

161. Навколо точок $A(a,\ 0)$ і $B(-a,\ 0)$ обертаються два стержні, причому добуток відрізків, відсічених ними на осі ординат, беручи від початку, дорівнює постійному числу $b \cdot b_1 = a^2$ (рис. 33). Написати рівняння геометричного місця точок перетину стержнів, що обертаються.

161*. Знайти геометричне місце вершин усіх трикутників, які мають загальну основу $a = 12$ і рівні суми квадратів двох інших сторін $b^2 + c^2 = 100$. Розв'язати цю задачу також в загальному вигляді.

162. Е л і п с о м називається геометричне місце точок, сума віддалей яких від двох даних точок є величина стала, що дорівнює $2a$.

Скласти рівняння еліпса, знаючи, що віддаль між двома даними точками (фокусами еліпса) дорівнює $2c$.

162*. Скласти рівняння геометричного місця точок, що знаходяться від точки $A(+3;\ 0)$ вдвоє ближче, ніж від прямої $x = 12$.

163. Г і п е р б о л о ю називається геометричне місце точок, різниця віддалей яких від двох даних точок (фокусів гіперболи) є величина стала, що дорівнює $2a$. Віддаль між фокусами дорівнює $2c$. Написати рівняння гіперболи.

163*. Знайти траєкторію точки, яка при своєму русі лишається весь час у півтора рази далі від точки $F(0;\ +6)$, ніж від прямої $y = {}^8/_3$.

164. П а р а б о л о ю називається лінія, яка має ту властивість, що кожна її точка знаходиться на однаковій віддалі від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси). Написати рівняння параболи, позначивши через P віддаль від фокуса до директриси.

164*. Скласти рівняння геометричного місця центрів кіл, що дотикаються осі x і проходять через точку $(+3;\ +4)$.

165. Точка M рухається так, що для якого завгодно моменту t її координати можуть бути обчислені за формулами:

a) $x = 2t, \quad y = \frac{t}{3};$ c) $x = a \cdot \cos t, \quad y = a \cdot \sin t;$

b) $x = 5t^2 - 1, \quad y = 10t^2 + 4;$ d) $x = a \cdot \cos t, \quad y = b \cdot \sin t.$

Скласти рівняння відповідних траєкторій.

166. Кулька скочується по жолобку і, набувши швидкості v, зривається з нього в тій точці, де дотична має горизонтальний напрям. Визначити дальшу траєкторію кульки (рис. 34).

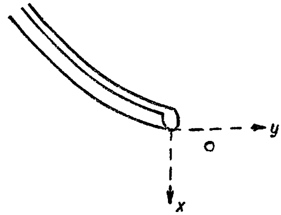

Рис. 34.

В к а з і в к а. За законом інерції кулька має продовжувати рух у напрямі дотичної з сталою швидкістю v, тобто після t секунд повинна бути на vt метрів правіше від точки зриву. Але, крім того, на неї діє сила ваги, яка змушує її опускатися у вертикальному напрямі з постійним прискоренням $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}, тобто після t секунд вона має перебувати на $\frac{gt^2}{2}$ *м* нижче, ніж у перший момент. (Опір повітря до уваги не береться.)

167. Нехтуючи опором повітря, визначити траєкторію тіла, кинутого з швидкістю v вгору під кутом α до горизонтального напряму.

168. Розв'язати попередню задачу при таких числових даних: $\alpha = 45°$; $v = 28$ *м/сек* і визначити, на якій віддалі від вихідної точки впаде тіло.

168*. Дві точки, що рухаються рівномірно і з однаковою швидкістю, описують дві взаємно перпендикулярні прямі. Знаючи початкове положення рухомих точок, скласти рівняння геометричного місця середин відрізків, які їх сполучають, у різні моменти руху.

169. Знайти геометричне місце вершин рівновеликих прямокутників, дві сторони яких лежать на сторонах того самого прямого кута.

Вказівка. Для виводу рівняння беремо за осі координат сторони даного прямого кута, а потім перетворюємо рівняння, взявши за нові осі координат бісектриси колишнього координатного кута.

169*. Пряма переміщається так, що трикутник, утворений нею з осями координат, змінюється, але зберігає сталу площу. Знайти траєкторію середини відрізка, що відсікається осями координат на цій прямій.

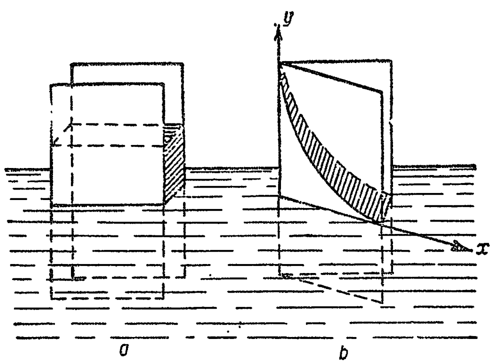

Рис. 35.

170. Якщо дві однакові і досить близькі одна до одної паралельні пластинки занурені в рідину, то внаслідок капілярності рідина піднімається між ними вище рівня в посудині (рис. 35,а); ця висота підняття h обернено пропорціональна віддалі d між пластинками, тобто $h = \frac{c}{d}$, де c — сталий множник, який залежить від поверхневого натягу і щільності рідини. Якщо в ту саму рідину занурити пластинки, які утворюють дуже малий двогранний кут з вертикальним ребром, то рідина підніметься між ними (рис. 35,b), згідно з даною формулою, на різні висоти. Яку криву утворює край рідини з внутрішньої сторони кожної пластинки?

171. Лемніскатою називається окремий вид овала Кассіні (див. задачу, розглянуту в тексті) при умові, що $a = b$. Знайти рівняння лемніскати в декартових і полярних координатах. Побудувати лемніскату, взявши $a = 5$.

172. Дано пряму Ox і на віддалі a від неї дано точку A (рис. 36). Через цю точку A проведено різні прямі, і на кожній з них від точки B її перетину з основною прямою Ox відкладено в обидві сторони відрізки постійної довжини, що дорівнюють b. Таким чином, на кожній з прямих пучка A вибрано дві точки M і M_1. Знайти рівняння геометричного місця цих точок. Добута таким чином крива називається конхоїдою. Накреслити конхоїду для трьох випадків: $a > b$, $a = b$ і $a < b$.

173. Дано пряму Ox і зовнішню точку A на віддалі a від неї. Навколо точки A обертається промінь AB, і на ньому в обидві сторони від точки B (перетину його з прямою Ox) відкладено змінні величиною відрізки $BM = BM_1 = OB$, де O позначає основу перпендикуляра, опущеного з A на основну пряму. При обертанні променя AB точки M і M_1 описують криву, яка називається с т р о ф о ї д о ю. Скласти рівняння цієї кривої і побудувати її.

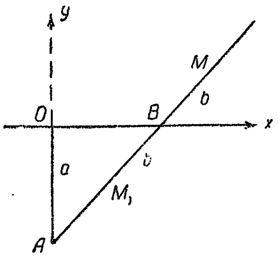

Рис. 36.

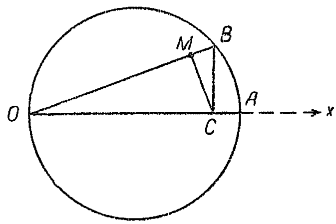

Рис. 37.

174. Дано коло, діаметр якого $OA = 2r$ (рис. 37). З кінця діаметра O проведено хорду OB, і з кінця її B опущено перпендикуляр на діаметр OA; з основи цього перпендикуляра C опущено перпендикуляр назад на хорду OB. Яку криву опише основа M цього другого перпендикуляра, коли хорда OB обертається навколо O?

В к а з і в к а. Вивести рівняння шуканої кривої спочатку в полярних координатах.

175. Дано коло (радіус його r) і на ньому точку O. Навколо точки O обертається промінь, який перетинає коло в змінній точці A. Від точки A в додатному напрямі променя відкладаємо відрізок $AM = AB$, де B — точка кола, діаметрально протилежна точці O. Яку траєкторію опише точка M при обертанні променя?

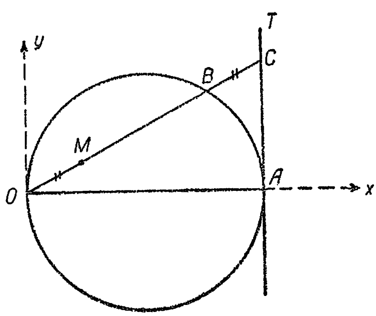

Рис. 38.

176. Дано коло, діаметр якого $OA = 2r$ (рис. 38). В одному кінці діаметра проведено дотичну AT, а через другий кінець O проведено січний промінь, що зустрічає коло вдруге в точці B і дану дотичну в точці C. На цьому промені від початку його O відкладено відрізок OM, що дорівнює відрізкові BC. При обертанні променя навколо точки O величина відрізка OM змінюється, і точка M описує криву, яка називається циссоїдою. Скласти рівняння циссоїди і побудувати її.

177. Відрізок AB незмінної довжини $2a$ ковзає своїми кінцями по сторонах прямого кута. З вершини прямого кута O на цей відрізок опущено перпендикуляр OM. Знайти геометричне місце основ цих перпендикулярів.

Вказівка. Спочатку вивести рівняння шуканої кривої в полярних координатах.

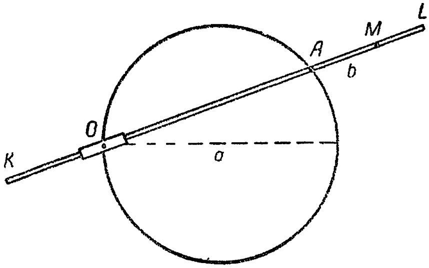

Рис. 39.

178. У точці O до площини рисунка прикріплено повзун так, що він може тільки обертатися навколо цієї точки, а стержень KL, просунутий в нього, може вільно ковзати в ньому і разом з ним обертатися навколо O (рис. 39). До однієї з точок стержня (A) прикріплений олівець, і ми регулюємо рух стержня так, щоб цей олівець описав коло, яке проходило б через O і мало діаметр, що дорівнював би a. Яку криву опише при цьому русі всяка друга точка M рухомого стержня?

Вказівка. Позначити сталу віддаль AM через b і вивести рівняння шуканої кривої (завитки Паскаля) спочатку в полярних координатах. Розглянути три випадки: $a < b$, $a = b$ і $a > b$.

179. Прямокутник, дві сторони якого збігаються з осями координат, деформується так, що діагональ його зберігає сталу величину A. З вершини прямокутника, протилежної початкові координат, опущено перпендикуляр на його діагональ. Основа цього перпендикуляра описує при деформації прямокутника криву, яка називається астроїдою. Скласти рівняння астроїди і накреслити її.

Вказівка. Спочатку складемо рівняння астроїди в параметричній формі (див. вказівку до відповіді задачі 165), тобто виразимо обидві координати рухомої точки через той самий параметр, наприклад, через гострий кут, утворений діагоналлю прямокутника з віссю абсцис.

180. Циклоїдою називається траєкторія всякої точки кола, що котиться без ковзання по прямій. Скласти параметричне рівняння циклоїди, взявши за параметр кут повороту радіуса, який з'єднує центр кола, що котиться, з твірною точкою.

181. Показати, що астроїда (див. задачу 179) може бути визначена як траєкторія точки кола, що котиться без ковзання по внутрішній стороні другого кола [1], причому радіус кола, що котиться,

[1] Така крива називається гіпоциклоїдою.

дорівнює чверті радіуса того нерухомого кола, по якому воно котиться.

182. Скласти параметричне рівняння «розгортки кола», тобто траєкторії кінця туго натягнутої нитки, змотуваної з нерухомої круглої котушки.

РОЗДІЛ IV

ПРЯМА ЛІНІЯ

1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між двома прямими. Рівняння прямої, яка проходить через дану точку в даному напрямі

Всяке рівняння першого степеня відносно декартових координат зображає пряму лінію, і, навпаки, всяка пряма лінія зображається в декартових координатах рівнянням першого степеня.

Пряма лінія означається двома умовами. Рівняння прямої містить, крім текучих координат, два незалежні один від одного параметри. Щоб написати рівняння певної прямої, треба знати числові значення її параметрів. Надаючи параметрам різних значень, дістанемо різні прямі на площині.

Рівняння прямої, розв'язане відносно ординати y, має вигляд:

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Параметр k характеризує напрям прямої і називається її кутовим коефіцієнтом. У випадку прямокутної системи координат

$$k = \operatorname{tg} \varphi, \tag{2}$$

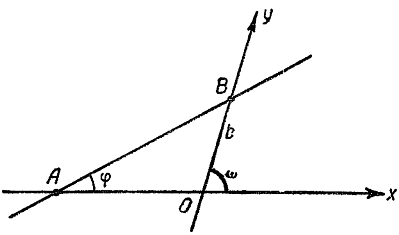

Рис. 40.

де φ — кут, утворений прямою з додатним напрямом осі абсцис. У випадку косокутної системи координат (рис. 40).

$$k = \frac{\sin \varphi}{\sin (\omega - \varphi)}. \tag{2'}$$

Другий параметр рівняння (1), вільний член b, дорівнює величиною і знаком відрізкові, відсіченому даною прямою на осі ординат, рахуючи від початку координат.

Якщо відомі кутові коефіцієнти k і k' двох прямих, то кут θ між цими прямими обчислюється за формулами:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{k' - k}{1 + k'k} \tag{3}$$

для прямокутної системи координат і

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{(k' - k) \cdot \sin \omega}{1 + (k' + k) \cdot \cos \omega + k'k} \tag{3'}$$

для косокутної системи.

Умова паралельності двох прямих виразиться так:

$$k' = k. \tag{4}$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$1 + k'k = 0, \text{ або } k' = -\frac{1}{k}, \tag{5}$$

для прямокутної системи і

$$1 + (k' + k)\cos\omega + k'k = 0 \tag{5'}$$

для косокутної системи координат.

Пряма, що проходить через точку (x', y') і має кутовий коефіцієнт k, зображається рівнянням:

$$y - y' = k(x - x'). \tag{6}$$

183. Дано дві прямі: $y = 2x + 3$ і $y = -x + 4$. Перевірити, чи проходять вони через точки: $A(-1; +1)$, $B(+2; -3)$, $C(+4; 0)$, $D(+3; +1)$, $E(+2; +7)$, $F(+^1/_3; +1^1/_3)$, $O(0; 0)$.

184. Знайти кутовий коефіцієнт прямої і відрізок, відсічений нею на осі ординат, знаючи, що пряма проходить через точки $P(+2; -8)$ і $Q(-1; +7)$.

185. Визначити кутовий коефіцієнт і відрізок, відсічений на осі ординат прямою, даною рівнянням:

a) $2x - y + 3 = 0$; b) $5x + 2y - 8 = 0$; c) $3x + 8y + 16 = 0$.

186. Побудувати прямі, дані такими рівняннями:

$y = 3x + 1$; $y = x - 2$; $y = -5x + 3$; $y = -2x - 1$; $y = 2x$; $y = 5$.

187. Написати рівняння прямої, яка проходить через початок координат і нахилена до осі x під кутом: a) 45°; b) 135°; c) 30°; d) 180°. Система координат — прямокутна.

188. Сила P прикладена до початку координат, і складові її по осях відповідно дорівнюють 5 і -2. Знайти рівняння прямої, по якій напрямлена сила.

189. Яка лінія являє собою графік рівномірного руху, визначуваного рівнянням $s = s_0 + vt$?

190. Знайти швидкість рівномірного руху, знаючи, що графік його перетинає вісь абсцис у точці $A(-^1/_2; 0)$ і вісь ординат у точці $B(0; +8)$. Масштаб вибрано такий, що на осі x одиниця довжини відповідає одній годині, а на осі y — одному кілометрові.

191. Точка, що вийшла з початку координат, повинна одночасно переміщатися в напрямі осі абсцис з постійною швидкістю v_1 і в напрямі осі ординат з постійною швидкістю v_2. Знайти справжню траєкторію рухомої точки.

192. Як зміниться результат попередньої задачі, якщо обидва рухи точки M у напрямі осей — рівноприскорені і сталі прискорення відповідно дорівнюють g_1 і g_2? (Початкова швидкість в обох рухах дорівнює нулеві).

193. Написати рівняння сторін квадрата, діагоналі якого служать осями координат. Довжина сторони квадрата дорівнює a.

194. Написати рівняння сторін рівнобічної трапеції, знаючи, що основи її відповідно дорівнюють 10 і 6, а бокові сторони утворюють з основою кут в 60°. За осі координат взято більшу основу і вісь симетрії трапеції.

195. Промінь світла напрямлений по прямій $y = {}^2/_3\, x - 4$; дійшовши до осі абсцис, він від неї відбився. Визначити точку зустрічі променя з віссю і рівняння відбитого променя. $\omega = \pi/2$.

196. Обчислити кут між двома прямими:

$$\text{a)} \begin{cases} y = 3x, \\ y = -2x + 5; \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} y = 4x - 7, \\ y = -{}^1/_4\, x + 2; \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} y = 5x - 3, \\ y = 5x + 8; \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} y = \sqrt{3} \cdot x - 5, \\ y = -\sqrt{3} \cdot x + 1; \end{cases} \quad \text{e)} \begin{cases} y = 7x - 2, \\ y = x - \sqrt{2}. \end{cases}$$

Система координат — прямокутна.

197. Відносно прямокутної системи координат написати рівняння прямої, яка проходить через початок координат і

a) паралельна прямій $y = 4x - 3$;
b) перпендикулярна до прямої $y = {}^1/_2 x + 1$;
c) утворює кут 45° з прямою $y = 2x + 5$;
d) нахилена під кутом 60° до прямої $y = x - 1$.

198. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку A (+3; —1) і паралельна:

a) осі абсцис;
b) бісектрисі координатного кута;
c) прямій $y = 3x + 7$.

199. По якій лінії має рухатися точка, початкове положення якої визначене координатами (+3; +8), щоб найкоротшим шляхом дійти до прямої $y = {}^1/_2\, x - 1$? В якій точці вона досягне цієї прямої і яка буде величина пройденого шляху? $\omega = \pi/2$.

200. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку (+2; —1) і становить з віссю x кут, вдвоє більший проти кута, утворюваного з тією самою віссю прямою $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$. Кут $\omega = \pi/2$.

201. З точки A (+6; +9) напрямлено промінь під кутом $\pi/4$ до прямої $y = 0{,}44\ x + 0{,}8$. Знайти рівняння променя, відбитого від цієї прямої. $\omega = \pi/2$.

202. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $y = 3x + 5$ і вершину прямого кута (+4; —1). Кут $\omega = 90°$.

203. У рівнобедреному прямокутному трикутнику дано координати вершини гострого кута (+5; +7) і рівняння протилежного катета: $6x + 4y - 9 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника. $\omega = \pi/2$.

203*. Скласти рівняння сторін квадрата, якщо дано відносно прямокутної системи координат одну з його вершин A (+2; —4) і точку перетину діагоналей M (+5; +2).

204. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $(-1; -3)$ і становить з віссю x кут: a) $30°$; b) $60°$; c) $90°$ при умові, що $\omega = 120°$.

205. Написати рівняння перпендикулярів, поставлених до осей координат у точці їх перетину, якщо відомо координатний кут $\omega = 150°$.

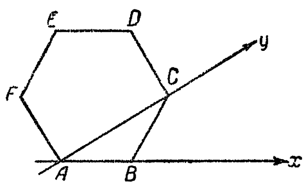

Рис. 41.

206. Відносно косокутної системи координат з координатним кутом $\omega = \pi/3$ дано пряму $y = -2x + 5$. Обчислити кути, утворені цією прямою з осями координат.

207. Написати рівняння всіх сторін правильного шестикутника $ABCDEF$ (рис. 41), якщо осі координат збігаються з стороною AB і діагоналлю AC, а сторона шестикутника дорівнює a.

208. Обчислити кут між двома прямими:

$$y = -x + 5 \text{ і } y = -{}^1/_2 x - 7. \text{ Кут } \omega = \pi/3.$$

209. Визначити координатний кут ω, якщо відомо, що прямі $y = -2x + 1$ і $y = x + 1$ утворюють кут $120°$.

210. Визначити координатний кут ω, знаючи, що рівняння $y = 2x + 3$ і $y = -{}^4/_5\, x + 1$ зображають дві взаємно перпендикулярні прямі.

211. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(+5; 0)$ на пряму $y = 3x - 4$. Кут $\omega = 120°$.

212. Через точку $(+2; -5)$ проходить пряма, яка утворює кут $\pi/6$ з прямою $4x - 3y + 1 = 0$. Скласти рівняння цієї прямої при умові, що $\omega = \pi/3$.

213. Відносно косокутної системи координат з кутом $\omega = 2\pi/3$ дано вершину $A(+3; +2)$ рівностороннього трикутника і рівняння протилежної сторони: $6x - 2y - 7 = 0$. Написати рівняння двох інших сторін трикутника.

2. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки. Рівняння прямої відносно відрізків. Умова, при якій три дані точки лежать на одній прямій

Пряма, яка проходить через дві дані точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, зображається рівнянням:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{7}$$

Кутовий коефіцієнт цієї прямої обчислюється за формулою

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{8}$$

тобто кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через дві дані точки, дорівнює відношенню різниці ординат до різниці абсцис цих точок.

Користуючись визначниками, можна ще інакше написати рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки, а саме:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7')$$

Якщо точка C (x_3; y_3) лежить на одній прямій з точками A (x_1; y_1) і B (x_2; y_2), то її координати задовольняють рівняння (7) або (7′), тобто умова того, що три точки лежать на одній прямій, буде представлена так:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}, \qquad (9)$$

або

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0^*. \qquad (9')$$

Якщо, зокрема, дані точки A і B лежать на осях координат, то рівняння (7) матиме простіший вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (10)$$

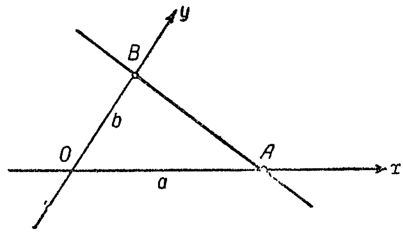

Рис. 42.

де A і B позначають відрізки, які пряма відсікає на осях (рис. 42)**.

214. Дано вершини трикутника: $A(+4;\ +6)$, $B(-4;\ 0)$ і $C(-1;\ -4)$. Скласти рівняння:

a) трьох його сторін;

b) медіани, проведеної з вершини C;

c) бісектриси кута B;

d) висоти, опущеної з вершини A на сторону BC.

215. Написати рівняння прямої, яка з'єднує центр ваги трикутника ABC з початком координат, причому координати вершин такі:

$$(+2;\ -1),\ (+4;\ +5)\ \text{і}\ (-3;\ +2).$$

216. Дано вершини трикутника: $A(-1;\ +2)$, $B(+3;\ -1)$ і $C(0;\ +4)$. Через кожну з них провести пряму, паралельну протилежній стороні.

217. Перевірити, що чотири точки $A(-2;\ -2)$, $B(-3;\ +1)$, $C(+7;\ +7)$ і $D(+3;\ +1)$ являють вершини трапеції, і скласти рівняння середньої лінії і діагоналей цієї трапеції.

218. Дано вершини двох трикутників ABC і $A'B'C'$, а саме: $A(+3;\ 0)$, $B(0;\ +3)$, $C(-2;\ -1)$ і $A'(+6^1/_2;\ +2^1/_2)$,

* Написавши визначник в розкритому вигляді, ми дістанемо: $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$. (Див. розд. II, п. 2, формулу (5).)

** Відомості, дані в цьому параграфі, можна прикладати при всякому координатному куті ω. Тільки в тих задачах, в яких доводиться користатися величиною відрізків, кутів і площ, вважається, що $\omega = \frac{\pi}{2}$.

$B'(+5;\ +4)$, $C'(+4;\ +2)$. Довести, що сторони їх відповідно паралельні і що прямі, які з'єднують схожі вершини, перетинаються в одній точці.

219. Дано центр подібності $M(-4;\ -1)$ двох подібних і подібно розміщених трикутників і дано вершини меншого з них: $A(-3;\ -2)$, $B(+2;\ 0)$, $C(-1;\ +1)$. Скласти рівняння сторін другого трикутника, знаючи, що відношення схожих сторін цих трикутників дорівнює трьом.

Примітка. В подібних і подібно розміщених трикутниках схожі сторони паралельні, а прямі, які з'єднують відповідні вершини, перетинаються в центрі подібності.

220. Перевірити, чи лежать на одній прямій три дані точки:

a) $(+1;\ +3)$, $(+5;\ +7)$ і $(+10;\ +12)$;

b) $(-3;\ -8)$, $(+1;\ -2)$ і $(+10;\ +12)$.

221. Яку ординату має точка C, що лежить на одній прямій з точками $A(-8;\ -6)$ і $B(-3;\ -1)$ і має абсцису $x=+5$?

222. Під яким кутом до осі x треба напрямити промінь з точки $A(+5;\ +2)$, щоб відбитий промінь пройшов через точку $B(-1;\ +4)$? $\omega=\pi/2$.

223. Відносно прямокутної системи координат дано дві точки $A(-3;\ +8)$ і $B(+2;\ +2)$. На осі абсцис знайти таку точку M, щоб ламана лінія AMB мала найменшу довжину.

224. Дано дві точки: $A(-3;\ +1)$ і $B(+3;\ -7)$. На осі ординат знайти таку точку M, щоб прямі AM і BM були перпендикулярні одна до одної. Система координат прямокутна.

225. Діагоналі ромба, що дорівнюють 10 і 4 одиницям довжини, взято за осі координат. Написати рівняння сторін цього ромба.

226. Скласти рівняння діагоналей ромба, якщо дві суміжні сторони його взято за осі координат так, що весь ромб розміщено в третьому куті. Сторона ромба дорівнює a.

227. Знайти відрізки, що їх відсікають на осях координат такі прямі: $3x-2y+12=0$; $y=4x-2$; $y=-x+1$ і $5x+2y+20=0$.

228. Визначити площу трикутника, замкненого між осями координат і прямою: $x+2y-6=0$. Кут $\omega=\pi/2$.

229. Через точку $M(+4;\ -3)$ провести пряму так, щоб площа трикутника, утвореного нею і осями, дорівнювала трьом квадратним одиницям. $\omega=\pi/2$.

230. Через точку $P(+5;\ +2)$ провести пряму, яка відсікала б рівні відрізки на осях координат.

231. Через точку $M(+3;\ +2)$ провести пряму так, щоб її відрізок, замкнений між осями координат, поділявся в даній точці пополам.

232. Яка залежність повинна існувати між відрізком a і b, щоб пряма $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ була нахилена до осі x під кутом: a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{3\pi}{4}$, c) $\frac{\pi}{3}$? $\omega=\frac{\pi}{2}$.

233. Відносно косокутної системи координат з координатним кутом $\omega=2\pi/3$ дано пряму $3x+5y-15=0$. Знайти відрізок цієї прямої, замкнений між осями координат.

234. Через точку $M(+6; -2)$ провести пряму, яка утворювала б з осями координат рівносторонній трикутник. Координатний кут $\omega=60°$.

235. Обчислити площу трикутника, утвореного осями координат і прямою $4x+3y-24=0$, якщо $\omega=5\pi/6$.

236. Дано пряму $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ і промінь, який обертається навколо початку координат; точку перетину їх позначимо через P. На промені відкладається від початку координат відрізок OM так, щоб відрізки OM і OP знаходилися в постійному відношенні λ, тобто $\frac{OM}{OP}=\lambda$. Визначити геометричне місце точок M.

236*. Пряма лінія переміщається так, що сума відрізків, які відсікаються нею на осях координат, зберігає сталу величину; $a+b=9$. Знайти геометричне місце центрів кіл, описаних навколо трикутників, утворених рухомою прямою і осями координат. $\omega=\pi/3$.

3. Нормальне рівняння прямої. Віддаль точки від прямої

Нормальне рівняння прямої має такий вигляд:

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0 \quad \text{при } \omega=\frac{\pi}{2} \tag{11}$$

або, в загальному випадку:

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta-p=0; \tag{11'}$$

p позначає довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на дану пряму ($p\geqslant 0$) (рис. 43); α позначає кут між цим перпендикуляром і додатним напрямом осі x; β — кут між цим же перпендикуляром і віссю y, інакше:

$$\beta=\omega-\alpha.$$

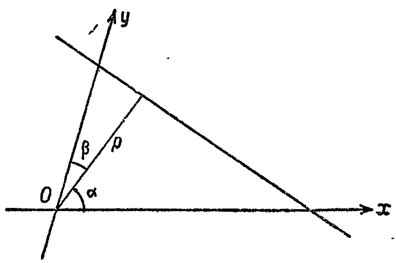

Рис. 43.

Всяке рівняння першого степеня $Ax+By+C=0$ може бути зведено до нормального вигляду, для чого досить помножити його на нормуючий множник:

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{при } \omega=\frac{\pi}{2} \tag{12}$$

або, в загальному випадку:

$$M = \pm \frac{\sin \omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}. \tag{12'}$$

Нормуючий множник повинен мати знак, супротивний знакові вільного члена C даного рівняння. Якщо $\omega = \pi/2$, то параметри відповідної прямої обчислюються за формулами:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\\ \sin\alpha &= \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}};\\ p &= \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

а у випадку косокутної системи координат — за формулами:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}};\quad \cos\beta = \pm\frac{B\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}};$$

$$p = \pm\frac{C\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}. \tag{13'}$$

Віддаль (δ) точки $M(x', y')$ від даної прямої дорівнює лівій частині нормального рівняння цієї прямої, в якій текучі координати замінено координатами точки M, тобто у випадку прямокутної системи:

$$\delta = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p, \tag{14}$$

а у випадку косокутної системи:

$$\delta = x'\cos\alpha + y'\cos\beta - p. \tag{14'}$$

Якщо ж пряму дано загальним рівнянням першого степеня $Ax + By + C = 0$, то його треба спочатку звести до нормального вигляду, і шукана віддаль буде:

$$\delta = \frac{Ax' + By' + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{15}$$

або

$$\delta = \frac{(Ax' + By' + C)\sin\omega}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}. \tag{15'}$$

При обчисленні віддалі точки від прямої за даними формулами результат може вийти як додатний, так і від'ємний, залежно від того, чи розміщені точка і початок координат по різні сторони, чи по ту саму сторону від прямої. Віддаль прямої від початку координат (p) вважається завжди за додатну.

237. Відносно прямокутної системи координат дано рівняння кількох прямих:

a) $3x - 2y + 7 = 0$; d) $x + {}^1/_2 y - 3 = 0$;

b) ${}^2/_3 x - {}^4/_7 y - 1 = 0$; e) $-{}^{12}/_{13} y + {}^5/_{13} y - 3 = 0$;

c) ${}^3/_5 x - {}^4/_5 y - 2 = 0$; f) $x - 5 = 0$.

Які з цих прямих представлені нормальними рівняннями?

238. Звести до нормального вигляду рівняння прямих:

$$4x - 3y + 10 = 0;\quad 5x + 12y - 39 = 0;\quad 6x + 8y - 15 = 0;$$

$$x - 2y + 3 = 0;\quad y - x\sqrt{3} = 4;\quad x \cdot \cos 10^\circ + y \cdot \sin 10^\circ + 4 = 0.$$

Система координат — прямокутна.

239. Знайти віддаль прямої $9x - 12y + 10 = 0$ від початку координат. Кут $\omega = \pi/2$.

240. Перевірити, що прямі

$$2x + \sqrt{5}y - 15 = 0 \text{ і } \sqrt{11}x - 5y + 30 = 0$$

дотикаються до того самого кола з центром у початку координат і обчислити радіус цього кола. Кут $\omega = \pi/2$.

Вказівка. Всі дотичні відстоять від центра кола на віддалі, що дорівнює радіусові. Якщо дані прямі дотикаються до зазначеного кола, то вони мають бути на однакових віддалях від початку координат.

241. Через точку $P(+5;\ 0)$ провести дотичну до кола $x^2 + y^2 = 9$. Кут $\omega = \pi/2$.

Розв'язання. Дане коло має центр у початку координат і радіус $r = 3$; отже, шукана дотична, знаходиться від початку координат на віддалі $P = 3$. Будемо шукати нормальне рівняння цієї прямої; параметр P уже відомий, і рівняння має вигляд: $x \cos\alpha + y \sin\alpha - 3 = 0$; другий параметр α визначаємо з тієї умови, що пряма проходить через точку $(+5;\ 0)$, і, отже, координати цієї точки задовольняють рівняння прямої. Вставляючи ці координати, ми дістанемо: $5 \cos\alpha - 3 = 0$, звідки $\cos\alpha = 3/5$. Визначаємо останній коефіцієнт:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - (3/5)^2} = \pm 4/5.$$

Задача має два розв'язання: $3/5x + 4/5y - 3 = 0$ і $3/5x - 4/5y - 3 = 0$. Ця обставина має місце тому, що з зовнішньої точки можна провести дві дотичні до кола.

242. Звести до нормального вигляду рівняння прямих:

a) $x + 5y - 4 = 0$ при умові, що $\omega = \dfrac{\pi}{3}$,

b) $2x + 5\sqrt{3}y - 7 = 0$ » » » $\omega = \dfrac{\pi}{6}$,

c) $5x + 2y + 13 = 0$ » » » $\omega = \dfrac{2\pi}{3}$.

243. Дано рівняння прямої $6x + 3\sqrt{2}y - 1 = 0$, віднесеної до косокутної системи координат з координатним кутом $\omega = \pi/4$. Обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, і кути нахилу цього перпендикуляра до осей.

244. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки $P(+4;\ -1)$ на пряму $12x - 5y - 27 = 0$. Кут $\omega = \pi/2$.

245. Знайти віддаль точки:

a) $P_1(+4;\ -2)$ від прямої $8x - 15y - 11 = 0$;
b) $P_2(+2;\ +7)$ » » $12x + 5y - 7 = 0$;
c) $P_3(-3;\ +5)$ » » $9x - 12y + 2 = 0$;
d) $P_4(-3;\ +2)$ » » $4x - 7y + 26 = 0$;
e) $P_5(+8;\ +5)$ » » $3x - 4y - 15 = 0$.

Система координат — прямокутна.

246. Знайти віддаль точки $P(0;\ +5)$ від прямої $y = \sqrt{3}x + 7$, знаючи, що $\omega = 5\pi/6$.

247. Визначити координатний кут, якщо відомо, що віддаль точки $P(-1;\ +2)$ від прямої $x + 2y - 6 = 0$ дорівнює $-{}^3/_2$.

248. Дано вершини трикутника: $A(-{}^1/_7;\ -{}^3/_{28})$, $B(+4;\ +3)$ і $C(+2;\ -1)$. Обчислити довжину його висот. Система координат — прямокутна.

249. Дано трикутник: $A(+1;\ +2)$, $B(+3;\ +7)$, $C(+5;\ -13)$. Обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини A. Кут $\omega = \pi/2$.

250. На осі ординат прямокутної системи координат знайти точку, однаково віддалену від початку координат і від прямої $3x - 4y + 12 = 0$.

251. На осі абсцис знайти точку, яка відстоїть від прямої $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ на віддалі $\delta = a$. Кут $\omega = \pi/2$.

Р о з в'я з а н н я. Позначимо шукану точку через $M(x, 0)$; зводимо рівняння прямої до нормального виду, перед цим звільнивши його від знаменників: $\frac{bx + ay - ab}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$; вставивши в ліву частину цього рівняння координати точки M, прирівнюємо її до даної віддалі a. Тоді ми дістанемо: $\frac{bx - ab}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = a$. З цієї рівності визначаємо єдину невідому: $x = a \pm \frac{a}{b}\sqrt{a^2 + b^2}$. Знак перед радикалом залежить від того, чи мають відрізки a і b однакові, чи різні знаки.

252. Діагоналі ромба, завдовжки 30 і 16 одиниць, взято за осі координат. Обчислити віддаль між паралельними сторонами цього ромба.

253. Через точку $P(-2;\ +1)$ проведено пряму так, що її віддаль від точки $C(+3;\ +1)$ абсолютною величиною дорівнює 4. Знайти кутовий коефіцієнт цієї прямої.

Р о з в'я з а н н я. Рівняння всякої прямої, що проходить через точку $P(-2;\ +1)$, має вигляд: $y - 1 = k(x + 2)$, або $kx - y + 2k + 1 = 0$. Треба визначити параметр k з умови, що пряма проходить на віддалі чотирьох одиниць від точки $C(+3;\ +1)$. Вираз цієї віддалі через невідомий параметр k ми дістанемо, якщо зведемо рівняння прямої до нормального виду і в ліву частину його вставимо координати $(+3;\ +1)$. Таким чином дістанемо: $\frac{3k - 1 + 2k + 1}{\sqrt{k^2 + 1}} = \pm 4$; розв'язуючи це рівняння відносно k, дістанемо $k = \pm 4/3$.

253*. На віддалі 5 одиниць від точки $C(+4;\ +3)$ провести пряму, яка відсікає рівні відрізки на осях прямокутної системи координат.

254. На віддалі 5 одиниць від початку координат провести пряму так, щоб вона пройшла через ту точку прямої $8x + 5y - 39 = 0$, яка має абсцису $x = -2$. Кут $\omega = \pi/2$.

255. Довести, що прямі $3x - 4y + 10 = 0$ і $6x - 8y + 15 = 0$ паралельні між собою, і знайти віддаль між ними. Кут $\omega = \pi/2$.

Вказівка. Шукану віддаль d легко визначити, знаючи віддалі обох прямих від початку координат, а саме: $d = [p \pm p_1]$, верхній або нижній знак беремо в залежності від того, чи знаходиться початок координат між прямими, чи по той самий бік від обох прямих.

256. Дано пряму: $12x + 5y - 52 = 0$. Знайти рівняння прямої, яка паралельна даній і відстоїть від неї на віддалі $d = 2$. Кут $\omega = \pi/2$.

257. Відносно прямокутної системи координат дано рівняння двох паралельних прямих: $4x - 6y - 3 = 0$ і $2x - 3y + 7 = 0$. Скласти рівняння прямої, що паралельна їм і проходить посередині між ними.

258. Через початок координат і точку $M(+1;\ +3)$ проходять дві паралельні прямі. Знайти їх рівняння, якщо відомо, що віддаль між цими прямими дорівнює $\sqrt{5}$ і координатний кут $\omega = 90°$.

259. Дано дві прямі: $3x + 4y - 10 = 0$ і $5x - 12y + 26 = 0$. Знайти точку, яка була б на віддалі $\delta = +5$ як від першої, так і від другої прямої. Кут $\omega = \pi/2$.

260. Знайти центр кола, що дотикається до двох даних прямих: $3x - 4y + 10 = 0$ і $3x + 4y = 0$, причому радіус кола $r = 8$. Кут $\omega = \pi/2$.

261. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими: $2x - 9y + 18 = 0$ і $6x + 7y - 21 = 0$. Перевірити, що ці бісектриси перпендикулярні одна до одної. Кут $\omega = \pi/2$.

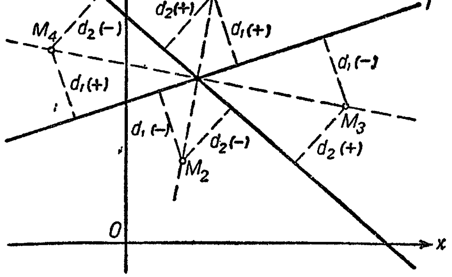

Рис. 44.

Розв'язання. Шукані бісектриси являють собою геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута. Таким чином якщо ми візьмемо на бісектрисі будь-яку точку M_1, то її віддалі d_1 і d_2 до двох даних прямих повинні бути рівні між собою. Для всіх точок бісектриси, взятих у тому куті, де розміщена точка M_1, і в вертикальному куті (рис. 44), ці віддалі будуть рівні і величиною і знаком, тобто всі точки бісектриси M_1M_2 задовольняють рівняння: $d_1 = d_2$. Для точок бісектриси, яка проходить в суміжних кутах, віддалі d_1 і d_2 будуть також рівні величиною, але супротивні знаком; тому рівняння бісектриси M_3M_4 напишеться так: $d_1 = -d_2$.

Позначивши через x і y текучі координати бісектриси, матимемо:

$$d_1 = \frac{2x - 9y + 18}{-\sqrt{85}}$$

і

$$d_2 = \frac{6x + 7y - 21}{\sqrt{85}}.$$

Рівняння бісектриси M_1M_2:

$$\frac{2x - 9y + 18}{-\sqrt{85}} + \frac{6x + 7y - 21}{\sqrt{85}},$$

або, після спрощень, $8x - 2y - 3 = 0$. Рівняння бісектриси M_3M_4.

$$\frac{2x - 9y + 18}{-\sqrt{85}} = -\frac{6x + 7y - 21}{\sqrt{85}},$$

або остаточно: $4x + 16y - 39 = 0$. Кутові коефіцієнти прямих: $k_1 = 4$ і $k_2 = {}^1/_4$, тобто вони супротивні знаком і обернені величиною, що є умовою перпендикулярності прямих.

262. Написати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими: $x + 7y - 6 = 0$ і $5x - 5y + 1 = 0$. Кут $\omega = \pi/2$.

263. Обчислити координати центра кола, вписаного в трикутник ABC, трикутник дано його вершинами відносно прямокутної системи координат:

$$A(+{}^9/_5;\ \ +{}^2/_5),\ B(0;\ +4)\ \text{і}\ C(-3;\ \ -2).$$

264. Через точку $M(+1;\ +2)$ треба провести пряму так, щоб вона пройшла на однаковій віддалі від точок $A(+3;\ +3)$ і $B(+5;\ +2)$. Кут $\omega = \pi/2$.

265. Дано дві точки: $A(+2;\ -3)$ і $B(+5;\ -1)$. Провести пряму так, щоб вона пройшла на віддалі 6 одиниць від точки A і на віддалі 4 одиниць від точки B. Кут $\omega = \pi/2$.

266. Точка рухається так, що віддаль її від початку координат лишається весь час вдвоє більшою проти віддалі від прямої $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Знайти траєкторію рухомої точки; $\omega = \pi/2$.

267. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = {}^8/_{15}\, x + 1$ і проходить від точки $P(+6;\ -2)$ на віддалі $\delta = +4$. Кут $\omega = \pi/2$.

268. Треба відновити границі квадратної ділянки землі за трьома стовпами, що збереглися: одному в центрі ділянки і по одному на двох протилежних границях. На плані положення стовпів означене координатами: середнього $M(+1;\ +6)$ і двох бічних: $A(+5;\ +9)$ і $B(+3;\ 0)$. Скласти рівняння прямих, що зображають шукані границі.

Вказівка. Щоб відновити ті границі ділянки, на яких збереглися стовпи, досить провести через точки A і B дві паралельні прямі, які проходять на однаковій віддалі від центра M. Дві інші границі будуть до них перпендикулярні і повинні проходити на такій самій віддалі від M,

4. Загальне рівняння прямої. Перетин двох прямих. Умова проходження трьох прямих через одну точку. Пучок прямих

Загальне рівняння прямої має вигляд:

$$Ax + By + C = 0. \tag{16}$$

Для визначення прямої немає необхідності знати всі три коефіцієнти A, B, C; досить знати два незалежні їх відношення $A : B : C$.

Дослідження загального рівняння прямої (16):

Якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат;
» $A = 0$, » » паралельна осі абсцис;
» $B = 0$, » » » » ординат,
» $A = C = 0$, то пряма збігається з віссю абсцис;
» $B = C = 0$, » » » » » ординат.

Якщо дано дві прямі:

$$Ax + By + C = 0 \text{ і } A'x + B'y + C' = 0, \tag{17}$$

то кут між ними обчислюється у випадку прямокутної системи координат за формулою:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{AB' - A'B}{AA' + BB'}, \tag{18}$$

а у випадку косокутної системи — за формулою:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(AB' - A'B)\sin\omega}{AA' + BB' - (AB' + A'B)\cos\omega}. \tag{18'}$$

Умова паралельності прямих для всякої системи координат:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}. \tag{19}$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$\frac{A}{B'} = -\frac{B}{A'} \text{ або } AA' + BB' = 0 \text{ для } \omega = \frac{\pi}{2} \tag{20}$$

$$AA' + BB' - (AB' + A'B)\cdot\cos\omega = 0 \text{ для будь-якого } \omega. \tag{20'}$$

Щоб знайти координати точки перетину двох прямих (17), треба сумісно розв'язати їх рівняння.

Розв'язання цих рівнянь будуть:

$$x = \frac{BC' - B'C}{AB' - A'B} = \frac{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \quad \text{і} \quad y = \frac{CA' - C'A}{AB' - A'B} = \frac{\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}. \tag{21}$$

Якщо $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, то прямі мають певну точку перетину.

Якщо $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, то прямі паралельні і точки їх перетину немає.

Якщо $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, то прямі збігаються і точка перетину стає неозначена.

Щоб дізнатись, чи проходять три дані прямі:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A'x + B'y + C' &= 0, \\ A''x + B''y + C'' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

через ту саму точку, треба знайти точку перетину двох із них і потім перевірити, чи задовольняють координати цієї точки рівняння третьої прямої. Можна користуватися і готовою формулою а саме: для того, щоб прямі (22) проходили через одну точку, треба, щоб

$$\begin{vmatrix} ABC \\ A'B'C' \\ A''B''C'' \end{vmatrix} = 0. \qquad (23)$$

Сукупність усіх прямих, що проходять через ту саму точку, називається **пучком прямих**, а їх спільна точка — **центром пучка**. Якщо x' і y' позначають координати центра, то рівняння

$$A(x - x') + B(y - y') = 0 \qquad (24)$$

зображає яку завгодно пряму пучка. Надаючи відношенню $A : B$ певного значення, ми виділяємо з пучка (24) одну певну пряму [1].

Центр пучка можна означити не тільки його координатами, але й всякими двома прямими, що проходять через нього. Якщо дано дві прямі:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A'x + B'y + C' &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

то всяка пряма, що проходить через їх точку перетину, зобразиться рівнянням:

$$(Ax + By + C) + q(A'x + B'y + C') = 0. \qquad (25)$$

Кожному значенню параметра q пучка відповідає певна пряма пучка; змінюючи q, ми дістанемо всі можливі прямі пучка, означеного двома основними прямими (17).

269. Дослідити, як розміщені відносно осей координат такі прямі: $3x - y = 0$, $3x - y + 1 = 0$, $2x + 5 = 0$, $4y - 9 = 0$, $7x = 0$, $x + 2y = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$, і побудувати їх.

270. Дано рівняння першого степеня: $\frac{3x+2}{6} - \frac{2y-5}{3} = 4.$

Знайти для відповідної прямої: a) загальне рівняння; b) нормальне рівняння; c) рівняння з кутовим коефіцієнтом і d) рівняння відносно відрізків $\omega = \pi/2$.

271. Не визначаючи кутових коефіцієнтів, обчислити кут між прямими:

a) $2x + y - 5 = 0$ і $6x - 2y + 7 = 0$ при $\omega = \frac{\pi}{2}$,

b) $4x - 5y + 7 = 0$ і $9x + 4y - 11 = 0$ при $\omega = \frac{\pi}{3}$,

c) $x - 2y + 5 = 0$ і $3x - 8 = 0$ при $\omega = \frac{2\pi}{3}$,

d) $4x + 3y - 13 = 0$ і $22x + (19\sqrt{3} - 7)y + 15 = 0$ при $\omega = \frac{\pi}{6}$,

---

[1] При неозначеному кутовому коефіцієнті рівняння $y - y' = k(x - x')$ являє собою пучок з центром (x', y') (розд. IV, п. 1, рівняння (6)).

272. Обчислити кути трикутника, сторони якого відносно прямокутної системи координат дано рівняннями:

$$18x + 6y - 17 = 0, \quad 14x - 7y + 15 = 0 \text{ і } 5x + 10y - 9 = 0.$$

273. Відносно косокутної системи координат з координатним кутом $\omega = \pi/3$ дано трикутник $A(-1; +2)$; $B(+1; +1)$; $C(+2; -5/2)$. Обчислити кут між стороною AB і медіаною, проведеною з вершини C.

274. Чи немає серед прямих, заданих рівняннями:

a) $3x - 2y + 7 = 0$; b) $6x - 4y - 9 = 0$; c) $6x + 4y - 5 = 0$;

d) $2x + 3y - 6 = 0$; e) $x - y + 8 = 0$; f) $x + y - 12 = 0$

і g) $-x + y - 3 = 0$,

паралельних або перпендикулярних прямих? $\omega = \pi/2$.

275. Визначити координатний кут ω, якщо відомо, що рівняння $4x + 3\sqrt{2}y - 5 = 0$ і $\sqrt{2}x - y + 11 = 0$ зображають взаємно перпендикулярні прямі.

276. При якому значенні параметра a рівняння $3ax - 8y + 13 = 0$ і $(a + 1)x - 2ay - 21 = 0$ зображають паралельні прямі?

277. При якому значенні сталого a прямі $(3a + 2)x + (1 - 4a)y + 8 = 0$ і $(5a - 2)x + (a + 4)y - 7 = 0$ будуть перпендикулярні одна до одної? $\omega = \pi/2$.

278. Через початок координат провести пряму, паралельну прямій: $2x - 3y + 7 = 0$.

Розв'язання. Шукана пряма проходить через початок координат, тому її рівняння не містить вільного члена і має вигляд $Ax + By = 0$. Шукана пряма паралельна даній, отже, коефіцієнти в їхніх рівняннях пропорціональні: $\frac{A}{2} = \frac{B}{-3} = \lambda$, або $A = 2\lambda$ і $B = -3\lambda$. Вставляючи добуті значення коефіцієнтів у рівняння шуканої прямої, дістанемо $2\lambda x - 3\lambda y = 0$, або $2x - 3y = 0$. Оскільки геометричне значення рівняння не змінюється від множення (або ділення) всіх його членів на те саме число, то при складанні рівняння прямої, паралельної даній, можна брати коефіцієнти при координатах не тільки пропорціональні, але й такі, що дорівнюють відповідним коефіцієнтам даного рівняння.

279. Через початок координат провести пряму паралельно прямій $4x + y - 5 = 0$.

280. Через точку $M(+2; -1)$ провести пряму, паралельну прямій $4x - 7y + 12 = 0$.

281. Знайти рівняння перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму $6x + 5y - 19 = 0$. Кут $\omega = \pi/2$.

282. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(-5; +2)$ на пряму $4x - y + 3 = 0$. Кут $\omega = \pi/2$.

283. З точок перетину прямої $3x + 5y - 15 = 0$ з осями координат поставлені перпендикуляри до цієї прямої. Знайти їх рівняння. Кут $\omega = \pi/2$.

284. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку (x', y') і перпендикулярна до прямої: $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$. Кут $\omega = \frac{\pi}{2}$.

285. З початку координат опустити перпендикуляр на пряму $2x - 6y + 13 = 0$ при умові, що $\omega = \pi/3$.

286. З точки $M(-1; +4)$ опустити перпендикуляр на пряму $5x - 3y + 11 = 0$, при умові, що $\omega = 2\pi/3$.

287. Знайти точки перетину прямих:

a) $8x - 3y - 1 = 0$, $4x + y - 13 = 0$; b) $3x + 7y - 15 = 0$, $9x + 21y - 32 = 0$; c) $5x - 2y + 13 = 0$, $x + 3y - 11 = 0$.

Перед цим дослідити дані системи рівнянь.

288. Дано рівняння сторін трикутника: $5x - 3y - 15 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$ і $3x + y + 5 = 0$. Обчислити координати його вершин.

289. Обчислити координати точки перетину перпендикулярів, поставлених з середин сторін трикутника, вершинами якого є точки: $A(+2; +3)$, $B(0; -3)$ і $C(+5; -2)$. Кут $\omega = \pi/2$.

290. Дано вершини чотирикутника: $A(-9; 0)$, $B(-3; +6)$, $C(+3; +4)$ і $D(+6; -3)$. Знайти точку перетину його діагоналей AC і BD і обчислити кут між ними. Кут $\omega = \pi/2$.

291. Обчислити координати вершин ромба, якщо відомі рівняння двох його сторін $2x - 5y - 1 = 0$, $2x - 5y - 34 = 0$ і рівняння однієї з його діагоналей: $x + 3y - 6 = 0$. Кут $\omega = \pi/2$.

291*. Скласти рівняння сторін ромба, знаючи дві протилежні його вершини $A(-3; +1)$, $B(+5; +7)$ і площу ромба $S = 25$ кв. од.

292. Знайти точку, симетричну з точкою $Q(-2; -9)$ відносно прямої: $2x + 5y - 38 = 0$. Кут $\omega = \frac{\pi}{2}$.

293. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма: $x - y - 1 = 0$; $x - 2y = 0$ і точку перетину його діагоналей $M(+3; -1)$. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма.

293*. Обчислити площу ромба, знаючи одну з його вершин $A(0; -1)$, точку перетину діагоналей $M(+4; +4)$ і точку $(+2; 0)$ на стороні AB.

294. Дано дві вершини трикутника $A(-6; +2)$, $B(+2; -2)$ і точку $H(+1; +2)$ перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини C, знаючи, що $\omega = \frac{\pi}{2}$.

295. Відносно прямокутної системи координат дано трикутник: $A(-6; -3)$, $B(-4; +3)$, $C(+9; +2)$. На внутрішній бісектрисі кута A знайти таку точку M, щоб чотирикутник $ABMC$ став трапецією.

296. Перевірити, чи проходять через ту саму точку такі три прямі:

a) $3x - y - 1 = 0,$ $\quad$ b) $x + 3y - 1 = 0,$
$2x - y + 3 = 0,$ $\quad$ $5x + y - 10 = 0,$
$x - y + 7 = 0;$ $\quad$ $3x - 5y - 8 = 0;$

c) $3x - y + 6 = 0,$ $\quad$ d) $5x - 3y - 15 = 0,$
$4x + 3y - 5 = 0,$ $\quad$ $x + 5y - 3 = 0,$
$2x - y + 5 = 0;$ $\quad$ $3x + y + 5 = 0.$

297. Яку умову повинні задовольняти коефіцієнти a і b для того, щоб прямі $ax + by + 1 = 0$, $2x - 3y + 5 = 0$ і $x - 1 = 0$ проходили через ту саму точку?

298. Трикутник дано його сторонами: $x + 2y + 3 = 0$; $3x - 7y + 9 = 0$; $5x - 3y - 11 = 0$. Перевірити, що його висоти перетинаються в одній точці. Кут $\omega = \pi/2$.

299. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих: $7x - y + 3 = 0$ і $3x + 5y - 4 = 0$ і через точку $A\,(+2; -1)$.

Р о з в'я з а н н я. Всяка пряма, що проходить через точку перетину двох даних прямих, зобразиться рівнянням: $7x - y + 3 + q\,(3x + 5y - 4) = 0$. Треба тільки добрати значення параметра q так, щоб пряма пройшла через точку $A\,(+2; -1)$, тобто щоб координати цієї точки задовольняли рівняння прямої, вставляючи їх у рівняння пучка, дістанемо: $18 - 3q = 0$ або $q = 6$. При цьому значенні параметра ми дістанемо шукану пряму пучка $7x - y + 3 + 6\,(3x + 5y - 4) = 0$, або $25x + 29y - 21 = 0$.

300. Через точку перетину прямих $2x + 5y - 8 = 0$ і $x - 3y + 4 = 0$ провести пряму, яка, крім того,

a) проходить через початок координат;
b) паралельна осі абсцис;
c) паралельна осі ординат;
d) проходить через точку $(+4; +3)$.

301. Через точку перетину прямих: $2x - 5y - 1 = 0$ і $x + 4y - 7 = 0$ провести пряму, яка поділяла б відрізок між точками $A\,(+4; -3)$ і $B\,(-1; +2)$ у відношенні $\lambda = {}^2/_3$.

302. Не обчислюючи координат вершин трикутника, написати рівняння прямих, проведених через ці вершини паралельно протилежним сторонам. Сторони трикутника дано рівняннями $5x - 2y + 6 = 0$, $4x - y + 3 = 0$ і $x + 3y - 7 = 0$.

303. Скласти рівняння висот трикутника, знаючи рівняння його сторін: $2x - y + 3 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$ і $3x - 2y + 6 = 0$.

304. У трикутнику ABC відомі: сторона AB: $4x + y - 12 = 0$, висота BH: $5x - 4y - 15 = 0$ і висота AH: $2x + 2y - 9 = 0$. Написати рівняння двох інших сторін і третьої висоти. Кут $\omega = \pi/2$.

305. Знайти рівняння прямих, що належать до пучка:

$$(x+2y-7)+q(3x-y+5)=0,$$

і перпендикулярних до кожної з основних прямих пучка. Кут $\omega=\pi/2$.

306. Знайти пряму, яка належить одночасно до двох пучків:

$$(x+y-1)+q(x-1)=0 \text{ і } (2x-3y)+q'(y+1)=0.$$

307. Дано сторони чотирикутника: $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$ і $3x+y-12=0$; визначаючи його діагоналі.

5. Мішані задачі на пряму

308. Через точку $P(0;\ +1)$ провести пряму так, щоб її відрізок, замкнений між двома даними прямими $x-3y+10=0$ і $2x+y-8=0$, поділявся в точці P пополам.

308*. Знайти рівняння прямої, знаючи, що її відрізок, замкнений між осями координат в першому квадранті, вдвоє більший за віддаль її від початку координат, а площа трикутника, утвореного шуканою прямою з осями, дорівнює 4,5 квадратної одиниці. Кут $\omega=\pi/2$.

309. Пряма лінія переміщається так, що відрізки, які вона відсікає нею на осях координат, зберігають постійне відношення $a:b=q$. Знайти траєкторію точки, яка поділяє у відношенні відрізок рухомої прямої, замкнений між осями координат.

309*. Сторони кута, дані їх рівняннями $2x-3y+1=0$ і $x+4y-5=0$, пересічені рядом паралельних прямих: $y=2x+b$. Знайти геометричні місця:

a) середин відрізків паралельних прямих, замкнених між сторонами кута;

b) точок, поділяючих у відношенні $\lambda=3$ відрізки паралельних прямих, замкнених між сторонами кута.

310. Знайти центр вписаного кола і центр ваги рівнобедреного трикутника, якщо дано рівняння бічних сторін трикутника: $7x-y-9=0$; $5x+5y-35=0$ і точка $M(3;\ -8)$, яка лежить на його основі. Кут $\omega=\pi/2$.

310*. У рівнобедреному трикутнику відомо рівняння основи: $x-2y+3=0$, рівняння однієї з бічних сторін: $4x-y+5=0$ і точка $P(+1{,}2;\ +5{,}6)$ на іншій бічній стороні. Кут $\omega=\pi/2$. Обчислити:

a) віддаль бічної сторони від протилежної вершини;

b) координати центра ваги;

c) площу трикутника.

311. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(+3;\ -4)$ і рівняння двох висот: $7x-2y-1=0$ і $2x-7y-6=0$. Кут $\omega=\pi/2$.

311*. Дано дві вершини трикутника $A(+2;\ -3)$ і $B(+5;\ +1)$, рівняння сторони BC: $x + 2y - 7 = 0$ і медіани AM: $5x - y - 13 = 0$. Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини C на сторону AB, і обчислити її довжину. Кут $\omega = \pi/2$.

312. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A\ (-4;\ +2)$, і рівняння двох медіан: $3x - 2y + 2 = 0$ і $3x + 5y - 12 = 0$.

312*. Дано трикутник: $A\,(-4;\ +2)$, $B\,(-2;\ -2)$, $C\,(+6;\ +8)$. Через кінці його медіани AM проведено прямі AP і MP, відповідно паралельні двом іншим медіанам. Перевірити, що сторони трикутника AMP дорівнюють довжиною медіанам трикутника ABC. Обчислити відношення площ трикутників ABC і AMP.

313. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин: $A(+2;\ -4)$ і рівняння бісектрис двох його кутів: $x + y - 2 = 0$ і $x - 3y - 6 = 0$. Кут $\omega = \pi/2$.

313*. У трикутнику $A\,(-3;\ -1)$, $B\,(+1;\ -5)$, $C\,(+9;\ +3)$ сторони AB і AC поділено у відношенні $\lambda = 3$, рахуючи від загальної вершини A. Перевірити, що прямі, які з'єднують точки поділу з протилежними вершинами, і медіана AM перетинаються в одній точці.

314. Прямі $3x + 4y - 30 = 0$ і $3x - 4y + 12 = 0$ дотикаються до кола, радіус якого $R = 5$. Обчислити площу чотирикутника, утвореного цими дотичними і радіусами кола, які проведено до точок дотику. Кут $\omega = \pi/2$.

314*. Знаючи вершини трикутника $A\,(+3;\ -2)$, $B\,(+1;\ +5)$ і $C\,(-4;\ +3)$, перевірити, що висоти його перетинаються в одній точці, і обчислити площу трикутника, вершинами якого є основи висот даного трикутника ABC. Кут $\omega = \pi/2$.

315. Дано рівняння сторін трикутника: $2x - 5y - 2 = 0$, $x + y - 8 = 0$ і $5x - 2y - 5 = 0$. Знайти всередині трикутника таку точку, щоб прямі, які з'єднують її з вершинами трикутника, розбивали його на три рівновеликі трикутники.

315*. Перевірити, що точка перетину висот трикутника лежить на одній прямій з точкою перетину його медіан і з центром описаного кола. Взяти, наприклад, трикутник $A\,(+5;\ +8)$, $B\,(-2;\ +9)$, $C\,(-4;\ +5)$ $[\omega = \pi/2]$.

316. Відносно полярної системи координат скласти рівняння прямої, взявши за параметр її:

a) довжину перпендикуляра P, опущеного з полюса на дану пряму, і кут α нахилу цього перпендикуляра до полярної осі;

b) кут ϑ нахилу прямої до полярної осі і відрізок a, що його відсікає пряма на осі, рахуючи від полюса.

316*. Через точку $A\,(\rho_1, \varphi_1)$ проведено пряму, яка утворює з полярною віссю кут ϑ. Скласти рівняння цієї прямої.

317. Відносно полярної системи координат скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $(\rho_1,\ \varphi_1)$ і $(\rho_2,\ \varphi_2)$.

317*. Відносно полярної системи координат скласти рівняння таких прямих:

a) пряма проходить через полюс і утворює з віссю кут $\pi/5$;

b) пряма проходить на віддалі чотирьох одиниць від полюса і нахилена до полярної осі під кутом $\pi/3$;

c) пряма проходить через точку $A\,(5;\ \pi/4)$ і перпендикулярна до осі;

d) пряма проходить через точку $B\,(2;\ \pi/6)$ і паралельна полярній осі;

e) пряма проходить через точку $C\,(3;\ \pi/12)$ і утворює з віссю кут $\pi/4$;

f) пряма проходить через точки $P\,(5;\ \pi/12)$ і $Q\,(8;\ 5\pi/12)$.

РОЗДІЛ V
ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ[1]

1. Коло

Коло є геометричне місце точок, рівновіддалених від однієї тієї ж самої точки, яка називається його центром. Якщо ми позначимо через a і b координати центра і через r — радіус кола, тобто віддаль якої завгодно його точки від центра, то нормальне рівняння кола матиме вигляд:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1}$$

До нормального рівняння кола входять три параметри: координати центра і радіус.

Якщо перенести початок координат в його центр, ми дістанемо найпростіше рівняння кола

$$x^2+y^2=r^2. \tag{2}$$

Загальне рівняння другого степеня

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 \tag{3}$$

являє собою коло, якщо коефіцієнти при квадратах координат рівні між собою і якщо, крім того, в ньому немає члена з добутком координат, тобто

$$A=B \text{ і } C=0. \tag{4}$$

Щоб знайти точки перетину кола (1) і прямої $Ax+By+C=0$, треба сумісно розв'язати ці два рівняння. Виключивши з них одну з координат, наприклад y, ми дістанемо квадратне рівняння відносно абсциси точки перетину; якщо це квадратне рівняння має дійсні і різні корені (підкорінна кількість додатна), то коло і пряма мають дві різні точки перетину — пряма є січна; якщо це квадратне рівняння має дійсні, але рівні корені (підкорінна кількість дорівнює нулеві), то обидві точки перетину зливаються в одну і пряма дотикається до кола; якщо квадратне рівняння має уявні корені (підкорінна кількість від'ємна), то коло і пряма не мають дійсних точок перетину — пряма проходить поза колом.

Якщо x_1 і y_1 позначають координати якої-небудь точки кола, то дотична до кола в цій точці має рівняння:

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2 \tag{5}$$

[1] У цьому розділі ми будемо користуватися тільки прямокутною системою координат.

або

$$xx_1 + yy_1 = r^2 \tag{6}$$

залежно від того, чи визначається коло рівнянням (1), чи (2).

318. Скласти рівняння кола, яке має центр у точці: a) $(+2; -5)$ і радіус, що дорівнює 4; b) $(-3; +4)$ і проходить через початок координат; c) $(0; +4)$ і проходить через точку $(+5; -8)$.

319. Знайти рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з діаметрів його AB: $A(+1; +4)$ і $B(-3; +2)$.

320. На осі абсцис знайти центр кола, яке проходить через точки $A(+2; +3)$ і $B(+5; +2)$, і написати рівняння цього кола.

321. Написати рівняння кола, яке проходить через точки $(+3; 0)$ і $(-1; +2)$, знаючи, що центр його лежить на прямій $x - y + 2 = 0$.

322. Скласти рівняння кола, яке проходить через три дані точки: $A(0; +2)$, $B(+1; +1)$ і $C(+2; -2)$.

Розв'язання: Рівняння шуканого кола $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ містить три параметри a, b і r, які треба визначити. Розкриємо в рівнянні дужки і перенесемо всі члени в ліву частину, тоді рівняння прийме вигляд: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.

Оскільки за умовою точки A, B і C лежать на колі, то їх координати мають задовольняти це рівняння, і, зробивши підстановку, ми дістанемо три співвідношення, що зв'язуватимуть шукані параметри:

$$\begin{aligned} 4 - 4b + a^2 + b^2 - r^2 &= 0, \\ 2 - 2a - 2b + a^2 + b^2 - r^2 &= 0, \\ 8 - 4a + 4b + a^2 + b^2 - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Щоб виключити r, віднімемо з останнього рівняння спочатку перше, потім друге. Дістанемо:

$$\begin{aligned} 4 - 4a + 8b &= 0, \\ 6 - 2a + 6b &= 0, \end{aligned}$$

звідки $a = -3$; $b = -2$.

Вставляючи добуті значення a і b в перше рівняння визначимо r^2, а саме: $r^2 = 25$, і рівняння шуканого кола буде:

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

Центр шуканого кола можна також визначити як точку перетину перпендикулярів, поставлених з середин двох хорд, наприклад AB і AC.

323. Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника, вершини якого мають координати:

a) $(+7; +7)$, $(0; +8)$ і $(-2; +4)$;
b) $(0; +4)$, $(+1; +2)$ і $(+3; -2)$.

324. Як розміщені точки: $A(-3; 0)$, $B(+5; 0)$, $C(+4; +2)$, $D(+2; +7)$, $E(-4; +6)$, $F(+3; -1)$, $G(-2; +3)$ відносно кола $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$?

325. Визначити центр і радіус кола, даного рівнянням:

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0.$$

Розв'язання. Дане рівняння являє собою коло, бо в ньому немає члена з добутком координат і коефіцієнти при квадратах координат рівні між собою. Зводимо це рівняння до нормального виду $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Для цього збираємо окремо члени, які містять абсцису (x^2-8x), і члени, які містять ординату (y^2+6y); потім доповнюємо їх до повних квадратів, додавши до першої групи $+16$ і до другої $+9$, після чого матимемо суму двох квадратів: $(x-4)^2+(y+3)^2$. До лівої частини рівняння ми додали $16+9=25$; щоб рівняння залишилося рівнозначним попередньому, додамо і до правої частини 25, що разом з вільним членом, перенесеним у праву частину, дасть 4, і остаточно рівняння кола матиме вигляд: $(x-4)^2+(y+3)^2=4$, звідки робимо висновок, що центр має координати $a=4$, $b=-3$ і радіус $r=2$.

Цю саму задачу можна розв'язати інакше, скориставшись з того, що в даному рівнянні і в шуканому коефіцієнти мають бути пропорціональні (обидва рівняння зображають ту саму криву). Розкривши дужки у нормальному рівнянні і порівнюючи коефіцієнти, дістанемо:

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{-2a}{-8}=\frac{-2b}{6}=\frac{a^2+b^2-r^2}{21},$$

або

$$a=\frac{8}{2}=4;\quad b=-\frac{6}{2}=-3;$$

$$r^2=a^2+b^2-21=4.$$

Звідси можна зробити такий висновок: якщо в загальному рівнянні кола коефіцієнти при квадратах координат дорівнюють одиниці, то координати центра дорівнюють половинам коефіцієнтів при перших степенях відповідних координат, узятих з супротивним знаком, а квадрат радіуса визначається за формулою

$$r^2=a^2+b^2-F,$$

де F — вільний член даного рівняння кола.

326. Звести до нормального вигляду рівняння таких кіл:

a) $x^2+y^2-4x=0$; c) $x^2+y^2+2x-10y+1=0$;

b) $x^2+y^2+6y-7=0$; d) $3x^2+3y^2-4x-6y-15=0$.

327. Дослідити, які лінії зображаються рівняннями:

a) $x^2+y^2=0$; c) $x^2+y^2+10x-4y+29=0$;

b) $x^9+y^2=-1$; d) $x^2+y^2-2x+6y+14=0$.

328. Який вигляд прийме рівняння кола $x^2+y^2+2x-6y+1=0$, якщо перенести початок координат в точку $A(-1;\ +3)$ або в точку $B(-4;\ +3)$, і як розміщені ці точки відносно кола?

329. Як перетвориться рівняння кола $x^2+y^2+4x-12y-9=0$, якщо перенести початок координат у центр його?

330. Які особливості можна відзначити в розміщенні кола відносно осей координат, якщо деякі з коефіцієнтів його загального рівняння $A(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0$ перетворюються на нуль?

331. Знайти точки перетину кожного з кіл:

a) $(x-4)^2+(y+3)^2=25$; b) $x^2+y^2-6x-10y+9=0$;

c) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$; d) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 1$ з осями координат.

332. Скласти рівняння кола, знаючи, що воно дотикається до осі x в початку координат і перетинає вісь y в точці $A(0; +4)$.

333. Скласти рівняння кола, знаючи, що воно дотикається до осі y в точці $A(0; -3)$ і має радіус $r = 2$.

334. Коло дотикається до обох осей координат і проходить через точку $A(+2; +9)$. Знайти його рівняння.

335. Написати рівняння кола, яке дотикається до осі x в точці $(+5; 0)$ і відсікає на осі y хорду довжиною 10 одиниць.

336. Знайти центр кола, радіус якого $r = 50$, знаючи, що коло відсікає на осі x хорду довжиною 28 одиниць і проходить через точку $A(0; +8)$.

337. Написати рівняння кола, яке має центр у точці $(+6; +7)$ і дотикається до прямої $5x - 12y - 24 = 0$.

338. Знайти точки перетину кола $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ з прямими: a) $x - y - 4 = 0$; b) $3x - 4y + 36 = 0$; c) $x - y - 5 = 0$.

339. Як розміщені прямі: a) $x - 2y + 5 = 0$; b) $5x - 12y + 26 = 0$; c) $3x - 4y + 30 = 0$; d) $x + y - 17 = 0$
відносно кола $x^2 + y^2 = 36$.

340. Дано коло $(x-1)^2 + y^2 = 4$. Через точку $A(+2; -{}^1/_2)$ треба провести таку хорду, яка поділялась би в цій точці пополам.

341. Написати рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = 5$ в точці $(+1; -2)$.

342. Дано коло: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$. Скласти рівняння його дотичної в точці $(+5; +5)$.

343. В точці $(0; +3)$ провести дотичну до кола $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$.

344. Написати рівняння дотичних, проведених із початку координат до кола $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$.

Розв'язання. Спосіб 1. Всяка пряма, що проходить через початок координат, має рівняння $y = kx$; треба добрати кутовий коефіцієнт так, щоб пряма $y = kx$ і дане коло мали дві злиті точки перетину. Розв'язуємо сумісно обидва рівняння (виключаємо y):

$$x^2 + k^2x^2 - 10x - 4kx + 25 = 0,$$

або

$$x^2(1 + k^2) - 2x(5 + 2k) + 25 = 0.$$

У випадку дотику корені цього рівняння мають бути дійсні і рівні; тому складаємо підкорінний вираз і прирівнюємо його до нуля: $(5 + 2k)^2 - 25(1 + k^2) = 0$; розв'язавши це рівняння, ми знайдемо: $k_1 = 0$ і $k_2 = \frac{20}{21}$; рівняння шуканих дотичних будуть: 1) $y = 0$ і 2) $y = \frac{20}{21}x$, або $20x - 21y = 0$.

Спосіб 2. Рівняння даного кола вводимо до нормального вигляду: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 4$; тоді рівняння всякої дотичної має вигляд: $(x' -$

$-5)(x-5)+(y'-2)(y-2)=4$. Координати точки дотику x' і y' визначаються з двох умов: 1) дотична проходить через початок координат, і, значить, координати початку задовольняють рівняння дотичної, тобто $-5(x'-5)-2(y'-2)=4$, або $5x'+2y'-25=0$; 2) точка дотику лежить на колі, отже, її координати (x', y') задовольняють дане рівняння круга, і ми маємо: $x'^2+y'^2-10x'-4y'+25=0$. З цих двох рівнянь визначаємо координати точки дотику $x_1'=5$, $y_1'=0$, $x_2'=\frac{105}{29}$, $y_2'=\frac{100}{29}$ і, вставляючи їх у загальне рівняння дотичної, дістанемо рівняння шуканих прямих: $y=0$ і $20x-21y=0$.

345. Скласти рівняння дотичних, проведених

a) з початку координат до кола $(x-2)^2+(y-4)^2=2$;

b) з точки $(+7; +1)$ до кола $x^2+y^2=25$.

346. Знайти дотичні до кола $x^2+y^2=5$, які паралельні прямій $2x-y+1=0$.

347. Навколо початку координат описано коло радіусом $r=12$; провести до нього дотичну так, щоб відрізок цієї дотичної від точки дотику до перетину з додатною частиною осі x мав довжину $l=35$.

348. Написати рівняння кола, яке проходить через точку $(+1; +1)$ і дотикається до прямих $7x+y-3=0$ і $x+7y-3=0$.

349. Відомо, що пряма $4x-3y-38=0$ дотикається до кола $(x-1)^2+(y+3)^2=25$. Знайти точку їх дотику.

350. Під впливом певної сили точка M рухалася по колу $(x-5)^2+(y+3)^2=25$. Дія сили перервалася в той момент, коли точка M збіглася з точкою A $(+2; +1)$. Визначити дальшу траєкторію рухомої точки.

351. Точка M рухалася по колу $(x-4)^2+(y-8)^2=20$, потім зірвалася з нього, і щодо дальшого вільного руху її відомо, що вона перетяла вісь x у точці $(-2; 0)$. Визначити точку кола, з якої зірвалася рухома точка.

352. Визначити кут, під яким видно коло $x^2+y^2=16$ з точки $(+8; 0)$.

352*. Знайти геометричне місце точок, з яких дане коло $x^2+y^2=r^2$ видно під прямим кутом.

353. Написати рівняння лінії центрів двох кіл:

$$x^2+y^2-6x+8y=0 \text{ і } x^2+y^2+2x-12y+1=0.$$

354. Знайти рівняння загальної хорди двох кіл:

$$x^2+y^2=10$$

і

$$x^2+y^2-10x-10y+30=0.$$

355. Дано коло $x^2+y^2-4x-5=0$ і точка $C(+5; +4)$. Написати рівняння кола, яке має центр у точці C і дотикається до даного кола зовнішньо.

Вказівка. Якщо два кола дотикаються одне до одного зовнішньо, то сума їхніх радіусів дорівнює віддалі між центрами.

356. Через точку $M(+2;\ +1)$ провести коло, яке дотикається до кола $x^2+y^2-8x-4y+19=0$ і має радіус, що дорівнює одиниці.

357. Під яким кутом перетинаються кола $x^2+y^2=16$ і $(x-5)^2+y^2=9$?

Вказівка. Кутом, під яким перетинаються кола, називається кут між дотичними до цих кіл в одній з точок їх перетину.

358. Знайти умову, при якій два кола

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$$

і

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$$

ортогональні, тобто перетинаються під прямим кутом.

359. Через точку $M(+2;\ +3)$ провести коло, ортогональне до кола $x^2+y^2=1$, і яке має радіус $r=3$.

360. Знайти центри подібності таких двох кіл:

$$x^2+y^2-6x+2y+6=0 \quad \text{і} \quad x^2+y^2+4x+3=0.$$

Вказівка. Центром подібності двох кіл називається точка, яка має ту властивість, що на кожній прямій, яка проходить через неї, відрізки від цієї точки до точок перетину з обома колами пропорціональні їхнім радіусам. Кожна пара кіл має два центри подібності: вони поділяють відрізок між центрами цих кіл внутрішньо і зовнішньо у відношенні, яке дорівнює відношенню радіусів.

361. Скласти рівняння загальних дотичних двох кіл:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1 \text{ і } (x+2)+(y+1)^2=9.$$

Вказівка: Загальні дотичні двох кіл попарно проходять через їх центри подібності (див. задачу 360).

362. Знайти довжину дотичної, проведеної з точки $M(+2;\ +6)$ до кола $(x+3)^2+(y-2)^2=25$.

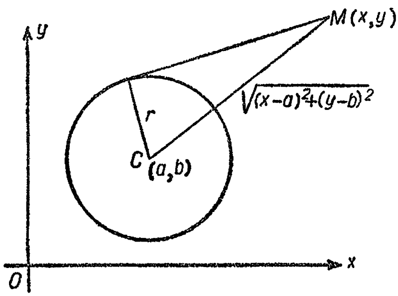

Рис. 45.

Вказівка. Якщо ми перенесемо всі члени нормального рівняння коло $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ в ліву частину, то ця ліва частина $U=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$ і дасть квадрат довжини дотичної, проведеної з точки $M(x;y)$ до даного кола (рис. 45), або, інакше, дасть степінь точки $M(x;y)$ відносно кола. Якщо точка $M(x;y)$ лежить на колі, то степінь її дорівнює нулеві; якщо M лежить всередині кола, то степінь її від'ємний і дотичні, проведені з цієї точки, уявні.

363. Обчислити довжини дотичних, проведених до кола $x^2+y^2-10x+2y+10=0$ з таких точок: $M_1(0;\ -1)$, $M_2(+1;\ -1)$, $M_3(+2;\ 0)$ і $M_4(0;\ 0)$.

364. Знайти геометричне місце точок, які мають ту властивість, що дотичні, проведені з них до кола $(x-5)^2+(y+2)^2=9$, мають ту саму довжину $l=4$.

365. Знайти геометричне місце точок, степені яких відносно двох даних кіл $x^2+y^2-8x+6y=0$ і $x^2+y^2-10y=0$ перебувають у постійному відношенні:

$$\text{a)}\ \lambda=2;\quad \text{b)}\ \lambda={}^3/_2;\quad \text{c)}\ \lambda=1.$$

366. Довести, що рівняння

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2+\lambda\left[(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2\right]=0$$

являє собою пучок кіл, які проходять через точки перетину двох основних кіл $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ і $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2=0$, що центри всіх цих кіл лежать на одній прямій і значення параметра λ дорівнює відношенню, в якому центр відповідного кола поділяє відрізок між центрами двох основних кіл.

367. Скласти рівняння радикальної осі таких двох кіл:

$$\text{a)}\ x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0,$$

$$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+a_1^2+b_1^2-r_1^2=0;$$

$$\text{b)}\ x^2+y^2-6x-4y+9=0,$$

$$x^2+y^2-2x+10y+25=0;$$

$$\text{c)}\ x^2+(y-1)^2=5 \ \text{ і } \ (x+2)^2+(y+1)^2=4.$$

Вказівка. Радикальна вісь двох кіл є геометричне місце точок, які мають однаковий степінь відносно цих кіл. (Див. задачу 362).

368. Довести, що радикальна вісь двох кіл проходить через точки їх перетину перпендикулярно до лінії центрів і являє собою геометричне місце центрів кіл, ортогональних до двох даних кіл.

369. Через точку $(-3;\ +1)$ провести коло, яке має одну радикальну вісь з двома даними колами:

$$(x-5)^2+y^2=5 \ \text{ і } \ x^2+(y-10)^2=130.$$

Вказівка. Шукане коло належить до пучка, визначуваного двома даними колами. (Див. задачу 366).

370. Через точку $(+5;\ -4)$ провести коло, ортогональне до двох кіл, заданих рівняннями: $(x-3)^2+y^2=24$ і $x^2+(y+1)^2=16$.

371. Знайти радикальний центр трьох кіл: $x^2+y^2-6x+8y=0$, $x^2+y^2-2x-8=0$ і $x^2+y^2+6y+8=0$.

Вказівка. Радикальним центром трьох кіл називається точка перетину радикальних осей цих кіл, взятих попарно.

372. Написати рівняння кола, ортогонального до трьох таких кіл: $x^2 + y^2 + x - y - 2 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ і $x^2 + y^2 + 3x - 1 = 0$.

373. Дано коло, радіус якого $r = a$. Через одну з його точок P проведено всі можливі хорди. Знайти геометричне місце точок, які поділяють ці хорди в тому самому відношенні λ.

374. Стержень ковзає по площині так, що кінець його Q описує коло радіуса a; сам же він весь час проходить через нерухому точку P, що не лежить на колі. Знайти геометричне місце точок, які поділяють пополам відрізки стержня між точкою P і кінцем стержня Q.

2. Еліпс

Еліпс є геометричне місце точок, сума віддалей яких від двох постійних точок — ф о к у с і в еліпса — є величина стала, яка дорівнює $2a$. Віддаль між фокусами $F_2F_1 = 2c$ (рис. 46). Найпростіше рівняння еліпса ми дістанемо, взявши пряму, яка з'єднує фокуси, за вісь абсцис і помістивши початок координат у середині між ними. Тоді рівняння еліпса матиме вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$

де

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{8}$$

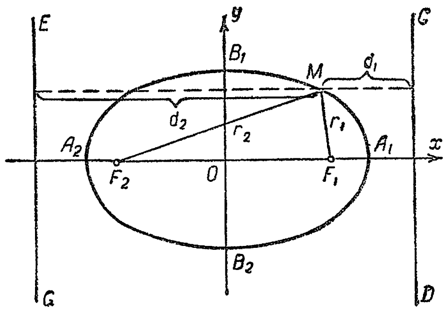

Рис. 46.

При такому виборі системи координат осі координат збігаються з осями симетрії еліпса, а початок координат — з центром симетрії [1].

Точки перетину еліпса з його осями (A_1 і A_2, B_1 і B_2) називаються в е р ш и н а м и еліпса.

Відрізки, замкнені між вершинами, називаються о с я м и еліпса: велика (фокальна) вісь $A_2A_1 = 2a$ і мала вісь $B_2B_1 = 2b$.

Таким чином, параметри a і b, які входять в рівняння (7), дорівнюють його півосям.

Е к с ц е н т р и с и т е т о м (e) еліпса називається відношення віддалі ($2c$) між фокусами до великої осі ($2a$), тобто

$$e = \frac{c}{a}; \tag{9}$$

очевидно, що

$$e < 1 \tag{10}$$

Віддалі точки до фокусів називаються її ф о к а л ь н и м и р а д і у с а м и - в е к т о р а м и (r_1 і r_2). Для якої завгодно точки M (x, y) еліпса ми маємо:

$$r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex, \tag{11}$$

і за самим означенням еліпса:

$$r_1 + r_2 = 2a, \tag{12}$$

тобто сума фокальних радіусів-векторів всякої точки еліпса дорівнює його великій осі.

[1] Далі ми будемо говорити просто: осі і центр еліпса.

Директрисами еліпса називаються дві прямі, які паралельні малій осі і відстоять від неї на віддалі, що дорівнює $\frac{a}{e}$ (на рис. 46 прямі CD і EG). Рівняння директрис такі:

$$x = \frac{a}{e} \text{ і } x = -\frac{a}{e}. \tag{13}$$

Відношення віддалі всякої точки еліпса до фокуса (r_1 або r_2) до віддалі тієї самої точки до відповідної [1] директриси (d_1 або d_2) дорівнює ексцентриситету:

$$\frac{r_1}{d_1} = e \text{ і } \frac{r_2}{d_2} = e. \tag{14}$$

Таким чином, еліпс можна означити як геометричне місце точок, відношення віддалей яких від даної точки і даної прямої є величина стала, менша одиниці.

Еліпс має з усякою прямою дві точки перетину (дійсні, уявні або такі, що зливаються).

Якщо пряма зустрічає еліпс в двох точках, що злилися, то вона називається дотичною до еліпса.

Рівняння дотичної до еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

в точці $M\ (x_1,\ y_1)$ має вигляд:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1. \tag{15}$$

З усякої точки можна провести до еліпса дві дотичні. Якщо точка лежить поза еліпсом, обидві дотичні дійсні; якщо точка лежить на еліпсі, дотичні зливаються; якщо точка лежить всередині еліпса, обидві дотичні уявні.

375. Скласти найпростіше рівняння еліпса, знаючи, що:

a) півосі його відповідно дорівнюють 4 і 2;

b) віддаль між фокусами дорівнює 6 і велика піввісь дорівнює 5;

c) велика піввісь дорівнює 10 і ексцентриситет $e = 0{,}8$;

d) мала піввісь дорівнює 3 і ексцентриситет $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) сума півосей дорівнює 8 і віддаль між фокусами теж дорівнює 8.

376. Дано рівняння еліпса: $25x^2 + 169\,y^2 = 4225$. Обчислити довжину його осей, координати фокусів і ексцентриситет.

377. Віддалі одного з фокусів еліпса до кінців його великої осі відповідно дорівнюють 7 і 1. Скласти рівняння цього еліпса.

378. Дано еліпс його рівнянням: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Побудувати його фокуси, не обчислюючи їх координат.

379. Сторона ромба дорівнює 5 і висота 4,8. Через дві протилежні його вершини проходить еліпс, фокуси якого збігаються з двома іншими вершинами ромба. Скласти рівняння еліпса, прийнявши діагоналі ромба за осі координат.

---

[1] Відповідними взаємно називаються той фокус і та директриса, які розміщені по одну сторону від малої осі.

380. Вершина трикутника, який має нерухому основу, переміщається так, що периметр трикутника зберігає сталу величину. Знайти траєкторію вершини за умови, що основа дорівнює 24 *см*, а периметр дорівнює 50 *см*.

381. Побудувати еліпс, користуючись означенням його.

Вказівка. Точки еліпса являють вершини трикутників, які мають спільну основу (віддаль між фокусами, що дорівнює $2c$) і дану суму двох інших сторін ($2a$).

382. Скласти рівняння директрис еліпса, знаючи, що директриси перпендикулярні до фокальної осі і перетинають її в точках, які є четвертими гармонічними до фокусів відносно вершин.

383. Дано еліпс: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. Написати рівняння його директрис.

384. Прямі $x = \pm 8$ являють директриси еліпса, мала вісь якого дорівнює 8. Знайти рівняння цього еліпса.

385. Визначити ексцентриситет еліпса, знаючи, що:

a) малу вісь його видно з фокуса під прямим кутом;

b) віддаль між фокусами дорівнює віддалі між вершинами малої і великої осей;

c) віддаль між директрисами у чотири рази більша, ніж віддаль між фокусами.

386. Меридіан земної кулі має форму еліпса, відношення осей якого дорівнює $^{299}/_{300}$. Визначити ексцентриситет земного меридіана.

387. На еліпсі $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ знайти точку, яка лежить на віддалі п'яти одиниць до його малої осі.

388. Еліпс проходить через точки $M(+\sqrt{3};\ -2)$ і $N\ (-2\sqrt{3};\ +1)$. Скласти рівняння еліпса, взявши його осі за осі координат.

389. Довести, що для всякої точки $P\ (x_1,\ y_1)$, яка лежить всередині еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, має місце нерівність $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$, а для всякої зовнішньої точки $Q\ (x_2,\ y_2)$ — нерівність $\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}>1$.

390. Визначити положення точок: $A(+6;\ -3)$, $B(-2;\ +5)$, $C(+3;\ -6)$, $D(+\sqrt{50};\ 0)$, $E(-4;\ +2\sqrt{6})$ і $G(+1;\ +\sqrt{26}$ відносно еліпса $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$.

391. В еліпс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ вписано правильний трикутник, одна з вершин якого збігається з правою вершиною великої осі. Знайти координати двох інших вершин трикутника.

392. На еліпсі $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ знайти точку, віддаль якої від правого фокуса в чотири рази більша проти віддалі її від лівого фокуса.

393. На еліпсі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ знайти точку, для якої добуток фокальних радіусів - векторів дорівнює квадратові малої півосі.

394. На еліпсі, один з фокусів якого має координати $(+3; 0)$, взято точку $M(+4; +2{,}4)$. Знайти віддаль цієї точки до відповідної директриси, знаючи, що центр еліпса збігається з початком координат.

395. Знайти точки перетину еліпса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ з прямою $2x-y-9=0$.

396. Через фокус $F(c, 0)$ еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ проведено хорду, перпендикулярну до великої осі. Знайти довжину цієї хорди.

397. Дано еліпс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Знайти довжину його діаметра[1], напрямленого по бісектрисі координатного кута.

398. В еліпс $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ вписано прямокутник, дві протилежні сторони якого проходять через фокуси. Обчислити площу цього прямокутника.

399. Обчислити довжину сторони квадрата, вписаного в еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

400. Дано еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Через точку $(+1; +1)$ провести хорду, яка поділялась би в цій точці пополам.

401. Написати рівняння прямої, що дотикається до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ в точці $(+2; -3)$.

402. Скласти рівняння дотичних, проведених з точки $A(-6; +3)$ до еліпса $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$.

403. Знайти ті дотичні до еліпса $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, які паралельні прямій $2x-y+17=0$.

404. Провести до еліпса $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ дотичні, перпендикулярні до прямої $13x+12y-115=0$.

405. Відомо, що пряма $4x-5y-40=0$ дотикається до еліпса $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$. Знайти точку їх дотику.

[1] **Діаметром** еліпса називається всяка хорда, що проходить через його центр.

406. Знайти рівняння тих дотичних еліпса $3x^2 + 8y^2 = 45$, віддаль яких від центра еліпса дорівнює 3.

407. Довести, що дотичні до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, проведені в кінцях одного й того ж діаметра, паралельні між собою; і навпаки, якщо дві дотичні до еліпса паралельні, то точки дотику лежать на тому самому діаметрі.

408. Знайти рівняння сторін квадрата, описаного біля еліпса $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

409. Знайти рівняння тієї дотичної еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, відношення віддалей якої від двох фокусів дорівнює 9.

410. Довести, що добуток віддалей всякої дотичної еліпса від двох його фокусів є величина стала, яка дорівнює квадратові малої півосі.

411. Вивести умову, при якій пряма $Ax + By + C = 0$ дотикається до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

412. Еліпс проходить через точку $P\ (+3;\ +{}^{12}/_5)$ і дотикається до прямої $4x + 5y = 25$. Написати рівняння цього еліпса і знайти точку, в якій він дотикається до даної прямої. Осі координат збігаються з осями еліпса.

413. Еліпс дотикається до двох прямих: $x + y = 5$ і $x - 4y = 10$. Знайти рівняння цього еліпса при умові, що осі його збігаються з осями координат.

414. Знайти загальні дотичні до таких двох еліпсів: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ і $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$.

415. Скласти рівняння загальних дотичних двох еліпсів:

$$\frac{x^2}{6} + y^2 = 1 \text{ і } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

416. Довести, що дотичні до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ відсікають на двох дотичних, проведених на кінцях великої осі, відрізки, добуток яких є величина стала, що дорівнює b^2.

417. Довести, що відрізки дотичних до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, розміщені між дотичними, проведеними у вершинах великої осі, видні з фокусів під прямим кутом.

418. Знайти геометричне місце точок, з яких еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ видно під прямим кутом.

419. Довести, що всяка дотична до еліпса утворює рівні кути з фокальними радіусами-векторами точки дотику.

420. Еліпс з півосями a і b переміщено так, що центр його збігся з точкою $C(x', y')$, а осі залишилися паралельними осям координат. Яке рівняння зображає еліпс у цьому новому положенні?

Вказівка. Нового положення еліпса відносно осей можна досягти при нерухомому еліпсі паралельним переміщенням осей координат з перенесенням початку в точку $(-x', -y')$.

421. Еліпс дотикається до осі ординат у початку координат, а центр його міститься в точці $(+5; 0)$. Скласти рівняння еліпса, знаючи, що ексцентриситет його $e = 0{,}8$.

422. Еліпс дотикається до осі абсцис в точці $A(+7; 0)$ і осі ординат в точці B $(0; +4)$. Скласти рівняння еліпса, якщо відомо, що осі його паралельні осям координат.

423. Еліпс дотикається до осі y в точці $(0; +3)$ і перетинає вісь x в точках $(+3; 0)$ і $(+7; 0)$. Яке рівняння еліпса, якщо осі його паралельні осям координат?

424. Рухома точка P описує коло $x^2 + y^2 = r^2$. Яка буде траєкторія другої рухомої точки M, що поділяє ординату точки P в постійному відношенні λ?

425. В еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписано трикутник A_1MA_2, одна з сторін якого A_1A_2 збігається з великою віссю. Вершина M рухається по еліпсу. Визначити траєкторію, яку при цьому опише центр ваги трикутника A_1MA_2.

426. Навколо початку координат обертається стержень $OP = \rho$ з кутовою швидкістю ω, а навколо P обертається другий стержень $PQ = q$ з кутовою швидкістю ω. Знайти траєкторію точки Q знаючи, що в початковий момент обидва стержні збігалися з віссю x-ів і точка P знаходилась між O і Q. Розібрати випадки, коли $p > q$, $p < q$ і $p = q$.

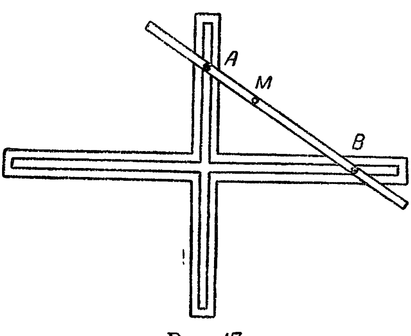

Рис. 47.

427. Відрізок сталої довжини ковзає своїми кінцями по сторонах прямого кута. Взяти на відрізку яку завгодно точку M і знайти шлях, який вона описує при цьому ковзанні.

428. При умовах попередньої задачі взяти точку M не на самому відрізку, а на його продовженні і знайти траєкторію цієї нової точки M.

429. На рис. 47 зображено еліптичний циркуль, у якого за допомогою гвинтів можна змінювати довжину l ковзної лінійки AB

і місце прикріплення олівця M. Як установити циркуль, щоб накреслити еліпси:

$$\text{a) } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

$$\text{b) } \frac{x^2}{16} + y^2 = 1;$$

$$\text{c) } x^2 + y^2 = 25?$$

430. Дано координати вершин трикутника ABC:

$$(0;\ 0);\quad (+2;\ +2) \text{ і } (-2;\ +2).$$

Точка M рухається так, що сума квадратів віддалей її від трьох сторін трикутника залишається весь час сталою і дорівнює 16. Знайти траєкторію точки M.

431. Знайти геометричне місце середин хорд, проведених з кінця малої півосі еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

432. Визначити геометричне місце центрів кіл, які проходять через точку $A(+3;\ 0)$ і дотикаються до круга $x^2 + y^2 = 25$. (Зробити рисунок).

3. Гіпербола

Гіпербола є геометричне місце точок, різниця віддалей яких до двох постійних точок — фокусів гіперболи — є величина стала, що дорівнює $2a$.

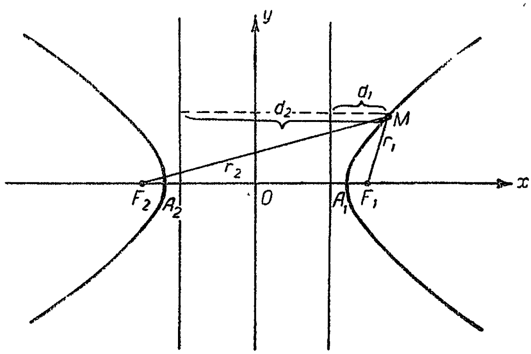

Рис. 48.

Віддаль між фокусами $F_2F_1 = 2c$ (рис. 48).
Найпростіше рівняння гіпербол має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{16}$$

де

$$b^2 = c^2 - a^2. \tag{17}$$

Пряма, що з'єднує фокуси гіперболи, править за вісь абсцис, і початок координат взято в середині між фокусами, при цьому осі координат збігаються з осями симетрії гіперболи і початок координат—з її центром симетрії (о с і і ц е н т р гіперболи).

Гіпербола має дві дійсні в е р ш и н и (A_1 і A_2) на фокальній осі; відрізок, замкнутий між ними, $A_2A_1 = 2a$, називається д і й с н о ю (реальною) віссю гіперболи. З другою віссю гіпербола перетинається в двох уявних точках $(0; \pm ib)$; але умовно дійсний відрізок $2b$ називається у я в н о ю в і с с ю гіперболи. Таким чином, параметри a і b, що входять до рівняння гіперболи (16), дають довжину дійсної і уявної півосей гіперболи. Для гіперболи можливі всі три випадки: $a > b$, $a = b$ і $a < b$.

Якщо $a = b$, гіпербола називається р і в н о с т о р о н н ь о ю.

Якщо уявна вісь гіперболи має довжину $2a$ і напрямлена по осі x, а дійсна вісь, завдовжки $2b$, збігається з віссю y, то рівняння такої гіперболи буде:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{18}$$

Гіперболи (16) і (18) називаються с п р я ж е н и м и г і п е р б о л а м и.

Е к с ц е н т р и с и т е т о м гіперболи називається відношення віддалі між фокусами до дійсної осі:

$$e = \frac{c}{a}, \tag{19}$$

і при цьому

$$e > 1. \tag{20}$$

Гіпербола (16) складається з двох віток (правої і лівої), що простягаються в безконечність.

Для точок правої вітки фокальні радіуси-вектори обчислюються за формулами:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= ex - a, \\ r_2 &= ex + a; \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$r_2 - r_1 = 2a. \tag{22}$$

Для точок лівої вітки ми маємо:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -ex + a, \\ r^2 &= -ex - a; \end{aligned}\right\} \tag{21'}$$

$$r_1 - r_2 = 2a. \tag{22'}$$

Таким чином, різниця фокальних радіусів-векторів всякої точки гіперболи дорівнює дійсній осі.

Д и р е к т р и с а м и гіперболи називаються прямі, перпендикулярні до фокальної осі і які лежать від центра на віддалі $\frac{a}{e}$.

Їхні рівняння:

$$x = \frac{a}{e}; \quad x = -\frac{a}{e}. \tag{23}$$

Відношення віддалі всякої точки гіперболи від фокуса до віддалі тієї ж точки від відповідної директриси дорівнює ексцентриситету гіперболи:

$$\frac{r_1}{d_1} = e; \quad \frac{r_2}{d_2} = e. \tag{24}$$

Таким чином, геометричне місце точок, відношення віддалей яких від даної точки і даної прямої постійне, є гіпербола, якщо тільки це постійне відношення більше одиниці. Якщо точка, рухаючись по гіперболі, безгранично віддаляється, то віддаль її від однієї з асимптот (25) прямує до нуля.

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{b}{a}x; \\ y &= -\frac{b}{a}x. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Асимптоти являють собою діагоналі прямокутника, центр якого збігається з центром гіперболи, а сторони рівні і паралельні осям гіперболи (рис. 49).

Пряма лінія має з гіперболою взагалі дві спільні точки (дійсні, уявні або такі, що зливаються), координати яких ми дістанемо, розв'язуючи сумісно рівняння гіперболи і рівняння прямої. Але якщо пряма паралельна одній з асимп-

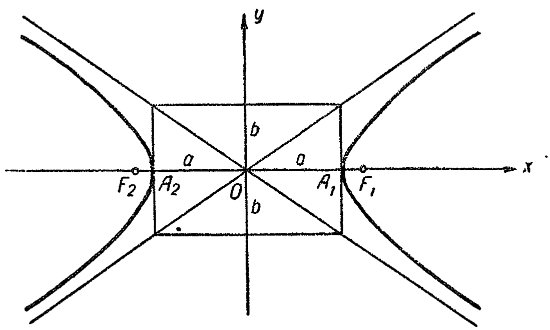

Рис. 49.

тот, то вона має тільки одну точку перетину з гіперболою, оскільки, виключаючи одну з текучих координат з рівняння цієї прямої і рівняння гіперболи, ми дістанемо рівняння тільки першого степеня для визначення другої координати (старші члени знищаться). Якщо ж пряма збігається з однією з асимптот, то вона зовсім не має спільних точок з гіперболою, оскільки рівняння гіперболи і її асимптоти являють систему несумісну.

Кожна асимптота збігається з граматичним положенням однієї з дотичних до гіперболи, коли точка дотику необмежено віддаляється по гіперболі.

Дотична до гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (16)$$

в точці (x_1, y_1) має рівняння:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1. \qquad (26)$$

З кожної точки площини можна провести дві дотичні до гіперболи; якщо точку взято на гіперболі, то обидві дотичні зливаються в одну; точки, з яких можна провести дві дійсні і різні дотичні, становлять з о в н і ш н ю область гіперболи; точки, з яких можна провести тільки уявні дотичні, становлять в н у т р і ш н ю область гіперболи.

433. Скласти рівняння гіперболи, осі якої збігаються з осями координат, знаючи, що:

а) віддаль між вершинами дорівнює 8. а віддаль між фокусами 10;

b) дійсна піввісь дорівнює 5 і вершини поділяють віддалі між центром і фокусами пополам;

c) дійсна вісь дорівнює 6 і гіпербола проходить через точку $(+9;\ -4)$;

d) гіпербола проходить через дві точки $P\ (-5;\ +2)$ і $Q\ (+2\sqrt{5};\ +\sqrt{2})$.

434. Скласти рівняння гіперболи, знаючи фокуси $F_1(+10;\ 0)$, $F_2(-10;\ 0)$ і одну з точок гіперболи $M\ (+12;\ +3\sqrt{5})$.

435. Побудувати гіперболу, виходячи з її означення.

Вказівка. Гіпербола є геометричне місце вершин трикутників, які мають спільну основу ($2c$) і постійну різницю двох інших сторін ($2a$).

436. Скласти рівняння гіперболи, яка має спільні фокуси з еліпсом $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{24} = 1$ при умові, що ексцентриситет її $e = 1{,}25$.

437. Написати рівняння гіперболи, яка проходить через фокуси еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ і має фокуси у вершинах цього еліпса.

438. Побудувати фокуси і асимптоти гіперболи $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$.

439. Дано гіперболу $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Треба:

a) обчислити координати фокусів;

b) обчислити ексцентриситет;

c) написати рівняння асимптот і директрис;

d) написати рівняння спряженої гіперболи і обчислити її ексцентриситет.

439*. Знаючи рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \frac{1}{2} x$ і одну з її точок $M(+12;\ +3\sqrt{3})$, скласти рівняння гіперболи.

440. Довести, що відрізки, які відсікаються директрисами на асимптотах (рахуючи від центра гіперболи), дорівнюють дійсній півосі. Користуючись цією властивістю, побудувати директриси гіперболи.

440*. Довести, що директриса гіперболи проходить через основу перпендикуляра, опущеного з відповідного фокуса на асимптоту гіперболи. Обчислити довжину цього перпендикуляра.

441. Обчислити півосі гіперболи, знаючи, що

a) віддаль між фокусами дорівнює 8 і віддаль між директрисами дорівнює 6;

b) директриси дано рівняннями $x = \pm 3\sqrt{2}$ і кут між асимптотами — прямий;

c) асимптоти дано рівняннями $y = \pm 2x$ і фокуси знаходяться на віддалі 5 від центра;

d) асимптоти дано рівняннями $y = \pm {}^5/_3 x$ і гіпербола проходить через точку N (+6; +9).

442. Написати рівняння двох спряжених гіпербол, знаючи, що віддаль між директрисами першої з них дорівнює 7,2 і віддаль між директрисами другої дорівнює 12,8.

442*. Скласти рівняння гіперболи, осі симетрії якої збігаються з осями координат, якщо дано точку перетину P (+3,2; +2,4) однієї з асимптот з однією з директрис цієї гіперболи.

443. Визначити кут між асимптотами гіперболи, у якої:

a) ексцентриситет $e = 2$;

b) віддаль між фокусами вдвоє більша проти віддалі між директрисами.

444. Обчислити ексцентриситет гіперболи при умові, що

a) кут між асимптотами дорівнює 60°;

b) кут між асимптотами дорівнює 90°;

c) дійсна вісь гіперболи видна з фокуса спряженої гіперболи під кутом 60°.

445. Дано рівносторонню гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Знайти співфокусну гіперболу, яка проходить через точку M (—5; +3).

446. На гіперболі $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ взято точку, абсциса якої дорівнює 10 і ордината додатна. Обчислити фокальні радіуси-вектори цієї точки і кут між ними.

447. На гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точку, для якої:

a) фокальні радіуси-вектори перпендикулярні один до одного;

b) віддаль від лівого фокуса вдвоє більша, ніж від правого.

448. Яку умову повинен задовольняти ексцентриситет гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ для того, щоб на її правій вітці існувала точка, однаково віддалена від правого фокуса і від лівої директриси?

449. Довести, що добуток віддалей всякої точки гіперболи до двох асимптот є величина стала.

450. На гіперболі $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$ знайти точку, яка була б у три рази ближча до одної асимптоти, ніж до другої.

451. Знайти точки перетину гіперболи $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ з такими прямими:

a) $x - 5y = 0$; c) $x - y + 5 = 0$;

b) $2x + y - 18 = 0$; d) $\sqrt{10}x - 5y + 15 = 0$.

452. Через точку (+2; —5) провести прямі, паралельні асимптотам гіперболи $x^2 - 4y^2 = 4$.

452*. Дано гіперболу $9x^2 - 16y^2 = 576$. Знайти рівняння того діаметра, довжина якого дорівнює 20.

453. Через точку A $(+3; -1)$ провести хорду гіперболи $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, яка поділялась би пополам в цій точці.

453*. Довести, що геометричне місце середин паралельних хорд гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ є діаметр.

454. Перевірити, що осі гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ є єдиними діаметрами, перпендикулярними до тих хорд, які вони ділять пополам.

454*. Довести, що сторони будь-якого прямокутника, вписаного в гіперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, паралельні її осям.

455. Знайти вершини квадрата, вписаного в гіперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, і дослідити, в які гіперболи можна вписати квадрат.

456. Написати рівняння прямої, що дотикається до гіперболи $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ у точці $(+5; -4)$.

457. Провести дотичні до гіперболи $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ через кожну з таких точок:

$$(+2;\ 0),\ (-4;\ +3)\ \text{і}\ (+5;\ -1).$$

458. До даної гіперболи $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ провести дотичну:

a) паралельно прямій $x + y - 7 = 0$;
b) паралельно прямій $x - 2y = 0$;
c) перпендикулярно тій же прямій $x - 2y = 0$.

459. Чи можна до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести дотичні будь-якого напряму і якщо ні, то яке обмеження накладено на кутові коефіцієнти дотичних до цієї гіперболи?

460. На гіперболі $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точки, дотичні в яких нахилені до осі абсцис під кутом $\frac{\pi}{3}$.

461. До гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ провести таку дотичну, яка знаходилась би на однаковій віддалі від центру і від правого фокуса.

462. Гіпербола дотикається до прямої $x - y - 2 = 0$ в точці M $(+4; +2)$. Скласти рівняння цієї гіперболи.

463. Знайти умову, при якій пряма $Ax + By + C = 0$ дотикається до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

464. Скласти рівняння гіперболи, знаючи рівняння її асимптот $y = \pm \frac{1}{2} x$ і рівняння однієї з її дотичних: $5x - 6y - 8 = 0$.

465. Прямий кут переміщається так, що сторони його весь час дотикаються до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Знайти траєкторію його вершини.

466. З точок перетину директрис гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ з її дійсною віссю проведені дотичні до гіперболи. Знайти їх рівняння і визначити координати точок дотику.

467. Довести, що коли еліпс і гіпербола мають спільні фокуси, то вони перетинаються під прямим кутом, тобто дотичні, проведені до обох кривих у точці їх перетину, перпендикулярні один до другого.

468. Довести, що добуток віддалей будь-якої дотичної до гіперболи від двох її фокусів є величина стала.

469. Довести, що відрізок будь-якої дотичної до гіперболи, розміщеної між асимптотами, поділяється в точці дотику пополам.

470. Довести, що дотичні до гіперболи утворюють з асимптотами рівновеликі трикутники.

470*. Пряма лінія переміщатиметься так, що площа трикутника, утвореного нею з осями координат, зберігає сталу величину S. Знайти геометричне місце точок, які поділяють відрізок цієї прямої, розміщеної між осями, в даному відношенні λ.

471. Знайти рівняння гіперболи, знаючи, що осі її відповідно дорівнюють $2a$ і $2b$, що центр її переміщений у точку (x_1, y_1) і дійсна вісь паралельна осі абсцис.

472. Звести до найпростішого вигляду рівняння гіпербол:

a) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$;

b) $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$;

c) $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$.

Визначити положення їх центрів і величину осей.

473. Центр гіперболи вміщений у точку $(-15; 0)$, один з фокусів збігається з початком координат. Знайти рівняння гіперболи, якщо, крім того, відомо, що вона відсікає від осі ординат хорду, довжина якої дорівнює 32.

474. Через вершину A $(a; 0)$ гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ проведені всі можливі хорди. Знайти геометричне місце їх середин.

475. Знайти геометричне місце середин фокальних радіусів-векторів, проведених з правого фокуса до всіх точок гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

476. Два стержні, обертаючись у протилежних напрямах біля двох нерухомих точок A і B, утворюють весь час з прямою AB кути, які доповнюють один одного до прямого кута. Знайти геометричне місце точок перетину стержнів.

477. Знайти геометричне місце точок перетину перпендикулярів, опущених з фокуса гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ на дотичні, з прямими, які з'єднують центр з відповідними точками дотику.

478. Знайти геометричне місце центрів кіл, які відсікають на двох перпендикулярних прямих відрізки даної довжини ($2a$ і $2b$).

479. Довести, що геометричне місце центрів кругів, які зовні дотикаються до даного кола і проходять через одну і ту ж точку, є гіпербола.

4. Парабола

Парабола — це геометричне місце точок, рівновіддалених від постійної точки — фокуса параболи — і постійної прямої — директриси параболи.

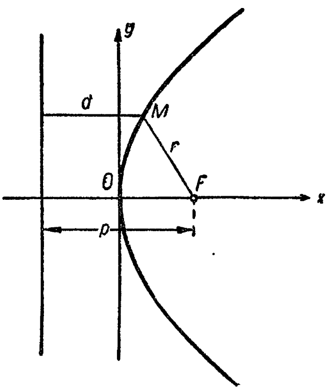

Рис. 50.

Якщо за вісь абсцис прийняти перпендикуляр, опущений з фокуса на директрису, а початок координат розмістити посередині між фокусом і директрисою (рис. 50), то рівняння параболи буде:

$$y^2 = 2px, \tag{27}$$

де параметр p є віддаль фокуса від директриси. Парабола має одну вісь симетрії, яка збігається при такому виборі системи координат, з віссю x. Єдина вершина параболи збігається з початком координат; другої точки перетину параболи з її віссю симетрії немає, бо результат виключення ординати з рівнянь параболи і її осі виразиться рівнянням першого степеня. Всяка пряма, паралельна осі x, зустрічає параболу також тільки в одній точці. Прямі будь-якого іншого напряму перетинають параболу в двох точках (дійсних або уявних).

Фокальний радіус-вектор будь-якої точки параболи дорівнює:

$$r = x + \frac{p}{2}; \tag{28}$$

згідно з визначенням параболи

$$\frac{r}{d} = 1, \tag{29}$$

де d означає віддаль точки параболи від директриси.

Дотична до параболи

$$y^2 = 2px \tag{27}$$

в точці (x_1, y_1) зображається рівнянням:

$$yy_1 = p(x + x_1). \tag{30}$$

480. Скласти рівняння парабол, знаючи, що

а) віддаль фокуса від вершини дорівнює 3;

b) фокус має координати $(+5; 0)$, а вісь ординат править директрисою;

c) парабола симетрична відносно осі x, проходить через початок координат і через точку $M\ (+1;\ -4)$;

d) парабола симетрична відносно осі y, фокус міститься в точці $(0;\ +2)$ і вершина збігається з початком координат;

e) парабола симетрична відносно осі y, проходить через початок координат і через точку $M\ (+6;\ -2)$.

481. На параболі $y^2 = 8x$ знайти точку, фокальний радіус-вектор якої дорівнює 20.

482. На параболі $y^2 = 4{,}5x$ взята точка $M\ (x, y)$, яка знаходиться від директриси на віддалі

$$d = 9{,}125.$$

Обчислити віддаль цієї точки від вершини параболи.

483. Побудувати параболу, користуючись її означенням.

484. Дано прямокутний трикутник ABC з катетами a і b. Обидва катети поділені на однакове число частин; через точки поділу катета a (рис. 51) проведені прямі, паралельні катетові b, а точки поділу катета b з'єднані прямими лініями з вершиною протилежного кута. Знайти геометричне місце точок перетину прямих, проведених з тих точок поділу катетів, які мають однакові номери, якщо нумерація на катеті a починається від вершини гострого кута, а на b — від вершини прямого кута.

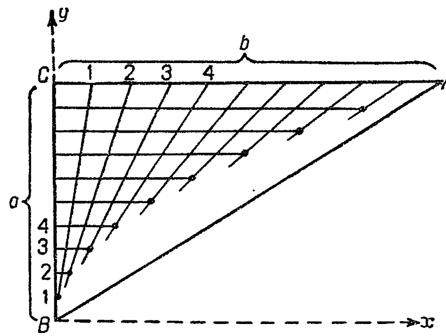

Рис. 51.

485. Яким трикутником можна скористатися, щоб згідно з попередньою задачею, побудувати параболу $y^2 = 5x$, і як доповнити цю побудову, щоб одержати точки параболи поза трикутником?

486. Знайти ознаку, за якою можна було б судити про розміщення точок, даних своїми координатами, відносно параболи $y^2 = 2px$.

487. Обчислити довжину сторін правильного трикутника, вписаного в параболу $y_2 = 2px$.

488. Знайти точку перетину параболи $y^2 = 18x$ з такими прямими:

a) $6x + y - 6 = 0$;
b) $9x - 2y + 2 = 0$;
c) $4x - y + 5 = 0$;
d) $y - 3 = 0$.

489. Знайти точки перетину параболи $y^2 = 12x$ з еліпсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

490. Скласти рівняння спільної хорди параболи $y^2 = 18x$ і круга $(x + 6)^2 + y^2 = 100$.

491. Через фокус параболи $y^2 = 2px$ проведена хорда, перпендикулярна до її осі. Визначити довжину цієї хорди.

491*. Скласти рівняння сторін трикутника, вписаного в параболу $y^2 = 8x$, знаючи, що одна з його вершин збігається з вершиною параболи, а точка перетину висот збігається з фокусом параболи.

492. Через точку $A(+2; +1)$ провести таку хорду параболи $y^2 = 4x$, яка ділилась би в даній точці пополам.

493. Через точку $P(+5; -7)$ провести дотичну до параболи $y^2 = 8x$.

494. Дано параболу $y^2 = 4x$ і дотичну до неї $x + 3y + 9 = 0$. Знайти точку їх дотику.

495. Довести, що будь-яка дотична до параболи $y^2 = 2px$ відсікає на від'ємній частині осі x відрізок, рівний абсцисі точки дотику, а на осі y — відрізок, рівний половині ординати точки дотику.

496. Дано параболу $y^2 = 12\,x$. Провести до неї дотичну

a) в точці з абсцисою $x = 3$;

b) паралельно прямій $3x - y + 5 = 0$;

c) перпендикулярно прямій $2x + y - 7 = 0$;

d) що утворює з прямою $4x - 2y + 9 = 0$, кут $\frac{\pi}{4}$.

497. Знайти умову, при якій пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

498. Знайти найкоротшу віддаль параболи $y^2 = 64x$ від прямої $4x + 3y + 46 = 0$.

499. Обчислити параметр параболи $y^2 = 2px$, якщо відомо, що вона дотикається до прямої $x - 2y + 5 = 0$.

500. Знайти спільні дотичні еліпса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ і параболи $y^2 = {}^{20}/_3\,x$.

500*. На параболі $y^2 = 12x$ взято три точки, ординати яких $y_1 = 6$, $y_2 = 2$ і $y_3 = -3$. Обчислити відношення площ двох трикутників: трикутника з вершинами в указаних точках і трикутника, утвореного дотичними в цих точках.

501. Довести, що будь-яка дотична параболи перетинає директрису і фокальну хорду, перпендикулярну до осі, в точках, рівновіддалених від фокуса.

502. Довести, що геометричне місце основ перпендикулярів, опущених з фокуса параболи на її дотичні, є дотична до вершини параболи.

503. Прямий кут ковзає так, що сторони його весь час дотикаються до параболи $y^2 = 2px$. Визначити траєкторію його вершини.

503*. Перевірити, що фокус параболи і точки дотику двох дотичних до параболи, проведених з будь-якої точки директриси, лежить на одній прямій.

504. Скласти рівняння параболи, знаючи, що вершина її має координати (a, b), параметр дорівнює p і напрям осі симетрії збігається:

a) з додатним напрямом осі x;

b) з від'ємним напрямом осі x;

c) з додатним напрямом осі y;

d) з від'ємним напрямом осі y.

505. Які особливості повинно мати рівняння другого степеня $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, щоб відповідна крива була парабола

a) з віссю, паралельною осі x;

b) з віссю, паралельною осі y?

506. Визначити координати вершини параболи, величину параметра і напрям осі; якщо парабола дана одним з таких рівнянь:

a) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$;

b) $y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$;

c) $y^2 + 8x - 16 = 0$;

d) $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$;

e) $y = Ax^2 + Bx + C$;

f) $y = x^2 - 8x + 15$;

g) $y = x^2 + 6x$.

507. Довести, що параболи, які мають спільний фокус і збігаються, але протилежно напрямлені до осі, перетинаються під прямим кутом.

508. Скласти рівняння параболи, яка симетрична відносно осі x і відсікає на цій осі відрізок $+a$ і на осі ординат відрізки $\pm b$ (рис. 52).

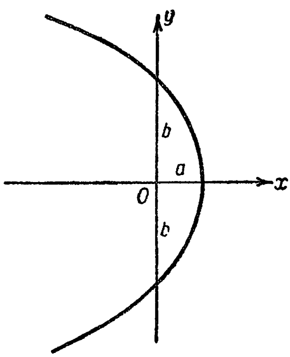

Рис. 52.

509. Парабола симетрична відносно осі x, вершина її розміщена в точці $(-5; 0)$, і на осі ординат вона відсікає хорду, довжина якої $l = 12$. Написати рівняння цієї параболи.

510. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі y, яка відсікає на осі абсцис відрізки $\pm a$ і на осі ординат відрізок, рівний $+b$.

511. Мостова арка має форму параболи. Визначити параметр цієї параболи, знаючи, що проліт арки дорівнює 24 *м*, а висота 6 *м*.

512. Камінь, кинутий під гострим кутом до горизонту, описав дугу параболи і впав на віддалі 16 *м* від початкового положення. Визначити параметр параболічної траєкторії, знаючи, що найбільша висота, досягнута каменем, дорівнює 12 *м*.

513. Струмінь води, який викидається фонтаном, приймає форму параболи, параметр якої $p = 0{,}1$. Визначити висоту струменя, якщо відомо, що вона падає в басейн на віддалі двох метрів від місця виходу.

514. Знайти геометричне місце середин ординат параболи $y^2 = 2px$.

515. Знайти геометричне місце середин хорд параболи, які проходять через її фокус.

516. Прямий кут обертається навколо своєї вершини, яка збігається з вершиною параболи. Довести, що при цьому русі пряма лінія, яка з'єднує точки перетину сторін кута з параболою, також обертається навколо деякої точки, що лежить на осі параболи.

517. Знайти геометричне місце центрів кругів, які проходять через дану точку і дотикаються до даної прямої.

518. Знайти геометричне місце центрів кругів, які дотикаються до осі ординат і круга $x^2 + y^2 = 1$.

5. Полярні рівняння кривих другого порядку

519. Відносно полярної системи координат скласти рівняння кола, радіус якого дорівнює a і центр знаходиться: a) в полюсі, b) в точці $(a, 0)$, c) в точці $(\rho_1; \varphi_1)$.

520. Відносно полярної системи координат скласти рівняння еліпса, центр якого збігається з полюсом і фокальна вісь — з полярною віссю.

521. Під яким кутом до фокальної осі нахилений діаметр еліпса $\rho^2 = \frac{288}{16 - 7\cos^2\varphi}$, довжина якого дорівнює 10 одиницям?

522. Скласти рівняння еліпса, прийнявши його фокальну вісь за полярну вісь і вмістивши полюс:

a) в лівому фокусі еліпса;

b) в правому фокусі еліпса.

523. Обчислити довжину півосей і віддаль між двома фокусами еліпса:

$$\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2 - \cos\varphi}.$$

524. Скласти рівняння гіперболи, центр якої збігається з полюсом і дійсна вісь — з полярною віссю.

525. Обчислити кут між асимптотами гіперболи:

$$\rho^2 = \frac{48}{4\cos^2\varphi - 1}.$$

526. Скласти рівняння гіперболи, прийнявши її фокальну вісь за полярну вісь і вмістивши полюс у правому фокусі гіперболи.

527. Скласти рівняння асимптот і директрис гіперболи

$$\rho = \frac{2}{1 - \sqrt{2}\cos\varphi}.$$

528. Скласти рівняння параболи, прийнявши її вісь за полярну вісь і вершину за полюс.

529. На параболі $\rho = \frac{8\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ знайти точку, радіус-вектор якої дорівнює віддалі цієї ж точки від директриси параболи.

530. Скласти рівняння параболи, фокус якої збігається з полюсом і вісь якої служить полярною віссю.

531. На параболі $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$ знайти точку:

a) з найменшим радіусом-вектором;

b) з радіусом-вектором, який дорівнює параметру параболи.

532. Довести, що добуток перпендикулярів, опущених з кінців будь-якої фокальної хорди на вісь параболи, має сталу величину.

533. Відносно прямокутної системи координат написати найпростіші рівняння таких кривих:

$$\text{a)}\ \rho = \frac{25}{13 - 12\cos\varphi};\quad \text{c)}\ \rho = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi};$$

$$\text{b)}\ \rho = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi};\quad \text{d)}\ \rho = \frac{4}{\sqrt{5} - \cos\varphi}.$$

РОЗДІЛ VI
ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1. Загальне рівняння кривої другого порядку. Перетворення цього рівняння при паралельному перенесенні осей координат. Центр кривої

Загальне рівняння кривої другого порядку, тобто рівняння другого степеня відносно декартових координат x і y, має шість членів: три члени другого степеня (з квадратами кожної з координат і з їх добутком), два члени першого степеня і вільний член. Всі коефіцієнти цього рівняння позначаються буквою a з нижніми покажчиками, які залежать від того, які змінні множники входять до складу члена; множникові x відповідає покажчик 1, множникові y — покажчик 2, а в членах нижчих степенів місця множників, яких невистачає, відзначаються покажчиком 3. Порядок, в якому розміщені покажчики, не має значення $a_{12} = a_{21}$; $a_{13} = a_{31}$; $a_{23} = a_{32}$. Коефіцієнти з двома неоднаковими покажчиками мають ще й числовий множник 2. Отже, загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{1}$$

Для визначення кривої другого порядку не потрібно знати всі шість коефіцієнтів — досить знати п'ять незалежних їх відношень. Крива другого порядку визначається п'ятьма умовами.

Якщо, не змінюючи напряму осей координат, перенести початок координат в будь-яку точку O' $(x';\ y')$, то рівняння кривої (1) перетворюється на таке:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2F_{x'}X + 2F_{y'}Y + 2F' = 0, \tag{2}$$

де

$$\left.\begin{aligned} 2F' &= a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33},\\ 2F_{x'} &= 2\,(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}),\\ 2F_{y'} &= 2\,(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

тобто коефіцієнти при старших членах не змінюються; коефіцієнтами при перших степенях координат будуть частинні похідні від лівої частини початкового рівняння по відповідних координатах з заміною текучих координат координатами нового початку; вільний член являє собою всю ліву частину початкового рівняння, в якій проведена така сама заміна.

Якщо крива (1) має центр симетрії і початок координат перенесено в цей центр кривої $(x_0;\ y_0)$, то перетворене рівняння не може мати членів першого степеня і тому матиме вигляд:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2F^0 = 0. \tag{4}$$

Оскільки координати центра перетворюють на нуль коефіцієнти $2Fx_0$ и $2Fy_0$, то ці координати визначаються з рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0,\\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Розв'язавши рівняння (5), дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}},\\ y_0 &= \frac{a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11}\\ a_{23} & a_{21}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Крива має центр і називається центральною кривою, якщо система рівнянь (5) означена, тобто $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12}\\ a_{21} a_{22}\end{vmatrix} \neq 0$; якщо рівняння (5) несумісні ($\delta = 0$), крива не має центра в кінцевій частині площини, ми називаємо її кривою параболічного типу; якщо, нарешті, система (5) неозначена, крива має безліч центрів — цілу лінію центрів, бо будь-яка точка прямої

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$

є центром симетрії кривої.

Вставляючи координати центра в ліву частину початкового рівняння (1) кривої, ми виразимо вільний член перетвореного рівняння (4) через коефіцієнти початкового рівняння:

$$2F^0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}} + \frac{\Delta}{\delta}.$$

Δ називається дискримінантом кривої, а δ називається дискримінантом старших членів.

Отже, рівняння кривої, віднесеної до центра, має вигляд:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{7}$$

534. Скласти рівняння кривої другого порядку, яка проходить через такі п'ять точок:

$$(0;\ 0),\ (0;\ +2),\ (-1;\ 0),\ (-2;\ +1),\ (-1;\ +3).$$

535. Яку криву другого порядку можна провести через точки:

$$(0;\ 0),\ (0;\ +3),\ (+6;\ 0),\ (+2;\ +2)\ \text{і}\ (-2;\ +1)?$$

536. Дано чотири точки: $(0;\ +15)$, $(+3;\ 0)$, $(+5;\ 0)$ і $(+2;\ +3)$. Провести через них криву параболічного типу.

Вказівка. Параболічна крива визначається чотирма умовами, тому що між її коефіцієнтами повинно існувати співвідношення $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, і, отже, рівняння параболічної кривої має тільки чотири незалежних параметри.

537. Який вигляд має рівняння кривої $x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 1 = 0$, якщо перенести початок координат у точку O' $(+1;\ 0)$?

538. Дано криву $xy - 6x + 2y + 3 = 0$. Знайти перетворене рівняння цієї кривої після переносу початку координат в точку $(-2;\ +6)$.

539. Знайти перетворене рівняння кривої $x^2 + 6x - 8y + 1 = 0$, якщо початок координат буде перенесений у точку $(-3; -1)$.

540. Знайти центри таких кривих:

1) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;
3) $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$;
4) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
5) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$;
6) $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$;
7) $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
8) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$;
9) $9x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 7 = 0$;
10) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 10x - 20y + 25 = 0$.

541. При яких значеннях параметрів a і b рівняння

$$x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by - 4 = 0$$

зображає:

a) центральну криву;
b) криву параболічного типу;
c) криву з лінією центрів.

542. Знайти центри кривих:

a) $5x^2 - 3xy + y^2 + 4 = 0$;
b) $3x^2 - 2xy + 4 = 0$;
c) $7xy - 3 = 0$;
d) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 1 = 0$;
e) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$.

543. Який вигляд матиме рівняння кривої

$$2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y - 10 = 0,$$

якщо перенести початок координат в її центр?

544. Користуючись перенесенням початку координат, спростити рівняння таких кривих:

a) $7x^2 + 4xy + 4y^2 - 40x - 32y + 5 = 0;$
b) $x^2 - 2xy + 2x + 2y + 1 = 0;$
c) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0.$

545. Скласти загальне рівняння всіх кривих другого порядку, які мають один і той же центр $(x_0;\ y_0)$.

546. Крива другого порядку проходить через початок координат, через точки $A\ (0;\ +1)$ і $B\ (+1;\ 0)$. Крім того, відомий її центр $C\ (+2;\ +3)$. Скласти рівняння цієї кривої.

547. Знайти геометричне місце центрів кривих

$$x^2 + 2xy - y^2 - 2ax + 4ay + 1 = 0,$$

де a — змінний параметр.

548. Знайти геометричне місце центрів усіх центральних кривих другого порядку, які проходять через точки: $(0;\ 0)$, $(+2;\ 0)$, $(0;\ +1)$ і $(+1;\ +2)$.

2. Умова розпадання кривої другого порядку на пару прямих. Дослідження загального рівняння другого степеня

Якщо ліва частина рівняння кривої другого порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

може бути розкладена на два лінійних множники:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} =$$
$$= (A_1x + B_1y + C_1)\ (A_2x + B_2y + C_2),$$

то відповідна крива складається з двох прямих, рівняння яких ми дістанемо, прирівнюючи до нуля окремо кожний з лінійних множників. Ми говоримо, що крива другого порядку розпалась на пару прямих.

Необхідна і достатня умова для того, щоб рівняння (1) являло собою пару прямих, полягає в рівності нулеві д и с к р и м і н а н т а к р и в о ї, тобто:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Якщо ця умова виконана, то координати точки перетину відповідних двох прямих визначаються з рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0\text{*}, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

* Рівняння (9) рівнозначні рівнянням (5), які визначають центр кривої; якщо крива розпадається на пару прямих, що перетинаються, то точка їх перетину є центром кривої.

а кутові коефіцієнти цих прямих задовольняють рівняння:

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0. \tag{10}$$

Дослідження рівнянь (9) і (10) показує, що серед центральних кривих ($\delta \neq 0$) існують криві, які розпались і складаються з двох різних прямих, що перетинаються ($k_1 \neq k_2$); при цьому не виключена можливість, що $\delta < 0$ і кутові коефіцієнти прямих виявляються тоді уявними; в цьому випадку прямі називаються уявними, але вони мають загальну дійсну точку — вся крива стяглась в одну точку.

При виконанні умов $\Delta = 0$ і $\delta = 0$ крива розпадається на дві паралельні прямі ($k_1 = k_2$) і має лінію центрів (система рівнянь (9) стає неозначеною).

Нарешті, можливо, що ті паралельні прямі, на які розпалась крива, зіллються, тоді не тільки $\delta = 0$, а і всі інші мінори другого порядку [1] дискримінанта Δ перетворюються на нуль.

Для установлення типу нерозпадної кривої користуємося зміною напряму осей координат: завжди можна знайти таку п р я м о к у т н у систему координат, щоб перетворене рівняння кривої не мало члена з добутком координат, тобто завжди можна підібрати такий кут α між новою і старою віссю абсцис, щоб після перетворення координат за формулами:

$$x = \frac{x' \sin(\omega - \alpha) - y' \cos(\omega - \alpha)}{\sin \omega},$$

$$y = \frac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \omega}$$

новий коефіцієнт a'_{12} перетворився на нуль.

Рівняння кривої, віднесеної до центра, матиме вигляд:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{11}$$

Якщо $\delta > 0$, рівняння (11) зображає еліпс (дійсний або уявний); якщо $\delta < 0$ — гіперболу.

Для кривої параболічного типу ($a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = 0$) одночасно з a'_{12} перетворюється на нуль один з коефіцієнтів a'_{11} і a'_{22}, тобто перетворене рівняння матиме лише один член другого степеня:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0 \tag{12}$$

або

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0; \tag{12'}$$

ці рівняння зображають параболи, в яких вісь симетрії паралельна одній з осей координат.

Отже, при дослідженні загального рівняння кривої другого порядку можна користуватися такою таблицею:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Еліпс (дійсний або уявний)	Уявні прямі, що перетинаються в дійсній точці
$\delta = 0$	Парабола	Паралельні прямі (дійсні, уявні або злиті)
$\delta < 0$	Гіпербола	Дійсні прямі, що перетинаються

[1] Мінорами другого порядку називаються ті визначники другого порядку, які утворюються з Δ при викреслюванні одного з стовпців і одного з рядків; наприклад, δ утворюється при викреслюванні останнього рядка і останнього стовпця.

549. Дослідити, які криві дані такими рівняннями:

a) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$
b) $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$
c) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$
d) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 29 = 0;$
e) $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y - \frac{13}{3} = 0.$

Розв'язання. Візьмемо рівняння a); коефіцієнти в ньому мають такі значення: $a_{11} = 1$; $a_{12} = -1$; $a_{22} = 2$; $a_{13} = -2$; $a_{23} = -3$; Складемо з них дискримінант кривої Δ, дискримінант старших членів δ і обчислимо ці обидва визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 - 6 - 8 - 9 - 3 = -26;$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Отже, $\Delta \neq 0$ і $\delta > 0$; таким чином, ми маємо еліпс.

550. Визначити вигляд таких кривих:

1) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0;$
2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0;$
3) $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0;$
4) $y^2 + 5xy - 14x^2 = 0;$
5) $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0;$
6) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0;$
7) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a};$
8) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0;$
9) $2y^2 + 8x + 12y - 3 = 0;$
10) $9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y = 0;$
11) $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0.$

551. Користуючись розкладанням лівої частини рівняння на множники, виявити геометричне значення рівнянь:

a) $xy - bx - ay + ab = 0;$
b) $x^2 - 2xy + 5x = 0;$
c) $x^2 - 4xy + 4y^2 = 0;$
d) $9x^2 + 30xy + 25y^2 = 0;$
e) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 25 = 0.$

552. Перевірити, що рівняння $y^2 - xy - 5x + 7y + 10 = 0$ являє собою пару прямих, і знайти рівняння кожної з цих прямих.

Розв'язання. Спосіб 1. Перш за все додаємо обидва дискримінанти і обчислюємо їх величину:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 20 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(35 + 35 - 50 - 20) = 0;$$

$$\delta = -\frac{1}{4}.$$

Отже, рівняння зображає дві дійсних прямих, що перетинаються. Знайдемо точку їх перетину з рівнянь (9), які в нашому випадку після множення на 2 матимуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} -y \quad -5 &= 0; \\ -x + 2y + 7 &= 0; \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y &= -5, \\ x &= -3. \end{aligned}$$

Кутові коефіцієнти прямих обчислюються з рівняння (10), яке в даному випадку має вигляд: $k^2 - k = 0$, звідки $k_1 = 0$ і $k_2 = 1$. Шукані прямі проходять через точку $(-3, -5)$ і мають кутові коефіцієнти, відповідно рівні 0 і 1; отже, їх рівняння будуть:

$$y + 5 = 0 \text{ і } y = x - 2.$$

Спосіб 2. Переконавшись, що дане рівняння зображає пару прямих, розв'язуємо його відносно ординати:

$$y^2 - (x - 7)\,y - 5x + 10 = 0;$$

$$y = \frac{x-7}{2} - \sqrt{\frac{(x+3)^2}{4}}.$$

Звідси $y = x - 2$ і $y = -5$. Це і будуть рівняння шуканих прямих. Другий спосіб примикає до безпосереднього розкладання лівої частини рівняння на множники.

553. Знайти рівняння кожної з двох прямих, сукупність яких дана рівнянням:

a) $21x_2 + xy - 10y_2 = 0$;

b) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$;

c) $y^2 - 4xy - 5x^2 + 5x - y = 0$;

d) $4x^2 - 4xy + y^2 + 12x - 6y + 9 = 0$.

554. Довести, що всяке однорідне рівняння другого степеня, тобто рівняння виду $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$, зображає пару прямих, які проходять через початок координат.

555. Дослідити криві:

a) $2x^2 + 3xy - 5y^2 = 0$;

b) $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$;

c) $10x^2 - 7xy + y^2 = 0$;

d) $5x^2 - 4xy + y^2 = 0$.

556. При якому значенні параметра a рівняння $x^2 + 2ay^2 - x + y = 0$ являє:

a) криву параболічного типу;

b) криву, що розпалась?

557. При якому значенні параметра a рівняння $x^2 + 2axy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ являтиме собою пару прямих і при якому значенні — криву параболічного типу?

558. Який вигляд має рівняння кривої, що розпалася, якщо віднести її до центра?

558*. Яке стале число треба додати до лівої частини рівняння $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0$, щоб нове рівняння являло собою сукупність двох прямих?

559. При яких значеннях параметрів a і b рівняння

$$x^2 + 4xy + ay^2 - 3x + 2by = 0$$

являє собою пару паралельних прямих?

560. Які криві визначаються рівнянням

$$x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

при різних значеннях параметра λ?

561. Який вигляд мають криві, визначені рівнянням

$$2x^2 + 5xy - 3y^2 - 3y + \lambda y - 2 = 0,$$

при різних значеннях параметра λ?

562. Написати рівняння лінії другого порядку, яка проходить через точки (0; 0), (0; +3), (+6; 0), (+2; +2) і (+4; +1).

3. Перетин кривої другого порядку з прямою. Рівняння дотичної

Координати точок перетину кривої другого порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

з прямою

$$Ax + By + C = 0 \qquad (*)$$

визначають, розв'язуючи разом рівняння (1) і (*).

Ця система рівнянь повинна, взагалі кажучи, мати дві пари розв'язків, а тому крива другого порядку перетинається з прямою в двох точках (дійсних, уявних і злитих). Зокрема, якщо ці дві точки зіллються, пряма називається *дотичною* до кривої в даній точці.

Дотична до кривої (1) в точці (x', y') має рівняння:

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})\,x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})\,y + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0. \qquad (13)$$

Якщо дана пряма

$$Ax + By + C = 0$$

дотикається до кривої (1), то координати точки дотику визначаються з умови пропорціональності коефіцієнтів рівняння цієї прямої і рівняння дотичної (13);

$$\frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}}{A} = \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}}{B} = \frac{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}}{C}. \qquad (14)$$

Особливим випадком перетину кривої (1) з прямою (*) є той, коли при виключенні однієї з координат з їх рівнянь ми дістанемо для визначення другої координати рівняння не другого, а першого степеня (коефіцієнт при квадраті визначуваної координати перетворюється на нуль). У цьому випадку на кінцевій частині площини існує тільки одна спільна точка у кривої (1) і прямої (*). Ми говоритимемо, що вони перетинаються лише в одній точці. Кутові коефіцієнти цих прямих визначаються з рівняння

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0.$$

Якщо рівняння (1) і (*) несумісні, тобто не мають спільних кінцевих рішень, ми говоримо, що крива (1) не має ні однієї спільної точки з прямою (*). В цьому випадку при виключенні однієї з координат з рівнянь (1) і (*) на нуль перетворюється не тільки коефіцієнт при квадраті, але і при першому степені визначуваної координати.

563. Знайти точку перетину кривої

$$x^2 + xy + 2y^2 - 7x - 12y + 10 = 0$$

з осями координат.

564. Дослідити, як розміщені відносно осей координат такі криві:

a) $x^2 + 4xy - 4x - y + 4 = 0;$

b) $x^2 - 4x - y + 3 = 0;$

c) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 18y = 0.$

565. Обчислити довжину хорди, яку відсікає крива

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$$

на осі абсцис.

566. При якому значенні параметра λ крива

$$2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + \lambda y + 4 = 0$$

відсікає на осі ординат хорду завдовжки в 3 одиниці і при якому значенні λ відповідна крива дотикається до осі ординат?

567. Знайти точку перетину кривої

$$x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

з прямими:

a) $5x - y - 5 = 0$; b) $x + 2y + 2 = 0$;

c) $x + 4y - 1 = 0$; d) $x - 3y = 0$.

568. У точках перетину кривої $x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$ з осями ординат провести дотичні до цієї кривої.

569. Написати рівняння дотичних до кривої

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$$

в її точках, абсциси яких дорівнюють -2.

570. Знаючи рівняння дотичних до кривої, даної загальним рівнянням, вивести рівняння дотичних до кривих, заданих найпростішими рівняннями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad y^2 = 2px; \quad xy = m.$$

571. Через початок координат провести дотичні до кривої
$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0.$$

572. Через точку $(+3;\ +4)$ провести дотичні до кривої
$$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0.$$

573. Через точку $(-2;\ +1)$ провести дотичні до кривих
$$\text{a)}\ 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0;$$
$$\text{b)}\ 2x^2 - xy - y^2 - 15x - 3y + 18 = 0$$
і розібрати, чому в кожному з цих випадків ми можемо провести тільки по одній дотичній.

574. Серед прямих, які дотикаються до кривої
$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0,$$
знайти ті, що паралельні осі абсцис.

575. До даної кривої $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ провести дотичні, паралельні прямій $3x + 3y - 5 = 0$, і визначити точки дотику цих дотичних.

576. Написати рівняння параболи, яка дотикається до осі x в точці $(+3;\ 0)$ і осі y в точці $(0;\ +5)$.

577. Скласти рівняння кривої другого порядку, яка проходить через початок координат і дотикається до прямої $4x + 3y + 2 = 0$ в точці $(+1;\ -2)$ і прямої $x - y - 1 = 0$ у точці $(0;\ -1)$.

578. Написати рівняння прямих, які проходять через початок координат і зустрічають криву
$$6x^2 - xy - y^2 + 5x - 3y + 2 = 0$$
лише в одній точці.

579. Через точку $(+2;\ 0)$ проведені дві прямі, які мають тільки по одній спільній точці з кривою
$$3x^2 - 7xy + 2y^2 + 6x - 4y - 5 = 0.$$
Скласти рівняння цих прямих і обчислити кут між ними, якщо система координат прямокутна.

580. Який кут утворюють з віссю абсцис прямі, які зустрічають криву
$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$
лише в одній точці? $\omega = \frac{\pi}{2}$.

581. При якому значенні параметра λ крива
$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 + 5x - 9 = 0$$
перетинає пряму $2x - y + 7 = 0$ тільки в одній точці?

582. Який вигляд має загальне рівняння кривої другого порядку, якщо її перетинають лише в одній точці:

a) прямі, паралельні осі x;

b) прямі, паралельні осі y;

c) прямі, паралельні одній з осей координат?

583. Які умови повинні задовольняти коефіцієнти загального рівняння кривої другого порядку, якщо вона не має ні однієї спільної точки:

a) з віссю x, b) з віссю y, c) з осями x і y?

584. Крива другого порядку проходить через (0; 0), (0; +2), (+2; +4) і перетинає лише в одній точці кожну з прямих:

$$3x - 2y + 1 = 0 \text{ і } 2x + y - 5 = 0.$$

Знайти рівняння цієї кривої.

585. Крива перетинає кожну з осей координат тільки на початку координат. Крім того, відомі дві її точки:

$$(+2;\ -1) \text{ і } (-2;\ +2).$$

Скласти рівняння цієї кривої.

586. Крива другого порядку має центр у точці (0; —1), проходить через точку (+3; 0) і зустрічає кожну з прямих

$$2x - 3y + 1 = 0 \quad \text{і} \quad x + y - 5 = 0$$

лише в одній точці. Знайти рівняння цієї кривої.

586*. Знайти геометричне місце центрів всіх кривих другого порядку, що дотикаються до осі абсцис у точці (+2; 0) і осі ординат у точці (0; +1).

4. Діаметри кривої. Головні осі. Асимптоти. Рівняння кривої, віднесеної до спряжених напрямів; рівняння кривої, віднесеної до асимптот

Якщо в кривій другого порядку провести всі хорди одного і того ж напряму, то геометричне місце середин цих хорд являтиме собою деяку пряму, яку називають діаметром, спряженим з даними хордами. Рівняння діаметра:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0, \tag{15}$$

або

$$F_x + kF_y = 0, \tag{15'}$$

де k є кутовий коефіцієнт спряжених хорд. Змінюючи k, тобто змінюючи напрям хорд, дістанемо безліч діаметрів; всі вони проходять через центр кривої. У параболи всі діаметри паралельні між собою.

Напрям хорд і напрям спряженого з ними діаметра називаються спряженими напрямами відносно даної кривої. Залежність між двома спряженими напрямами така:

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0. \tag{16}$$

Спряженими діаметрами називаються такі два діаметри, з яких кожний поділяє пополам хорди, паралельні іншому. У параболи спряжених діаметрів немає, бо всі діаметри мають один і той же напрям.

Головними осями кривої називаються діаметри, перпендикулярні до спряжених хорд; їх напрями називаються головними напрямами.

У випадку прямокутної системи координат головні напрями визначаються з рівняння:

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0, \tag{17}$$

або

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \tag{18}$$

де φ — кут між одним з головних напрямів і напрямом осі x.

У випадку косокутної системи координат маємо:

$$(a_{12} - a_{22}\cos\omega)k^2 + (a_{11} - a_{22})k - (a_{13} - a_{11}\cos\omega) = 0. \tag{17'}$$

Всяка крива другого порядку має два головних напрями, за винятком кола, для якого головні напрями неозначені.

Кутовий коефіцієнт визначається для всіх діаметрів параболи за формулою:

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}, \tag{19}$$

або

$$k = -\frac{\alpha}{\beta}, \tag{19'}$$

якщо для старших коефіцієнтів параболи введені позначення:

$$a_{11} = \alpha^2, \quad a_{12} = \alpha\beta \quad \text{і} \quad a_{22} = \beta^2.$$

Головна вісь параболи, як один з її діаметрів, має цей же напрям, і у випадку прямокутних координат вона зображається рівнянням

$$F_x + \frac{\beta}{\alpha}F_y = 0. \tag{20}$$

Другий головний напрям параболи перпендикулярний до її діаметрів, але другої головної осі у параболи немає.

Якщо віднести криву до двох спряжених напрямів, тобто вибрати за осі координат прямі, які мають спряжені напрями відносно цієї кривої, то в рівняння кривої не ввійде член з добутком координат ($a_{12} = 0$). У параболи, крім того, зникає ще один з старших членів ($a_{11} = 0$ або $a_{22} = 0$.)

Якщо центральну криву віднести до двох спряжених діаметрів (або до головних осей), то рівняння її матиме вигляд:

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{21}$$

Найпростіше рівняння параболи ми одержимо, вмістивши початок координат у вершину, тобто в точку перетину параболи з головною віссю ($a'_{33} = 0$), вибравши головну вісь за вісь абсцис ($a'_{23} = 0$, $a'_{12} = 0$ і $a'_{11} = 0$) і дотичну в вершині (вона перпендикулярна до осі) за вісь ординат:

$$a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 0. \tag{22}$$

При такому ж виборі осей координат центральна крива зобразиться рівнянням

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x = 0. \tag{23}$$

Асимптоти кривої можна розглядати, як ті її діаметри, які самі з собою спряжені. Кутові коефіцієнти асимптот визначаються з рівняння

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0. \tag{24}$$

Асимптоти можуть бути тільки в центральних кривих: гіпербола має дві дійсні асимптоти, еліпс — дві уявні; у випадку, коли прямі перетинаються, асимптоти збігаються з цими прямими.

Якщо прийняти асимптоти гіперболи за осі координат, то рівняння цієї гіперболи матиме вигляд:

$$2a'_{12}xy + a'_{33} = 0. \tag{25}$$

587. Знайти два спряжених діаметри кривої

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0,$$

з яких один проходить через початок координат.

Розв'язання. Дана крива центральна, тому що $\delta = 1$. Рівняння всякого її діаметра буде

$$(x - y - 2) + k(-x + 2y - 3) - 0,$$

де k — кутовий коефіцієнт спряженого діаметра. Оскільки шуканий діаметр проходить через початок координат, то вільний член його рівняння повинен дорівнювати нулеві, тобто $-2 - 3k = 0$, звідки $k = -{}^2/_3$. Вставивши це значення параметра в загальне рівняння діаметра і перетворивши його, дістанемо: $5x - 7y = 0$. Це рівняння одного з шуканих діаметрів; його кутовий коефіцієнт $k = {}^5/_7$; отже, рівняння спряженого з ним діаметра буде:

$$(x - y - 2) + \frac{5}{7}(-x + 2y - 3) = 0,$$

або

$$2x + 3y - 29 = 0.$$

588. Через точку $(+1; -2)$ проведено діаметр кривої

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0.$$

Знайти рівняння цього діаметра і діаметра, з ним спряженого.

589. Дано криву:

$$2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0.$$

Знайти її діаметр, паралельний осі абсцис, і діаметр, з ним спряжений.

590. Знайти два спряжених діаметри кривої

$$xy - y^2 - 2x + 3y - 1 = 0,$$

з яких один паралельний осі ординат.

591. Дано криву

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$$

і один з її діаметрів

$$x + 2y - 2 = 0.$$

Знайти діаметр, з ним спряжений.

592. Скласти рівняння діаметра кривої

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0,$$

паралельного прямій

$$2x - y + 5 = 0.$$

593. Визначити діаметр кривої

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 4y = 0,$$

який утворює кут 45° з віссю абсцис. Кут $\omega = \frac{\pi}{2}$.

594. Дано криву:

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0.$$

Знайти геометричне місце середин її хорд:

a) паралельних осі x;
b) паралельних осі y;
c) паралельних прямій $x + y + 1 = 0$.

595. Знайти діаметр кривої

$$5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0,$$

який проходить через середину хорди, яку відсікає ця крива на прямій

$$x - 2y - 1 = 0.$$

596. Знайти середину хорди, яку відсікає крива

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 3y = 0$$

на прямій

$$x + 3y - 12 = 0.$$

597. Знайти такі спряжені діаметри кривої

$$3x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 6y + 10 = 0,$$

які утворюють між собою кут 45°. Кут $\omega = \frac{\pi}{2}$.

598. Знайти залежність між кутовими коефіцієнтами прямих, що мають спряжені напрями відносно:

a) еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

b) гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

599. Через точку (+1; —3) провести хорду еліпса $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{12} = 1$, спряжену з діаметром $2x + 5y = 0$.

600. Знайти напрями і довжину двох спряжених діаметрів еліпса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$, з яких один проходить через точку (+2; +3).

601. Знайти кут між двома спряженими діаметрами еліпса $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$, з яких один утворює кут 30° з великою віссю.

602. Визначити довжину тих спряжених діаметрів еліпса $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{3} = 1$, які утворюють між собою кут $\frac{\pi}{3}$.

Вказівка. В цій задачі зручно скористатися теоремами Аполлонія: $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$ і $ab = a'b' \sin \varphi$, де a і b — півосі еліпса; a' і b' — спряжені півдіаметри його; φ — кут між цими спряженими діаметрами.

603. Дано розміри двох спряжених діаметрів еліпса $2a' = 18$ і $2b' = 14$ і кут між ними $\varphi = \arcsin \frac{11}{21}$. Обчислити довжину його осей.

604. Визначити кут між двома спряженими діаметрами гіперболи $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{9} = 1$, знаючи, що дійсний з цих діаметрів втроє більший дійсної осі.

605. Знайти рівняння двох спряжених діаметрів гіперболи $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} = 1$, кут між якими дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

606. Дано параболу: $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$. Написати рівняння діаметра цієї параболи:

a) який проходить через початок координат;
b) спряженого з хордами, паралельним осі x;
c) спряженого з хордами, паралельним осі y;
d) який утворює кут $\pm \frac{\pi}{4}$ з спряженими хордами;
e) перпендикулярного до спряжених хорд.

$\omega = \frac{\pi}{2}$

607. Знайти діаметр параболи $y^2 = 2px$, спряжений з тими хордами, які нахилені під кутом 45° до осі параболи.

608. Написати рівняння діаметра параболи $x^2 = 6y$, спряженого з прямою $4x - y - 5 = 0$.

609. Знайти головні осі кривих:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0;\\ &\text{b)}\ 5x^2 + 24xy - 2y^2 + 4x - 1 = 0;\\ &\text{c)}\ x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0. \end{aligned}\right\}\ \omega = \frac{\pi}{2}.$$

610. Які будуть головні осі центральної кривої, що розпалася?

611. Знайти вісь параболи $x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y + 3 = 0$.

Розв'язання. Всі діаметри даної параболи мають кутовий коефіцієнт $k = 1$ [див. (19')]. Вісь параболи є діаметр, спряжений з перпендикулярними хордами, тобто хордами з кутовим коефіцієнтом $k_1 = -1$ (система координат передбачається прямокутна). Рівняння всякого діаметра цієї параболи буде $2x - 2y + 1 + k(-2x + 2y - 2) = 0$; при $k = -1$ ми дістанемо рівняння осі: $4x - 4y + 3 = 0$.

612. Знайти вісь симетрії і вершину кожної з таких парабол:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 2y + 1 = 0;\\ &\text{b)}\ 9x^2 - 12xy + 4y^2 - 8x = 0;\\ &\text{c)}\ 3y^2 + 2x - 6y + 5 = 0. \end{aligned}\right\}\ \omega = \frac{\pi}{2}.$$

Вказівка. Вершина параболи знаходиться як точка перетину параболи з її віссю.

613. Знайти спільний діаметр двох кривих:

$$x^2 - xy - y^2 - x - y = 0 \quad \text{і} \quad x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0.$$

614. Скласти рівняння кривої другого порядку, яка проходить через початок координат, якщо відомі дві пари спряжених з нею діаметрів:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y - 2 &= 0, \\ 5x - 5y - 4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{і} \quad \left.\begin{aligned} 5y + 3 &= 0, \\ 2x - y - 1 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Розв'язання. Кутові коефіцієнти спряжених діаметрів задовольняють рівняння: $a_{11} + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{22}k_1k_2 = 0$. Кутові коефіцієнти даних діаметрів: $k_1 = {}^1/_3$ і $k_2 = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 2$; вставляючи ці значення в зазначене рівняння, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} 3a_{11} + 4a_{12} + a_{22} &= 0, \\ a_{11} + 2a_{12} &= 0, \end{aligned}\right\} \; a_{11} : a_{12} : a_{22} = 2 : -1 : -5.$$

Координати центра шуканої кривої ми можемо визначити, розв'язуючи спільно рівняння двох діаметрів: $x_0 = \frac{1}{5}$, $y_0 = -\frac{3}{5}$. Ці координати повинні задовольняти рівняння: $F_{x_0} = 0$ і $F_{y_0} = 0$, які в даному випадку перепишуться так: $2x_0 - y_0 + a_{13} = 0$ і $-x_0 - 2y_0 + a_{23} = 0$; вставимо замість x_0 і y_0 обчислені їх значення і тоді дістанемо: $a_{13} = -1$ і $a_{23} = -1$. Крім того, крива проходить через початок координат; отже, $a_{33} = 0$, і рівняння кривої буде:

$$2x^2 - 2xy - 2y^2 - 2x - 2y = 0, \quad \text{або} \quad x^2 - xy - y^2 - x - y = 0.$$

615. Дві пари прямих:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 0, \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{і} \quad \left.\begin{aligned} x - y &= 0, \\ 3x - 5y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

служать спряженими діаметрами кривої другого порядку. Скласти рівняння цієї кривої, знаючи, що вона проходить через точку $(+1;\ +1)$.

616. Вияснити особливості в виборі осей координат, якщо криві дані такими рівняннями:

a) $3x^2 + 2xy + y^2 - 7 = 0$; d) $x^2 - 2y^2 + 3 = 0$;

b) $5x^2 + 3y^2 + x - 2 = 0$; e) $3x^2 - 4y^2 + 2y + 5 = 0$;

c) $x^2 + 3y^2 + 4x - 5y = 0$; f) $8x^2 - 3y^2 + 2x - 5y + 1 = 0$

617. Відносно деякої прямокутної системи координат крива дана рівнянням: $2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0$. Перетворити це рівняння, прийнявши за осі координат головні осі кривої.

618. Віднести до головних осей криві, дані відносно прямокутної системи координат рівняннями:

a) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$;

b) $32x^2 + 60xy + 7y^2 - 16x - 2y + 1 = 0$;

c) $2xy + 3x - y - 2 = 0$;

d) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;

e) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

619. Рівняння кривої, віднесеної до двох спряжених діаметрів, які становлять кут $\frac{\pi}{3}$, має вигляд: $x^2 + y^2 = 4$. Знайти рівняння тієї ж кривої відносно її головних осей.

620. Віднести до головних осей криві:

a) $3x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$; $\omega = 120°$.

b) $x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$; $\omega = 60°$.

621. Вияснити особливості у виборі осей координат, якщо параболи дані такими рівняннями:

a) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$;

b) $2x^2 + 6x - y - 1 = 0$;

c) $3x^2 - 4y + 5 = 0$;

d) $x^2 - 5y = 0$;

e) $4y^2 - 2x - 3 = 0$.

622. Звести до найпростішого вигляду рівняння параболи $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$; $\omega = \frac{\pi}{2}$.

623. Звести до найпростішого вигляду рівняння таких парабол:

a) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$; $\omega = 90°$;

b) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$; $\omega = 60°$

c) $x^2 + y = 0$; $\omega = 120°$.

624. Віднести до вершини такі центральні криві:

$2xy + 3x - y - 2 = 0$; $x^2 + 2y^2 - 16 = 0$ і $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

У всіх трьох випадках $\omega = 90°$.

625. Знайти асимптоти таких гіпербол:

a) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$;

b) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;

c) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$;

d) $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$.

626. Довести, що всі криві, рівняння яких відрізняються одне від одного тільки вільними членами, мають спільні асимптоти. Знайти, наприклад, асимптоти кривих:

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + 11y + \lambda = 0$$

при різних значеннях параметра λ.

627. Довести, що коли дві криві мають спільні асимптоти, то всі члени їх рівнянь, крім вільних членів, мають пропорціональні коефіцієнти.

628. Скласти загальне рівняння для всіх кривих, асимптоти яких прямі $Ax + By + C = 0$ і $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

629. Крива другого порядку проходить через точку $(+1; -1)$ і має своїми асимптотами дві прямі: $2x + 3y - 5 = 0$ і $5x + 3y - 8 = 0$. Скласти рівняння цієї кривої.

630. Скласти рівняння кривої, яка дотикається до прямої $4x + y + 5 = 0$ і має прямі $x - 1 = 0$ і $2x - y + 1 = 0$ своїми асимптотами.

630*. Яку умову повинні задовольняти коефіцієнти загального рівняння гіперболи, якщо гіпербола рівностороння?

631. Який вигляд має рівняння гіперболи, якщо одна з осей координат або обидві осі паралельні асимптотам?

632. Скласти рівняння гіперболи, яка проходить через точки $(+2; +1)$, $(-1; -2)$ і $(^1/_2; -^1/_4)$, при умові, що одна з її асимптот збігається з віссю абсцис.

633. Рівняння гіперболи, віднесеної до головних осей, має вигляд: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Перетворити це рівняння, прийнявши асимптоти гіперболи за нові осі координат.

634. Віднести гіперболу $2xy - 6x + 4y - 1 = 0$ до її асимптот.

635. Як перетворюється рівняння гіперболи

$$2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0,$$

якщо за осі координат прийняти її асимптоти? Кут $\omega = 90°$.

636. Скільки членів другого степеня і які саме можуть увійти до рівняння: a) еліпса; b) гіперболи; c) параболи?

5. Перетворення рівняння кривої другого порядку за допомогою інваріантів

Якщо одна і та ж крива другого порядку, віднесена до двох різних довільно вибраних систем координат з координатними кутами ω і ω', зображається рівняннями:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

і

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0, \qquad (1')$$

то мають місце такі рівності:

$$\frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega} = \frac{a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\cos\omega'}{\sin^2\omega'}, \qquad (26)$$

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\sin^2\omega} = \frac{a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}}{\sin^2\omega'}, \qquad (27)$$

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\sin^2\omega} = \frac{\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}}{\sin^2\omega'}, \qquad (28)$$

тобто існують вирази, складені з коефіцієнтів рівняння кривої і відповідного координатного кута, які не змінюють своєї величини ні при якому перетворенні декартових координат. Такі вирази називаються **інваріантами** кривої другого порядку. Ми можемо користуватися трьома вищенаведеними інваріантами:

$$I_1 = \frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega}, \tag{26'}$$

$$I_2 = \frac{\delta}{\sin^2\omega}, \tag{27'}$$

$$I_3 = \frac{\Delta}{\sin^2\omega} \tag{28'}$$

для спрощення рівнянь кривої другого порядку, якщо тільки рівняння кривої після перетворення має не більше трьох коефіцієнтів.

637. Користуючись інваріантами, віднести до головних осей криву:

$$40x^2 + 36xy + 25y^2 - 8x - 14y + 1 = 0,$$

знаючи, що $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Шукане рівняння має такий вигляд:

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33} = 0, \text{ причому } \omega' = \frac{\pi}{2}.$$

Для прямокутних систем координат інваріанти спрощуються, бо $\sin\omega = \sin\omega' = 1$ і $\cos\omega = \cos\omega' = 0$, і ми матимемо $I_1 = a_{11} + a_{22}$; $I_2 = \delta$; $I_3 = \Delta$. Знайдемо числове значення цих інваріантів, виходячи з даного рівняння:

$$I_1 = 40 + 25 = 65; \quad I_2 = 40 \cdot 25 - 18^2 = 676;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 40 & 18 & -4 \\ 18 & 25 & -7 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -676.$$

Складемо тепер вирази цих же інваріантів через коефіцієнти перетвореного рівняння: $I_1 = a'_{11} + a'_{22}$; $I_2 = a'_{11}a'_{22}$; $I_3 = a'_{11}a'_{22}a'_{33}$. Оскільки інваріанти не змінюють своєї величини при перетворенні координат, то ми можемо прирівняти між собою знайдені для них вирази, які мають коефіцієнти початкового і перетвореного рівняння: $a'_{11} + a'_{22} = 65$; $a'_{11}a'_{22} = 676$; $a'_{11}a'_{22}a'_{33} = -676$. З цієї системи рівнянь ми визначаємо невідомі коефіцієнти перетвореного рівняння: $a'_{33} = -1$; $a'_{11} = 13$; $a'_{22} = 52$, і шукане рівняння буде: $13x^2 + 52y^2 = 1$. Отже, користуючись інваріантами, можна привести рівняння кривої до найпростішого вигляду, не відшукуючи її центра, осей і не складаючи формул перетворення координат.

638. Користуючись інваріантами, звести до найпростішого вигляду рівняння таких кривих:

a) $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$;
b) $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$;
c) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
d) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
e) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

при умові, що всі вони віднесені до прямокутної системи координат.

639. Користуючись інваріантами, спростити рівняння таких парабол:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0; \\ \text{b)} & 4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0; \\ \text{c)} & x^2-2xy+y^2-x-2y+3=0; \\ \text{d)} & 4x^2-4xy+y^2-x-2=0; \end{array}\right\} \omega=\frac{\pi}{2}.$$

640. Спростити рівняння таких кривих:

a) $x^2-3xy+y^2+1=0$; $\omega=60°$;

b) $2x^2+2y^2-2x-6y+1=0$; $\omega=60°$;

c) $4x^2-4xy+y^2-4x-4y+7=0$; $\omega=120°$.

640*. Віднести до головних осей криву $x^2+y^2=4$, якщо відомо, що $\omega=\frac{\pi}{3}$.

641. Віднести гіперболу $8y^2+6xy-12x-26y+11=0$ до її асимптот, користуючись інваріантами. Кут $\omega=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Рівняння кривої, віднесеної до асимптот, має вигляд:

$$2a'_{12}xy+a'_{33}=0.$$

Нам треба знайти два невідомих коефіцієнти a'_{12}, a'_{33} і новий координатний кут ω', тобто кут між асимптотами. Знайдемо числову величину інваріантів, користуючись даним рівнянням, при $\omega=90°$; $I_1=8$, $I_2=-9$, $I_3=81$. Вирази цих інваріантів у нових коефіцієнтах будуть:

$$I_1=-\frac{2a'_{12}\cos\omega'}{\sin^2\omega'}, \quad I_2=-\frac{a'^2_{12}}{\sin^2\omega'} \quad \text{і} \quad I_3=-\frac{a'^2_{12}a'_{33}}{\sin^2\omega'}.$$

Для визначення трьох величин ω', a'_{12} і a_{33} маємо три рівняння:

$$-\frac{2a'_{12}\cos\omega'}{\sin^2\omega'}=8, \quad \frac{a'^2_{12}}{\sin^2\omega'}=9 \quad \text{і} \quad -\frac{a'^2_{12}a'_{33}}{\sin^2\omega'}=81.$$

Розв'язавши їх, дістанемо: $\operatorname{tg}\omega'=\pm 3/4$, $\sin^2\omega'=9/25$; $a'_{33}=-9$ і $a'_{12}=\pm 9/5$; шукане рівняння буде: $\pm\, 18/5\, xy-9=0$. Вибираємо напрям осей так, щоб гіпербола була розміщена в нормальному куті і вертикальному до нього куті; тоді після спрощення дістанемо: $xy=5/2$.

642. Віднести до асимптот гіперболи дані відносно прямокутної системи координат рівняннями:

a) $2x^2+3xy-2y^2-8x-11y=0$;

b) $4x^2+2xy-y^2+6x+2y+3=0$;

c) $y^2-2xy-4x-2y-2=0$.

643. Відносно деякої прямокутної системи координат крива зображається рівнянням $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$. Скласти рівняння цієї ж кривої відносно її вершини.

Вказівка. Віднести криву до вершини — значить прийняти одну з осей кривої за вісь абсцис, перенести початок координат у вершину і прийняти дотичну в вершині за вісь ординат.

6. Полюс і поляра

Дві точки P і Q називаються полярно-спряженими відносно кривої другого порядку, якщо пряма, яка їх з'єднує, перетинає криву в двох точках M і N, що гармонічно розділяють дані точки P і Q (рис. 53).

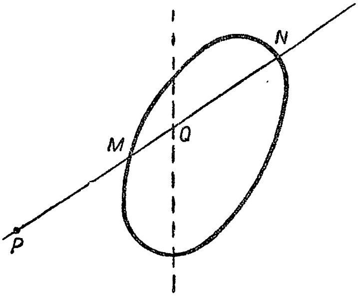

Рис. 53.

Існує безліч точок, полярно-спряжених з даною точкою P; їх геометричне місце є пряма — поляра даної точки (полюса P). З двох спряжених точок кожна лежить на полярі другої.

Поляра точки P (x', y') має рівняння:

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})\,x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})\,y + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0. \qquad (29)$$

Якщо точка P лежить на кривій, то її поляра збігається з дотичною в цій точці.

Кожна пряма $Ax + By + C = 0$ має певний полюс відносно даної кривої другого порядку; координати цього полюса визначаються з умови пропорціональності коефіцієнтів рівняння прямої і рівняння поляри:

$$\frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}}{A} = \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}}{B} = \frac{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}}{C}. \qquad (30)$$

Якщо з двох прямих одна проходить через полюс другої, то і друга проходить через полюс першої. Такі дві прямі називаються спряженими відносно даної кривої.

644. Скласти рівняння поляри точки $P(+2;\ -1)$ відносно кривої $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$.

645. Знайти поляру точки:

1) $(-3;\ +5)$ відносно кривої

$$4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0;$$

2) $(0;\ +1)$ відносно кривої $6x^2 - xy - 2y^2 + 4y = 0$;

3) $(+1;\ -2)$ відносно кривої

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0;$$

4) $(+7;\ +5)$ відносно кривої

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$$

5) $(0;\ 0)$ відносно кривої

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$$

6) $(0;\ 0)$ відносно кривої

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0;$$

7) (x_1, y_1) відносно кривої $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

8) $(+5;\ +3)$ відносно кривої $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$;

9) $(-3;\ +2)$ відносно кривої $y^2=12x$;

10) $(+1;\ +1)$ відносно кривої

$$x^2-4xy+3y^2+2x-2y=0.$$

646. Обчислити координати полюса прямої $x-6y+8=0$ відносно кривої:

$$3x^2-6xy+5y^2-4x-6y+10=0.$$

647. Знайти полюс прямої:

1) $18x-17y-41=0$ відносно кривої

$$2x^2-xy-3y^2-x-6y-15=0;$$

2) осі абсцис відносно кривої

$$2x^2-4xy+5y^2-8x+6=0;$$

3) $15x+4=0$ відносно кривої

$$9x^2-4xy+6y^2+6x-8y+2=0;$$

4) $x+3y+1=0$ відносно кривої

$$3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0;$$

5) $x-y+3=0$ відносно кривої

$$2x^2+5xy-3y^2+3x+16y-5=0;$$

6) $3x-4y-12=0$ відносно кривої $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;

7) $2x+5y-10=0$ відносно кривої $y^2=6\ x$.

648. У точках перетину кривої $x^2-2xy+y^2+2x-6y=0$ з прямою $3x-y+6=0$ проведені дотичні до цієї кривої. Знайти точку перетину дотичних.

649. З точки $M\ (+3;\ +1)$ проведені дві дотичні до кривої $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$. Знайти рівняння хорди, яка з'єднує обидві точки дотику.

650. На прямій $4x+3y-12=0$ знайти точку, полярно-спряжену з початком координат відносно кривої

$$9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0.$$

651. На прямій $4x-y+30=0$ знайти точку, полярно-спряжену з точкою $(+5;\ +1)$ відносно кривої

$$x^2-6xy+9y^2-12x+14y-7=0.$$

652. Через точку $M(0;\ +3)$ провести пряму, полярно-спряжену з прямою $x-3y+22=0$ відносно кривої $2xy-6x+4y-1=0$.

653. Знайти умову, при якій дві прямі

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{і} \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

являються спряженими відносно кривої

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Який вигляд матиме ця умова, якщо крива дана найпростішим рівнянням?

654. Довести, що поляра точки відносно круга перпендикулярна до прямої, яка з'єднує цю точку з центром кола.

655. Довести, що коли дві точки спряжені відносно круга $x^2 + y^2 = R^2$ і розміщені на одному і тому ж радіусі, то віддалі їх від центра кола задовольняють умову $\rho \cdot \rho_1 = R^2$.

656. Довести, що діаметр, який ділить хорду пополам, проходить через полюс цієї хорди, тобто що він з нею полярно-спряжений.

657. Перевірити, що поляра будь-якої точки директриси кривої відносно цієї кривої проходить через її фокус.

Вказівка. Рівняння кривої взяти в канонічній (найпростішій) формі.

658. Довести, що всякі дві полярно-спряжені прямі, які проходять через фокус, перпендикулярні одна одній.

Вказівка. Рівняння кривої взяти в найпростішій формі.

659. Довести, що поляра будь-якої точки асимптоти гіперболи паралельна цій асимптоті.

660. Кінці малої осі еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ з'єднані з його фокусами. Знайти полярну фігуру утвореного ромба відносно цього ж еліпса.

Вказівка. Полярна фігура даного многокутника складена з полюсів його сторін і поляр його вершин.

661. В гіперболу $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ вписаний трикутник, вершини якого дані своїми координатами: $A(+4;\ +6)$, $B(+4;\ -6)$ і $C(-2;\ 0)$. Знайти фігуру, полярно-спряжену з трикутником відносно цієї гіперболи.

662. Знайти геометричне місце полюсів, дотичних до кола $x^2 + y^2 = 9$, відносно еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$.

663. Знайти геометричне місце полюсів, дотичних до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, відносно гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

664. Якщо з'єднати будь-яку точку $P(x_1,\ y_1)$ з фокусом еліпса F і провести через F перпендикуляр до цієї прямої (рис. 54), то цей перпендикуляр, поляра p точки P і директриса, відповідна

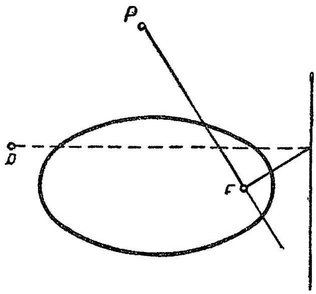

Рис. 54.

фокусові F, перетнуться в одній точці. Довести цю теорему аналітично і геометрично.

665. Знайти криву другого порядку, яка має центр у точці $M(+{}^3/_2; +{}^1/_2)$ і по відношенню до якої вершини трикутника $O(0;\ 0)$, $A(-1; +1)$, $B(-{}^1/_4; +{}^1/_2)$ служать полюсами протилежних сторін.

666. Відносно кривої другого порядку вісь ординат служить полярою точки $(+5;\ 0)$ і вісь абсцис — полярою точки $(0; +3)$. Скласти рівняння цієї кривої, знаючи, що вона проходить через точки $M(+1; +2)$ і $N(0; +{}^3/_2)$.

7. Задачі на фокальні властивості кривих, не віднесених до головних напрямів[1]

667. Скласти рівняння параболи, фокус якої знаходиться в точці $(-{}^1/_3; -{}^2/_3)$ і директриса дана рівнянням $3x - 3y + 8 = 0$.

668. Скласти рівняння параболи, знаючи дві її точки $(+2;\ 0)$; $(+12;\ 0)$ і рівняння директриси $2x - y + 1 = 0$.

669. Скласти рівняння кривої другого порядку, знаючи її ексцентриситет $e = \sqrt{5}$, фокус $F(+1; +1)$ і відповідну директрису $x + 2y - 1 = 0$.

670. Крива проходить через точку $A(+7;\ 0)$; крім того, відомий її фокус $F(0; +1)$ і директриса $x - y + 3 = 0$. Написати рівняння цієї кривої.

671. Знайти рівносторонню гіперболу, директриса якої дана рівнянням $x + y - 1 = 0$ і відповідний фокус координатами: $x = +1$, $y = +1$.

672. Знайти фокуси і директриси кривої

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 - 12x + 6y = 0.$$

В к а з і в к а. Один з способів розв'язання полягає в тому, щоб віднести дану криву до її головних осей, визначити координати фокуса за канонічним рівнянням і потім знову перейти до початкової системи координат. Директриси визначаються як поляри фокусів.

Другий спосіб дає змогу уникнути перетворення координат, а саме: позначимо координати одного з шуканих фокусів через x_1, y_1 і рівняння відповідної директриси візьмемо в нормальному вигляді

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0;$$

[1] У всіх задачах цього параграфа передбачається, що $\omega = \frac{\pi}{2}$.

тоді рівняння кривої може бути подане так:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = e^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2.$$

З умови пропорціональності коефіцієнтів цього рівняння і даного рівняння ми визначимо п'ять невідомих: x_1, y_1, e, α і p, що дає нам зразу координати фокуса і параметри з рівняння директриси.

673. Знайти фокус і директрису параболи

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 16x - 12y - 4 = 0.$$

674. Гіпербола проходить через точку $A(+2;\ 0)$ і має такі фокуси: $F_1(+2;\ +3)$; $F_2(+1;\ 0)$. Скласти рівняння цієї гіперболи.

675. Дано фокуси еліпса $F_1(+1;\ +3)$, $F_2(-1;\ +2)$ і одна з його дотичних: $x - y + 4 = 0$. Знайти рівняння цього еліпса.

676. Чи можна знайти гіперболу за завданнями попередньої задачі?

677. Дано два фокуси кривої $F_1(+1;\ +1)$, $F_2(-2;\ -2)$ і одна з її директрис: $x + y - 1 = 0$. Знайти рівняння цієї кривої.

678. Скласти рівняння кривої другого порядку, знаючи її ексцентриситет $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ і координати двох фокусів: $(0,\ 0)$ і $(-{}^2/_5;\ +{}^4/_5)$.

679. Вершина параболи збігається з початком координат, і фокус знаходиться в точці $(+1;\ +1)$. Яке рівняння цієї параболи?

680. Скласти рівняння параболи, яка проходить через точку $A(+2;\ +1)$, якщо відома її директриса $x - 2y - 5 = 0$ і вісь симетрії $2x + y - 1 = 0$.

681. Крива другого порядку проходить через початок координат, має центр у точці $C(+1;\ +2)$, і її директрисою служить пряма $x + 2y - 1 = 0$. Знайти рівняння кривої.

682. Гіпербола має фокус у точці $(-2;\ +2)$, і прямі $2x - y + 1 = 0$ та $x + 2y - 7 = 0$ служать їй асимптотами. Знайти рівняння гіперболи.

683. Гіпербола проходить через точку $A(0;\ +1)$, має фокус на початку координат, і пряма $x - 1 = 0$ служить їй асимптотою. Знайти рівняння цієї гіперболи.

8. Мішані задачі

684. У точках перетину осей координат з прямими, які належать до одного і того ж пучка, проведені перпендикуляри до відповідних осей. Знайти геометричне місце точок перетину цих перпендикулярів; кут $\omega = \frac{\pi}{2}$.

684*. Стержень RQ обертається навколо нерухомої точки P і підштовхує прямокутний трикутник ACB, який ковзає по прямій

KL (рис. 55). Знайти геометричне місце точок (M) перетину стержня PQ з продовженням гіпотенузи AB. Скласти рівняння, дослідити і накреслити відповідну криву. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду.

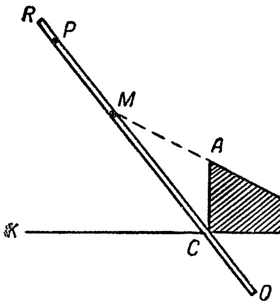

Рис. 55.

685. Площина α ковзає по нерухомій площині β так, що дві її точки A і B переміщаються по двох перпендикулярних прямих нерухомої площини. Визначити і дослідити траєкторію будь-якої іншої точки C рухомої площини (рис. 56).

686. Довести, що осі еліпса, описаного точкою C в попередній задачі, напрямлені по прямих OA' і OB', які з'єднують початок координат з кінцями того діаметра круга OAB, який проходить

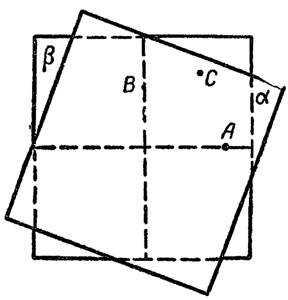

Рис. 56.

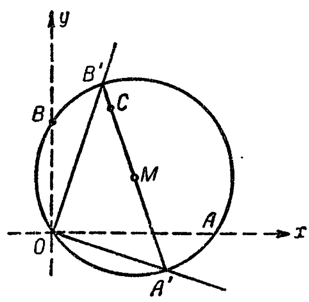

Рис. 57.

через точку C (рис. 57). Знайти величину цих осей. Які точки рухомої площини описують еліпси з осями, що збігаються? Які точки описують еліпси з відповідно рівними осями?

686*. Коло котиться без ковзання по внутрішній стороні іншого нерухомого кола, радіус якого вдвоє більший від радіуса круга, що котиться. Яка траєкторія будь-якої точки, незмінно пов'язаної з кругом, що котиться?

687. Дві сторони $CB = a$ і $CA = b$ трикутника ABC розподілені точками M і N у відношеннях λ і $\frac{1}{\lambda}$ (вважаючи від спільної вершини). Знайти геометричне місце точок перетину прямих AM і BN при змінному λ.

687. Знайти траєкторію центра круга, описаного біля трикутника, коли одна з його вершин лишається нерухомою, а протилежна сторона, не змінюючи своєї довжини, ковзає по прямій лінії.

688. Шарнірний механізм (рис. 58) складається з двох рухомих стержнів AB і CD і нерухомої лінійки AL. Стержень AB прикріплений шарніром B до стержня CD, причому $AB = CB$, і обертається

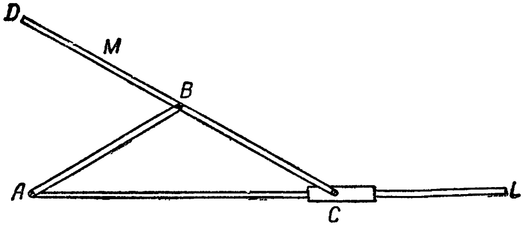

Рис. 58.

біля нерухомої точки A. Кінець C стержня CD ковзає по нерухомій лінійці AL. Знайти траєкторію будь-якої точки M стержня CD.

689. Знайти траєкторію будь-якої точки шатуна парової машини (рис. 59).

Вказівка. Ця задача відрізняється від попередньої тим, що $AB \neq CB$.

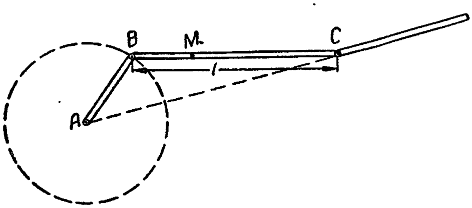

Рис. 59.

690. Знайти геометричне місце точок, симетричних з центром еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ відносно його дотичних; $\omega = \frac{\pi}{2}$.

691. Довести, що крива попередньої задачі може бути одержана як траєкторія середини M малого стержня CD шарнірного

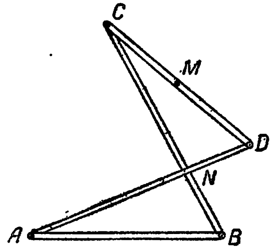

Рис. 60.

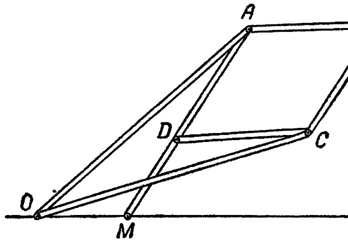

Рис. 61.

антипаралелограма $ABCD$, у якого закріплена протилежна ланка AB (рис. 60).

692. Знайти геометричне місце точок, симетричних з центром гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ відносно її дотичних. Кут $\omega = \frac{\pi}{2}$.

693. Довести, що крива попередньої задачі є траєкторія середини великого стержня антипаралелограма, протилежна ланка якого закріплена.

694. Довести, що шарнірним механізмом $OABCD$ (рис. 61), так званим інверсором, здійснюється прямолінійний рух точки B.

Пояснення до рисунка: точки O і M нерухомі, біля них обертаються стержні OA, OC і MD; всі сім стержнів з'єднані між собою. Довжина стержнів:

$$OA = OC = l; \quad AB = BC = CD = DA = a; \quad MD = OM = b.$$

ЧАСТИНА ТРЕТЯ
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

РОЗДІЛ VII
ПРЯМОКУТНІ КООРДИНАТИ

Положення геометричних образів у просторі можна визначити по відношенню до прямокутної системи координат, яка складається з трьох взаємно перпендикулярних осей координат, що перетинаються в одній і тій же точці (початок координат O), і трьох площин, що попарно їх з'єднують (координатні площини). На кожній осі вибирається додатний напрям і одиниця довжини.

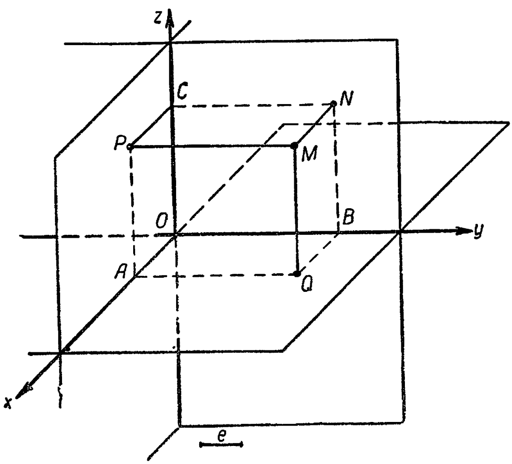

Рис. 62.

Положення точки M у просторі (рис. 62) визначається трьома числами — її координатами:

абсцисою $x=\frac{NM}{e}=\frac{OA}{e}$,

ординатою $y=\frac{PM}{e}=\frac{OB}{e}$

і аплікатою $z=\frac{QM}{e}=\frac{OC}{e}$.

Кожна з них дає віддаль точки M від однієї з площин координат, а знак показує, по який бік від цієї площини розміщена точка, а саме: чи вона взята в бік додатного чи від'ємного напряму третьої осі (яка не лежить у відповідній координатній площині).

Три координатні площини (рис. 63) ділять простір на вісім частин (октантів). Координати точок, розміщених у різних частинах, мають різні знаки.

Точки, які лежать на координатних площинах, мають одну з координат, що дорівнює нулеві; точки, які лежать на осях координат, мають дві координати, рівні нулеві.

Координата	Октант							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Абсциса	+	—	—	+	+	—	—	+
Ордината	+	+	—	—	+	+	—	—
Апліката	+	+	+	+	—	—	—	—

Знаючи значення трьох координат, можна побудувати лише одну точку. Шукана точка служить кінцем ламаної лінії, яку ми одержимо, відклавши на осі x відрізок OA, рівний абсцисі; з кінця його паралельно до осі y — відрізок AB, рівний ординаті, і з його кінця паралельно осі z — відрізок BM, рівний аплікаті точки. На рис. 64 побудована точка $M(-3; +2; -1)$. Отже, установлена взаємно однозначна відповідність між точками простору і трійками чисел (x, y, z). Цією відповідністю можна скористатися, щоб уникнути

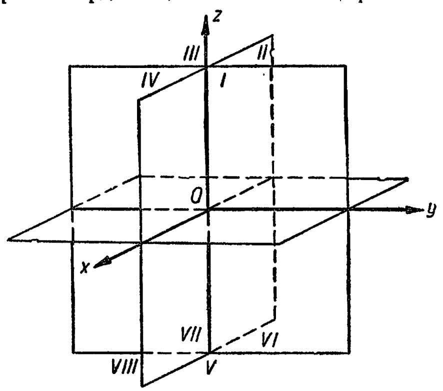

Рис. 63.

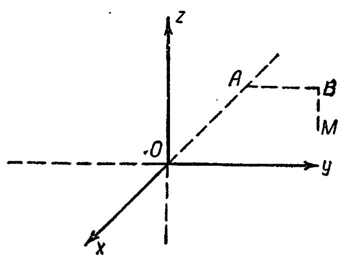

Рис. 64.

одночасних змін трьох величин, або, інакше, зображення залежності однієї функції від двох незалежних змінних.

Так, наприклад, об'єм (v) певної маси газу залежить від температури (t) і тиску (p). Залежність між цими трьома величинами дається формулою: $v = \frac{c}{p}\left(1 + \frac{t}{273}\right)$; вона може бути зображена геометрично. Відкладатимемо температуру по осі x, тиск — по осі y і об'єм газу — по осі z. Вибрати певну температуру і тиск означає дати певні значення двом координатам x і y, тобто вибрати точку на площині (xy); вибраним значенням незалежних змінних відповідає певний об'єм газу; це значення функції відкладаємо на перпендикулярі, поставленому до площини (xy) у вибраній точці. Змінюючи температуру і тиск, ми переходимо на площині (xy) від однієї точки до другої і на кожній з них одержимо в просторі точку, апліката якої дорівнює відповідному об'ємові газу. Сукупність всіх цих точок у просторі дасть деяку поверхню, і по висоті її точок над площиною (xy) ми судимо про зміну об'єму газу при зміні температури і тиску. Якщо ми виберемо сталу температуру (x = const) і змінюватимемо тільки тиск, то доведеться обмежитися розглядом тих точок поверхні, які лежать у площині, паралельній до площини (yz), — лінія перетину цієї площини з поверхнею дасть нам графік об'єму газу залежно від тиску. Оскільки залежність між об'ємом і тиском при сталій температурі виражається формулою $v \cdot p = \text{const}$, то лінія, яка зображає цю залежність, — гіпербола.

Надаючи тискові стале значення ($y = \text{const}$) і змінюючи температуру, ми дістанемо в площині, паралельній площині (xz), криву, яка зображає залежність між об'ємом газу і температурою при сталому тиску. Ця залежність виражається формулою $v = c_1 + c_2 t$, і відповідна лінія — пряма.

Отже, поверхня, яка зображає залежність об'єму газу від температури і від тиску, перетинається площинами, паралельними площині (xz), по прямих, а площинами, паралельними до площини (yz), по гіперболах. У площинах, паралельних до площини (xy), ми дістанемо лінії (прямі), які зображають залежність, яка повинна існувати між температурою і тиском при збереженні сталого об'єму [1].

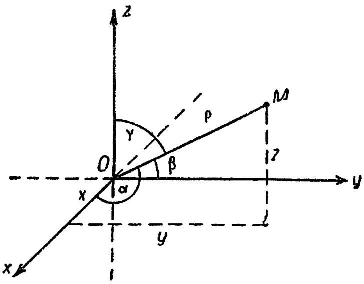

Рис. 65.

Віддаль (ρ) точки (M) від початку координат називається радіусом-вектором цієї точки, і ми маємо:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{1}$$

Координати точки є проекції її радіуса-вектора на осі координат:

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \cos \beta, \quad z = \rho \cos \gamma, \tag{2}$$

де α, β і γ означають кути між радіусом-вектором і додатним напрямом трьох осей координат (рис. 65); ці кути пов'язані співвідношенням:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \tag{3}$$

Співвідношення (3) справедливе для кутів, утворених будь-якою прямою з трьома взаємно перпендикулярними осями.

Віддаль між двома точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ обчислюється за формулою

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{4}$$

Ця віддаль розглядається звичайно тільки за абсолютною величиною.

Напрям відрізка AB характеризується кутами α, β і γ, які утворюють з додатними напрямами осей координат:

$$\left.\begin{aligned}
\cos \alpha &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\
\cos \beta &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\
\cos \gamma &= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Якщо напрям двох прямих дано кутами (α, β, γ) і (α', β', γ'), то кут φ між ними [2] обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \beta \cdot \cos \beta' + \cos \gamma \cdot \cos \gamma'. \tag{6}$$

---

[1] Вищенаведена поверхня називається гіперболічним параболоїдом і буде детально вивчена далі.

[2] Якщо дві прямі не перетинаються, то кутом між ними називається кут між двома прямими, що перетинаються, які відповідно паралельні даним прямим.

Умова перпендикулярності прямих:

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma' = 0. \quad (7)$$

Якщо дано дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то координати всякої третьої точки C прямої AB визначаються формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}, \quad (8)$$

де λ означає те відношення, в якому точка C поділяє відрізок AB, тобто

$$\lambda = \frac{AC}{CB}.$$

Площу всякої фігури можна обчислити, знаючи площу її проекції, а саме: площа проекції дорівнює проектованій площі, помноженій на косинус кута між площею фігури і площиною проекції, або, інакше, квадрат площі всякої плоскої фігури дорівнює сумі квадратів площ її проекцій на три взаємно перпендикулярні площини.

Якщо, не змінюючи напряму осей, перенести початок координат в точку $O'(a, b, c)$, то координати будь-якої точки (x, y, z) виразяться через нові координати (x', y', z') тієї ж точки таким чином:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c. \quad (9)$$

Якщо, не змінюючи початку координат, змінити напрям осей так, щоб нові осі утворили з старою віссю x кути α, α' і α'', з старою віссю y кути β, β' і β'' і з старою віссю z кути γ, γ' і γ'', то

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha'', \\ y &= x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos\beta'', \\ z &= x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'\cos\gamma''. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

695. Побудувати точки:

$$A(+3;\ +2;\ +1),\ B(+4;\ -1;\ -2),\ C(-5;\ +3;\ +4),$$
$$D(+1;\ +4;\ -3),\ E(-3;\ +{}^1/_2;\ -1),\ F(0;\ +5;\ -2),$$
$$G(-1;\ -3;\ 0),\ H(+2;\ 0;\ -1),\ K(0;\ 0;\ +5),$$
$$L(-2;\ -5;\ +3).$$

696. Куб стоїть на площині (xy), причому центр його основи збігається з початком координат, бокові ребра лежать в координатних площинах. Знайти координати вершин куба, знаючи, що ребро його дорівнює a.

697. Дано точки: $P(+3;\ -1;\ +2)$ і $M(a, b, c)$. Обчислити координати точок, симетричних з даними відносно площин координат, до осей і до початку координат.

698. Як розміщені в просторі точки, для яких

$$\text{a) } x = y; \quad \text{b) } x = y = z?$$

699. Дослідити (розглянути перерізи площинами, паралельними координатним площинам) поверхню, яка зображає залежність між площиною прямокутника і довжиною його сторін.

700. Визначити віддаль точки $A(+12;\ -3;\ +4)$ від початку координат і від осей координат.

701. У третьому октанті знайти точку, знаючи її віддаль від трьох осей координат:

$$d_x = 5;\quad d_y = 3\sqrt{5};\quad d_z = 2\sqrt{13}.$$

702. Знайти напрям радіуса-вектора точки $P(+3;\ +2;\ +6)$ і точки $Q(a,\ a,\ a)$.

703. Визначити величину і напрям сили, складові якої по осях координат мають такі величини: $X = 10$, $Y = 5$, $Z = 10$.

704. Пряма утворює з двома осями координат кути в 60°. Під яким кутом нахилена вона до третьої осі?

705. Обчислити координати точки M, знаючи, що її радіус-вектор дорівнює восьми одиницям і нахилений до осі x під кутом 45°, а до осі z — під кутом 60°.

706. Знайти кути, які утворені радіусом-вектором точки $A\ (+6;\ +2;\ +9)$ з координатними площинами.

707. Яка залежність існує між косинусами кутів, утворених прямою з трьома координатними площинами?

708. Знайти залежність між: a) радіусом-вектором ρ і його проекціями на три осі координат $(\rho_x,\ \rho_y,\ \rho_z)$; b) радіусом-вектором ρ і його проекціями на три координатні площини $(\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3)$.

709. Знаючи напрям прямої ($\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$), знайти напрям її проекції на координатну площину (xy).

710. Довести, що коли площина відсікає на осях координат відрізки, що відповідно дорівнюють a, b і c, то довжина перпендикуляра (p), опущеного на цю площину з початку координат, задовольняє співвідношення:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}.$$

711. Знайти віддаль між точками $A\ (-2;\ +1;\ +3)$ і $B\ (0;\ -1;\ +2)$ і напрям прямої, що їх з'єднує.

712. У точці $A(+3;\ +2;\ +7)$ прикладена сила $R = 15$. Визначити складові цієї сили по осях і координати кінця вектора, який зображає силу, знаючи, що кути між цим вектором і осями координат задовольняють співвідношення:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 3 : 4 : 5.$$

713. У точці $A(+2;\ -1;\ +5)$ прикладена сила $R = 11$. Знаючи дві складові цієї сили $X = 7$ і $Y = 6$, визначити напрям і кінець вектора, що її зображає.

714. На осі z знайти точку, рівновіддалену від точок:

$$A\,(-4;\ +1;\ +7)\ \text{і}\ B\,(+3;\ +5;\ -2).$$

715. На координатній площині (yz) знайти точку, однаково віддалену від трьох даних точок:

$$A\,(+3;\ +1;\ +2);\ B\,(+4;\ -2;\ -2)\ \text{і}\ C(0;\ 5;\ +1).$$

716. Кульова поверхня проходить через початок координат і через точки: $A(+4;\ 0;\ 0)$, $B(+1;\ +3;\ 0)$ і $C(0;\ 0;\ -4)$. Знайти центр і радіус кулі.

717. На площинах координат знайти точки, які разом з початком координат служили б вершинами правильного тетраедра з ребрами, які дорівнюють одиниці.

718. Знайти кут між прямою, яка лежить у площині (xy) і нахилена до осі x під кутом α, і прямою, що лежить у площині (xz) і утворює з віссю x кут α'.

719. Знайти кут між бісектрисами кутів xOy і yOz.

720. Знайти кут, утворений вектором, компоненти якого $X=10$, $Y=11$, $Z=2$, і прямою, яка проходить через точки $P(0;\ -8;\ -1)$ і $Q(+3;\ -2;\ +1)$.

721. Знайти напрям прямої, одночасно перпендикулярної до осі z і до прямої, яка проходить через дві точки $A(+1;\ -1;\ +4)$ і $B(-3;\ +2;\ +4)$.

722. Перевірити, що чотирикутник, вершини якого знаходяться в точках $A(+5;\ +2;\ +6)$, $B(+6;\ +4;\ +4)$, $C(+4;\ +3;\ +2)$ і $D(+3;\ +1;\ +4)$, є квадрат.

723. Яку умову повинні задовольняти напрямні косинуси трьох прямих, які лежать в одній і тій же площині?

724. Обчислити площу еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, який являє собою ортогональну проекцію круга радіуса $r=a$ на площину (xy).

725. На осях координат відкладені від початку координат відрізки, відповідно рівні 1, 2 і 3; кінці цих відрізків з'єднані прямими. Визначити площу одержаного таким чином трикутника.

726. Обчислити площу трикутника, вершини якого знаходяться в точках $A(-1;\ 0;\ -1)$, $B(0;\ +2;\ -3)$ і $C(+4;\ +4;\ +1)$.

727. Перевірити, що прямі, які з'єднують середини суміжних сторін косого чотирикутника, утворюють паралелограм.

728. Довести, що прямі, які з'єднують середину протилежних ребер тетраедра, перетинаються в одній точці і поділяються в ній пополам.

729. Дано дві вершини трикутника: $A(-4;\ -1;\ +2)$ і $B(+3;\ +5;\ -6)$. Знайти третю вершину C, знаючи, що середина сторони AC лежить на осі y, а середина сторони BC — на площині (xz).

730. Відрізок AB поділений на п'ять рівних частин; відома перша точка поділу $C(+3;\ -5;\ +7)$ і остання $F(-2;\ +4;\ -8)$. Визначити координати кінців відрізка і решти точок поділу.

731. Знайти центр ваги тетраедра, який має такі вершини:

$$A(x_1,\ y_1,\ z_1),\quad B(x_2,\ y_2,\ z_2),$$
$$C(x_3,\ y_3,\ z_3),\quad D(x_4,\ y_4,\ z_4).$$

732. Знайти відношення, в якому кожна з площин координат поділяє віддаль між точками $A(+2;\ -1;\ +7)$ і $B(+4;\ +5;\ -2)$.

732*. Перевірити, що три точки $A(+1; -5; +3)$, $B(+5; -1; +7)$ і $C(+6; 0; +8)$ лежать на одній прямій.

733. Дано дві прямі: одна з них проходить через точки $A(-3; +5; +15)$ і $B(0; 0; +7)$, а друга — через точки $C(+2; -1; +4)$ і $D(+4; -3; 0)$. Дізнатися, чи перетинаються ці прямі, і якщо перетинаються, то знайти точку перетину.

734. Дізнатися, чи лежать в одній площині такі чотири точки: $A(+3; -2; +3)$, $B(0; +4; +9)$, $C(+2; 0; +5)$ і $D(+2; -8; -1)$.

735. Вершини тетраедра спочатку збігалися з точками A $(-7; +3; -2)$, B $(0; +2; +1)$, C $(+4; -1; 0)$ і D $(-1; 0; -3)$. Внаслідок деякого поступального руху центр ваги тетраедра виявився в точці M $(+6; -2; +1)$. Які будуть координати вершин тетраедра після його переміщення?

736. Скласти формули перетворення координат, якщо спочатку осі збігалися з трьома ребрами куба, що перетинаються в одній з його вершин, а потім—з трьома відповідно паралельними ребрами того самого куба, який проходить через протилежну вершину; напрям осей вибрано так, що початок координат кожної з цих систем має по відношенню до другої системи додатні координати.

737. Координати деяких точок задовольняють рівняння:

$$3x^2 + y^2 - 2xz + 2x - 6y + 4z - 5 = 0.$$

Яке рівняння задовольнятимуть нові координати тих же точок, якщо перенести початок координат у точку O' $(+2; +3; +7)$?

738. Як перетворюється рівняння $z = xy$, якщо, не змінюючи осі z, прийняти бісектриси кута xOy за нові осі абсцис і ординат?

739. Три ребра куба збіглися з додатним напрямом осей координат; потім куб повернули на кут ϑ навколо діагоналі, яка проходить через початок координат, і ребра, які збігаються з осями, прийняли за відповідні нові осі координат. Скласти формули переходу від старої системи координат до нової, якщо a) $\vartheta = 120°$ і b) $\vartheta = 60°$.

РОЗДІЛ VIII
ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ РІВНЯНЬ

Якщо ми маємо рівняння з трьома змінними і розглядатимемо ці змінні як координати точки простору, то сукупність цих точок, координати яких задовольняють дане рівняння, становитиме деяку поверхню. Інакше: одне рівняння між трьома координатами зображає поверхню.

Якщо рівняння має тільки дві змінні і ми продовжуємо розглядати їх як дві координати точки простору (наприклад x і y), то рівняння являє собою циліндричну поверхню, твірні якої паралельні до осі відсутньої координати (z). Якщо ми змінні цього ж рівняння розглядатимемо як координати точки відповідної координатної площини (тобто припустимо $z = 0$), то рівняння дасть нам напрямну цієї циліндричної поверхні.

Якщо рівняння має тільки одну координату точки простору (наприклад x), то воно зображає одну або декілька (залежно від степеня рівняння) площин, паралельних відповідній координатній площині (yz).

Рівняння являє собою сукупність декількох поверхень, якщо ліва частина його, після перенесення в неї всіх членів рівняння, розкладається на множники. Рівняння цих поверхень дістанемо, прирівнюючи до нуля кожний співмножник окремо.

Сукупність точок, координати яких задовольняють два рівняння, становить деяку л і н і ю — лінію перетину відповідних двох поверхень. Отже, два рівняння між трьома координатами зображають лінію.

Якщо ми маємо рівняння двох поверхень:

$$F(x, y, z) = 0 \text{ і } f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

то рівняння

$$F(x, y, z) - k \cdot f(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

являє собою поверхню, яка проходить через лінію перетину даних двох поверхень. Змінюючи значення параметра k, дістанемо пучок поверхень. Лінію, яку зображають двоє рівнянь (1), можна визначити будь-якими двома іншими поверхнями пучка (2).

Три рівняння між трьома координатами визначають одну або декілька окремих т о ч о к — точок перетину трьох поверхень, якщо тільки рівняння не залежні між собою, тобто відповідні поверхні не належать одному і тому ж пучкові.

Поверхні і лінії можна визначити тими геометричними властивостями, які мають їх точки, і тоді виникає задача про складання їх рівнянь. Немає необхідності розглядати всі точки, які мають відому властивість; досить ввести твірну точку, яка своїм рухом описує відповідний геометричний образ. Якщо рух твірної точки обмежено однією умовою, для аналітичного виразу якого достатньо одного рівняння, — відповідне геометричне місце точок є поверхня. Якщо рух твірної точки обмежений двома незалежними одна від одної умовами, які можуть бути виражені двома рівняннями, — відповідна сукупність точок є лінія.

740. Дослідити, які геометричні образи дані рівняннями:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; b) $x^2 + y^2 = 1$; c) $x^2 = 1$; d) $x^2 - y^2 = 0$;
e) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; f) $x^2 + y^2 = 0$; g) $x^2 = 0$; h) $xyz = 0$;
i) $y - \sqrt{3}z = 0$.

741. Дослідити, які геометричні образи дані такими системами рівнянь:

a) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25, \\ y + 1 = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \\ x - y = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 5xz = 0; \\ z = 0. \end{cases}$

742. Знайти циліндр, проектуючий на площину (xy) криву:

$$\begin{cases} -9y^2 + 6xy - 2zx + 24x - 9y + 3z - 63 = 0, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

743. Знайти проекцію кривої

$$x^2 + z^2 + 3yz - 2x + 3z - 3 = 0,$$
$y - z + 1 = 0$ на площину (xz).

744. Написати рівняння кульової поверхні, яка має центр у точці $C(+3; -1; +6)$ і радіус $R = 7$.

745. Знайти геометричне місце точок, які знаходяться на віддалі чотирьох одиниць від площини (yz) і на віддалі трьох одиниць від точки $A(+5;\ +2;\ -1)$.

746. Написати рівняння площини, знаючи, що точки

$$A(+4;\ 0;\ -3) \text{ і } B\ (+1;\ -5;\ +2)$$

симетричні відносно цієї площини.

747. Визначити траєкторію точки, яка рухається в площині (xz) так, що її радіус-вектор весь час дорівнює віддалі її від точки $A(+5;\ -3;\ +1)$.

748. Знайти геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки і даної площини.

749. Знайти геометричне місце точок, сума віддалей яких від двох даних точок $P(c;\ 0;\ 0)$ і $Q(-c;\ 0;\ 0)$ є величина стала, рівна $2a$.

750. Стержень переміщається в просторі так, що три його сталі точки A, B і C (рис. 66) ковзають по трьох координатних площинах. Чим обмежений рух четвертої точки M, довільно вибраної на стержні?

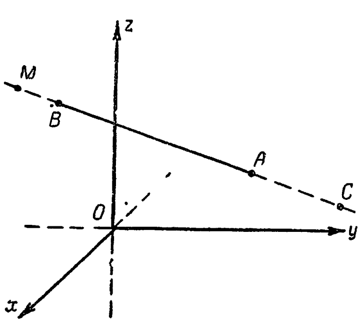

Рис. 66.

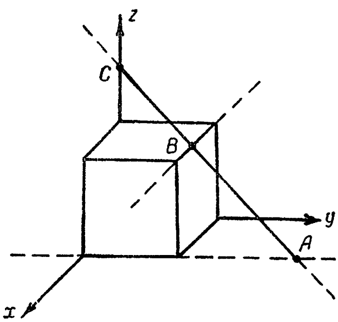

Рис. 67.

751. Дослідити поверхню попередньої задачі, розглянувши її перерізи площинами, паралельними координатним площинам.

752. Скласти рівняння поверхні, описаної стержнем, який ковзає по трьох ребрах куба, з яких ніякі два не лежать на одній площині (рис. 67). Ребро куба дорівнює a.

РОЗДІЛ IX
ПЛОЩИНА

Всяке рівняння першого степеня відносно координат точки простору

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

зображає площину, і, навпаки, всяку площину можна подати в вигляді рівняння першого степеня. Рівняння площини має три незалежних параметри.

Якщо в рівнянні (1) відсутній вільний член, то площина проходить через початок координат. Якщо відсутній член з однією з координат, то площина паралельна відповідній осі координат; якщо одночасно відсутній вільний член і член з однією з координат, то площина проходить через відповідну вісь. Якщо відсутні члени з двома координатами, то площина паралельна тій координатній площині, яка має відповідні осі. Якщо відсутні члени з двома координатами і вільний член, то площина збігається з однією з координатних площин. Якщо, нарешті, відсутні всі члени з координатами, а вільний член не дорівнює нулеві, то рівняння смислу не має.

Якщо за параметри прийняти відрізки a, b і c, відсічені площиною на осях координат, то рівняння площини матиме вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{2}$$

Якщо за параметри прийняти довжину перпендикуляра p, опущеного на площину з початку координат, і напрямні косинуси цього перпендикуляра ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), то дістанемо **нормальне рівняння площини**:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0. \tag{3}$$

Щоб звести загальне рівняння (1) площини до нормального вигляду, його треба помножити на **нормуючий множник**:

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4}$$

Знак нормуючого множника повинен бути протилежний знакові вільного члена рівняння (1).

Віддаль площини (1) від початку координат і напрямні косинуси перпендикуляра до цієї площини виражаються через коефіцієнти її рівняння так:

$$\left.\begin{aligned} p &= \mp \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, & \cos\alpha &= \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\beta &= \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, & \cos\gamma &= \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Віддаль будь-якої точки $P(x', y', z')$ від площини (1) обчислюється за формулою:

$$\delta = \pm \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{6}$$

або, якщо площину дано нормальним рівнянням, за формулою:

$$\delta = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma - p, \tag{6'}$$

тобто віддаль точки від площини дорівнює лівій частині нормального рівняння площини, в якій текучі координати замінені координатами даної точки.

Кут між двома площинами

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ \text{і} \qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

визначається так:

$$\cos\varphi = \pm \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}. \tag{8}$$

Умова паралельності площин (7):

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}. \tag{9}$$

Умова перпендикулярності площин:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \tag{10}$$

Якщо площина визначена трьома точками (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) і (x_3, y_3, z_3), то рівняння її матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (11)$$

Якщо чотири точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) і (x_4, y_4, z_4) лежать в одній площині, то між їх координатами існує таке співвідношення:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

Якщо ці чотири точки не лежать в одній площині, то об'єм тетраедра, вершинами якого вони служать, обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Рівняння

$$Ax + By + Cz + D + k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0, \qquad (14)$$

де k — змінний параметр, який являє собою пучок площин, що проходять через лінію перетину двох основних площин:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ і } A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

Рівняння

$$Ax + By + Cz + D + k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \\ + l(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (15)$$

являє собою, при змінних параметрах k і l, зв'язку площин, тобто сукупність всіх площин, які проходять через точку перетину трьох основних площин:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

і

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Зв'язка площин, які проходять через точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, може бути подана також рівнянням:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \qquad (16)$$

де A, B і C можуть мати будь-які значення.

753. Чи проходить площина $4x - y + 3z + 1 = 0$ через одну з таких точок:
$A(-1;\ +6;\ +3)$, $B(+3;\ -2;\ -5)$, $C(0;\ +4;\ +1)$, $D(+2;\ 0;\ +5)$, $E(+2;\ +7;\ 0)$, $F(0;\ +1;\ 0)$?

754. Рухома точка, яка мала початкове положення $M_0(+5;\ -1;\ +2)$, переміщається паралельно до осі y. Знайти точку її зустрічі з площиною $x - 2y - 3z + 7 = 0$.

755. Довести, що всяке рівняння першого степеня $Ax + By + Cz + D = 0$ являє собою площину, грунтуючись на тому, що коли координати двох точок якої-небудь прямої задовольняють це рівняння, то і координати будь-якої іншої точки цієї ж прямої задовольняють його.

756. Вказати особливості в розміщенні таких площин;

a) $3x - 5z + 1 = 0$; d) $2x + 3y - 7z = 0$;
b) $9y - 2 = 0$; e) $8y - 3z = 0$
c) $x + y - 5 = 0$;

відносно осей координат.

757. Написати рівняння площини:

a) яка паралельна до площини (xz) і проходить через точку $(+2;\ -5;\ +3)$;

b) яка проходить через вісь z і через точку $(-3\ +1;\ -2)$;

c) яка паралельна до осі x і проходить через дві точки $(+4;\ 0;\ -2)$ і $(+5;\ +1;\ +7)$.

758. Обчислити відрізки, відсічені на осях координат такими площинами:

a) $2x - 3y - z + 12 = 0$; d) $x - 4z + 6 = 0$;
b) $5x + y - 3z - 15 = 0$; e) $5x - 2y + z = 0$;
c) $x - y + z - 1 = 0$; f) $x - 7 = 0$.

759. Побудувати лінії перетину координатних площин з площиною $5x + 2y - 3z - 10 = 0$.

760. Площина $3x + y - 2z - 18 = 0$ разом з координатними площинами утворює деякий тетраедр. Обчислити ребро куба, який можна вмістити всередині цього тетраедра так, щоб три грані його збігалися з координатними площинами, а вершина, протилежна початкові координат, лежала б на даній площині.

761. Через точку $P\ (+7;\ -5;\ +1)$ провести площину, яка відтинала б на осях координат додатні і рівні між собою відрізки.

762. Три грані тетраедра, розміщеного в другому октанті, збігаються з координатними площинами. Написати рівняння четвертої грані, знаючи довжину ребер, що її обмежують:

$$AB = 6; \quad BC = \sqrt{29}; \quad CA = 5.$$

763. Привести до нормального вигляду рівняння таких площин:
a) $2x - 9y + 6z - 22 = 0$;
b) $10x + 2y - 11z + 60 = 0$;
c) $6x - 6y - 7z + 33 = 0$.

764. Обчислити віддаль площини $15x - 10y + 6z - 190 = 0$ від початку координат.

765. Скласти рівняння площини, яка проходить від початку координат на віддалі 6 одиниць і відсікає на осях координат відрізки, пов'язані співвідношенням: $a : b : c = 1 : 2 : 3$.

766. Визначити напрямні косинуси прямої, перпендикулярної до площини $2x - y + 2z + 9 = 0$.

767. Площина відсікає на осях координат такі відрізки: $a = 11$, $b = 55$, $c = 10$. Обчислити напрямні косинуси прямої, перпендикулярної до цієї площини.

768. Знайти кут між площиною $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ і площиною (yz).

769. Знайти точку, симетричну з початком координат відносно площини $6x - 2y - 9z + 121 = 0$.

770. Знайти площину, знаючи, що точка P $(+3; -6; +2)$ служить основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю площину.

771. Обчислити віддаль:

a) точки $(+3; +1; -1)$ від площини
$22x + 4y - 20z - 45 = 0$,
b) точки $(+4; +3; -2)$ від площини
$3x - y + 5z + 1 = 0$,
c) точки $(+2; 0; -{}^1/_2)$ від площини
$4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

772. Обчислити висоту (h_s) піраміди $S(0; +6; +4)$, A $(+3; +5; +3)$, $B(-2; +11; -5)$, C $(+1; -1; +4)$.

773. Дано дві точки A $(+1; +3; -2)$ і B $(+7; -4; +4)$. Через точку B провести площину, перпендикулярну до відрізка AB.

774. Положення дзеркала визначається рівнянням $2x - 6y + 3z - 42 = 0$. З якою точкою повинно збігатися дзеркальне зображення точки A $(+3; -7; +5)$?

775. Обчислити кути між такими площинами:

a) $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ і $x - 4y - z + 9 = 0$;
b) $3x - y + 2z + 15 = 0$ і $5x + 9y - 3z - 1 = 0$;
c) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ і $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

776. Через точку M $(-5; +16; +12)$ проведено дві площини: одна з них має вісь x, друга — вісь y. Обчислити кут між цими двома площинами.

777. Скласти рівняння площини:

a) яка проходить через точку $(-2; +7; +3)$ паралельно площині $x - 4y + 5z - 1 = 0$;

b) яка проходить через початок координат і перпендикулярна до двох площин:

$$2x - y + 5z + 3 = 0 \text{ і } x + 3y - z - 7 = 0;$$

c) проходить через точки $L(0; 0; +1)$ і $N(+3; 0; 0)$ і утворює кут $60°$ з площиною (xy).

778. Через вісь z провести площину, яка утворює з площиною $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

779. Перевірити, що три площини $2x-2y+z-3=0$, $3x-6z+1=0$ і $4x+5y+2z=0$ попарно перпендикулярні, і скласти формули перетворення координат, якими будемо користуватися, якщо першу площину прийняти за нову площину (xy), другу — за площину (yz) і третю — за площину (zx). Напрям же осей вибрано так, щоб старий початок відносно нової системи мав додатну абсцису і від'ємну аплікату.

780. Скласти рівняння площини, знаючи її віддаль від трьох точок $A(+6;\ +1;\ -1)$, $B(0;\ +5;\ +4)$ і $C(+5;\ +2;\ 0)$, а саме: $d_1=-1$; $d_2=+3$; $d_3=0$.

781. Написати рівняння площин, які поділяють пополам двогранні кути між площинами $3x-y+7z-4=0$ і $5x+3y-5z+2=0$.

782. На осі z знайти точку, рівновіддалену від двох площин: $x+4y-3z-2=0$.
$5x+z+8=0$.

783. Знайти центр сфери, вписаної в тетраедр, обмежений площинами координат і площиною $2x+3y-6z-4=0$.

784. Обчислити віддаль між площинами:

$$11x-2y-10z+15=0$$

і

$$11x-2y-10z-45=0.$$

785. На віддалі трьох одиниць від площини $3x-6y-2z+14=0$ провести паралельну їй площину.

786. Написати рівняння площини, яка проходить через початок координат і через дві точки $A(+3;\ -2;\ +1)$ і $B(+1;\ +4;\ 0)$.

787. Відомі координати вершини тетраедра: $A(0;\ 0;\ +2)$, $B(+3;\ 0;\ +5)$, $C(+1;\ +1;\ 0)$ і $D(+4;\ +1;\ +2)$. Скласти рівняння його граней.

788. Обчислити об'єм тетраедра, даного в попередній задачі.

789. Перевірити, чи можна провести площину через такі чотири точки:

a) $(+3;\ +1;\ 0)$, $(0;\ +7;\ +2)$, $(-1;\ 0;\ -5)$ і $(+4;\ +1;\ +5)$;
b) $(+1;\ -1;\ +1)$, $(0;\ +2;\ +4)$, $(+1;\ +3;\ +3)$ і $(+4;\ 0;\ -3)$.

790. Знайти точку перетину таких трьох площин:

a) $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$, $2x-3y+2z-9=0$;
b) $x-4y-2z+3=0$, $3x+y+z-5=0$, $-3x+12y+6z-7=0$;
c) $2x-y+5z-4=0$, $5x+2y-13z-23=0$, $3x-z+5=0$.

791. Перевірити, чи мають спільну точку такі чотири площини:

a) $5x-z+3=0$, $2x-y-4z+5=0$, $3y+2z-1=0$, $3x+4y+5z-3=0$;

b) $5x + 2y - 6 = 0$, $x + y - 3z = 0$, $2x - 3y + z + 8 = 0$, $3x + 2z - 1 = 0$.

792. Через лінію перетину площин $4x - y + 3z - 1 = 0$ і $x + 5y - z + 2 = 0$ провести площину:

a) яка проходить через початок координат;
b) яка проходить через точку $(+1;\ +1;\ +1)$;
c) паралельну осі y;
d) перпендикулярну до площини $2x - y + 5z - 3 = 0$.

793. У пучку, який визначається площинами $3x + y - 2z - 6 = 0$ і $x - 2y + 5z - 1 = 0$, знайти площини, перпендикулярні до цих основних площин.

794. У пучку, визначеному площинами $2x + y - 3z + 2 = 0$ і $5x + 5y - 4z + 3 = 0$, знайти дві перпендикулярні одна до одної площини, з яких одна проходить через точку $(+4;\ -3;\ +1)$.

795. Написати рівняння площини, перпендикулярної до площини $5x - y + 3z - 2 = 0$ і яка перетинає її по прямій, що лежить у площині (xy).

796. Через лінію перетину площин

$$x + 28y - 2z + 17 = 0$$

і

$$5x + 8y - z + 1 = 0$$

провести площини, які дотикаються до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

797. У пучку $x + 3y - 5 + k(x - y - 2z + 4) = 0$ знайти площину, яка відсікає рівні відрізки на осях x і y.

797 *. Визначити, яка з координатних площин належить пучкові:

$$4x - y + 2z - 6 + k(6x + 5y + 3z - 9) = 0?$$

798. Через лінію перетину площин: $x + 5y + z = 0$ і $x - z + 4 = 0$ провести площину, яка утворює кут $\frac{\pi}{4}$ з площиною $x - 4y - 8z + 12 = 0$.

799. При таких значеннях параметрів A і D площини $2x + y - z + 3 = 0$, $x - 3y + 5 = 0$ і $Ax + y - 2z + D = 0$ належать одному і тому ж пучкові?

799*. Перевірити, що площини $3x - 4y + 5 = 0$, $x - 2z + 1 = 0$ і $2y - 3z - 1 = 0$ належать одному і тому ж пучку площин.

800. У зв'язці, яка визначається площинами $x + y - z + 2 = 0$, $4x - 3y + z - 1 = 0$ і $2x + y - 5 = 0$, знайти площину:

a) яка проходить через вісь абсцис;
b) паралельну площині (xz);
c) яка проходить через початок координат і через точку $P\ (+1;\ +3;\ +2)$.

РОЗДІЛ X

ПРЯМА ЛІНІЯ В ПРОСТОРІ

1. Рівняння прямої. Кут між двома прямими. Умова перетину двох прямих у просторі

Пряма лінія може бути визначена як перетин двох площин; тому вона зображається сукупністю двох рівнянь першого степеня:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Цю саму пряму можна зобразити рівняннями будь-яких двох площин пучка, визначеного площинами (1). Особливо зручно вибирати серед цих площин ті, які проектують дану пряму на дві координатні площини; такі площини відповідно паралельні двом осям координат, і рівняння кожної з них має тільки дві координати. Отже, систему рівнянь прямої (1) можна звести до вигляду:

$$\left.\begin{aligned} x = mz + a, \\ y + nz + b. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Пряму можна визначити двома своїми точками. Якщо дано координати двох точок (x_1, y_1, z_1) і (x_2, y_2, z_2), то пряма, що проходить через них, зобразиться рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{3}$$

Ввівши позначення:

$$x_2 - x_1 = m; \; y_2 - y_1 = n; \; z_2 - z_1 = p,$$

ми дістанемо канонічну форму рівнянь прямої:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}, \tag{4}$$

причому знаменники m, n, і p пропорціональні до напрямних косинусів прямої

$$m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma, \tag{5}$$

і ми маємо:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \\ \cos\beta = \pm\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \\ \cos\gamma = \pm\frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Знак у формулах (6) може бути вибраний за нашим бажанням, але у всіх трьох формулах повинен бути один і той же. Зміна знака відповідає зміні додатного напряму на прямій.

Кут між двома прямими

$$\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{z - c^*}{p} \quad \text{і} \quad \frac{x - a_1}{m_1} = \frac{y - b_1}{n_1} = \frac{z - c_1}{p_1} \tag{7}$$

---

* a, b і c означають відомі координати якої-небудь точки прямої і написані тут замість x_1, y_1, z_1 рівнянь (4).

обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \pm\frac{mm_1 + nn_1 + pp_1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}. \tag{8}$$

Умова паралельності цих прямих:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1}. \tag{9}$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$mm_1 + nn_1 + pp_1 = 0 \tag{10}$$

Більшість задач розв'язується простіше, якщо рівняння прямих мають канонічну форму (4), і дуже важливо вміти зводити систему загальних рівнянь (1) до цього вигляду. Цього можна досягти таким чином: виключаючи з системи (1) один раз одну координату, другий раз іншу, ми переходимо до системи (2), потім знаходимо значення z з обох рівнянь (2) і прирівнюємо їх між собою:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z}{1};$$

тут $c = 0$ і $p = 1$.

Можна досягти мети і інакше: безпосередньо з рівнянь (1) обчислюємо координати a, b і c якої-небудь точки прямої [1], а потім замість кутових коефіцієнтів m, n і p беремо пропорціональні їм величини, обчислені з пропорції

$$m:n:p = \begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Якщо один з знаменників m, n, і p виявиться рівним нулеві, то чисельник відповідного дробу треба припустити рівним нулеві, тобто система

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$$

рівносильна системі $x - a = 0$ і $\frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$; така пряма перпендикулярна до осі x. Система $\frac{x-a}{0} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-c}{p}$ рівносильна системі $x - a = 0$ і $y - b = 0$; пряма паралельна осі z.

Якщо пряма дана однією точкою (a, b, c) і напрямними косинусами ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), то можна написати нормальну систему рівнянь цієї прямої:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}. \tag{12}$$

Ці рівняння виникають з (4) множенням усіх знаменників на нормуючий множник $\pm\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

У нормальній системі (12) кожне з трьох відношень дорівнює віддалі твірної точки (x, y, z) від сталої точки (a, b, c). У канонічній системі (4) відповідні відношення лише пропорціональні цій віддалі.

Умова, необхідна і достатня для перетину двох прямих (7) у просторі, виражається рівністю:

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

[1] Одній з координат даємо довільне значення і обчислюємо дві інші з даних двох рівнянь.

801. Вказати особливості в розміщенні таких прямих:

a) $\begin{cases} Ax + By + Cz = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} Ax + D = 0, \\ B_1y + D_1 = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ B_1y + D_1 = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} By + Cz + D = 0. \\ B_1y + C_1z + D_1 = 0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} Ax + Cz = 0, \\ A_1x + C_1z = 0; \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3y + 2z = 0, \\ 5x - 1 = 0; \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x + y - 3z - 7 = 0, \\ 2x + y - 3z - 7 = 0. \end{cases}$

802. При якому значенні вільного члена D пряма

$$3x - y + 2z - 6 = 0,$$
$$x + 4y - z + D = 0$$

перетинає вісь z?

803. При яких значеннях коефіцієнтів B і D пряма

$$x - 2y + z - 9 = 0,$$
$$3x + By + z + D = 0$$

лежить у площині (xy)?

804. Яку умову повинні задовольняти коефіцієнти в рівняннях прямої

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

для того, щоб пряма

a) була паралельна до осі x;
b) перетинала вісь y;
c) збігалася з віссю z;
d) була паралельна до площини (yz);
e) лежала в площині (xz);
f) проходила через початок координат?

805. Написати рівняння площин, які проектують пряму

$$\begin{cases} 5x + 8y - 3z + 9 = 0, \\ 2x - 4y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

на три координатні площини.

806. Якими рівняннями зобразяться проекції прямої

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 5 = 0, \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

на координатні площини?

807. Визначити сліди[1] прямої

$$\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

і побудувати цю пряму.

808. Скласти рівняння проекції прямої

$$x - 4y + 2z - 5 = 0,$$
$$3x + y - z + 2 = 0$$

на площину $2x + 3y + z - 6 = 0$.

809. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і через точку (a, b, c).

810. Написати рівняння ребер тетраедра, вершини якого дані своїми координатами: $A(0; 0; +2)$, $B(+4; 0; +5)$, $C(+5+; 3; 0)$, $D(-1; +4; -2)$.

811. Перевірити, чи лежать на одній прямій такі три точки: $(+3; 0; +1)$, $(0; +2; +4)$, $(+1; +^4/_3; +3)$.

812. Дано точки перетину прямої з двома координатними площинами $(x_1; y_1; 0)$ і $(x_2; 0; z_2)$. Обчислити координати точки перетину цієї ж прямої з третьою координатною площиною.

813. Визначити напрямні косинуси прямих

$$\text{a)}\ \frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{12};$$

$$\text{b)}\ \frac{x}{12} = \frac{y-7}{9} = \frac{z+3}{20}.$$

814. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(+1; -5; +3)$ і утворює з осями координат кути, які відповідно дорівнюють 60, 45 і 120°.

815. Визначити кут, утворений прямими:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2} \quad \text{і} \quad \frac{x}{2} = \frac{x-3}{9} = \frac{z+1}{6}.$$

816. Обчислити кути, утворені протилежними ребрами тетраедра з вершинами: $A(+3; -1; 0)$, $B(0; -7; +3)$, $C(-2; +1; -1)$, $D(+3; +2; +6)$.

817. Звести до канонічного вигляду рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

818. Обчислити напрямні косинуси прямої

$$\begin{cases} 5x - 6y + 2z + 21 = 0, \\ x - z + 3 = 0. \end{cases}$$

[1] Слідами називають точки перетину прямої з координатними площинами.

819. Визначити кут між двома прямими

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0, \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 4x+y-6z+2=0. \\ y-3z+2=0. \end{cases}$$

820. Через точку $(+2;\ -5;\ +3)$ провести пряму
a) паралельну осі z;
b) паралельну прямій $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$;
c) паралельну прямій $2x-y+3z-1=0,$

$$5x+4y-z-7=0.$$

821. У площині (xz) знайти пряму, яка проходить через початок координат і перпендикулярну до прямої

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}.$$

822. Перевірити, чи перетинаються такі прямі:

a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$ і $\frac{x-6}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$;

b) $\begin{cases} 4x+z-1=0, \\ x-2y+3=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 3x+y-z+4=0, \\ y+2z-8=0. \end{cases}$

823. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(+2;\ +3;\ +1)$ на пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

824. З початку координат опустити перпендикуляр на пряму

$$\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}.$$

825. Через точку $A\ (+4;\ 0;\ -1)$ провести пряму так, щоб вона перетинала дві дані прямі:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3} \text{ і } \frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$

826. З усіх прямих, які перетинають дві прямі:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1} \text{ і } \frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1},$$

знайти ту, яка була паралельна прямій

$$\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}.$$

827. Скласти рівняння загального перпендикуляра двох прямих:

$$\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1} \text{ і } \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

2. Пряма і площина

Щоб знайти точку перетину прямої

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{14}$$

і площини

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{15}$$

треба розв'язати сумісно ці три рівняння. Розв'язання буде краще, якщо ввести параметр ρ, рівний трьом відношенням (14). Тоді $x=m\rho+a$, $y=n\rho+b$, $z=p\rho+c$; вставляючи ці значення координат у рівняння площини (15), дістанемо значення ρ і потім уже визначимо шукані координати.

Кут між прямою (14) і площиною (15) обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{16}$$

Умова паралельності прямої (14) і площини (15):

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{17}$$

Умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{18}$$

Умова того, що пряма (14) цілком лежить у площині (15), виражається двома рівностями:

$$\left.\begin{aligned}Aa+Bb+Cc+D=0,\\ Am+Bn+Cp=0.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

828. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ і площини $3x+5y-z-2=0$.

829. Знайти точку перетину:

a) прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ і площини $3x-3y+2z-5=0$;

b) прямої $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ і площини $x+2y-4z+1=0$;

c) прямої $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ і площини $3x-y+2z-5=0$.

830. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки перетину площини $2x+y-3z+1=0$ з прямими $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+1}{2}$ і $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{-6}$.

831. При якому значенні коефіцієнта A площина $Ax+3y-5z+1=0$ буде паралельна прямій

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}?$$

832. При яких значеннях коефіцієнтів A і B площина $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$?

833. З точки $(+3; -2; +4)$ опустити перпендикуляр на площину $5x + 3y - 7z + 1 = 0$.

834. Через початок координат провести площину, перпендикулярну до прямої $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-2}$.

835. Знайти проекцію точки A $(+4; -3; +1)$ на площину $x + 2y - z - 3 = 0$.

836. Перевірити, чи лежить пряма:

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ на площині $4x + 3y - z + 3 = 0$;

b) $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z-2}{3}$ на площині $5x - 8y - 2z - 1 = 0$;

c) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{1}$ на площині $3x - 2y - z + 15 = 0$.

837. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $(+3; +1; -2)$ і через пряму

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}.$$

838. Через пряму $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ провести площину, перпендикулярну до площини $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

839. Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на площину $x - y + 3z + 8 = 0$.

840. Перевірити, що прямі

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4} \text{ і } \frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}$$

перетинаються, і написати рівняння площини, яка через них проходить.

841. Провести площину через перпендикуляри, опущені з точки $(-3; +2; +5)$ на площині

$$4x + y - 3z + 13 = 0 \quad \text{і} \quad x - 2y + z - 11 = 0.$$

842. Написати рівняння площини, яка проходить через такі дві паралельні прямі:

$$\frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5} \text{ і } \frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}.$$

843. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $(+4;\ -3;\ +1)$ і паралельної прямим:

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3} \text{ і } \frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}.$$

844. Написати рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ і паралельної прямій $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{-2}$.

845. Через пряму $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}$ провести площину, паралельну площині $x+y-z+15=0$.

846. Чи можна через пряму $\frac{x-7}{4}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-1}{6}$ провести площину паралельно до площини $2x+y-7z+1=0$?

847. Через точку $P(+1;\ 0;\ +7)$ паралельно до площини $3x-y+2z-15=0$ провести пряму так, щоб вона перетинала пряму

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}.$$

848. Знайти віддаль точки $P(+7;\ +9;\ +7)$ від прямої

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}.$$

849. На прямій $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{-1}$ знайти точку, найближчу до точки $(+3;\ +2;\ +6)$.

850. На прямій $\left\{\begin{array}{l} x+2y+z-1=0, \\ 3x-y+4z-29=0 \end{array}\right\}$ знайти точку, однаково віддалену від двох даних точок $A(+3;\ +11;\ +4)$ і $B(-5;\ -13;\ -2)$.

851. Знайти точку, симетричну з точкою $P(+4;\ +3;\ +10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

852. Знайти віддаль між двома паралельними прямими

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2} \text{ і } \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}.$$

853. Знайти найкоротші віддалі між двома прямими, що не перетинаються:

$$\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1} \text{ і } \frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}.$$

854. Обчислити віддаль між прямими:

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2} \text{ і } \frac{x-4}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{3}.$$

855. Дано вершини трикутника $A(+4;\ +1;\ -2)$, $B(2;\ 0;\ 0)$, $C(-2;\ +3;\ -5)$. Скласти рівняння його висоти, опущеної з вершини B на протилежну сторону.

856. Скласти рівняння бісектрис кута A трикутника, даного в задачі 855.

857. Через сторону AB трикутника задачі 855 провести площину, перпендикулярну до площини трикутника.

858. Дано куб, ребро якого дорівнює одиниці. Обчислити віддаль між вершиною куба і його діагоналлю, яка не проходить через цю вершину.

859. Перевірити, що площина, яка перпендикулярна до діагоналі куба і проходить через її середину, перетинає куб по *правильному шестикутнику*.

РОЗДІЛ XI

СФЕРА

Ми дістанемо рівняння сферичної поверхні, якщо виразимо аналітично той факт, що твірна точка (x, y, z) знаходиться від сталої точки — центра сфери (a, b, c) — на сталій віддалі, рівній радіусу R сфери:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2, \tag{1}$$

або в розкритому вигляді:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0. \tag{2}$$

Рівняння сфери має чотири незалежних параметри: координати центра і радіус. Це рівняння другого степеня, тому сфера — поверхня другого порядку. Рівняння сфери (2) має ту особливість, що коефіцієнти при квадратах координат рівні між собою, а члени з добутками координат відсутні. Навпаки, якщо рівняння другого степеня задовольняє ці дві умови, то воно зображає сферу і його можна звести до вигляду (1), доповнюючи до повних квадратів групи членів, що мають одні і ті ж координати. При цьому для R^2 може бути додатне, нульове або від'ємне значення; залежно від цього сфера буде дійсна, нульового радіуса (тільки одна дійсна точка) або уявна.

Якщо перенести початок координат у центр сфери, то рівняння її матиме простіший вигляд:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{3}$$

З усякою прямою лінією сфера має дві спільні точки (дійсні або уявні); якщо обидві точки перетину зливаються, то пряма дотикається до сфери, і тоді віддаль її від центра сфери дорівнює радіусові.

З усякою площиною сферична поверхня перетинається по колу (дійсному або уявному). Якщо площина знаходиться від центра на віддалі, що дорівнює радіусу, та лінія перетину перетворюється в круг нульового радіуса (одна дійсна точка); площина дотикається до сфери, в ній лежать усі прямі, що дотикаються до сфери в даній точці.

Площина, яка дотикається до сфери (1) у точці (x_1, y_1, z_1), має рівняння:

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)+(z_1-c)(z-c)=R^2. \tag{4}$$

Якщо сфера віднесена до центра, то дотична площина зображається рівнянням:

$$xx_1+yy_1+zz_1=R^2. \tag{5}$$

Якщо перенести всі члени рівняння сфери (1) в ліву частину, то ця ліва частина

$$S = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2$$

являтиме собою степінь точки (x_1, y_1, z) відносно сфери; інакше, вона дорівнює квадратові довжини дотичної, проведеної з точки (x, y, z) до сфери.

860. Написати рівняння кульової поверхні, яка має центр у точці:

a) $(+2; -1; +3)$ і радіус $R = 6$; b) $(0; 0; 0)$ і проходить через точку $(+6; -2; +3)$; c) $(+1; +4; -7)$ і дотикається до площини $6x + 6y - 7z + 42 = 0$; d) $(+6; -8; +3)$ і дотикається до осі z.

861. Скласти рівняння сфери, описаної біля тетраедра, одна з вершин якого збігається з початком координат, а три інші знаходяться в точках: $A\ (+2; 0; 0)$, $B\ (0; +5; 0)$ і $C\ (0; 0; +3)$.

862. Знайти центр і радіус кола:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36, \\ 3x + y - z - 9 = 0. \end{cases}$$

863. Скласти рівняння кульової поверхні, знаючи, що вона проходить через точку $(0; -3; +1)$ і перетинає площину (xy) по колу

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ z = 0. \end{cases}$$

864. Знайти проекцію кола

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 25, \\ 2x - y - 2z - 10 = 0 \end{cases}$$

на площину (xz).

865. Визначити координати центра і величину радіуса для кожної з таких сфер:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0$;
b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10 = 0$;
d) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 2z + 41 = 0$;
e) $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 36x + 24y + 72z - 95 = 0$.

866. Скласти рівняння сферичної поверхні, знаючи, що вона проходить через коло

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 36, \\ 4x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

і через точку $(+7; -3; +1)$.

867. Яке співвідношення повинні задовольняти коефіцієнти площини $Ax + By + Cz + D = 0$ для того, щоб ця площина дотикалась до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$?

868. У точках перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ і сфери $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 6$ провести дотичні площини до цієї сфери.

869. Через вісь x провести дотичні площини до сфери

$$(x+5)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=16.$$

870. До сфери $(x-4)^2+y^2+(z-2)^2=225$ провести дотичні площини, паралельні площині $10x-11y-2z+3=0$.

871. Написати рівняння сфери, яка дотикається до прямої $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-6}{4}$ в точці $(+1;\ -4;\ +6)$, і прямої $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{1}=$ $=\frac{z-2}{-6}$ у точці $(+4;\ -3;\ +2)$.

872. Написати рівняння сферичної поверхні, яка має центр у точці $C(+4;\ +5;\ -2)$, знаючи, що куля $x^2+y^2+z^2-4x-$ $-12y+36=0$ дотикається до її внутрішньої сторони.

873. Знайти геометричне місце точок, яке має однаковий степінь відносно двох сфер:

$$(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9;$$
$$(x-7)^2+y^2+(z-2)^2=16.$$

874. Знайти геометричне місце точок, які мають однаковий степінь відносно трьох кульових поверхонь:

$$x^2+y^2+z^2+10x-2y+21=0;$$
$$x^2+y^2+z^2+4y-6z+7=0;$$
$$x^2+y^2+z^2+2x-8z+8=0.$$

875. Знайти рівняння кульової поверхні, ортогональної до таких чотирьох поверхонь:

$$x^2+y^2+z^2=9;$$
$$(x+5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=53;$$
$$(x+1)^2+y^2+(z+3)^2=39;$$
$$x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=10.$$

РОЗДІЛ XII

КОНУС І ЦИЛІНДР

Конічною поверхнею називається поверхня, описана рухомою прямою (**твірною**), яка проходить через сталу точку (вершину конуса) і перетинає деяку криву (**напрямну**).

Якщо дано координати вершини конуса $(a,\ b,\ c)$ і рівняння напрямної лінії

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,\ y,\ z)=0, \\ f_2(x,\ y,\ z)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

то можна скласти рівняння конічної поверхні таким чином.

В будь-який момент свого руху твірна проходить через сталу точку $(a,\ b,\ c)$; її можна зобразити системою рівнянь:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{1}\text{*}, \qquad (2)$$

* Оскільки напрям прямої залежить тільки від відношень трьох кутових коефіцієнтів m, n, p, то один з них (не рівний нулеві) можна вважати рівним одиниці.

де m і n — змінні параметри, значення яких обмежені тим, що твірна повинна перетинати напрямну (1), тобто по відношенню до координат (x, y, z) чотири рівняння (1) і (2) повинні бути сумісні. Виключивши з цих чотирьох рівнянь x, y і z, дістанемо одно рівняння, яке зв'язує параметри m і n:

$$\varphi(m, n) = 0. \tag{3}$$

Виключивши m і n з рівнянь (2) і (3), дістанемо одно рівняння, яке задовольняють координати будь-якої точки рухомої твірної, тобто шукане рівнянь конічної поверхні. Найпростіше це можна здійснити, вставляючи в (3) замість m і n їх значення з (2), і тоді рівняння конуса ми дістанемо в такому вигляді:

$$\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}, \quad \frac{y-b}{z-c}\right) = 0. \tag{4}$$

Якщо початок координат перенесено в вершину, то рівняння конуса буде:

$$\varphi\left(\frac{x}{z}, \quad \frac{y}{z}\right) = 0, \tag{4'}$$

тобто конус з вершиною в початку координат зображається однорідним рівнянням. Навпаки, всяке однорідне рівняння являє собою конус, вершина якого збігається з початком координат.

Іноді доводиться складати рівняння конічної поверхні, описаної біля деякої даної поверхні, тобто такої, що складається з дотичних до цієї поверхні, які проходять через одну і ту ж точку; тоді співвідношення (3), яке зв'язує кутові коефіцієнти твірною, виводиться з умови дотику, а саме: при спільному розв'язанні рівняння поверхні і рівнянь твірної повинні утворитися рівні корені.

Ц и л і н д р и ч н о ю п о в е р х н е ю називається поверхня, описана прямою (т в і р н о ю), яка не змінює при русі свого напряму і весь час перетинає певну криву (н а п р я м н у).

Якщо дано рівняння напрямної лінії:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

і напрям твірної ($m : n : 1$), то можна скласти рівняння циліндричної поверхні.

Рівняння твірної ми подамо в вигляді:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z}{1}, \tag{6}$$

де m і n — дані кутові коефіцієнти, а змінними параметрами є координати a і b точки перетину твірної з площиною (xy) *.

Значення цих параметрів обмежені умовою перетину прямої (6) з кривою (5), умовою сумісності відповідних рівнянь; аналітичний вираз цього обмеження ми дістанемо, виключивши з чотирьох рівнянь (5) і (6) координати x, y, z. Тоді матимемо:

$$\varphi(a, b) = 0. \tag{7}$$

Координати будь-якої точки рухомої твірної, тобто координати будь-якої точки циліндричної поверхні, повинні задовольняти рівняння (6) при збереженні умови (7); виключивши з цих трьох рівнянь параметри a і b, ми дістанемо шукане рівняння циліндра:

$$\varphi(x - mz, \; y - nz) = 0, \tag{8}$$

* Якщо твірна паралельна цій площині, то можна скористатися точкою її перетину з другою координатною площиною.

Якщо напрямна дана в одній з координатних площин, то цим самим уже дано потрібне нам рівняння (7).

Якщо потрібно скласти рівняння циліндра, описаного біля деякої поверхні, то співвідношення, яке зв'язує змінні параметри твірної, знаходиться з умови дотику твірної і даної поверхні.

876. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в початку координат, а напрямна дана рівняннями:

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-5)^2=9, \\ z=4. \end{cases}$$

877. У площині (xy) лежить парабола; вершина її збігається з початком координат, вісь — з додатним напрямом осі x, і параметр $p=2$. Скласти рівняння конуса, прийнявши параболу за напрямну і вибравши вершину в точці $(0;\ 0;\ +8)$.

878. Знайти рівняння конуса, який проектує еліпс:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

з точки $(+4;\ 0;\ -3)$.

879. Пряма, яка весь час проходить через точку $(0;\ b;\ 0)$, ковзає по гіперболі

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0. \end{cases}$$

Написати рівняння конічної поверхні, описаної цією прямою.

880. Напрямну конуса дано рівняннями:

$$\begin{cases} 3x^2+6y^2-z=0; \\ x+y+z=1, \end{cases}$$

а вершина його знаходиться в точці $(-3;\ 0;\ 0)$. Скласти рівняння конуса.

881. Знайти геометричне місце дотичних, проведених з початку координат до сфери $(x-5)^2+(y+1)+z^2=16$.

882. Скласти рівняння круглого конуса, який проходить через усі три координатні осі.

883. Пряма $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{6}$ обертається навколо осі x. Знайти рівняння описаної нею поверхні.

884. Знайти геометричне місце прямих, які проходять через точку $(+3;\ 0;\ +5)$ і утворюють з площиною (xy) кут $\frac{\pi}{4}$.

885. Скласти рівняння циліндра, напрямною якого служить коло $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=0 \end{cases}$ і напрям твірної дано відношеннями $m:n:p=$ $=5:3:2$.

886. Знайти рівняння циліндра, знаючи, що він проходить через криву $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25, \\ x + y - z + 2 = 0, \end{cases}$ а твірна його: a) паралельна осі x; b) паралельна прямій $x = y$, $z = c$.

887. Напрямну циліндра дано рівняннями: $\begin{cases} x = y^2 + z \\ x = 2z, \end{cases}$, а твірна його перпендикулярна до площини напрямної. Скласти рівняння циліндра.

888. Написати рівняння циліндра, описаного біля сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, знаючи, що твірна його утворює рівні кути з трьома осями координат.

889. Дано дві паралельні прямі: $x = y = z$; $x + 1 = y = z - 1$; $x - 1 = y + 1 = z - 2$. Знайти круглий циліндр, що проходить через них.

РОЗДІЛ XIII

ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ДАНІ НАЙПРОСТІШИМИ РІВНЯННЯМИ

Серед поверхень другого порядку існують такі, які мають центр симетрії і три взаємно перпендикулярні площини симетрії, що проходять через нього. Якщо вибрати ці площини за координатні площини, то в рівняння поверхні не можуть увійти члени з першими степенями координат і члени з їх парними добутками, бо зміна знака в одній з координат, у двох з них або у всіх трьох не повинна відбитися на рівнянні. Отже, всяка центральна поверхня при відповідному виборі системи координат зобразиться рівнянням:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0, \quad (1)$$

і залежно від знаків коефіцієнтів це рівняння зображає різні типи поверхень, а саме:

1. Уявний еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1^*, \quad (2)$$

коли всі чотири коефіцієнти рівняння (1) мають однакові знаки.

2. Дійсний еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, (3), коли знак вільного члена протилежний знакові інших.

3. Однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, (4), коли знак вільного члена протилежний знакові тільки двох інших коефіцієнтів.

4. Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, (5), коли знак вільного члена протилежний знакові тільки одного з решти коефіцієнтів.

Розглянемо ще випадки, коли деякі з коефіцієнтів перетворюються на нуль:

1. Уявний конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (6)$

* Тут введені такі позначення $\left|\frac{a_{44}}{a_{11}}\right| = a^2$; $\left|\frac{a_{44}}{a_{22}}\right| = b^2$; $\left|\frac{a_{44}}{a_{33}}\right| = c^2$.

і дійсний конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$ (6′)

коли вільний член дорівнює нулеві. Вершина конуса служить його центром.

2. Уявний циліндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$ (7)

еліптичний циліндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (7′)

і гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ (7″)

коли коефіцієнт при одній з координат дорівнює нулеві. Циліндр має лінію центрів, так звану вісь циліндра.

3. Пара уявних площин $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,$ (8)

пара уявних площин $\frac{x^2}{a^2}=-1,$ (8′)

пара дійсних площин $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (8″)

і пара дійсних площин $\frac{x^2}{a^2}=1,$ (8‴)

коли два коефіцієнти перетворюються на нуль. Якщо поверхня розпадається на пару площин, що перетинаються, то вона має лінію центрів; якщо поверхня розпадається на пару паралельних (або злитих) площин, то вона має цілу площину центрів.

Решта поверхонь другого порядку не мають ні центра, ні трьох площин симетрії, і їх рівняння не можна звести до вигляду (1). Але вони мають дві взаємно перпендикулярні площини симетрії, і відповідним вибором системи координат можна досягти, щоб їх рівняння мало тільки три члени: квадрат двох координат і перший степінь третьої координати, а саме:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z=0. \tag{9}$$

Тут доведеться розрізняти три випадки:

1. Еліптичний параболоїд $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$*, (10)

коли коефіцієнти при квадратах координат мають однакові знаки.

2. Гіперболічний параболоїд $z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},$ (11)

коли коефіцієнти при квадратах координат мають різні знаки.

3. Параболічний циліндр $z=\frac{x^2}{2p}$ або $z=\frac{y^2}{2q},$ (12)

коли один з коефіцієнтів при квадратах координат дорівнює нулеві.

Припущення $a_{34}=0$ приведе до розглянутого випадку поверхні, яка розпадається.

Поверхні другого порядку перетинаються з прямою, взагалі кажучи, в двох точках (дійсних і уявних); якщо ці точки перетину зливаються, пряма дотикається до поверхні. Прямі, які не мають ні однієї спільної точки (дійсної або уявної) з поверхнею в кінцевій частині простору, називаються її асимптотами; всі прямі, їм паралельні, перетинають поверхню не більше ніж в одній точці.

* Тут введені позначення $p=\left|\frac{a_{34}}{a_{11}}\right|$ і $q=\left|\frac{a_{34}}{a_{22}}\right|$.

Якщо пряма має з поверхнею більше двох спільних точок, то вона цілком лежить на поверхні і називається прямолінійною **твірною** цієї поверхні.

З поверхень другого порядку, які не розпадаються, крім циліндра і конуса, тільки однопорожнинний гіперболоїд і гіперболічний параболоїд мають дійсні прямолінійні твірні.

Гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ має дві серії прямолінійних твірних, які визначаються рівняннями:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ k\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\ \text{і}\ \left.\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=l\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ l\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\left(1+\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

де k і l — довільні параметри.

Гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$ має також дві серії прямих:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}}&=k,\\ k\left(\frac{x}{\sqrt{2p}}-\frac{y}{\sqrt{2q}}\right)&=z\end{aligned}\right\}\ \text{і}\ \left.\begin{aligned}l\left(\frac{x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}}\right)&=z,\\ \frac{x}{\sqrt{2p}}-\frac{y}{\sqrt{2q}}&=l.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Поверхня другого порядку перетинається всякою площиною по кривій другого порядку (дійсною або уявною). Перерізи поверхні її площинами симетрії називаються **головними перерізами**; вершини і осі головних перерізів називаються **вершинами** і **осями** поверхні. Перерізи паралельними площинами дають подібні криві. Площина, яка проходить через центр, називається її **діаметральною площиною**.

Дотична площина поверхні в даній точці є геометричне місце прямих, дотичних до поверхні в цій точці. Дотична площина має з поверхнею або одну дійсну спільну точку, як наприклад, у сфери, або перетинає поверхню по кривій другого порядку, яка розпалася; у конуса і циліндра ця крива складається з двох злитих прямих, у однопорожнинного гіперболоїда і гіперболічного параболоїда — з двох різних прямолінійних твірних.

Площина, дотична до поверхні в точці (x_1, y_1, z_1), визначається таким чином:

Рівняння поверхні

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=0,$$

$$z=\frac{x^2}{2p}\pm\frac{y^2}{2q}.$$

Рівняння дотичної площини

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}\pm\frac{zz_1}{c_1}=\pm 1,$$

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}\pm\frac{zz_1}{c^2}=0,$$

$$z+z_1=\frac{xx_1}{p}\pm\frac{yy_1}{q},$$

причому комбінація знаків у рівнянні дотичної площини повинна бути така сама, як і в рівнянні відповідної поверхні.

Пряма, яка перпендикулярна до дотичної площини і проходить через точку дотику, називається **н о р м а л л ю** до поверхні в даній точці.

Усі поверхні другого порядку, крім гіперболічного параболоїда, гіперболічних і параболічних циліндрів, мають серед своїх плоских перерізів перерізи кругові. Поверхня, якщо вона не є поверхнею обертання, має дві серії кругів, розміщених у паралельних площинах. Точки поверхні, в яких дотичні площини паралельні круговим перерізам, називаються **т о ч к а м и о к р у г л е н н я**.

Пучки паралельних площин, які дають у перерізі з поверхнею круги, визначаються такими рівняннями:

Поверхня	Площини кругових перерізів	Примітки
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$	1) $\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=k_1$ 2) $\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=k_2.$	$a>b>c$ k_1 і k_2 — параметри пучків
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$	1) $\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}=k_1,$ 2) $\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}=k_2.$	$a>b$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$	1) $\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}+z=k_1,$ 2) $\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}-z=k_2.$	$a>b$
$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q},$	1) $y\sqrt{\frac{p-q}{q}}+z=k_1,$ 2) $y\sqrt{\frac{p-q}{q}}-z=k_2.$	$p>q$

890. Знайти головні перерізи еліпсоїда $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, визначити його вершини і довжину осей.

891. Дослідити перерізи еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ площинами, паралельними до координатних площин.

892. Знайти відношення осей двох паралельних перерізів еліпсоїда $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, а саме: перерізи площиною (xz) і площиною, яка знаходиться від неї на віддалі двох одиниць.

893. По незмінному еліпсу $\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$ ковзають дві вершини другого еліпса, який переміщається так, що площина його залишається весь час перпендикулярною до осі y, а сам він деформується, зберігаючи сталe відношення осей $c : a$*. Знайти поверхню, описану цим другим еліпсом.

894. Знайти проекцію на площину (xy) лінії перерізу еліпсоїда $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ і площини $x + 4z - 4 = 0$.

895. Знайти центр лінії перерізу еліпсоїда і площини, заданих у попередній задачі.

896. Дано однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$. Знайти лінії його перерізу з координатними площинами і з площинами, які їм паралельні і проходять по обидва боки від них на віддалі 1, 2, 3, 4 і 5 одиниць. Накреслити проекції всіх цих перерізів на відповідні координатні площини.

897. Дослідити лінію перетину гіперболоїда

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$$

з площиною $4x - 3y - 12z - 6 = 0$, користуючись її проекціями на координатні площини.

898. Знайти площини, паралельні до координатних площин і які перетинають двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{4} = -1$ по кривих, осі яких вдвоє більші осей відповідних головних перерізів гіперболоїда.

899. Які поверхні зображаються рівняннями:

$$\text{a)}\ \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, \qquad \text{b)}\ \frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 0;$$

$$\text{c)}\ -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2 + z^2}{16} = 0$$

і яке геометричне значення мають параметри a і b в рівнянні a)?

900. Знайти кут між твірною і віссю (обертання) конуса:

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = 0.$$

901. Накреслити головні перерізи еліптичного параболоїда

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$$

і проекції паралельних їм перерізів на відповідні координатні площини.

902. Розв'язати попередню задачу по відношенню до гіперболічного параболоїда $z = \frac{x^2}{4} - y^2$.

903. У площині (yz) дано нерухому параболу $y^2 = 2qz$, і по ній ковзає вершина іншої незмінної параболи, параметр якої

* При обчисленні відношення осей за першу вісь взята та, яка лежить у площині нерухомого еліпса.

дорівнює p і яка переміщається так, що площина її лишається весь час перпендикулярною до осі y, а вісь її паралельна осі z. Знайти поверхню, описану рухомою параболою.

904. Знайти точки перетину поверхні:

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ з прямою $\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}$;

b) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=-1$ з прямою $x-3=y-1=\frac{z-6}{3}$;

c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$ з прямою $\frac{x-4}{4}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{1}$;

d) $4z=x^2-4y^2$ з прямою $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-2}$.

905. Обчислити довжину діаметра поверхні $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{9}=1$, який проходить через точку $(+4;\ -8/9;\ +8/3)$.

906. Через точку $(+2;\ +1;\ -1)$ провести таку хорду поверхні $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, яка ділилась би в цій точці пополам.

907. Через точку $(+5;\ +1;\ +2)$ провести пряму так, щоб вона перетинала поверхню $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$ лише в одній точці.

908. Знайти геометричне місце прямих, які проходять через центр поверхні другого порядку і не мають з нею спільних точок (ні дійсних, ні уявних).

909. Знайти геометричне місце прямих, проведених через вершину параболоїда $\frac{x^2}{2p}\pm\frac{y^2}{2q}=z$ так, щоб вони не були дотичними до поверхні і не мали з нею другої точки перетину.

910. Знайти геометричне місце дотичних до поверхні

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1,$$

проведених з точки $(+5;\ +1;\ 0)$.

911. Знайти геометричне місце дотичних прямих до поверхні $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}-z^2=1$, які утворюють рівні кути з осями координат.

912. Знайти прямі, які проходять через точку $(+6;\ +2;\ +8)$ і лежать цілком на поверхні $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$.

913. На параболоїді $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ знайти прямолінійні твірні, паралельні до площини $3x+2y-4z=0$.

914. Довести, що прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ проектуються на координатні площини і дотичні до відповідних головних перерізів.

915. Дослідити, як розміщені (в координатних площинах) по відношенню до головних перерізів проекції прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$.

916. Довести, що однопорожнинний гіперболоїд обертання може бути описаний прямою, яка обертається навколо осі, що не лежить з нею в одній площині.

917. Визначити поверхню, яку описує пряма, що ковзає по трьох прямих:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}; \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \text{ і } \frac{x}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1},$$

з яких ніякі дві не лежать в одній площині.

918. По двох прямих $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ і $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ переміщаються дві точки з однаковою і сталою швидкістю; вони одночасно перетинають площину (xy), але в той час як одна піднімається над цією площиною, друга, навпаки, опускається вниз. Знайти поверхню, яку опише пряма, що з'єднує обидві рухомі точки.

919. Скласти рівняння поверхні, утвореної прямою, яка ковзає по прямих $\frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ і $\frac{x}{3} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+4}{-2}$, залишаючись весь час паралельною площині $2x + 3y - 5 = 0$.

920. Написати рівняння площини, яка дотикається до поверхні $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = -1$ у точці $(-6; +2; +6)$.

921. У точці $(-2; +1; -{}^1/_2)$ провести нормаль до еліпсоїда

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1.$$

922. Знайти дотичні площини еліпсоїда $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$, які були б паралельні площині $2x + 2y - 3z = 0$.

923. Знайти дотичні площини параболоїда $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = z$, які були б паралельні площині $x - y - 2z = 0$.

924. Знайти площину, яка дотикається до конуса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 0$ в точці $(+4; -6); +4)$.

925. Довести, що нормаль, проведена в будь-якій точці круглого конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, перетинає вісь цього конуса.

926. Яку умову повинні задовольняти параметри еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, якщо він має ту властивість, що всі його нормалі проходять через початок координат?

927. На еліпсоїді $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ знайти точки, нормалі в яких перетинають вісь z.

928. Знайти дотичну площину циліндра $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$, знаючи відношення $a:b=5:4$ відрізків, відсічених нею на осях x і y.

929. Довести, що всі нормалі циліндра $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ паралельні одній і тій же площині.

930. Довести, що дотичні площини, проведені до поверхні другого порядку в кінцях одного і того ж діаметра, паралельні між собою, і навпаки, якщо дві дотичні площини однієї і тієї ж поверхні паралельні між собою, то точки дотику лежать на одному діаметрі.

931. Яку умову повинні задовольняти коефіцієнти площини $Ax+By+Cz+D=0$ для того, щоб вона дотикалась: a) центральної поверхні $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$; b) параболоїда $\frac{x^2}{2p}\pm\frac{y^2}{2q}=z$.

932. До однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ провести дотичні площини через кожну з таких прямих:

a) $\frac{x}{3}=\frac{y+9}{3}=\frac{z}{1}$; b) $\frac{x-9}{-1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$; c) $\frac{x}{6}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$ і дослідити, як ці прямі розміщені відносно гіперболоїда.

933. Через пряму $y=0$; $z=1$ провести дотичні площини до двопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=-1$ і визначити точки їх дотику.

934. Як повинна бути розміщена пряма відносно поверхні другого порядку типу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$ або $\frac{x^2}{2q}\pm\frac{y^2}{2q}=z$, для того щоб через неї можна було провести дві дійсні і різні дотичні площини до цієї поверхні?

935. Дано гіперболічний параболоїд $x^2-\frac{y^2}{4}=z$ і одна з його дотичних площин: $10x-2y-z-21=0$. Знайти рівняння кожної з тих двох прямих, по яких вони перетинаються.

936. Знайти діаметральні площини еліпсоїда $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$, які перетинають його по кругах.

937. Визначити радіус кругів, які лежать на однопорожнинному гіперболоїді $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$ і дотикаються до горлового еліпса.

938. Знайти точки округлення еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=z$.

РОЗДІЛ XIV

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ПОВЕРХЕНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1. Загальне рівняння поверхні другого порядку і його перетворення при перенесенні початку координат. Центр поверхні. Умова, при якій рівняння зображає конус або пару площин

Загальне рівняння поверхні другого порядку, тобто рівняння другого степеня відносно декартових координат x, y і z має десять членів: шість членів другого степеня (з квадратами кожної з координат і з парними добутками координат), три члени першого степеня і вільний член. Усі коефіцієнти цього рівняння позначаються буквою a з двома нижніми покажчиками, які залежать від того, які змінні множники входять до складу члена: покажчик 1 відповідає множникові x, покажчик 2 — множникові y, покажчик 3 — множникові z; у членах нижчого степеня місця недостаючих множників відмічаються покажчиком 4. Коефіцієнти з неоднаковими покажчиками мають ще і числовий множник 2. Отже, загальне рівняння поверхні другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \tag{1}$$

Якщо, не змінюючи напряму осей координат, перенести початок координат у будь-яку точку O' $(x';\ y';\ z')$, то рівняння поверхні (1) перетвориться на таке:

$$a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{12}XY+2a_{23}YZ+2a_{31}ZX+ \\ +2F_{x'}X+2F_{y'}Y+2F_{z'}Z+2F'=0, \tag{2}$$

де

$$\left.\begin{aligned} 2F' &= a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y'+2a_{23}y'z'+2a_{31}z'x'+ \\ &\quad +2a_{14}x'+2a_{24}y'+2a_{34}z'+a_{44}; \\ 2F_{x'} &= 2\,(a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z'+a_{14}); \\ 2F_{y'} &= 2\,(a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z'+a_{24}); \\ 2F_{z'} &= 2\,(a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'+a_{34}), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

тобто коефіцієнти старших членів не зміняться, коефіцієнти при перших степенях координат дорівнюватимуть частинним похідним від лівої частини початкового рівняння (1) по відповідних координатах з заміною текучих координат координатами нового початку, а вільний член дорівнює всій лівій частині початкового рівняння, в якій проведена та сама заміна.

Якщо поверхня другого порядку (1) має центр симетрії $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і початок координат буде перенесено в цей центр поверхні, то перетворене рівняння не матиме членів першого степеня, а тому матиме вигляд:

$$a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{12}XY+2a_{23}YZ+2a_{31}ZX+2F^0=0. \tag{4}$$

Таким чином, координати центра $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перетворюють на нуль коефіцієнти F_{x_0}, F_{y_0}, F_{z_0}, а отже, їх можна визначити з рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}&=0; \\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}&=0; \\ a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Розв'язуючи рівняння (5), дістанемо:

$$x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad z_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

Якщо дискримінант старших членів не дорівнює нулеві, тобто

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

система рівнянь (5) виявиться визначеною, і поверхня в цьому випадку матиме єдиний центр; ми називаємо таку поверхню другого порядку ц е н т р а л ь н о ю.

Якщо рівняння (5) несумісні ($\delta = 0$), поверхня не має центра в кінцевій частині простору і називається п а р а б о л о ї д о м.

Якщо система рівнянь (5) неозначена, поверхня має безліч центрів: лінію центрів або площину центрів залежно від того, чи матиме система (5) два незалежних рівняння, чи тільки одно.

Встановлюючи координати центра в ліву частину початкового рівняння (1) поверхні, ми можемо виразити вільний член перетвореного рівняння (4) через коефіцієнти початкового рівняння:

$$2F^0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Визначник четвертого порядку Δ називається дискримінантом рівняння поверхні. Отже, поверхня (1), віднесена до свого центра, зобразиться рівнянням:

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{12}XY + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{7}$$

Необхідна умова, для того щоб рівняння (1) зображало конус, полягає в рівності нулеві дискримінанта рівняння:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Якщо рівняння (8) виконане, то координати вершини конуса можуть бути визначені з будь-яких трьох рівнянь такої системи:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0; \\ a_{32}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0; \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Якщо рівняння (9) не дають кінцевих значень для координат вершини, то ми маємо окремий вид конуса — ц и л і н д р.

Якщо система (9) неозначена і має два незалежні рівняння, то вершина конуса стає неозначеною; за вершину можна прийняти будь-яку точку деякої прямої — конус розпадається на п а р у п л о щ и н, які перетинаються по цій прямій; якщо ці два незалежних рівняння виявляться несумісними, то поверхня складається з пари паралельних площин.

Якщо, нарешті, система (9) має лише одно незалежне рівняння, конус вироджується в пару злитих площин.

Якщо рівняння (1) зображає конус, то вершина його служить центром поверхні (порівняти рівняння (5) і (9).

Еліптичний і гіперболічний циліндри мають лінію центрів; параболічний циліндр не має ні одного центра в кінцевій частині простору. Пара площин, які перетинаються, має лінію центрів, а пара паралельних або злитих площин має площину центрів.

939. Який вигляд матиме рівняння поверхні

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy + 6yz - 2zx + 10x - 5 = 0,$$

якщо перенести початок координат у точку O' $(-1;\ +1;\ +2)$?

940. Знайти перетворене рівняння поверхні

$$x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy - 2yz - 4zx - 2x - 10y + 4z = 0,$$

після того як початок координат буде перенесено в точку $(+3;\ 0;\ +1)$.

941. Знайти центр і визначити вид кожної з таких поверхонь:

1) $4x^2 + 2y^2 + 12z^2 - 4xy + 8yz + 12zx + 14x - 10y + 7 = 0$;
2) $5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6zx + 12x - 36z = 0$;
3) $5x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 4yz + 2zx - 4y - 4z + 4 = 0$;
4) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 6yz - 4zx - 8x + 10y = 0$;
5) $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy - 6yz + 12zx + 8x - 4y + 12z - 5 = 0$;
6) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$;
7) $3x^2 + 2y^2 + 4yz - 2zx - 4x - 8z - 8 = 0$;
8) $x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 10xy - 30yz + 6zx - 2x - 2y = 0$.

942. Як перетвориться рівняння поверхні

$$x^2 - 14y^2 + 10z^2 - 4xy - 24yz + 6zx + 2x + 20y + 8z - 9 = 0,$$

якщо перенести початок координат у центр цієї поверхні?

943. Користуючись перенесенням початку координат, спростити рівняння таких центральних поверхонь:

1) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z = 0$;
2) $y^2 + 3xy + 2yz + zx + 3x + 2y = 0$;
3) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x - 4y + 2z + 1 = 0$.

944. Перевірити, що рівняння

$$2x^2 + 4y^2 - z^2 - 8xy + 8x - 8y + 4 = 0$$

зображає дійсний конус, і знайти його вершину.

945. При якому значенні параметра a рівняння

$$x^2 + 3y^2 + 2ayz + 2zx - 2x - 8y - 2z - 3 = 0$$

зображає конус?

946. Дослідити, які з поданих нижче рівнянь зображають конус, циліндр або пару площин:

1) $9x^2-4y^2-91z^2-40yz+18zx-36=0$;
2) $x^2+2y^2+3z^2-6z+3=0$;
3) $2x^2-3z^2+4xy+2yz-5zx-8x-12y+17z+6=0$;
4) $x^2-5z^2+3xy+2yz-7x-6y-2z+10=0$;
5) $x^2+2y^2+4z^2-2xy+4yz+2x-2y-4=0$;
6) $x^2+3y^2+8z^2+2xy+8yz-4x+8z+6=0$.

947. Визначити вид поверхень, заданих такими однорідними рівняннями другого степеня:

1) $6x^2+9y^2+z^2+6xy-4zx=0$;
2) $4x^2-2y^2-12z^2+4xy+12yz=0$;
3) $x^2-3y^2+4zx-2yz=0$;
4) $x^2+4y^2+z^2-4xy-4yz+2zx=0$;
5) $4x^2+2y^2+20z^2-4xy-8yz+12zx=0$.

2. Перетин поверхні з прямою і з площиною. Асимптотичні напрями. Дотична площина

Координати точок перетину поверхні другого порядку

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{14}x+2a_{24}y+$$
$$+2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad (1)$$

і прямої $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ (*) визначаються з системи трьох рівнянь (1) і (*), які, взагалі кажучи, мають дві трійки загальних рішень, а тому поверхня другого порядку перетинається з прямою в двох точках (дійсних або уявних). Якщо пряма (*) має з поверхнею (1) більше двох спільних точок, то вона цілком лежить на поверхні і називається її *прямолінійною твірною*. Якщо при спільному розв'язанні рівнянь (1) і (*), після виключення двох координат ми дістанемо для визначення третьої координати рівняння першого степеня (коефіцієнт при квадраті визначеної координати перетворюється на нуль), то пряма має з поверхнею лише одну спільну точку в кінцевій частині простору; в цьому особливому випадку ми говоримо, що пряма має *асимптотичний напрям* по відношенню до поверхні: поверхня другого порядку має безліч асимптотичних напрямів (дійсних і уявних). Якщо з початку координат провести всі прямі асимптотичного напряму по відношенню до поверхні (1), то їх геометричне місце виявиться конічною поверхнею, рівняння якої дістанемо, прирівнявши до нуля старші члени рівняння (1):

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx=0.$$

Про те, чи являтиме собою одержане рівняння дійсний, чи уявний конус, чи пару площин, можна судити, дослідивши переріз цієї поверхні з будь-якою площиною, яка не проходить через початок координат.

Якщо провести прямі асимптотичного напряму через центр поверхні (1), то їх рівняння виявляться несумісними з рівняннями поверхні, тобто ці прямі не матимуть ні однієї спільної точки з поверхнею в кінцевій частині простору. Такі прямі називаються *асимптотами* поверхні. Сукупність всіх асимптот поверхні становить *асимптотичний конус*.

Пряма, яка перетинає поверхню в двох злитих точках, називається **дотичною прямою** до поверхні, і спільна їх точка називається **точкою дотику**. Геометричне місце прямих, які дотикаються до поверхні в одній і тій же точці, є площина — **дотична площина** до поверхні в розглядуваній точці.

Дотична площина до поверхні (1) у точці (x'; y'; z') має таке рівняння:

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14})\,x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24})\,y + \\ + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34})\,z + (a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44}) = 0. \qquad (10)$$

Дотична площина перетинає поверхню по кривій другого порядку [1], що розпалася. Всяка друга площина перетинає поверхню по кривій другого порядку, що не розпалася (дійсній або уявній).

Щоб дослідити лінію перетину поверхні з площиною, зручно скористатися циліндром, який проектує цю лінію на одну з координатних площин: залежно від того, чи буде цей циліндр еліптичним, гіперболічним, параболічним, таким, що розпався на пару площин, чи уявним (про що ми судимо по напрямній циліндра, яка лежить у відповідній координатній площині), — вивчена крива буде еліпсом, гіперболою, параболою, парою прямих або уявною кривою другого порядку.

948. Знайти точки перетину поверхні

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 - 3yz + 5zx - 10x + 12z + 4 = 0$$

з осями координат.

949. Яку умову повинні задовольняти коефіцієнти загального рівняння поверхні другого порядку для того, щоб:

a) вісь абсцис дотикалася до поверхні;

b) вісь абсцис мала один з асимптотичних напрямів відносно поверхні;

c) вісь абсцис була однією з асимптот поверхні;

d) вісь абсцис цілком лежала на поверхні;

e) вісь абсцис не мала дійсних точок перетину з поверхнею?

950. Який вигляд має рівняння поверхні другого порядку, якщо ця поверхня:

a) проходить через всі три осі координат;

b) має всі три осі координат своїми асимптотами?

951. Знайти точки перетину поверхні

$$z^2 + xy - yz - 5x = 0$$

з прямою

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-10}{7}.$$

952. Знайти точки перетину поверхні

a) $5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6zx + 12x - 36z = 0$.

---

[1] Лінія перетину поверхні з дотичною площиною може розпастися на пару дійсних прямих, що перетинаються, або на пару уявних прямих, які перетинаються в дійсній точці; в обох випадках точка перетину прямих є точкою дотику дотичної площини до поверхні. Якщо ж лінія перетину розпадається на пару злитих прямих, то точка дотику залишається неозначеною і площина дотикається до поверхні по всій прямій (конус і циліндр).

з прямою

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{1};$$

b) $x^2-2y^2+z^2-2xy-yz+4zx+3x-5z=0$

з прямою

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}.$$

953. Знайти прямі, які проходять через початок координат і цілком лежать на поверхні:

$$y^2+3xy+2yz-zx+3x+2y=0.$$

954. Знайти ті прямолінійні твірні поверхні:

$$x^2+y^2+5z^2-6xy+2yz-2zx-12=0,$$

які паралельні прямій:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}.$$

955. Яку умову повинні задовольняти кутові коефіцієнти прямих, які мають асимптотичні напрями відносно поверхні:

a) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+$
$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0;$

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1;$

c) $\frac{x^2}{2p_1}-\frac{y^2}{2p_1}=z$?

956. Які з таких прямих:

1) $\frac{x-4}{6}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{2};$

2) $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+3}{1};$

3) $\frac{x}{1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-1}{-4};$

4) $\frac{x+1}{6}=\frac{y}{-6}=\frac{z-4}{5};$

5) $\frac{x-0{,}5}{14}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{42}$

мають асимптотичні напрями відносно поверхні

$$x^2-4xy+6yz+2x-5=0?$$

957. Чи існують прямі, які мають асимптотичний напрям відносно поверхні

$$x^2+4y^2-3z^2-4xy-\frac{5}{4}zx+5y+3=0$$

і разом з тим перпендикулярні до осі z? Чи існують на цій поверхні прямолінійні твірні, перпендикулярні до осі z?

958. Скласти рівняння поверхні другого порядку, знаючи рівняння трьох її прямолінійних твірних:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 2. \end{cases}$$

959. Знайти і дослідити геометричне місце прямих, які проходять через початок координат і мають асимптотичний напрям відносно поверхні

$$2xy + yz - zx - 2x + 2y - 3z - 2 = 0.$$

960. Знайти прямі, які проходять через початок координат і зустрічають поверхню

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4yz - 2xy + 5x - z + 3 = 0$$

лише в одній точці.

961. Знайти прямі, які проходять через точку $(+1;\ -1;\ +3)$ і мають асимптотичний напрям відносно поверхні:

$$2x^2 + y^2 + 2xy - 3x + z - 1 = 0.$$

962. Знайти геометричне місце прямих, які проходять через початок координат і мають асимптотичний напрям відносно поверхні:

$$2x^2 - y^2 - 3z^2 - xy + 4yz - zx + 5x - 3y + 7 = 0.$$

963. Дослідити конус асимптотичних напрямів поверхні:

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2zx - 2yz + 4x = 0.$$

964. Скласти рівняння асимптотичного конуса для кожної з таких поверхонь:

1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 6zx + 2x - 6y - 2z = 0;$
2) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 72x + 24z - 144 = 0;$
3) $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8zx - 4x - 8y + 3 = 0.$

965. Знайти лінію перетину поверхні:

a) $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 2xy - 3yz + 5x - 8 = 0$

з площиною (xy);

b) $x^2 + 3z^2 + 2xy + 4zx + 2yz + 5x - z - 1 = 0$

з площиною (yz);

c) $x^2 + y^2 - 2xy + 5yz + zx - x + 3y - z = 0$

з площиною (zx).

965*. Скласти рівняння поверхні, знаючи одну з її точок $M(+2;\ 0;\ -1)$, центр $C(0;\ 0;\ -1)$ і лінію її перетину з площиною (xy)

$$\begin{cases} x^2 - 4xy - 1 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

966. Яку умову повинні задовольняти коефіцієнти загального рівняння поверхні другого порядку для того, щоб поверхня дотикалась до координатної площини (xy)?

967. Дослідити лінію перетину поверхні

$$3y^2+4z^2+24x+12y-72z+360=0$$

з площиною $x-y+z=1$.

968. Визначити вигляд кривої, по якій площина $2x-y+z=0$ перетинає поверхню

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6zx-2x+6y+2z=0.$$

969. Дослідити лінію перетину поверхні

a) $x^2-3y^2+z^2-6xy+2yz-3y+z-1=0$

з площиною

$$2x-3y-z+2=0;$$

b) $x^2+y^2+z^2-6x-2y+9=0$

з площиною

$$x+y-2z-1=0.$$

970. Лінія перетину поверхні

$$x^2-2y^2+z^2-4yz-8zx+4xy-2x+8y-4z-2=0$$

з деякою площиною має центр на початку координат. Знайти рівняння січної поверхні.

971. Скласти рівняння площини, яка дотикається до поверхні

$$5x^2-y^2+z^2+4xy+6zx+2x+4y+6z-8=0$$

в точці (0; —4; +4), і рівняння нормалі в цій же точці.

972. Скласти рівняння дотичної до поверхні

$$4x^2+5y^2+9z^2-8x+18z+12=0$$

у точці $\left(+1; 0; -\frac{2}{3}\right)$ і дослідити лінію перетину знайденої площини з даною поверхнею.

973. Знайти ті дотичні площини до поверхні

$$4x^2+6y^2+4z^2+4zx-8y-4z+3=0,$$

які паралельні до площини $x+2y+7=0$.

974. На поверхні

$$x^2+5y^2-z^2-4zx+6x-20y-2z-1=0$$

знайти точки, в яких нормалі паралельні осі координат.

975. Через пряму $\begin{cases} 4x-5y=0, \\ z-1=0 \end{cases}$ провести дотичну площину до поверхні

$$2x^2+5y^2+2z^2-2xy+6yz-4x-y-2z=0.$$

976. Через осі ординат провести дотичну площину до поверхні

$$5x^2 - 8y^2 + 5z^2 + 6zx + 4x - 2z = 0.$$

977. Знайти геометричне місце дотичних, проведених з початку координат до поверхні

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$$

978. Знайти лінію, по якій конус, знайдений у попередній задачі, дотикається до даної поверхні.

979. Знайти геометричне місце прямих, паралельних осі і які дотикаються до поверхні

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$$

3. Діаметральна площина. Головні напрями. Дослідження загального рівняння поверхні другого порядку і зведення його до найпростішого вигляду

Якщо ми розглянемо всі хорди поверхні

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + \\ + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \qquad (1)$$

які мають один і той же напрям (m, n, p), то геометричне місце середин цих хорд є площина — *діаметральна площина*, спряжена з даними хордами. Ця площина зображається рівнянням:

$$m(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + n(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + \\ + p(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0,$$

або, користуючись скороченими позначеннями:

$$mF_x + nF_y + pF_z = 0. \qquad (11)$$

Змінюючи напрям хорд (m, n, p), ми діставатимемо різні діаметральні площини; всі вони утворюють зв'язку і проходять через центр поверхні.

Спряженими діаметрами називаються такі два діаметри, з яких кожний лежить в діаметральній площині, спряженій з другим.

Головними напрямами відносно даної поверхні називаються напрями хорд, перпендикулярних до спряжених з ними діаметральних площин; ці останні називаються тоді *головними діаметральними площинами*. *Головними осями* поверхні називаються діаметри, які мають головний напрям.

Головні напрями (m, n, p) визначаються з таких рівнянь:

$$\frac{a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p}{m} = \frac{a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p}{n} = \frac{a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p}{p}, \qquad (12)$$

або, позначаючи через S величину цих трьох відношень, можна переписати рівняння (12) таким чином:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - S)\,m + a_{12}n + a_{13}p &= 0, \\ a_{21}m + (a_{22} - S)\,n + a_{23}p &= 0, \\ a_{31}m + a_{32}n + (a_{33} - S)\,p &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Перш ніж обчислити головні напрями, доводиться визначати величину S з так званого розв'язуючого або характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-S & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-S & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-S \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Це рівняння третього степеня відносно S і має завжди три дійсних корені *; кожному з них відповідає один головний напрям поверхні, який визначається з рівнянь (13).

Якщо змінити напрям осей координат так, щоб вони стали паралельними до головних осей поверхні другого порядку, то в рівняння цієї поверхні не увійдуть члени з добутками координат і з старших членів увійдуть тільки члени з квадратами координат.

Отже, якщо рівняння (1) зображає центральну поверхню (дискримінант старших членів $\delta \neq 0$), ми можемо спростити це рівняння такими перетвореннями:

1. Переносимо початок координат у центр поверхні, тоді дістанемо:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{7}$$

2. Приймаємо головні осі поверхні за нові осі координат, після чого дістанемо:

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{15}$$

причому

$$a'_{11} = S_1,\ a'_{22} = S_2,\ a'_{33} = S_3, \tag{16}$$

тобто в рівнянні центральної поверхні, віднесеної до головних осей, коефіцієнтами при квадратах координат служать корені розв'язуючого рівняння (14), а вільним членом — відношення дискримінанта рівняння до дискримінанта старших членів.

Звідси випливає спосіб дослідження центральних поверхонь, указаний в таблиці, вміщеній на стор. 161.

Якщо рівняння (1) зображає параболоїд ($\delta = 0$), то один з коренів розв'язуючого рівняння дорівнює нулеві ($S_3 = 0$); крім того, перенесенням початку координат ми не можемо звільнитися від усіх членів першого степеня; тому спрощення рівняння параболоїда провадиться так: не змінюючи початку координат, вибираємо осі, паралельні головним напрямам, тоді рівняння параболоїда матиме вигляд:

$$2\Phi = S_1x^2 + S_2y^2 + 2a'_{14}x + 2a'_{24}y + 2a'_{34}z + a_{44} = 0. \tag{17}$$

Довільністю, що залишилася у виборі початку координат, скористаємося так, щоб після перенесення початку зникав вільний член ($a'_{44} = 2\Phi' = 0$) і члени з першими степенями абсциси і ординати ($a'_{14} = \Phi_{x'} = 0$ і $a'_{24} = \Phi_{y'} = 0$).

Тоді рівняння параболоїда буде зведене до найпростішого вигляду:

$$S_1x^2 + S_2y^2 + 2\Phi_{z'}z = 0\,^{**}. \tag{18}$$

Залежно від того, чи мають корені розв'язуючого рівняння S_1 і S_2 однакові чи різні знаки, параболоїд буде еліптичний або гіперболічний.

---

* Рівні корені утворюються тільки у випадку поверхонь обертання.

** $2\Phi_{z'} = 2a'_{34}$, тобто при відповідному перенесенні початку старші члени з першим степенем z залишаться без зміни, решта членів зникне. Для обчислення цього коефіцієнта можна користуватися формулою: $a'_{34} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S_1S_2}}$.

		S_1	S_2	S_3	$\frac{\Delta}{\delta}$	Тип поверхні
I	Усі корені розв'язуючого рівняння і відношення дискримінантів мають однакові знаки	+ —	+ —	+ —	+ —	Уявний еліпсоїд
II	Усі корені розв'язуючого рівняння мають один знак, відношення дискримінантів — протилежний знак	+ —	+ —	+ —	— +	Дійсний еліпсоїд
III	Знак відношення дискримінантів збігається з знаком тільки одного кореня розв'язуючого рівняння	+ —	+ —	— +	— +	Однопорожнинний гіперболоїд
IV	Знак відношення дискримінантів збігається з знаком двох коренів розв'язуючого рівняння	+ —	+ —	— +	+ —	Двопорожнинний гіперболоїд
V	Корені розв'язуючого рівняння мають однакові знаки, дискримінант рівняння дорівнює нулеві	+ —	+ —	+ —	0 0	Уявний конус
V	Корені розв'язуючого рівняння мають різні знаки, дискримінант рівняння дорівнює нулеві	+ —	+ —	— +	0 0	Дійсний конус

980. Знайти діаметральну площину поверхні $2x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 12yz + 6zx + 2xy + 8x + 14y + 18z = 0$, спряжену з хордами, паралельними

a) прямій $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-5}$; b) осі x; c) осі y; d) осі z.

981. Знайти той діаметр поверхні

$$x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy - 6zx + 2yz + 8x - 16y + 1 = 0,$$

який проходить через початок координат, і скласти рівняння спряженої з ним діаметральної площини.

982. Через початок координат і через точку $(+3;\ +6;\ +2)$ проведена діаметральна площина поверхні

$$4x^2+6y^2+4z^2+4zx-8y-4z+3=0.$$

Скласти рівняння цієї площини і знайти кутові коефіцієнти спряжених з нею хорд.

983. Дано поверхню

$$6x^2+9y^2+z^2-4zx+6xy-2y-3=0.$$

Знайти діаметральну площину, паралельну площині

$$x+3y-z+5=0,$$

і скласти рівняння спряженого з нею діаметра.

984. Знайти ту діаметральну площину поверхні

$$x^2+3z^2-6xy+8x+5=0,$$

яка проходить через пряму $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{3}$.

985. Знайти кут між тією діаметральною площиною поверхні

$$3x^2-5y^2+4xy-6yz+4x+2y=0,$$

яка проходить через вісь y, і хордами, з нею спряженими.

986. Знайти спільну діаметральну площину трьох поверхонь:

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-11=0;$$
$$3y^2+4xy-8zx+6z+5=0;$$
$$8x^2-3y^2+7z^2+4xy-9zx-15=0.$$

987. Дано поверхню другого порядку

$$x^2-2y^2+3z^2+4zx-6yz+8x-2z+3=0$$

і одну з її діаметральних площин $y-2z+9=0$. Знайти діаметральну площину, яка спряжена з даною площиною і до неї перпендикулярна.

988. Дано поверхню $y^2+3z^2-6zx+12x+5=0$. Знайти систему трьох спряжених діаметральних площин, з яких одна проходить через пряму $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}$, а друга — через початок координат.

989. Знайти головні напрями поверхні

$$2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0.$$

990. Знайти головні осі поверхні

$$x^2+y^2+5z^2-6xy-2zx+2yz-6x+6y-6z+9=0.$$

991. Знайти головні діаметральні площини поверхні

$$x^2+y^2-3z^2-6yz-6zx-2xy+2x+2y+4z=0.$$

992. Яке рівняння матиме поверхня

$$7x^2+6y^2+5z^2-4yz-4xy-6x-24y+18z+30=0,$$

якщо віднести її до головних осей? Дати формули відповідного перетворення координат.

993. Спростити рівняння таких поверхонь:

1) $6x^2-2y^2+6z^2+4zx+8x-4y-8z+1=0;$
2) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8zx-4yz-14x-4y+14z+16=0;$
3) $x^2+y^2+5z^2-6xy+2zx-2yz-4x+8y-12z+14=0;$
4) $4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz+4x+6y+4z-27=0;$
5) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4zx+2yz+2x-10y-2z-1=0.$

994. Звести до найпростішого вигляду рівняння поверхні

$$5x^2+8y_2+5z^2+4xy-8zx+4zy-27=0$$

і дати відповідні формули перетворення координат.

995. Звести до найпростішого вигляду рівняння параболоїда

$$2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12x+4y+8z-1=0.$$

996. Спростити рівняння поверхні

$$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2zx+2yz-4x+6y-2z+3=0.$$

997. Визначити вигляд поверхні

$$x^2-2y^2-4xy-8zx+6y-5=0.$$

998. Визначити тип таких поверхонь:

1) $3x^2+y^2-z^2+6zx-4y=0;$
2) $2x^2+y^2+3z^2-4yz+2x-6z+1=0;$
3) $x^2+2y^2+3z^2+2x-4y-12z+8=0;$
4) $4x^2+9z^2+2zx-8x-4y+36z-32=0;$
5) $4x^2+2y^2+z^2-4xy-2yz-2y+2z-4=0.$

999. Скласти рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від двох прямих, що перетинаються:

$$\frac{x}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2};\quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}.$$

Дослідити одержане рівняння.

1000. Знайти і дослідити геометричне місце точок, однаково віддалених від осі z і від прямої $\left\{\begin{matrix} y=z, \\ x=1, \end{matrix}\right\}$, яка не лежить з віссю z в одній площині

ЧАСТИНА ЧЕТВЕРТА
ОСНОВИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ГЕОМЕТРІЇ

РОЗДІЛ XV
ВЕКТОРИ І ДІЇ НАД НИМИ

1. Вектори. Рівність векторів. Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число. Розкладання векторів

Величини, для задання яких достатньо вказати їх числові значення, називаються **скалярними величинами**, або просто **скалярами**[1]. Прикладами скалярних величин можуть бути: довжина відрізка, кут, площа, об'єм, час, температура, маса, щільність, робота і т. п. Найпростішим скаляром є абстрактне число. Скаляри позначаються малими або великими буквами латинського або грецького алфавіту звичайного шрифту: a_1, b_1 m, p, x, y, A, S, T, α, β...

Поряд з скалярами існують і інші величини, для повної характеристики яких недостатньо задатися тільки числовими значеннями. Наприклад, для характеристики переміщення точки треба знати не тільки довжину, а і напрям переміщення. Для характеристики дії сили мало знати її величину, треба ще знати напрям, у якому вона діє. Такі величини, як переміщення, сила, швидкість, прискорення, напруженість електричного поля і т. д., що потребують для свого задання не тільки вказати числове значення, а й напрям у просторі, називаються **векторними величинами**, або **векторами**.

Для наочного зображення векторів служать **геометричні вектори**, тобто прямолінійні відрізки, які мають не тільки певну довжину, а і певний напрям. В дальшому під словом «вектор» ми розумітимемо найпростіший тип векторних величин — геометричний вектор.

Вектори позначаються або жирними буквами **A**, **M**, **a**, **b** ,... або буквами звичайного шрифту, але з рисочкою зверху: $\overline{A}$, $\overline{M}$, $\overline{a}$, $\overline{b}$, ... Іноді, оскільки вектор є напрямлений відрізок, його позначають двома буквами (на першому місці стоїть назва початку відрізка, на другому — назва кінця), але теж з рисочкою зверху: $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{PO}$ і т. д.

На рисунку вектори зображаються відрізками з стрілками, які вказують їх напрям (рис. 68).

Довжина вектора, яка інакше називається **модулем**, або **абсолютною величиною**, або ще **скаляром** вектора, позначається тією ж буквою, що і вектор, але не жирного шрифту і без риски зверху; іноді для позначення модуля вектора береться позначення самого вектора, вміщене в прямі дужки: довжина вектора **a** позначається a або $|\mathbf{a}|$; довжина вектора $\overline{AB}$ позначається $AB = |\overline{AB}|$ і т. д.

Якщо прямі, на яких розміщені вектори[2], паралельні (або збігаються), то вектори називаються **колінеарними**. Колінеарні вектори можуть мати

---

[1] Ця назва пояснюється тим, що, вибравши одиницю виміру, можна зобразити всі значення скалярної величини на одній шкалі (скалі).

[2] Пряма, на якій лежить вектор, називається його носієм.

або однаковий напрям, як наприклад, **a** і **b**, або протилежні напрями, наприклад **a** і **c** (рис. 68).

Два вектори вважаються р і в н и м и, якщо вони задовольняють такі умови:

1) вектори мають однакову довжину;
2) вони колінеарні;
3) вони мають однаковий напрям.

Отже, серед чотирьох векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ і $\overline{DA}$, які збігаються з сторонами квадрата $ABCD$ (рис. 69), немає двох рівних векторів.

З означення рівності векторів виходить, що положення початкової точки вектора (точки прикладання) не має значення [1]. Паралельне переміщення не змінює вектора. Цією властивістю можна скористатися, щоб віднести дані вектори

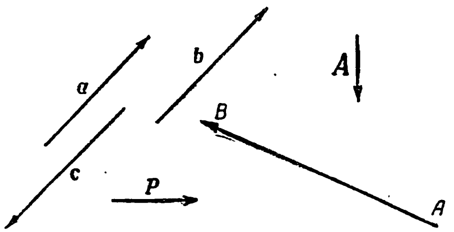

Рис. 68.

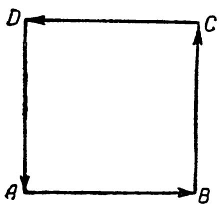

Рис. 69.

до спільного початку, тобто перемістити їх, не змінюючи напряму, так, щоб збіглися початки всіх розглянутих векторів.

При означенні додавання векторів корисно пам'ятати конкретні задачі, пов'язані з цією дією. Необхідність додати два вектори може, наприклад, виникнути в зв'язку з відшуканням такого одного переміщення точки, яким можна було б замінити два дані послідовні переміщення, або ж при відшуканні рівнодіючої двох даних сил, які діють на дану точку, тощо.

Звідси випливає для д о д а в а н н я д в о х в е к т о р і в **a** і **b** «правило трикутника»: при будь-якій точці A будуємо вектор $\overline{AB} = \mathbf{a}$ (рис. 70); в кінці цього вектора будуємо вектор $\overline{BC} = \mathbf{b}$. Тоді вектор $\mathbf{c} = \overline{AC}$, який з'єднує початок першого доданка з кінцем другого, і буде вектором-сумою [2], що можна записати так:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \tag{1}$$

або

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}. \tag{1'}$$

Якщо доповнити трикутник ABC (рис. 70) до паралелограма $ABCD$, то легко дістати відоме «правило паралелограма»: щоб додати два вектори **a** і **b**, зводимо їх до спільного початку, будуємо на цих векторах, як на сторонах, паралелограм; тоді діагональ цього паралелограма, яка виходить з цієї ж вершини, буде сумою двох даних векторів.

У випадку більшого числа доданків, узагальнюючи правило трикутника, дістаємо правило многокутника: щоб побудувати суму будь-якого числа векторів, треба з будь-якої точки побудувати вектор, рівний першому доданкові, з кінця першого доданка побудувати другий доданок, з кінця другого — третій і т. д.

---

[1] Такі вектори називаються «вільними». В дальшому, якщо не буде зроблено застереження, ми матимемо справу тільки з вільними векторами.

[2] Це правило є природним узагальненням додавання напрямлених відрізків, розміщених на одній прямій (к о л і н е а р н и х в е к т о р і в).

Вектор, який з'єднує початок першого доданка з кінцем останнього, і буде сумою всіх даних векторів, тобто сумою служить замикаючий вектор тієї ламаної лінії, ланками якої служать дані додавані вектори (рис. 71). Якщо виявилось би, що кінець останнього доданка збігається з початком першого, то це означає, що вектор-сума має довжину, рівну нулеві. Такий вектор називається нуль-вектором.

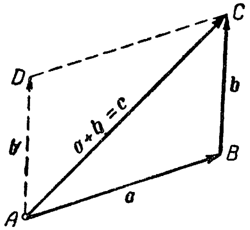

Рис. 70.

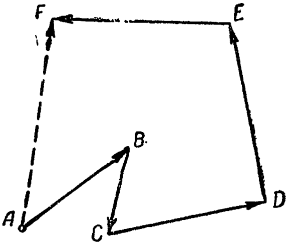

Рис. 71.

Зокрема, нулеві дорівнює сума двох векторів, які мають однакову довжину але протилежні напрями:

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0 \tag{2}$$

або

$$\overline{AB} = -\overline{BA}; \tag{2'}$$

такі вектори називаються рівно-протилежними.

Додавання векторів підлягає основним законам додавання чисел:

1) законові переставляння

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}; \tag{3}$$

2) законові сполучності

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}. \tag{4}$$

Віднімання векторів вводиться як дія, протилежна додаванню, тобто при відніманні треба за даною сумою двох векторів і одному з них знайти другий додаваний вектор.

З рис. 70 безпосередньо випливає правило віднімання: щоб відняти з вектора $\mathbf{c}$ ($= \overline{AC}$) вектор $\mathbf{a}$ ($= \overline{AB}$), треба віднести їх до спільного початку; тоді вектор $\mathbf{b}$ ($= \overline{BC}$), який з'єднує кінець вектора-від'ємника (a) з кінцем вектора-зменшуваного (c), і буде вектором-різницею:

$$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}, \tag{5}$$

або

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = \mathbf{b}; \tag{5'}$$

або, користуючись поняттям рівно-протилежних векторів, маємо:

$$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{AC} + (-\overline{AB}), \tag{6}$$

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = \mathbf{c} + (-\mathbf{a}), \tag{6'}$$

тобто щоб відняти вектор, досить додати рівно-протилежний йому вектор.

Розглянемо ще множення вектора на скаляр.

Добуток $\alpha\mathbf{a}$, де α — будь-яке число, являє собою вектор колінеарний з $\mathbf{a}$ і має довжину, в α раз більшу, ніж вектор $\mathbf{a}$. Цей новий вектор має напрям або такий, що збігається з напрямом $\mathbf{a}$, або напрям, йому протилежний, залежно від того, чи буде α додатним, чи від'ємним числом.

Окремо розглядати поділ вектора на число не варто, тому що ця дія зводиться до множення вектора на обернене число; наприклад, замість того щоб поділити вектор на 3, досить помножити його на $^1/_3$.

Множення вектора на скаляр підлягає законам множення чисел:

1) законові переставляння

$$\alpha\mathbf{a} = \mathbf{a}\alpha; \tag{7}$$

2) законові сполучності:

$$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}; \tag{8}$$

3) законові розподільності:

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} \tag{9}$$

і

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}. \tag{9'}$$

Якщо добуток дорівнює нулеві:

$$\alpha\mathbf{a} = 0,$$

то

або $\alpha = 0$, або $\mathbf{a} = 0$.

Якщо $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ — два колінеарні вектори, то завжди можна знайти такий скаляр λ, який при множенні на $\mathbf{a}$ дає вектор, рівний $\mathbf{b}$, тобто

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} \tag{10}$$

Інакше, це число можна назвати **відношенням векторів** $\mathbf{b}$ і $\mathbf{a}$

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \lambda, \text{ або } \mathbf{b} : \mathbf{a} = \lambda.$$

Говорити про відношення неколінеарних векторів не має смислу.

Умова, необхідна і достатня для колінеарності двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, виражається рівністю (10) або більш загальною лінійною залежністю, яка їх зв'язує:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = 0. \tag{11}$$

Вектор, який при вибраному масштабі має довжину, рівну одиниці, називається **одиничним вектором**, або **ортом**. Якщо дано який-небудь вектор $\mathbf{a}$, то одиничний вектор $\mathbf{a}^\circ$ того ж напряму ми дістанемо, поділивши $\mathbf{a}$ на його модуль:

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|},$$

звідки

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^\circ.$$

Компланарними векторами називаються вектори, розміщені в одній і тій же площині або паралельні одній і тій же площині.

Умовою, необхідною і достатньою для компланарності трьох векторів **a**, **b** і **c**, є існування між ними лінійної залежності, тобто співвідношення

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0, \tag{12}$$

де коефіцієнти α, β і γ не дорівнюють нулеві одночасно.

Інакше кажучи, якщо ми маємо два неколінеарні вектори **a** і **b**, то всякий третій компланарний їм вектор **c** може бути єдиним способом «розкладений по векторах **a** і **b**», тобто поданий як сума двох векторів, відповідно їм колінеарних:

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}. \tag{13}$$

Якщо ми маємо три некомпланарних вектори **a**, **b** і **c**, то всякий четвертий вектор **d** може бути однозначно розкладений по векторах **a**, **b** і **c**, тобто поданий як сума трьох векторів, відповідно їм колінеарних:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}. \tag{14}$$

Між будь-якими чотирма векторами існує лінійна залежність:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = 0,$$

де α, β, γ і δ не дорівнюють нулеві одночасно.

1001. У паралелограмі $ABCD$ позначено: $\overline{AB} = \mathbf{a}$ і $\overline{AD} = \mathbf{b}$. Виразити через **a** і **b** вектори $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ і $\overline{MD}$, де M — точка перетину діагоналей паралелограма.

1002. Користуючись паралелограмом, побудованим на векторах **a** і **b**, перевірити на рисунку правдивість тотожностей:

1) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{a}$;

2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{b}$;

3) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b}$;

4) $\frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$;

5) $\frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2} + \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$;

6) $\left(\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2}\right) - \left(\mathbf{b} + \frac{\mathbf{a}}{2}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$;

7) $\left(\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2}\right) + \left(\mathbf{b} + \frac{\mathbf{a}}{2}\right) = \frac{3}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

1003. Яку особливість повинні мати вектори **a** і **b**, щоб мало місце співвідношення:

a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$;

b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b})$;

c) $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$;

d) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$;

e) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$;

f) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$?

1004. Якою умовою повинні бути пов'язані вектори p і q, щоб вектор $p + q$ ділив кут між ними пополам? Передбачається, що всі три вектори віднесені до спільного початку.

1005. Які обмеження треба накласти на коефіцієнти α і β, щоб мало місце співвідношення:

$$\alpha \cdot \frac{\mathbf{a}}{a} + \beta \cdot \frac{\mathbf{b}}{b} = 0.$$

де

$$a \neq 0 \text{ і } b \neq 0.$$

1006. Три вектори $\overline{AB} = \mathbf{c}$, $\overline{BC} = \mathbf{a}$ і $\overline{CA} = \mathbf{b}$ служать сторонами трикутника. За допомогою $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ виразити вектори, які збігаються з медіанами трикутника $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ і $\overline{CP}$.

1007. У трикутнику попередньої задачі виразити всі медіани тільки через два вектори: $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

1008. Сторона BC трикутника ABC поділена на п'ять рівних частин і всі точки поділу D_1, D_2, D_3, D_4 з'єднані з протилежною вершиною A. Позначивши сторони $\overline{AB} = \mathbf{c}$ і $\overline{BC} = \mathbf{a}$, знайти вирази для векторів $\overline{D_1A}$, $\overline{D_2A}$, $\overline{D_3A}$, $\overline{D_4A}$.

1009. Перевірити, що вектори, які збігаються з медіанами будь-якого трикутника, в свою чергу можуть служити сторонами другого трикутника.

1010. Знаючи вектори, які служать сторонами трикутника $\overline{AB} = \mathbf{c}$, $\overline{BC} = \mathbf{a}$ і $\overline{CA} = \mathbf{b}$, знайти вектори, відповідно колінеарні бісектрисам кутів цього трикутника.

1011. Чи зміниться сума компланарних векторів, якщо всі додавані вектори будуть повернуті в одному і тому ж напрямі на один і той же кут?

1012. Довести, що сума парних добутків — довжини кожної сторони трикутника на одиночний вектор, перпендикулярний до цієї сторони, — дорівнює нулеві.

Примітка. Передбачається, що згадані одиничні вектори напрямлені від відповідних сторін трикутника або всі три у внутрішню частину трикутника, або всі три — в зовнішні частини.

1013. Довести, що сума векторів, яка з'єднує центр правильного трикутника з його вершинами, дорівнює нулеві.

1014. Чи залишиться справедливим твердження попередньої задачі, якщо трикутник замінити правильним n-кутником?

1015. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ відомі $\overline{AB} = \mathbf{p}$ і $\overline{BC} = \mathbf{q}$.

a) Виразити через $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ вектори: $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ і $\overline{AE}$.

b) Знайти відношення векторів:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}};\quad \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}};\quad \frac{\overline{CF}}{\overline{AB}} \quad \text{і} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

1016. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ дано: $\overline{AB} = \mathbf{m}$ і $\overline{AE} = \mathbf{n}$. Розкласти по двох цих векторах $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$ і $\overline{EF}$.

1017. У ромбі $ABCD$ дано діагоналі $\overline{AC} = \mathbf{a}$ і $\overline{BD} = \mathbf{b}$. Розкладемо по цих двох векторах усі вектори, які збігаються з сторонами ромба: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ і $\overline{DA}$.

1018. У рівнобічній трапеції $\overline{ABCD}$ відома нижня основа $\overline{AB} = \mathbf{a}$, бокова сторона $\overline{AD} = \mathbf{b}$ і кут між ними $\angle A = \frac{\pi}{3}$. Розкласти по $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ всі вектори, які складають решту сторін і діагоналі трапеції.

1019. У трикутнику ABC сторона BC поділена точкою D у відношенні $m : n$, тобто

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{m}{n}.$$

Розкласти вектор $\overline{AD}$ по векторах $\overline{AB} = \mathbf{c}$ і $\overline{AC} = \mathbf{b}$.

1020. Дати геометричну побудову розкладу вектора $\mathbf{a}$ на два компланарних з ним доданки, якщо відомо:

a) довжина і напрям одного доданка;
b) напрям обох доданків;
c) напрям одного і довжина другого доданка;
d) довжина обох доданків.

Дослідити, коли розкладання можливе і скільки має розв'язків, якщо ні один з доданків не паралельний $\mathbf{a}$.

1021. На трьох некомпланарних векторах

$$\overline{AB} = \mathbf{p},\ \overline{AD} = \mathbf{q} \text{ і } \overline{AA'} = \mathbf{r}$$

побудований паралелепіпед $ABCDA'B'C'D'$. Виразити через $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ і $\mathbf{r}$ вектори, які збігаються з рештою ребер, діагоналями і діагоналями граней цього паралелепіпеда.

1022. У тетраедрі $ABCD$ дано ребра, які виходять з вершини A:

$$\overline{AB} = \mathbf{b},\ \overline{AC} = \mathbf{c} \text{ і } \overline{AD} = \mathbf{d}.$$

Виразити через ці вектори решту ребер тетраедра, медіану $\overline{DM}$ грані BCD і вектор $\overline{AQ}$, де Q — центр ваги грані BCD.

1023. Знаючи розклад векторів $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ по трьох некомпланарних векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, перевірити, чи будуть $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ компланарні, і у випадку стверджуючої відповіді дати лінійну залежність, яка їх пов'язує:

a) $\mathbf{l} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$;
b) $\mathbf{l} = \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$;
c) $\mathbf{l} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$.

1024. Відомі розкладання двох векторів $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ по трьох некомпланарних векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{p} = \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b} + \gamma_1\mathbf{c},$$
$$\mathbf{q} = \alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b} + \gamma_2\mathbf{c}.$$

Яка залежність повинна існувати між коефіцієнтами цих розкладань, якщо: a) $\mathbf{p} = \mathbf{q}$; b) $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ колінеарні; c) $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$.

1025. Знайти лінійну залежність між даними чотирма некомпланарними векторами:

$$\mathbf{m} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}; \quad \mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{2}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

1026. Розкласти вектор $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ по трьох некомпланарних векторах: $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$; $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ і $\mathbf{p} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.

1027. Що можна сказати про взаємне розміщення чотирьох векторів у просторі, якщо вони пов'язані лінійною залежністю $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = 0$, причому

a) $\alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \delta \neq 0;$
b) $\alpha = 0, \quad \beta \neq 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \delta \neq 0;$
c) $\alpha = \beta = 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \delta \neq 0;$
d) $\alpha = \beta = \gamma = 0, \quad \delta \neq 0$?

1028. У розкладанні вектора $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ по двох неколінеарних векторах $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ чи можуть обидва коефіцієнти розкладання λ і μ або один з них дорівнювати нулеві?

2. Проекції векторів[1]. Скалярне множення векторів

Віссю називається пряма, на якій вибрано додатний напрям і одиниця довжини. Вісь цілком визначається одиничним вектором (ортом).

Проекцією точки M на дану вісь називається основа перпендикуляра, опущеного з даної точки M на дану вісь [2].

Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь називається довжина вектора $\overline{A'B'}$, розміщеного між проекціями початку і кінця вектора $\overline{AB}$, причому ця довжина береться з додатним знаком, коли вектор $\overline{A'B'}$ має напрям орта осі, і з від'ємним знаком, коли $\overline{A'B'}$ і орт осі мають протилежні напрями.

Проекція вектора на вісь є скаляр.

Проекція вектора на вісь дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута (φ) між вектором і віссю:

$$\text{пр. } \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi. \tag{15}$$

Проекція суми векторів дорівнює алгебраїчній сумі проекцій додаваних векторів:

$$\text{пр. } (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \text{пр. } \mathbf{a} + \text{пр. } \mathbf{b} + \text{пр. } \mathbf{c}. \tag{16}$$

Проекція добутку вектора на скаляр дорівнює добуткові цього ж скаляра на проекцію вектора:

$$\text{пр. } (\alpha\,\mathbf{a}) = \alpha \cdot \text{пр. } \cdot \mathbf{a}. \tag{17}$$

Скалярним (внутрішнім) **добутком** двох векторів називається добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними [3].

---

[1] У цьому розділі розглядають лише ортогональні проекції.

[2] При проектуванні просторових фігур на вісь зручніше визначати проекцію точки як точку перетину осі з площиною, що проходить через дану точку перпендикулярно до осі.

[3] Таке складання скаляра за двома даними векторами трапляється дуже часто в прикладних науках, наприклад, коли, знаючи переміщення точки і діючу на неї силу, обчислюють роботу цієї сили.

Щоб показати, що два вектори перемножаються скалярно, їх вводять в круглі дужки або просто пишуть поряд:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{a}\mathbf{b} = ab\cos(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}). \tag{18}$$

Якщо перемножувані вектори колінеарні, то

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \pm ab,$$

тобто скалярний добуток колінеарних векторів дорівнює добуткові їх скалярів, взятому з знаком плюс або мінус, залежно від того, чи мають обидва вектори однакові, чи протилежні напрями.

Якщо один з співмножників є одиничним вектором, то скалярний добуток дорівнює проекції другого співмножника на напрям першого:

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^0 = a \cdot 1 \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}^0}) = \text{пр.}_{\mathbf{b}^0}\,\mathbf{a}, \tag{19}$$

тобто множення вектора на одиничний вектор рівнозначне проектуванню цього вектора на вісь одиничного вектора.

Якщо обидва співмножники є одиничними векторами, то їх скалярний добуток дорівнює косинусу кута між ними:

$$\mathbf{a}^0\mathbf{b}^0 = \cos(\widehat{\mathbf{a}^0\mathbf{b}^0}).$$

Кут між двома векторами **a** і **b** можна обчислити за формулою:

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{ab}. \tag{20}$$

Скалярний добуток двох рівних векторів (так званий с к а л я р н и й к в а д р а т вектора) дорівнює квадратові модуля цього вектора:

$$\mathbf{a}\mathbf{a} = (\mathbf{a})^2 = a^2. \tag{21}$$

Цим можна скористатися для обчислення д о в ж и н и в е к т о р а:

$$a = \sqrt{\mathbf{a}^2}\,. \tag{22}$$

Квадрат одиничного вектора дорівнює одиниці:

$$\mathbf{a}^0\mathbf{a}^0 = (\mathbf{a}^0)^2 = 1. \tag{21'}$$

Скалярний добуток двох векторів може дорівнювати нулеві, коли ні один з співмножників не дорівнює нулеві, а саме, коли перемножені вектори перпендикулярні. Отже,

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = 0 \text{ рівнозначне } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}. \tag{23}$$

Скалярний добуток двох векторів може бути додатним або від'ємним числом, залежно від того, чи утворюють вони гострий, чи тупий кут між собою.

Скалярне множення підлягає законам множення чисел:

1) законові переставляння

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}; \tag{24}$$

2) законові розподільності

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{c}; \tag{25}$$

3) законові сполучності по відношенню до числового множника:

$$(\alpha\mathbf{a})\,\mathbf{b} = \alpha\,(\mathbf{a}\mathbf{b}). \tag{26}$$

Але, взагалі кажучи,

$$(\mathbf{a}\mathbf{b})\,\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\mathbf{c}), \tag{27}$$

тому що в лівій частині нерівності (27) стоїть вектор, колінеарний з **c**, а в правій частині — вектор, колінеарний з **a**.

1029. Знаючи проекції кількох векторів на одну і ту ж вісь:

$$\text{пр. } \mathbf{a} = 5, \text{ пр. } \mathbf{b} = -3, \text{ пр. } \mathbf{c} = -8 \text{ і пр. } \mathbf{d} = 6,$$

чи можна зробити висновок, що ці вектори утворюють замкнуту ламану лінію?

1030. Перевірити, чи справедливі такі рівності:

1) $\mathbf{a}a = a^2$; 5) $\mathbf{a}(\mathbf{bb}) = \mathbf{a}b^2$;
2) $\mathbf{a}^2 a = a^3$; 6) $(a \pm \mathbf{b})^2 = a^2 + b^2 \pm 2\mathbf{ab}$;
3) $a^2\mathbf{a} = a^3$; 7) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = a^2 - b^2$;
4) $\mathbf{a}(\mathbf{ab}) = a^2\mathbf{b}$; 8) $(\mathbf{ab})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$?

1031. Перевірити справедливість тотожності

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2(a^2 + b^2)$$

і дати її геометричне тлумачення.

1032. Чи можна говорити про скалярний добуток трьох векторів? про скалярний куб вектора? про куб скаляра вектора?

1033. Розібрати, чому тотожність, справедлива для скалярів

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

не має місця для векторів.

1034. Обчислити скалярний добуток $\mathbf{ab}$, якщо $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$ і $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 4\mathbf{q}$, де $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

1035. Знайти числове значення скаляра $3m - 2(\mathbf{mn}) + 4n^2$, якщо

$$|\mathbf{m}| = {}^1/_3, \quad |\mathbf{n}| = 6 \text{ і } (\widehat{\mathbf{mn}}) = \frac{\pi}{3}.$$

1036. Спростити вираз

$$a^2 + 3(\mathbf{ab}) - 2(\mathbf{bc}) + 1,$$

якщо

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}, \ \mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}, \ \mathbf{c} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}, \text{ де } m^2 = 4,$$

$$n^2 = 1 \text{ і } (\widehat{\mathbf{mn}}) = \frac{\pi}{2}.$$

1037. Чому дорівнює сума $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}$, якщо $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ — три орти, що задовольняють умову

$$a + b + c = 0?$$

1038. Обчислити скалярний добуток двох векторів $\mathbf{pq}$, знаючи їх розкладання за трьома одиничними взаємно перпендикулярними векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{p} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{a} - 4\mathbf{b} - 5\mathbf{c}.$$

1039. Довести, що скалярний добуток векторів не зміниться, якщо до одного з них додати вектор, перпендикулярний до другого співмножника.

1040. Знайти довжину вектора $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$, знаючи, що $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ взаємно перпендикулярні орти.

1041. Обчислити довжину вектора $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$, якщо $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ — дані взаємно перпендикулярні вектори.

1042. Знаючи, що вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ утворюють трикутник, тобто $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$, обчислити довжину сторони $\mathbf{c}$, вважаючи $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ відомими.

1043. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{A} = 5\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ і $\mathbf{B} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$, якщо відомо, що

$$|\mathbf{p}| = 2\sqrt{2}, \ |\mathbf{q}| = 3 \text{ і } (\widehat{\mathbf{pq}}) = \frac{\pi}{4}.$$

1044. До одної і тої ж точки прикладені дві сили $\mathbf{P}$ і $\mathbf{Q}$, які діють під кутом 120°, причому $|\mathbf{P}| = 7$ і $|\mathbf{Q}| = 4$. Знайти величину рівнодіючої сили $\mathbf{R}$.

1045. Знайти рівнодіючу п'яти компланарних сил, рівних величиною і прикладених до однієї і тієї ж точки, знаючи, що кути між кожними двома послідовними силами дорівнюють 72°.

1046. Обчислити кут між векторами $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ і $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 5\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

1047. В прямокутному рівнобедреному трикутнику проведені медіани з вершин гострих кутів. Обчислити кут між ними.

1048. Знаючи вектори, які утворюють трикутник: $\overline{AB} = 2\mathbf{a} - 6\mathbf{b}$, $\overline{BC} = \mathbf{a} + 7\mathbf{b}$ і $\overline{CA} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$, де $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ — взаємно перпендикулярні орти, визначити кути цього трикутника.

1049. Знаючи розкладання вектора $\mathbf{Q} = 6\mathbf{m} - 2\mathbf{n} + 3\mathbf{p}$ по трьох перпендикулярних ортах, обчислити довжину вектора $\mathbf{Q}$ і кути, які він утворює з кожним з ортів $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ і $\mathbf{p}$.

1050. Позначивши через $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ сторони ромба, які виходять з спільної вершини, довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

1051. Перевірити, що вектори $\mathbf{p} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}) - \mathbf{b}(\mathbf{ac})$ і $\mathbf{c}$ перпендикулярні один до одного.

1052. Знаючи, що $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ і $(\widehat{\mathbf{ab}}) = \frac{2\pi}{3}$, визначити, при якому значенні коефіцієнта α вектори $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$ і $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ виявляться перпендикулярними.

1053. Який кут утворять одиничні вектори $\mathbf{s}$ і $\mathbf{t}$, якщо відомо, що вектори $\mathbf{p} = \mathbf{s} + 2\mathbf{t}$ і $\mathbf{q} = 5\mathbf{s} - 4\mathbf{t}$ взаємно перпендикулярні.

1054. Знайти проекцію вектора $\mathbf{A} = 10\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ на вісь, яка має напрям вектора $\mathbf{B} = 5\mathbf{m} - 12\mathbf{n}$, де $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ — взаємно перпендикулярні орти. Обчислити кути між віссю проекцій і одиничними векторами $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$.

1055. Знаючи скалярний добуток (P) двох векторів і один з цих векторів ($\mathbf{a}$), чи можна знайти другий вектор ($\mathbf{x}$)?

1056. Дано розкладання векторів, які служать сторонами трикутника, за двома взаємно перпендикулярними ортами: $\overline{AB} = 5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overline{BC} = 2\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ і $\overline{CA} = -7\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$. Обчислити довжину медіани $\overline{AM}$ і висоти $\overline{AD}$ трикутника ABC.

1057. Знаючи вектори **a** і **b**, на яких побудовано паралелограм, виразити через них вектор, який збігається з висотою паралелограма, перпендикулярною до сторони **a**.

3. Векторне множення. Мішаний добуток трьох векторів. Подвійний векторний добуток

Поряд з множенням двох векторів, які приводять до скаляра, розглянемо ще один тип множення векторів, внаслідок якого дістаємо вектор. Таке множення називається векторним або зовнішнім *.

Векторним добутком двох векторів **a** і **b** називається вектор **c**, який має такі властивості:

1. Довжина вектора **c** дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах **a** і **b**, тобто

$$c = a \cdot b \cdot \sin(\widehat{\mathbf{ab}}) \qquad (28)$$

2. Вектор **c** перпендикулярний до площини цього паралелограма, тобто перпендикулярний і вектору **a** і вектору **b**:

$$\mathbf{ac} = 0 \text{ і } \mathbf{bc} = 0. \qquad (29)$$

3. Вектори **a**, **b** і **c**, взяті у вказаному порядку, становлять праву трійку векторів **.

Ця остання умова означає, що спостерігач, який стоїть на площині векторів **a** і **b** так, що напрям від його ніг до голови збігається з напрямом вектора **c**, бачить, що найкоротше обертання від напряму **a** до напряму **b** відбувається справа наліво, тобто проти годинникової стрілки.

Для векторного добутку **c** вектора **a** на вектор **b** вводиться позначення:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{ab}] \qquad (30)$$

або

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \qquad (30')$$

Якщо перемножені вектори взаємно перпендикулярні, то модуль векторного добутку дорівнює добуткові модулів співмножників:

$$|[\mathbf{ab}]| = ab, \text{ якщо } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}. \qquad (31)$$

Якщо перемножені вектори колінеарні, $\sin(\widehat{\mathbf{ab}}) = 0$ і векторний добуток їх дорівнює нулеві, тобто

$$[\mathbf{ab}] = 0, \qquad (32)$$

це рівносильно $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ***; зокрема,

$$[\mathbf{aa}] = 0. \qquad (32')$$

* Доцільність введення такого множення стверджується при розв'язанні цілого ряду геометричних і механічних проблем (обчислення моменту сили, вираження площі за допомогою векторів і ін.).

** Можна було б дати означення векторного добутку, замінивши цю умову умовою, йому протилежною, тобто вимагати, щоб вектори **a**, **b** і **c** становили ліву трійку. Але оскільки вибір зроблено, треба строго дотримуватися відповідної умови.

*** Ми не виділяємо випадку, коли один із співмножників дорівнює нулеві, бо нуль-вектору можна приписати будь-який напрям.

Властивість переставляння для векторного множення не зберігається, бо переміна місць співмножників приводить до переміни знака добутку або, точніше, вектор-добуток змінює напрям на протилежний:

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}]. \tag{33}$$

Властивість сполучності по відношенню до скалярного множника зберігається:

$$\alpha[\mathbf{ab}] = [(\alpha\mathbf{a})\,\mathbf{b}] = [\mathbf{a}\,(\alpha\mathbf{b})]. \tag{34}$$

Властивість розподільності для векторного добутку зберігається:

$$[\mathbf{a}\,(\mathbf{b}+\mathbf{c})] = [\mathbf{ab}] + [\mathbf{ac}]. \tag{35}$$

Якщо векторний добуток двох векторів [**ab**] помножається скалярно на третій вектор **c**, то такий добуток трьох векторів називається *мішаним* (векторно-скалярним) і позначається так:

$$[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c} = \mathbf{c}\,[\mathbf{ab}]. \tag{36}$$

Змішаний добуток має просте геометричне тлумачення — це скаляр, який за абсолютною величиною дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на даних трьох векторах. Якщо вектори **a**, **b** і **c** становлять праву трійку, то змішаний добуток є число додатне, рівне зазначеному об'ємові; якщо ж трійка **a**, **b** і **c** ліва, змішаний добуток — число від'ємне, і для одержання додатного об'єму доведеться змінити знак на протилежний.

Змішаний добуток трьох векторів дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні, тобто умова компланарності трьох векторів має вигляд:

$$[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c} = 0. \tag{37}$$

Змішаний добуток має ту властивість, що вона не змінюється при круговому переставлянні співмножників і змінює знак при всякій перестановці, яка змінює послідовність співмножників:

$$[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c} = [\mathbf{bc}]\,\mathbf{a} = [\mathbf{ca}]\,\mathbf{b} = -[\mathbf{ba}]\,\mathbf{c} = -[\mathbf{ac}]\,\mathbf{b} = -[\mathbf{cb}]\,\mathbf{a}. \tag{38}$$

Тому змішаний добуток векторів **a**, **b** і **c** іноді означають простіше, написавши їх поряд в тій послідовності, в якій провадяться дії:

$$[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c} = \mathbf{abc}. \tag{39}$$

Якщо векторний добуток двох векторів [**ab**] помножається векторно на третій вектор **c**, то такий добуток називається *подвійним векторним добутком* і позначається так:

$$[[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}]. \tag{40}$$

Подвійний векторний добуток не має ні властивості переставляння, ні властивості сполучення:

$$[[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}] \neq [\mathbf{c}[\mathbf{ab}]], \tag{41}$$

$$[[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}] \neq [\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]]. \tag{42}$$

Вектор [[**ab**] **c**] компланарний векторам **a** і **b**; тому його можна розкласти по цих векторах. Відповідна формула розкладання подвійного векторного добутку така:

$$[[\mathbf{ab}]\mathbf{c}] = \mathbf{b}\,(\mathbf{ac}) - \mathbf{a}\,(\mathbf{bc}). \tag{43}$$

1058. Чи утворюють перші три пальці лівої руки ліву або праву трійку, якщо великий і вказівний пальці витягнуті в площині долоні, а середній палець зігнутий у бік долоні? Те ж питання розв'язати відносно тих самих пальців правої руки.

1059. Перевірити, що при круговій перестановці векторів **a**, **b** і **c** характер трійки (лівої або правої) не змінюється.

1060. Перевірити, що при переставленні двох векторів з трьох даних ліва трійка переходить у праву і навпаки.

1061. Перевірити, що безперервним обертанням векторів ліва трійка може перетворитися в праву, лише перейшовши через положення компланарності.

1062. Спростити добутки [**ab**], [**bc**], і [**ca**], знаючи, що **a**, **b** і **c** — взаємно перпендикулярні орти, які утворюють праву трійку.

1063. Розв'язати задачу 1062, припустивши, що орти **a**, **b** і **c** утворюють ліву трійку.

1064. При якому значенні коефіцієнта α вектори

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 5\mathbf{b} \text{ і } \mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$$

виявляться колінеарними, якщо **a** і **b** не колінеарні?

1065. Довести, що векторний добуток не зміниться, якщо до одного з співмножників додати вектор, колінеарний другому співмножникові.

1066. Показати, що векторне множення вектора **a** на перпендикулярний до нього орт **n** рівнозначне повороту вектора **a** на прямий кут за годинниковою стрілкою в площині, перпендикулярній до орта **n**.

1067. Розібрати, яку заміну треба зробити у ствердженні попередньої задачі, якщо вектор **a** є множник, а орт **n** — множене.

1068. Перевірити, що векторне множення даного вектора **a** на вектор **b** може бути замінено трьома такими операціями:

1) проектуванням вектора **a** на площину, перпендикулярну до **b**;

2) поворотом одержаного при проектуванні вектора на прямий кут за годинниковою стрілкою в зазначеній площині;

3) множенням повернутого вектора на модуль множника **b**.

1069. Якщо **A** і **B** задані, то чи можна підібрати **X** так, щоб **A** = [**BX**]? Чи завжди можлива задача і скільки вона має розв'язків?

1070. Перевірити, що [**ab**] = [**bc**] = [**ca**], якщо **a**, **b** і **c** — будь-які три вектори, які задовольняють умову **a** + **b** + **c** = 0.

1070*. Довести компланарність векторів [**ap**], [**aq**] і [**ar**].

1071. Перевірити, чи мають місце у векторній алгебрі тотожності:

$$1)\ [\mathbf{a} + \mathbf{b},\ \mathbf{a} - \mathbf{b}] = [\mathbf{a}^2] - [\mathbf{b}^2]\ ^*;$$
$$2)\ [(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}^2] = [\mathbf{a}^2] \pm 2[\mathbf{ab}] + [\mathbf{b}^2];$$
$$3)\ [\mathbf{ab}]^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2.$$

1072. Векторний добуток [(**a** + **b**) (**a** — **b**)] перетворити в припущенні, що **a** і **b** не колінеарні, і дати геометричне тлумачення одержаному результату.

* Символ [$\mathbf{a}^2$] заміняє [**aa**].

1073. Обчислити скаляр $\alpha = [\mathbf{ab}]^2 + (\mathbf{ab})^2$.

1074. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{P} = 2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$ і $\mathbf{Q} = \mathbf{A} - 4\mathbf{B}$, де $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

1075. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ і $\overline{AD} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$, де $m = 5$, $n = 3$ і $(\widehat{\mathbf{mn}}) = \frac{\pi}{6}$.

1076. Знаючи дві сторони трикутника $\overline{AB} = 3\mathbf{p} - 4\mathbf{q}$ і $\overline{BC} = \mathbf{p} + 5\mathbf{q}$ обчислити довжину його висоти $\overline{CD}$ при умові, що $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ — перпендикулярні одна до одної орти.

1077. Розкласти вектор $\mathbf{P} = [(3\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c})\ (\mathbf{a} - \mathbf{b} + 5\mathbf{c})]$ за взаємно перпендикулярними ортами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, які утворюють праву трійку.

1078. Дано вектор $\mathbf{Q} = [(3\mathbf{m} + 4\mathbf{n} + 5\mathbf{p})\ (\mathbf{m} + 6\mathbf{n} + 4\mathbf{p})]$, де $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ і $\mathbf{p}$ — взаємно перпендикулярні орти, які утворюють ліву трійку. Обчислити його довжину.

1079. Обчислити синус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на даних векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{p}$ і $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n} + \mathbf{p}$, де $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ і $\mathbf{p}$ — взаємно перпендикулярні орти.

1080. Обчислити проекцію вектора $\mathbf{A} = 3\mathbf{p} - 12\mathbf{q} + 4\mathbf{r}$ на вісь, яка має напрям векторів $\mathbf{B} = [(\mathbf{p} - 2\mathbf{r})\ (\mathbf{p} + 3\mathbf{q} - 4\mathbf{r})]$, якщо $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ і $\mathbf{r}$ — взаємно перпендикулярні орти.

1081. Довести, що змішаний добуток трьох векторів, з яких два колінеарні, дорівнює нулеві.

1082. Дати алгебраїчне доведення того, що змішаний добуток трьох компланарних векторів дорівнює нулеві.

1083. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{P} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}$ і $\mathbf{R} = \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

1084. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах

1) $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q} + \mathbf{r}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q} - 3\mathbf{r}$ і $\mathbf{c} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q} + \mathbf{r}$, де $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ і $\mathbf{r}$ — взаємно перпендикулярні орти;

2) $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 5\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{m} + 7\mathbf{n}$,

де $|\mathbf{m}| = {}^1/_2$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{mn}}) = 135°$.

1085. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах: $\mathbf{A} = 3\mathbf{P} + 2\mathbf{Q} - 5\mathbf{R}$, $\mathbf{B} = \mathbf{P} - \mathbf{Q} + 4\mathbf{R}$ і $\mathbf{C} = \mathbf{P} - 3\mathbf{Q} + \mathbf{R}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$. Крім того, відомо, що $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{R}$ — взаємно перпендикулярні орти.

1086. Перевірити, чи компланарні дані вектори:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \mathbf{p} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c};\ \mathbf{q} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}; \\ \quad \mathbf{r} = 7\mathbf{a} + 14\mathbf{b} - 13\mathbf{c}; \\ 2)\ \mathbf{p} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b} - 3\mathbf{c};\ \mathbf{q} = \mathbf{a} - 4\mathbf{b} + \mathbf{c}; \\ \quad \mathbf{r} = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}; \\ 3)\ \mathbf{p} = [\mathbf{am}];\ \mathbf{q} = [\mathbf{bm}];\ \mathbf{r} = [\mathbf{cm}]. \end{array}\right\}\ \text{a, b, c — взаємно перпендикулярні орти.}$$

1087. Перевірити справедливість рівності

$$[[\mathbf{ab}]\mathbf{c}] + [[\mathbf{bc}]\mathbf{a}] + [[\mathbf{ca}]\mathbf{b}] = 0.$$

1088. Показати, що коли $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ і $\mathbf{A} \perp \mathbf{C}$, то

$$[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]] = 0.$$

1089. Чи будуть рівносильні такі дві рівності:

a) $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ і $\alpha\mathbf{A} = \alpha\mathbf{B}$;
b) $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ і $(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BC})$;
c) $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ і $[\mathbf{AC}] = [\mathbf{BC}]$;
d) $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ і $\mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$?

1090. Довести компланарність векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, знаючи, що

$$[\mathbf{ab}] + [\mathbf{bc}] + [\mathbf{ca}] = 0.$$

1091. Знаючи, що $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, знайти співвідношення між векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, які не мають коефіцієнтів λ і μ.

1092. Чи можна знайти вектор $\mathbf{x}$, який одночасно задовольняє два рівняння: $\mathbf{xa} = \alpha$ і $[\mathbf{xb}] = \mathbf{c}$, де $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ — дані вектори, а α — даний скаляр?

1093. Знайти вектор $\mathbf{x}$, який одночасно задовольняє три рівняння: $\mathbf{xa} = \alpha$, $\mathbf{xb} = \beta$ і $\mathbf{xc} = \gamma$.

1093*. Перевірити, що $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = 0$, якщо існує вектор $\mathbf{x}$, який одночасно задовольняє два рівняння: $[\mathbf{a}_1\mathbf{x}] = \mathbf{b}_1$ і $[\mathbf{a}_2\mathbf{x}] = \mathbf{b}_2$.

РОЗДІЛ XVI

ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ В АНАЛІТИЧНІЙ ГЕОМЕТРІЇ

1. Визначення положення точки за допомогою радіуса-вектора. Координати вектора. Дії над векторами, заданими своїми координатами. Основні формули

Положення точки в просторі можна визначити одним вектором, який називається *радіусом-вектором*[1] цієї точки.

Щоб здійснити таке означення, необхідно вибрати в просторі довільну точку O, названу *полюсом*. Як тільки полюс O вибрано, кожній точці M відповідає єдиний вектор OM, який пов'язує полюс з цією точкою, і, навпаки, кожному вектору $\mathbf{r}$ відповідає єдина точка — кінець вектора $\mathbf{r}$, віднесеного до полюса (рис. 72). Те, що точці M відповідає радіус-вектор $\mathbf{r}$, записують так: $M(\mathbf{r})$.

Якщо ми змінимо полюс, наприклад за полюс виберемо нову точку O' (r_0), то точці M відповідатиме другий радіус-вектор $\mathbf{r}'$ який пов'язаний з попереднім радіусом-вектором цієї точки $\mathbf{r}$ і з радіусом-вектором нового полюса $\mathbf{r}'_0$; таким чином (рис. 73):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 \text{ або } \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0. \tag{1}$$

[1] В цьому розділі під словом «радіус-вектор» ми розуміємо саме вектор, тобто відрізок певної довжини і певного напряму, протилежно до сказаного в розд. II, V і VII, де під радіусом-вектором розумілась лише довжина відрізка.

Якщо дано * дві точки $A(\mathbf{r}_1)$ і $B(\mathbf{r}_2)$, то вектор, який їх з'єднує, дорівнює різниці радіусів-векторів цих точок:

$$\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \tag{2}$$

причому з радіуса-вектора кінця вектора треба відняти радіус-вектор початку (рис. 74).

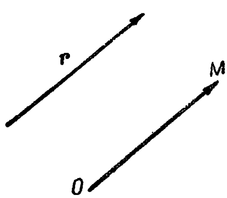

Рис. 72.

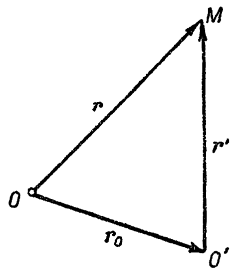

Рис. 73.

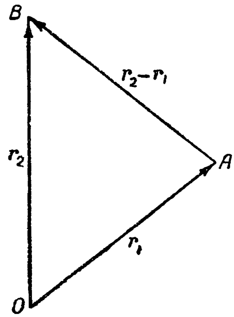

Рис. 74.

Якщо дано дві точки $A(\mathbf{r}_1)$ і $B(\mathbf{r}_2)$, то радіус-вектор $\mathbf{r}$ точки C, який поділяє вектор $\overline{AB}$ у відношенні λ (рис. 75), тобто $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda$, визначається за формулою:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1 + \lambda} \ ^{**}. \tag{3}$$

Зокрема, радіус-вектор середини ($\lambda = 1$) вектора $\overline{AB}$ дорівнює півсумі радіусів-векторів його кінців:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}. \tag{4}$$

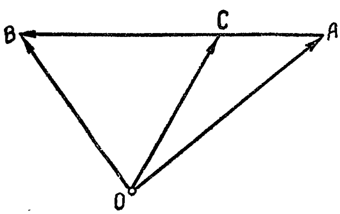

Рис. 75.

Щоб пов'язати векторний метод розв'язання задач з методом координатним і щоб включити вектори в число тих геометричних об'єктів, операції над якими можна замінити алгебраїчними обчисленнями, розглянемо їх у зв'язку з системою координат.

Просторова система координат ***, яка складається з трьох взаємно перпендикулярних осей координат, цілком установлюється вибором початку координат і ортів всіх трьох осей. Домовимося раз назавжди позначати орт осі x через $\mathbf{i}$, орт осі y — через $\mathbf{j}$ і орт осі z — через $\mathbf{k}$. Отже, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ і $\mathbf{k}$ є взаємно перпендикулярні одиничні вектори (рис. 76), які становлять праву зв'язку, тобто вони задовольняють такі умови:

$$\mathbf{i}^2 = 1, \quad \mathbf{j}^2 = 1, \quad \mathbf{k}^2 = 1, \tag{5}$$

$$(\mathbf{ij}) = 0, \quad (\mathbf{jk}) = 0, \quad (\mathbf{ki}) = 0, \tag{6}$$

$$[\mathbf{ij}] = \mathbf{k}, \quad [\mathbf{jk}] = \mathbf{i}, \quad [\mathbf{ki}] = \mathbf{j}. \tag{7}$$

---

* Дати точку — означає дати її радіус-вектор.

** Зіставляючи одержаний результат з формулою (8) розд. VII, бачимо, що одна векторна рівність заміняє три координатних.

*** Ми обмежимося прямокутними системами координат.

Будь-який вектор **a** можна розмістити по трьох некомпланарних векторах **i**, **j** і **k**. Позначивши коефіцієнти цього розкладання X, Y і Z, дістанемо:

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}. \tag{8}$$

Вектори $X\mathbf{i}$, $Y\mathbf{j}$ і $Z\mathbf{k}$ називаються к о м п о н е н т а м и вектора **a** по осях координат; це — вектори, колінеарні відповідним осям; вони ж служать ребрами того паралелепіпеда, для якого **a** є діагоналлю (рис. 77).

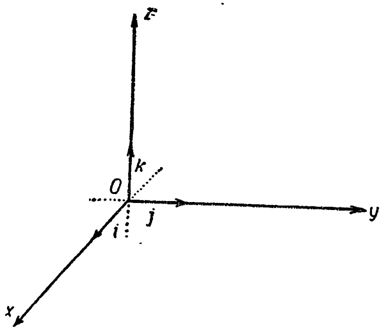

Рис. 76.

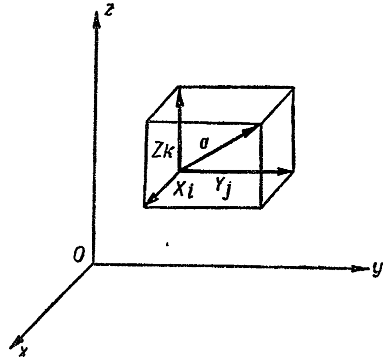

Рис. 77.

Що ж стосується коефіцієнтів розкладення X, Y і Z, то вони дорівнюють модулям компонентів, взятим з відповідним знаком; іншими словами, вони є проекціями вектора **a** на відповідні осі координат:

$$\begin{aligned} X &= \text{пр.}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{a}, \\ Y &= \text{пр.}_{\mathbf{j}}\,\mathbf{a}, \\ Z &= \text{пр.}_{\mathbf{k}}\,\mathbf{a}. \end{aligned} \tag{9}$$

Інакше їх можна розглядати як скалярні добутки вектора **a** на орти відповідних осей:

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{ai}, \\ Y &= \mathbf{aj}, \\ Z &= \mathbf{ak}. \end{aligned} \tag{10}$$

Проекції (X, Y, Z) вектора **a** на три осі координат називаються к о о р д и н а т а м и в е к т о р а.

Кожному вектору відповідає єдина трійка координат завдяки однозначності розкладання вектора по трьох некомпланарних ортах **i**, **j**, **k**, і, навпаки, кожна трійка координат X, Y, Z визначає єдиний вектор **a**, бо з (8) маємо:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \tag{11}$$

тобто довжина вектора дорівнює квадратному кореню з суми квадратів його координат, а з співвідношень (10) і (11) дістаємо можливість визначити напрям вектора:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}; \\ \cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

де

$$\alpha = (\widehat{\mathbf{a}\mathbf{i}}), \quad \beta = (\widehat{\mathbf{a}\mathbf{j}}) \text{ і } \gamma = (\widehat{\mathbf{a}\mathbf{k}}).$$

Те, що вектор **a** має координати X, Y, Z, позначається так:

$$\mathbf{a}\{X, Y, Z\}.$$

Якщо дано кілька векторів своїми координатами:

$$\mathbf{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}, \ \mathbf{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2,\}, \ \ldots, \ \mathbf{a}_n\{X_n, Y_n, Z_n\},$$

то координати суми цих векторів

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$$

дорівнюють алгебраїчним сумам однойменних координат додаваних векторів, тобто:

$$\mathbf{c}\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \ Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n, \ Z_1 + \\ + Z_2 + \ldots + Z_n\}. \tag{13}$$

Координати різниці двох векторів дорівнюють різницям однойменних координат цих векторів, тобто якщо

$$\mathbf{a}\{X_1 \ Y_1, \ Z_1\}, \ \mathbf{b}\{X_2, \ Y_2, \ Z_2\}$$

і

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b},$$

то

$$\mathbf{c}\{X_1 - X_2, \ Y_1 - Y_2, \ Z_1 - Z_2\}. \tag{14}$$

Координати добутку вектора **a** $\{X, Y, Z\}$ на скаляр α дорівнюють добуткам координат вектора на той же скаляр:

$$\alpha\mathbf{a}\{\alpha X, \ \alpha Y, \ \alpha Z\}. \tag{15}$$

Якщо дано координати двох векторів $\mathbf{a}\{X_1, Y_1, Z_1\}$ і $\mathbf{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків її однойменних координат:

$$\mathbf{ab} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \tag{16}$$

Кут між цими двома векторами обчислюється за формулою:

$$\cos(\widehat{\mathbf{ab}}) = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \tag{17}$$

Умова перпендикулярності двох векторів:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \tag{18}$$

Умова колінеарності двох векторів:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}. \tag{19}$$

Якщо дано координати двох векторів **a** $\{X_1, Y_1, Z_1\}$ і **b** $\{X_2, Y_2, Z_2\}$, то координати їх векторного добутку (**ab**) обчислюються за формулами:

$$\left.\begin{aligned} X &= Y_1Z_2 - Y_2Z_1, \\ Y &= Z_1X_2 - Z_2X_1, \\ Z &= X_1Y_2 - X_2Y_1, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

або, що простіше, ці координати є визначниками матриці

$$\left\| \begin{matrix} X_1Y_1Z_1 \\ X_2Y_2Z_2 \end{matrix} \right\|, \tag{21}$$

складеної з координат даних двох векторів *.

Можна векторний добуток тих же двох векторів подати за допомогою визначників третього порядку:

$$[\mathbf{ab}] = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Скаляр **abc**, який являє собою змішаний добуток трьох даних векторів **a** $\{X_1, Y_1, Z_1\}$, **b** $\{X_2, Y_2, Z_2\}$ і **c** $\{X_3, Y_3, Z_3\}$, дорівнює визначникові третього порядку, складеному з координат цих трьох векторів:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Звідси випливає умова компланарності трьох векторів:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{24}$$

Щоб пов'язати координати вектора з координатами точки, треба мати на увазі, що координати точки M (x, y, z) дорівнюють координатам її радіуса-вектора $\overline{OM}$ $\{X, Y, Z\}$, якщо полюс збігається з початком координат, тобто

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z. \tag{25}$$

Якщо вектор $\overline{AB}$ заданий своїми кінцевими точками A (x_1, y_1, z_1) і $B(x_2, y_2, z_2)$, то координати цього вектора $\{X, Y, Z\}$ дорівнюють різницям однойменних координат кінця і початку вектора:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1. \tag{26}$$

Щоб перейти від векторної формули, наприклад від формули

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1 + \lambda}. \tag{3}$$

до відповідних координатних формул, можна скористатися розкладенням радіусів-векторів по основних ортах **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}.$$

Вставивши ці вирази в дану формулу (3), дістанемо:

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \frac{(x_1 + \lambda x_2)\,\mathbf{i} + (y_1 + \lambda y_2)\,\mathbf{j} + (z_1 + \lambda z_2)\,\mathbf{k}}{1 + \lambda}. \tag{3'}$$

---

* Щоб одержати з цієї матриці координати векторного добутку, треба в ній по черзі викреслити перший, другий і третій стовпці, змінивши у середнього визначника знак на протилежний.

Беручи до уваги однозначність розкладення вектора, можна прирівняти коефіцієнти при однакових ортах у лівій і правій частинах рівності (3'):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{3''}$$

Чи можна було б при розв'язанні цієї ж задачі застосувати другий спосіб, а саме, спроектувати вектор $\mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{r}_2}{1 + \lambda}$ послідовно на кожну з осей координат, тобто скалярно помножити обидві частини рівності (3) послідовно на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, і $\mathbf{k}$.

При множенні на $\mathbf{i}$ дістанемо:

$$(\mathbf{ri}) = \frac{(\mathbf{r}_1\mathbf{i}) + \lambda (\mathbf{r}_2\mathbf{i})}{1 + \lambda}$$

або, беручи до уваги, що

$$(\mathbf{ri}) = x, \; (\mathbf{r}_1\mathbf{i}) = x_1, \; (\mathbf{r}_2\mathbf{i}) = x_2,$$

дістанемо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

і т. д.

Примітка. В цьому розділі ми ввели зразу просторову систему координат і розкладення будь-якого вектора по трьох основних ортах; якщо всі розглядувані вектори лежать в одній і тій же площині (xy), то їх можна було б розкласти по двох компланарних їм ортах:

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}.$$

Кожний такий вектор мав би тільки дві координати, і всі наведені формули відповідно спростились би.

1094. Знаючи три вершини паралелограма $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ і $C(\mathbf{r}_3)$, знайти четверту його вершину D, протилежну B.

1095. Де вибрати полюс, щоб сума радіусів-векторів всіх вершин паралелограма дорівнювала нулеві? Скільки розв'язків має ця задача?

1096. Довести, що відрізки, які з'єднують середини протилежних ребер тетраедра, проходять через одну і ту ж точку і поділяються в ній пополам.

1097. Перевірити, що сума радіусів-векторів вершин трикутника дорівнює нулеві, якщо полюс збігається з центром ваги трикутника.

1098. Перевірити, що сума векторів, напрямлених з центра ваги n матеріальних точок у всі ці точки, дорівнює нулеві, якщо у всіх n точках зосереджені рівні маси.

1099. Як записати умовні колінеарності[1] трьох точок $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ і $C(\mathbf{r}_3)$?

1099*. Перевірити, що точки $A(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k})$, $B(3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$ і $C(4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 9\mathbf{k})$ лежать на одній прямій.

[1] Точки називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій.

1100. Що можна стверджувати відносно розміщення трьох точок $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ і $C(\mathbf{r}_3)$, якщо їх радіуси-вектори пов'язані співвідношенням:

$$\alpha\mathbf{r}_1 + \beta\mathbf{r}_2 + \gamma\mathbf{r}_3 = 0,$$

причому

$$\alpha + \beta + \gamma = 0?$$

1101. Як виразити умову компланарності чотирьох точок $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$, $C(\mathbf{r}_3)$ і $D(\mathbf{r}_4)$?

1102. Як виразити площу трикутника через радіуси-вектори його вершин?

1102*. Перевірити, що точки $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ і $C(\mathbf{r}_3)$ лежать на одній прямій, якщо

$$[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2] + [\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3] + [\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1] = 0.$$

1103. Дано вершини трикутника: $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(5;\ -3;\ 4)$ і $C(2;\ 1;\ 6)$. Розкласти вектори, які збігаються з його сторонами, по основних ортах $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ і $\mathbf{k}$.

1104. Чи можна розв'язати задачу, протилежну задачі 1103, тобто, знаючи розкладення сторін трикутника по основних ортах, знайти його вершини?

1105. Знаючи одну з вершин трикутника $A(2;\ -5;\ 3)$ і вектори, які збігаються з двома його сторонами $\overline{AB}\{4;\ 1;\ 2\}$ і $\overline{BC}\{3;\ -2;\ 5\}$, знайти решту вершин і сторону CA.

1106. Довести, що чотирикутник, всі вершини якого визначені своїми радіусами-векторами $\mathbf{r}_1 = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ і $\mathbf{r}_4 = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, є паралелограм.

1106*. Знайти радіуси-вектори вершин чотирикутника задачі 1106 після того, як полюс буде перенесений в вершину $C(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k})$.

1107. Знайти проекцію вектора $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 3\mathbf{n} - \mathbf{p}$ на вісь абсцис і компоненту цього ж вектора по осі ординат, якщо

$$\mathbf{m} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k},\ \mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k} \text{ і } \mathbf{p} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

1108. Обчислити скалярний добуток векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, де

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ і } \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

1108*. Перевірити, що трикутник з вершинами $A(5\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$, $B(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$, $C(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$ — прямокутний.

1109. Знайти довжину і напрям вектора $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 5\mathbf{n} + \mathbf{p}$, знаючи, що $\mathbf{m} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ і $\mathbf{p} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

1110. Знайти вектор $\mathbf{P}$, знаючи дві його координати $X = 3$, $Y = -9$ і модуль $P = 12$.

1111. Знайти одиничний вектор $\mathbf{a}$, паралельний векторові $A\{6;\ 7;\ -6\}$.

1112. Знайти одиничний вектор $\mathbf{p}$, який одночасно перпендикулярний до вектора $\mathbf{a}\ \{3;\ 6;\ 8\}$ і до осі абсцис.

1113. Дано компоненти трьох сил: $\mathbf{a}_x = 5\mathbf{i}$, $\mathbf{a}_y = 2\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_z = -7\mathbf{k}$; $\mathbf{b}_x = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{b}_y = 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b}_z = 4\mathbf{k}$; $\mathbf{c}_x = 12\mathbf{i}$, $\mathbf{c}_y = \mathbf{j}$ і $\mathbf{c}_z = 15\mathbf{k}$. Знайти величину і напрям рівнодіючої сили $\mathbf{R}$.

1114. Знаючи, що вектори $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ і $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ колінеарні, обчислити коефіцієнти α і γ.

1115. У площині (xy) знайти вектор $\mathbf{P}$, який перпендикулярний до вектора $Q\{5; -3; 4\}$ і має однакову з ним довжину.

1116. Знаючи вектори, які збігаються з двома сторонами трикутника $\overline{AB}\,\{2; 1; -2\}$ і $\overline{BC}\,\{3; 2; 6\}$, обчислити кути цього трикутника.

1116*. Обчислити площу трикутника задачі 1116.

1117. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на трьох даних векторах $P\{3; 1; -2\}$, $Q\{-4; 0; 3\}$ і $R\{1; 5; -1\}$, і дослідити, чи утворюють вектори ліву чи праву трійку.

1118. Перевірити, чи будуть компланарні дані три вектори:

a) $\mathbf{A}\{2; -1; 3\}$, $\mathbf{B}\{1; 4; 2\}$, $\mathbf{C}\{3; 1; -1\}$;

b) $\mathbf{L}\{1; 6; 5\}$, $\mathbf{M}\{3; -2; 4\}$, $\mathbf{N}\{7; -18; 2\}$.

1119. Виходячи з умови компланарності трьох векторів $\overline{AB}\,\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\overline{AC}\,\{X_2, Y_2, Z_2\}$, і $\overline{AD}\,\{X_3, Y_3, Z_3\}$, дати умову компланарності чотирьох точок $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ і $D(x_4, y_4, z_4)$.

1120. Перевірити, що радіус-вектор будь-якої точки прямої, яка поділяє пополам кут між $\mathbf{r}_1\{x_1, y_1\}$ і $\mathbf{r}_2\{x_2, y_2\}$, може бути поданий формулою: $\mathbf{r} = \lambda\left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2}\right)$.

Знайти рівняння, яке пов'язує координати будь-якої точки цієї прямої.

2. Геометричне значення векторних рівнянь

В аналітичній геометрії положення точки в просторі визначається трьома координатами; тому, щоб задати точку, треба або безпосередньо дати всі три її координати, або дати три рівняння, з яких можна було б їх визначити. Якщо дано лише одно або двоє рівнянь, які пов'язують просторові координати точки, то вони не можуть визначити єдину точку; їх задовольняють координати безлічі точок, які заповнюють або деяку поверхню (випадок одного рівняння), або лінію (випадок двох рівнянь). В такому випадку ми говоримо, що дане рівняння визначає поверхню, або що система двох рівнянь визначає в просторі деяку лінію.

Якщо ж скористатися векторним визначенням положення точки, то для визначення точки досить знати один вектор — радіус-вектор цієї точки, який можна дати безпосередньо або одержати з рівняння. Питання про те, чи визначає дане рівняння одну точку, чи цілу поверхню, чи лінію, не розв'язується в загальному вигляді, як при координатному методі, а в кожному окремому випадку розв'язується залежно від характеру рівняння.

Наприклад, якщо дано рівняння

$$\frac{(\mathbf{ab})\,\mathbf{r} + 3\mathbf{a}}{\mathbf{c}^2} = \frac{2\,[\mathbf{bc}] - \mathbf{r}\,(\mathbf{ac})}{a^2}, \qquad (27)$$

його можна розв'язати відносно $\mathbf{r}$ і дістати нове рівняння, рівнозначне [1] даному:

$$\mathbf{r} = \frac{2c^2[\mathbf{bc}] - 3a^2\mathbf{a}}{a^2(\mathbf{ab}) + c^2(\mathbf{ac})}.$$

У правій частині цього рівняння вказано ряд однозначних дій над невідомими векторами; виконавши їх, ми дістанемо певний єдиний вектор, якому за умовою повинен дорівнювати радіус-вектор шуканої точки, тобто рівняння (27) визначає єдину точку.

Візьмемо другий приклад:

$$\alpha\mathbf{r} + \mathbf{ab} = 0. \tag{28}$$

Якщо розв'язати це рівняння відносно $\mathbf{r}$, то виявиться, що вектор повинен дорівнювати скаляру, чого, звичайно, не може бути. Тому таке рівняння не визначає ні однієї точки, воно ніякого смислу не має. Виняток становить лише випадок, коли дані вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ перпендикулярні, тобто $(\mathbf{ab}) = 0$; тоді рівняння (28) задовольняє радіус-вектор однієї єдиної точки — полюса, якщо $\alpha \neq 0$.

Якщо дане рівняння має не самий радіус-вектор шуканої точки, а його довжину, як наприклад, рівняння

$$r^2 = a^2, \tag{29}$$

то і визначити можна тільки одну сторону радіуса-вектора, і цілком довільним залишається його напрям. Таке рівняння задовольняють радіуси-вектори безлічі точок, зокрема, рівняння (29) задовольняють всі точки сферичної поверхні, яка має центр в полюсі і радіус, що дорівнює a.

Найбільш типовими рівняннями, які визначають не одну, а безліч точок, є рівняння, в яких шуканий радіус-вектор входить як співмножник у скалярному або в векторному добутку (див. задачі 1055 і 1069).

Розглянемо рівняння

$$\mathbf{ra} = 0. \tag{30}$$

Це рівняння накладає на радіус-вектор вимогу, щоб він був перпендикулярний до даного вектора $\mathbf{a}$. Але таких радіусів-векторів існує безліч, всі вони розміщені в площині, яка проходить через полюс перпендикулярно до $\mathbf{a}$. Навпаки, якщо в цій площині взяти будь-яку точку, то її радіус-вектор задовольняє поставлену умову. Отже, рівняння (30) визначає площину, яка проходить через полюс перпендикулярно до вектора $\mathbf{a}$.

Так само неважко побачити, що геометричне місце точок, радіуси-вектори яких задовольняють рівняння

$$[\mathbf{ra}] = 0, \tag{31}$$

є пряма, що проходить через полюс паралельно вектору $\mathbf{a}$.

Отже, геометричне значення векторного рівняння цілком залежить від характеру цього рівняння.

Важливо вміти не тільки знаходити геометричний образ, який відповідає даному рівнянню, а і розв'язати протилежну задачу — скласти рівняння даного геометричного місця точок.

Складемо, наприклад, векторне рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від даних двох точок $A(\mathbf{r}_1)$ і $B(\mathbf{r}_2)$. Нехай M ($\mathbf{r}$) означає рухому точку, яка описує дане геометричне місце. Треба пов'язати рівнянням змінний (текучий) радіус-вектор $\mathbf{r}$ точки M з сталими даними векторами $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$. За умовою задачі вектори $\overline{AM} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ і $\overline{BM} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_2$ повинні мати однакову довжину, що можна записати так:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$$

---

[1] Що заново одержане рівняння рівнозначне даному, випливає з того, що при розв'язанні ми користуємося тільки двома операціями: множенням обох частин рівняння на один і той же скаляр і додаванням до обох частин рівняння одного і того ж вектора (див. задачу 1089).

або

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2=(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)^2.$$

Шукане рівняння складено, але його можна ще перетворити:

$$\mathbf{r}^2-2(\mathbf{r}\mathbf{r}_1)+r_1^2=r^2-2(\mathbf{r}\mathbf{r}_2)+\mathbf{r}_2^2,\quad 2\{(\mathbf{r}\mathbf{r}_2)-(\mathbf{r}\mathbf{r}_1)\}=r_2^2-r_1^2,$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-\frac{r_2^2-r_1^2}{2}=0,\quad \mathbf{r}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\left(\frac{\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1}{2}\right)=0,$$

або остаточно:

$$\left(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}\right)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=0. \tag{32}$$

Рівняння (32) має просте геометричне тлумачення: вектори $\mathbf{r}-\dfrac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}$ і $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ повинні бути перпендикулярні один одному. Але $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2=\overline{AB}$ (рис. 78) є вектор, який з'єднує дані дві точки, а $\mathbf{r}-\dfrac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{2}=\overline{CM}$ є вектор, який з'єднує рухому точку M з серединою відрізка AB. Отже, всі точки, які задовольняють рівняння (32), лежать на перпендикулярах, поставлених до відрізка AB, і проходять через його середину, тобто вони заповнюють площину, яка перпендикулярна до відрізка AB і поділяє його пополам.

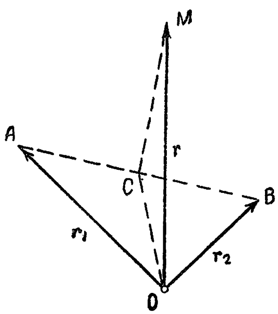

Рис. 78.

Складемо ще рівняння сферичної поверхні, яка має центр в точці $C(\mathbf{r}_1)$ і радіус, довжина якого дорівнює a. Будь-яка точка M $(\mathbf{r})$ сферичної поверхні повинна мати ту властивість, що її віддаль від центра C дорівнює a, тобто

$$|\overline{CM}|=a,$$

але, оскільки $\overline{CM}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, рівняння матиме вигляд:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|=a$$

або

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2=a^2. \tag{33}$$

Це рівняння можна ще перетворити:

$$\mathbf{r}^2-2(\mathbf{r}\mathbf{r}_1)+r_1^2=a^2$$

або

$$r^2-2(\mathbf{r}\mathbf{r}_1)=a^2-r_1^2. \tag{33'}$$

Іноді геометричне місце точок зображається векторним рівнянням, яке має змінний скалярний параметр.

Наприклад, у задачі 1120 було дано в параметричній формі рівняння бісектриси кута між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, віднесеними до полюса:

$$\mathbf{r}=\lambda\left(\frac{\mathbf{a}}{a}+\frac{\mathbf{b}}{b}\right). \tag{34}$$

Пряму, яка проходить через полюс паралельно $\mathbf{a}$, можна подати не тільки рівнянням (31), а і рівнянням

$$\mathbf{r}=\lambda\mathbf{a}. \tag{31'}$$

Перехід від векторних рівнянь до координатних, і навпаки, можна здійснити завдяки залежності, яка існує між координатами (x, y, z) точки і її радіусом-вектором r:

$$x = (\mathbf{ri}), \quad y = (\mathbf{rj}), \quad z = (\mathbf{rk}), \tag{35}$$
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{36}$$

1121. Скласти векторні рівняння координатних площин і координатних осей[1].

1122. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $A(\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ і $B(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

1123. Знаючи рівняння геометричного місця попередньої задачі $\mathbf{r}(\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -8$, перевірити, чи належать йому точки, радіуси-вектори яких $\mathbf{r}_1 = 15\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ і $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

1124. Скласти рівняння сферичної поверхні, яка проходить через полюс і має центр у точці $C(\mathbf{r}_1)$.

1125. Знайти центр і радіус сфери:

$$\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 35.$$

1126. Знаючи дві точки $A(\mathbf{r}_1)$ і $B(\mathbf{r}_2)$, знайти геометричне місце точок, з яких даний відрізок $\overline{AB}$ видно під прямим кутом.

1127. Перевірити, що рівняння

$$\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2) = 0$$

зображає сферичну поверхню. Знайти її центр і радіус.

1128. Яке рівняння задовольняють радіуси-вектори всіх точок кола, які лежать в площині (xy), що має центр у точці $C(3\mathbf{i})$ і радіус завдовжки 5 одиниць?

1129. Знайти геометричне значення рівнянь:

а) $r^2 + 8\,(\mathbf{rk}) + 12 = 0$;

б) $r^2 - 12\,(\mathbf{rj}) - 16\,(\mathbf{rk}) = 125$.

1130. Знаючи векторне рівняння сферичної поверхні

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2 = a^2,$$

вивести з нього відповідне координатне рівняння.

1131. Скласти рівняння геометричного місця точок, які мають ту властивість, що проекція радіуса-вектора кожної з них на вісь x дорівнює чотирьом одиницям.

Розібрати, як розміщені ці точки в просторі.

1132. Дослідити геометричний смисл рівнянь:

$$\text{a)}\ \mathbf{rj} = -5;$$
$$\text{b)}\ \mathbf{rk} = 6.$$

1133. Обмежуючись розглядом точок і векторів, розміщених в одній площині, показати, що рівняння

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{a} = 0$$

[1] Як у цій задачі, так і всюди далі, якщо не буде застережень, припускається, що полюс збігається з початком координат.

зображає пряму, яка проходить через точку $A(r_1)$ перпендикулярно до даного вектора $\mathbf{a}$.

1134. При обмеженнях задачі 1133 скласти координатне рівняння прямої $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\mathbf{a}=0$, якщо дано

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} \quad \text{і} \quad \mathbf{a} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}.$$

1135. Дати геометричне тлумачення рівнянню

$$[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}] = 0.$$

1136. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки $A(\mathbf{r}_1)$ і $B(\mathbf{r}_2)$.

1137. На площині рівняння $r^2 = a^2$ зображає коло. Скласти рівняння дотичної до неї в будь-якій її точці $A(\mathbf{r}_1)$.

1138. При обмеженнях 1133, знаючи вершини трикутника $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ і $C(\mathbf{r}_3)$, написати рівняння:

a) висоти, опущеної з вершини A;

b) медіани, проведеної з вершини B;

c) перпендикуляра до сторони BC, який проходить через її середину;

d) бісектриси внутрішнього кута A.

3. Площина

Всяке рівняння виду:

$$\mathbf{r}\mathbf{a} = \alpha, \tag{37}$$

тобто рівняння, в якому скалярний добуток текучого радіуса-вектора ($\mathbf{r}$) на даний вектор ($\mathbf{a}$) прирівнюється до даного скаляра (α), зображує площину; навпаки, всяка площина може бути подана таким рівнянням — загальним рівнянням площини.

Якщо в рівнянні (37) вільний член $\alpha = 0$, площина проходить через полюс.

Зокрема, якщо постійний множник у скалярному добутку є одиничний вектор ($\mathbf{n}$), а вільний член, перенесений у ліву частину рівняння, виявиться числом від'ємним, тобто

$$\mathbf{r}\mathbf{n} - p = 0, \tag{38}$$

де $\mathbf{n}^2 = 1$ і $p > 0$, то рівняння (38) називається нормальним рівнянням площини і параметри, які входять до нього, мають простий геометричний смисл: $\mathbf{n}$ є орт, напрямлений з полюса в сторону площини і до неї перпендикулярний, а p є віддаль площини від полюса.

Щоб звести рівняння (37) до нормального вигляду, треба перенести вільний член у ліву частину:

$$(\mathbf{r}\mathbf{a}) - \alpha = 0 \tag{37'}$$

і всі члени помножити на один і той же скаляр — нормуючий множник:

$$M = \frac{1}{\pm a} = \frac{1}{a'},$$

де a' є довжина вектора $\mathbf{a}$, взята з знаком, протилежним знакові вільного члена рівняння (37′). Тоді дістанемо:

$$\left(\mathbf{r}\,\frac{\mathbf{a}}{a'}\right) - \frac{\alpha}{a'} = 0, \tag{37''}$$

де $\frac{\mathbf{a}}{a'} = \mathbf{n}$ і $\frac{\alpha}{a'} = p$.

Віддаль δ будь-якої точки N ($\mathbf{r}_1$) від площини (38) обчислюється за формулою:

$$\delta = (\mathbf{r}_1\mathbf{n}) - p \tag{39}$$

або, якщо площина дана рівнянням (37):

$$\delta = \left(\mathbf{r}_1 \frac{\mathbf{a}}{a'}\right) - \frac{\alpha}{a'}, \tag{39'}$$

тобто віддаль точки від площини дорівнює лівій частині нормального рівняння площини, в якій текучий радіус-вектор замінений радіусом-вектором даної точки.

Віддаль, обчислена за формулою (39) або (39′), виявиться додатною або від'ємною залежно від того, чи розміщена дана точка і полюс в різних сторонах від площини або по один бік від неї.

Якщо площина задана вектором **a**, до неї перпендикулярним, і однією з точок $A(r_1)$, то рівняння площини має вигляд:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{a} = 0. \tag{40}$$

Рівняння (40) може бути приведене до вигляду (37):

$$\mathbf{r}\mathbf{a} = \mathbf{r}_1\mathbf{a}.$$

Якщо площина задана двома паралельними їй векторами **a** і **b** і точкою A ($\mathbf{r}_1$), що лежить на ній, то рівняння її таке:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,[\mathbf{a}\mathbf{b}] = 0. \tag{41}$$

Якщо площина задана двома точками $A(\mathbf{r}_1)$ і $B(\mathbf{r}_2)$ і одним вектором **a**, їй паралельним, рівняння її має вигляд:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\mathbf{a}] = 0. \tag{42}$$

Якщо площина задана трьома своїми точками $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ і $C(\mathbf{r}_3)$, її рівняння буде:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3] = 0 \tag{43}$$

або після перетворень:

$$\mathbf{r}\,([\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2] + [\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3] + [\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1]) = \mathbf{r}_1\,[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]. \tag{43'}$$

Зокрема, якщо всі три точки дані на осях координат $A(a\mathbf{i})$, $B(b\mathbf{j})$ і $C(c\mathbf{k})$. рівняння площини (рівняння у відрізках) матиме вигляд:

$$\mathbf{r}\mathbf{q} = 1, \tag{44}$$

де

$$\mathbf{q} = \frac{1}{a}\,\mathbf{i} + \frac{1}{b}\,\mathbf{j} + \frac{1}{c}\,\mathbf{k}.$$

Якщо дано дві площини своїми загальними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}\mathbf{a} &= \alpha, \\ \mathbf{r}\mathbf{b} &= \beta, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

то кут φ між цими площинами дорівнює кутові між векторами, до них перпендикулярними, тобто

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{ab} \text{ і } \sin\varphi = \frac{|[\mathbf{a}\mathbf{b}]|}{ab}. \tag{46}$$

Умова паралельності площин (45):

$$[\mathbf{a}\mathbf{b}] = 0 \text{ або } \mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}. \tag{47}$$

Умова перпендикулярності площин:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = 0. \tag{48}$$

Якщо дано три площини:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{ra} &= \alpha, \\ \mathbf{rb} &= \beta, \\ \mathbf{rc} &= \gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

то радіус-вектор точки перетину цих площин можна визначити як вектор, що задовольняє одночасно всі три рівняння (49) (див. задачу 1093). Для його обчислення можна також скористатися формулою:

$$\mathbf{r} = \frac{\alpha\,[\mathbf{bc}] + \beta\,[\mathbf{ca}] + \gamma\,[\mathbf{ab}]}{\mathbf{abc}}. \qquad (50)$$

1139. Дослідити, чи немає серед нижченаведених рівнянь площин нормальних рівнянь:

1) $\mathbf{r}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) - 3 = 0$;
2) $\mathbf{r}(^4/_7\,\mathbf{i} - {}^1/_7\mathbf{j} + {}^5/_7\mathbf{k}) - 8 = 0$;
3) $\mathbf{r}(0{,}8\mathbf{i} - 0{,}6\mathbf{k}) = 0$;
4) $\mathbf{r}(^2/_3\mathbf{i} + {}^1/_3\mathbf{j} + {}^2/_3\mathbf{k}) - 25 = 0$.

1140. Якщо дано орт $\mathbf{n}$, побудувати площини

$$\mathbf{rn} = 4;\ \ \mathbf{rn} + 3 = 0;\ \ \mathbf{rn} = 0.$$

1141. Якщо дано орт $\mathbf{n}$, побудувати площини

$$\mathbf{ra} = 1 \ \text{ і } \ \mathbf{ra} + 2 = 0,$$

де $\mathbf{a} = -{}^1/_3\,\mathbf{n}$.

1142. Звести до нормального виду рівняння площини

$$\mathbf{r}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + 5 = 0.$$

1143. Знайти віддаль площини

$$\mathbf{r}(6\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) = 33$$

від полюса.

1144. Визначити віддаль площини

$$\mathbf{r}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) - 7 = 0$$

від полюса і побудувати її.

1145. Визначити кути, які утворює з основними ортами перпендикуляр, опущений з полюса на площину

$$\mathbf{r}(5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) + 8 = 0.$$

1146. Перевірити, чи лежать точки A і B, радіуси-вектори яких $\mathbf{r}_1\{2;\ 1;\ 6\}$ і $\mathbf{r}_2\{5;\ -3;\ 1\}$, і точка $C(3;\ -2;\ 0)$ на площині

$$\mathbf{r}(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + 1 = 0.$$

1147. Дано площину $\mathbf{ra} = \alpha$. Знайти основу перпендикуляра, опущеного з полюса на цю площину. Розв'язати цю ж задачу, якщо площина дана своїм нормальним рівнянням.

1148. Знайти точку, симетричну з полюсом відносно площини

$$\mathbf{r}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) - 5 = 0.$$

1149. Знаючи орт $\mathbf{n}\left\{\frac{4}{13}; \frac{12}{13}; -\frac{3}{13}\right\}$, напрямлений з полюса перпендикулярно до площини, і віддаль площини від полюса $p = 4$, скласти рівняння площини і від векторного рівняння перейти до координатного.

1150. Що являє собою у векторному позначенні сукупність перших трьох членів нормального рівняння площини $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ і сукупність змінних членів у загальному рівнянні площини $Ax + By + Cz + D = 0$?

1151. Написати в векторній формі рівняння площини

$$11x + 7y - 9z + 15 = 0.$$

1152. Знаючи основу $P(\mathbf{r}_1)$ перпендикуляра, опущеного з полюса на площину, скласти рівняння площини.

1153. Обчислити віддаль точки:

a) $A(5\mathbf{i} + \mathbf{j})$ від площини $\mathbf{r}(4\mathbf{i} - 7\mathbf{k}) + 8 = 0$;

b) $B(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ від площини $\mathbf{r}(5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 7 = 0$;

c) $C(4\mathbf{k})$ від площини $\mathbf{r}(2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 12 = 0$.

1154. Скласти рівняння площин, які поділяють пополам двогранний кут між даними двома площинами:

$$\mathbf{r}\mathbf{n}_1 = p_1 \text{ і } \mathbf{r}\mathbf{n}_2 = p_2.$$

1155. Вказати особливості в розміщенні таких площин:

1) $\mathbf{r}(\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k}) = 0$; 4) $\mathbf{r}(\nu\mathbf{k}) = \beta$;

2) $\mathbf{r}(\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j}) = \alpha$; 5) $\mathbf{r}(\lambda\mathbf{i}) = 0$

3) $\mathbf{r}(\mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k}) = 0$;

і порівняти одержаний результат з дослідженням загального рівняння площини в координатній формі.

1156. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $A(2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ перпендикулярно:

a) орту $\mathbf{i}$;

b) вектору $\mathbf{j} + \mathbf{k}$;

c) вектору $4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

1156*. Через точку $A(5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ провести площину:

a) паралельну координатній площині (xy);

b) паралельну площині $\mathbf{r}(3\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 3$;

c) яка проходить через вісь x.

1157. Дано дві точки A і B своїми радіусами-векторами $\mathbf{r}_1 = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ і $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Через середину відрізка AB провести площину, до нього перпендикулярну.

1158. Через полюс провести площину, паралельну двом даним векторам $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ і $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

1159. Скласти рівняння площини, паралельної орту $\mathbf{k}$ і вектору $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, яка проходить через точку $A(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$.

1160. Через точки $A\,(^3/_2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-{}^2/_3\mathbf{k})$ і $B(4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k})$ провести площину, паралельну вектору $\mathbf{a}=6\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

1161. Скласти рівняння площини, яка проходить через полюс і через точки $A(5\mathbf{i}+\mathbf{k})$ і $B(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})$.

1162. Скласти рівняння площини, знаючи три її точки:

$$A\,(\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}),\ B\,(5\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k})\ \text{і}\ C\,(2\mathbf{i}+3\mathbf{k}).$$

1163. Обчислити відрізки, які відсікає на осях координат площина:

$$1)\ \mathbf{r}(\lambda\mathbf{i}+\mu\mathbf{j}+\nu\mathbf{k})=\alpha;\quad 2)\ \mathbf{ra}=\alpha.$$

1164. Знайти площину, яка проходить через задану точку $A\,(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ і відсікає на осях координат рівні додатні відрізки.

1165. Обчислити кути між такими площинами:

$$1)\ \mathbf{r}\,(-2\mathbf{i}+6\mathbf{j}-10\mathbf{k})=17\ \text{і}\ \mathbf{r}\,(3\mathbf{i}-9\mathbf{j}+15\mathbf{k})=32;$$

$$2)\ \mathbf{r}\,(5\mathbf{i}+5\mathbf{j})=4\ \text{і}\ \mathbf{r}\,(7\mathbf{j}+\mathbf{k})=9;$$

$$3)\ \mathbf{r}\,(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})=0\ \text{і}\ \mathbf{r}\,(5\mathbf{i}+7\mathbf{j}-\mathbf{k})+8=0.$$

1166. Через точку $A(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k})$ провести площину паралельно площині $\mathbf{r}\,(3\mathbf{i}-8\mathbf{j}+\mathbf{k})=13$.

1167. Обчислити віддаль між площинами:

$$\mathbf{r}\,(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k})+14=0\ \text{і}\ \mathbf{r}\,(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k})-35=0.$$

1168. На віддалі п'яти одиниць від площини з рівнянням $\mathbf{r}(4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k})=27$ провести паралельну їй площину.

1169. Через точку $A\,(-3\mathbf{j})$ провести площину, перпендикулярну до двох даних площин:

$$\mathbf{r}\,(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})=5\ \text{і}\ \mathbf{r}\,(3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+4\mathbf{k})=12.$$

1170. Через полюс провести площину, паралельну вектору $\mathbf{a}$ і перпендикулярну до площини $\mathbf{rb}=\beta$.

1171. Знайти точку перетину трьох площин:

$$\mathbf{r}\,(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k})=-8,$$
$$\mathbf{r}\,(2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k})=-27.$$
$$\mathbf{r}\,(5\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})=16.$$

1172. Показати, що рівнянням

$$\mathbf{r}\,(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})=\alpha+\lambda\beta,$$

де λ — змінний параметр, визначається пучок площин, які проходять через лінію перетину двох основних площин

$$\mathbf{ra}=\alpha\ \text{і}\ \mathbf{rb}=\beta.$$

1173. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $\mathbf{r}_1\,\{2;\ 5;\ -3\}$ і через лінію перетину площин

$$\mathbf{r}\,(3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})=5\ \text{і}\ \mathbf{r}\,(\mathbf{i}+2\mathbf{k})=0.$$

1174. Через лінію перетину площин

$$\mathbf{ra} = \alpha \text{ і } \mathbf{rb} = \beta$$

провести площину, перпендикулярну до площини

$$\mathbf{rc} = \gamma.$$

4. Пряма лінія в просторі

Всяке рівняння виду

$$[\mathbf{ra}] = \mathbf{b}, \tag{51}$$

тобто рівняння, в якому векторний добуток текучого радіуса-вектора на даний вектор ($\mathbf{a} \neq 0$) прирівняно до другого даного вектора, — якщо тільки обидва дані вектори взаємно перпендикулярні, — зображає п р я м у л і н і ю, і, навпаки, всяка пряма лінія може бути подана таким рівнянням.

Вектор $\mathbf{a}$ визначає напрям прямої (51), вектор $\mathbf{b}$ перпендикулярний до площини, яка проходить через дану пряму і полюс.

Якщо в рівнянні (51) вільний член $\mathbf{b} = 0$, пряма проходить через полюс.

Зокрема, якщо сталий множник векторного добутку є єдиний вектор

$$[\mathbf{rn}] = \mathbf{N},$$

де $n^2 = 1$, або

$$[\mathbf{rn}] - \mathbf{N} = 0, \tag{52}$$

то модуль вільного члена дорівнює віддалі (p) прямої від полюса

$$|\mathbf{N}| = p,$$

а $\mathbf{n}$ є орт прямої.

Рівняння (52) називається н о р м а л ь н и м р і в н я н н я м п р я м о ї.

Щоб привести загальне рівняння прямої (51) до нормального вигляду, досить перенести вільний член в ліву частину і поділити всі члени на a (модуль вектора $\mathbf{a}$), віднісши в векторному добутку цей дільник до самого вектора:

$$\left[\mathbf{r}\,\frac{\mathbf{a}}{a}\right] - \frac{\mathbf{b}}{a} = 0. \tag{51'}$$

Віддаль будь-якої точки $M\,(r_1)$ від прямої (52) обчислюється за формулою:

$$\delta = |\,[\mathbf{r}_1\mathbf{n}] - \mathbf{N}\,| \tag{53}$$

або, якщо пряма дана загальним рівнянням (51), за формулою:

$$\delta = \left|\left[\mathbf{r}_1\,\frac{\mathbf{a}}{a}\right] - \frac{\mathbf{b}}{a}\right|, \tag{53'}$$

тобто віддаль точки від прямої дорівнює модулю лівої частини нормального рівняння прямої, в якому текучий радіус-вектор замінено радіусом-вектором даної точки.

Якщо пряма задана однією з своїх точок $A\,(\mathbf{r}_1)$ і вектором $\mathbf{a}$, їй паралельним, то рівняння прямої має вигляд:

$$[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}] = 0 \tag{54}$$

або

$$[\mathbf{ra}] = [\mathbf{r}_1\mathbf{a}]. \tag{54'}$$

При тих же завданнях можна подати пряму рівнянням в параметричній формі:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{a}. \tag{55}$$

Якщо пряма задана двома своїми точками $A\,(\mathbf{r}_1)$ і $B\,(\mathbf{r}_2)$, рівняння її буде:

$$[\mathbf{r}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] = [\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2]. \tag{56}$$

Якщо пряма визначена двома площинами, які через неї проходять:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{ra} &= \alpha, \\ \mathbf{rb} &= \beta, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

то її можна подати також і одним рівнянням

$$|\mathbf{r}\,[\mathbf{ab}]\,| = \beta\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}. \tag{58}$$

Оскільки в рівняння всякої прямої входить вектор, їй паралельний (напрямний вектор), то задача про обчислення кута між двома даними прямими зводиться до обчислення кута між їх напрямними векторами.

Якщо дано дві паралельні прямі нормальними рівняннями:

$$[\mathbf{rn}] - \mathbf{N}_1 = 0 \text{ і } [\mathbf{rn}] - \mathbf{N}_2 = 0,$$

то віддаль між ними можна обчислити за формулою:

$$d = |\,\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2\,|. \tag{59}$$

Якщо дано будь-які дві прямі:

$$[\mathbf{ra}_1] = \mathbf{b}_1 \text{ і } [\mathbf{ra}_2] = \mathbf{b}_2, \tag{60}$$

то найкоротша віддаль між ними обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|\,(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1)\,|}{|\,[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]\,|}. \tag{61}$$

Умова перетину двох прямих (60) має вигляд

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = 0. \tag{62}$$

Якщо прямі (60) перетинаються, то радіус-вектор точки їх перетину визначиться так:

$$\mathbf{r} = \frac{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]}{\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2} \tag{63}$$

або

$$\mathbf{r} = \frac{[\mathbf{b}_2\mathbf{b}_1]}{\mathbf{b}_2\mathbf{a}_1} \tag{63'}$$

1175. Обчислити, на якій віддалі від полюса проходять прямі:

1) $[\mathbf{r}\,(^3/_5\mathbf{i} - {}^4/_5\mathbf{k})] = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;
2) $[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})] = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$;
3) $[\mathbf{r}\,(7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k})] = 0$.

1175*. Які особливості можна відзначити відносно взаємного розміщення прямих $[\mathbf{ra}] = \mathbf{b}$ і $[\mathbf{ra}] = -\mathbf{b}$?

1176. У площині $\mathbf{r}\,(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 0$ знайти пряму, яка проходить від полюса на віддалі трьох одиниць і паралельну вектору $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

1177. Написати рівняння площини, яка проходить через полюс і через пряму $[\mathbf{ra}] = \mathbf{b}$.

1178. Знайти вектор, який збігається з перпендикуляром, опущеним з полюса на пряму:

1) $[\mathbf{ra}] = \mathbf{b}$; 2) $[\mathbf{rn}] = \mathbf{N}$;
3) $[\mathbf{r}\,(11\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 10\mathbf{k})] = 2\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

1179. Знайти рівняння перпендикуляра, опущеного з полюса на пряму:

$$1)\ [\mathbf{ra}] = \mathbf{b};\quad 2)\ [\mathbf{r}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})] = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

1180. Знайти основу перпендикуляра, опущеного з полюса на пряму

$$[\mathbf{r}(\mathbf{j} - 3\mathbf{k})] = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

1181. Побудувати прямі:

$$1)\ [\mathbf{rk}] = \mathbf{i} - 4\mathbf{j};\quad 2)\ [\mathbf{r}(\mathbf{j} + \mathbf{k})] = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

1182. Вказати особливості в розміщенні прямих:

$$\begin{array}{ll} 1)\ [\mathbf{r}(\alpha\mathbf{i})] = \mathbf{b}; & 5)\ [\mathbf{r}(\beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k})] = \mathbf{b}; \\ 2)\ [\mathbf{r}(\beta\mathbf{j})] = \mathbf{b}; & 6)\ [\mathbf{r}(\alpha\mathbf{i} + \gamma\mathbf{k})] = \mathbf{b}; \\ 3)\ [\mathbf{r}(\gamma\mathbf{k})] = \mathbf{b}; & 7)\ [\mathbf{ra}] = \alpha\mathbf{i}; \\ 4)\ [\mathbf{r}(\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j})] = \mathbf{b}; & 8)\ [\mathbf{ra}] = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}. \end{array}$$

1183. Написати загальне рівняння прямої, яка перетинає: 1) вісь x; 2) осі x і y; 3) всі три осі координат.

1184. Обчислити віддаль точки:

1) $A(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 10\mathbf{k})$ від прямої $[\mathbf{r}(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})] = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$; 2) $B(5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$ від осі абсцис; 3) $C(12\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$ від прямої $[\mathbf{r}(\mathbf{j} + 2\mathbf{k})] = 0$.

1184*. Перевірити, що віддаль точки $A(\mathbf{r}_1)$ від прямої $[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0$ можна обчислити за формулою $\delta = \frac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0,\ \mathbf{a}]|}{a}$.

1185. Знаючи орт прямої $\mathbf{n} = {}^2/_7\,\mathbf{i} - {}^3/_7\,\mathbf{j} + {}^6/_7\,\mathbf{k}$ і одну з її точок $A(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$, скласти рівняння цієї прямої.

1186. Через точку $Q\ (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ провести пряму, паралельну прямій

$$[\mathbf{r}(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})] = 7\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

1187. Скласти рівняння прямої, перпендикулярної до двох даних векторів $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ і яка проходить через $A(\mathbf{r}_1)$.

1187*. Через точку $A(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$ провести пряму, перпендикулярну до двох прямих:

$$[\mathbf{r}(5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k})] = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \ \text{ і } \ [\mathbf{r}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})] = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

1188. Від параметричного рівняння прямої

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k} + \lambda(4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

перейти 1) до загального рівняння і 2) до координатних рівнянь.

1189. Знаючи векторні рівняння таких прямих:

$$\begin{array}{l} 1)\ [\mathbf{r}(4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k})] = 0; \\ 2)\ [(\mathbf{r} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})(2\mathbf{i} + 7\mathbf{k})] = 0; \\ 3)\ [\mathbf{r}(2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k})] = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}, \end{array}$$

знайти їх рівняння в координатних позначеннях.

1190. Дати перехід від загального векторного рівняння прямої

$$[\mathbf{r}(\lambda\mathbf{i}+\mu\mathbf{j}+\nu\mathbf{k})]=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}$$

до канонічних рівнянь виду:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

1191. Дати перехід від канонічних рівнянь прямої

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

до загального рівняння в векторній формі.

1192. Знаючи канонічні рівняння прямої

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+5}{2},$$

скласти її векторне рівняння.

1192*. Користуючись формулою, наведеною в задачі 1184*, дати в координатних позначеннях формулу віддалі точки $A(x_1, y_1, z_1)$ від прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

1193. Дано трикутник своїми вершинами:

$$\mathbf{r}_1\{0;\ 2;\ 1\},\ \mathbf{r}_2\{5;-1;\ 4\}\ \text{і}\ \mathbf{r}_3\{3;\ 0;-1\}.$$

Скласти рівняння його сторін.

1194. Довести, що умову колінеарності трьох точок $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$, $C(\mathbf{r}_3)$ можна написати так:

$$[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2]+[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]+[\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1]=0.$$

1195. Показати, що площу трикутника, який має вершини в точках $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ і $C(\mathbf{r}_3)$, можна обчислити за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\left|[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2]+[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]+[\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1]\right|.$$

1196. Знайти умови паралельності і перпендикулярності двох прямих:

$$[\mathbf{r}(\lambda_1\mathbf{i}+\mu_1\mathbf{j}+\nu_1\mathbf{k})]=\mathbf{a},$$
$$[\mathbf{r}(\lambda_2\mathbf{i}+\mu_2\mathbf{j}+\nu_2\mathbf{k})]=\mathbf{b}.$$

1197. Скласти рівняння прямої, знаючи дві площини, які через неї проходять:

1) $\mathbf{r}(\mathbf{i}+3\mathbf{j})=5$ і $\mathbf{r}(\mathbf{j}-2\mathbf{k})=2$;
2) $\mathbf{r}(5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k})=1$ і $\mathbf{r}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})=4$.

1198. Обчислити кут між прямими:

1) $[\mathbf{r}(\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k})]=0$ і $[\mathbf{r}(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-4\mathbf{k})]=6\mathbf{i}+3\mathbf{k}$;
2) $[\mathbf{r}\mathbf{a}]=\mathbf{b}$ і $[\mathbf{r}\mathbf{b}]=\mathbf{a}$.

1199. Дано вершини трикутника ABC: $A(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$, $B(4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k})$ і $C(6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$. Скласти рівняння медіани AM і обчислити кут, який вона утворює з стороною BC.

1200. Перевірити, що прямі

$$[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k})] = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

і

$$[\mathbf{r}\,(5\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 10\mathbf{k})] = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

паралельні, і знайти віддаль між ними.

1201. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$ на пряму:

$$[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k})] = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

1202. Скласти рівняння прямої, яка проходить через полюс і перетинає дві дані прямі: $[\mathbf{r}\mathbf{a}_1] = \mathbf{b}_1$ і $[\mathbf{r}\mathbf{a}_2] = \mathbf{b}_2$.

1203. Через точку r_1 $\{4;\ 0;\ -1\}$ провести пряму так, щоб вона перетинала дві дані прямі:

$$[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k})] = -29\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

і

$$[\mathbf{r}\,(5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})] = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 10\mathbf{k}.$$

1204. Перевірити, що прямі задачі 1203 не перетинаються, і знайти найкоротші віддалі між ними.

1204*. Написати рівняння спільного перпендикуляра прямих задачі 1203.

1205. Знайти найкоротшу віддаль між прямими

$$[\mathbf{r}\,(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})] = -21\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

і

$$[\mathbf{r}\,(-7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})] = \mathbf{i} - 16\mathbf{j} + 13\mathbf{k}.$$

1205*. Перевіривши, що найкоротша віддаль між прямими $[\mathbf{r} - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{a}_1] = 0$ і $[\mathbf{r} - \mathbf{r}_2,\ \mathbf{a}_2] = 0$ обчислюється за формулою $d = \frac{|\mathbf{r}_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{r}_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1|}{|[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]|}$, дати в координатних позначеннях відповідну формулу для прямих

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

1206. Перевірити, чи перетинаються такі пари прямих, і якщо перетинаються, знайти точку їх перетину:

1) $[\mathbf{r}\,(3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k})] = -8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ і $[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k})] = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 9\mathbf{k}$;

2) $[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k})] = 23\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 13\mathbf{k}$ і $[\mathbf{r}\ 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})] = -\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$.

1206*. Скласти рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від двох даних прямих: $[\mathbf{r}\mathbf{i}] = 0$ і $[\mathbf{r},\ \mathbf{i} + \mathbf{j}] = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$. В одержаному рівнянні перейти до координатних позначень.

5. Пряма і площина

Щоб знайти точку перетину прямої

$$[\mathbf{ra}] = \mathbf{b} \tag{64}$$

і площини

$$(\mathbf{rA}) = \alpha, \tag{65}$$

треба сумісно розв'язати ці двоє рівнянь. Радіус-вектор точки їх перетину може бути обчислений за формулою:

$$\mathbf{r} = \frac{\alpha\mathbf{a} + [\mathbf{Ab}]}{\mathbf{aA}}. \tag{66}$$

Кут між прямою (64) і площиною (65) обчислюється так:

$$\sin\varphi = \frac{\mathbf{aA}}{aA} \tag{67}$$

або

$$\cos\varphi = \frac{|[\mathbf{aA}]|}{aA}. \tag{67'}$$

Умова паралельності прямої (64) і площини (65):

$$\mathbf{aA} = 0. \tag{68}$$

Умова їх перпендикулярності:

$$[\mathbf{aA}] = 0$$

або

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a}. \tag{69}$$

Умова того, що пряма (64) цілком лежить на площині (65), виражена двома рівностями:

$$\alpha\mathbf{a} + [\mathbf{Ab}] = 0 \text{ і } \mathbf{aA} = 0. \tag{70}$$

Якщо пряму дано рівнянням $[(r - r_1)\,\mathbf{a}] = 0$, то ця ж умова виразиться простіше:

$$(\mathbf{r}_1\mathbf{A}) = \alpha \text{ і } (\mathbf{aA}) = 0. \tag{70'}$$

1207. Знайти точку перетину прямої і площини

1) $[\mathbf{r}\,(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})] = -6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ і $\mathbf{r}\,(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 2$;

2) $[\mathbf{r}\,(5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k})] = 11\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 13\mathbf{k}$ і $\mathbf{r}\,(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 5$;

3) $[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k})] = 9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ і $\mathbf{r}\,(3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 5$;

4) $[\mathbf{r}\,(8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})] = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$ і $\mathbf{r}\,(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = -1$.

1208. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки перетину площини $\mathbf{r}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 1 = 0$ з прямими

$$[\mathbf{r}\,(\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k})] = 5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$$

і

$$[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k})] = -2\mathbf{i} + 22\mathbf{j} + 14\mathbf{k}.$$

1209. При якому значенні коефіцієнта α площина

$$\mathbf{r}(\alpha\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = 1$$

паралельна прямій

$$[\mathbf{r}(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})] = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 11\mathbf{k}?$$

1210. При яких значеннях коефіцієнтів α і β площина

$$\mathbf{r}(\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+6\mathbf{k})=7$$

перпендикулярна до прямої

$$[\mathbf{r}(2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+3\mathbf{k})]=-19\mathbf{i}-8\mathbf{j}+2\mathbf{k}?$$

1211. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $\mathbf{r}_1\{5;\ 1;\ 2\}$ на площину

$$\mathbf{r}(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k})=5.$$

1212. Написати рівняння перпендикуляра, проведеного з точки $A(\mathbf{r}_1)$ до площини $\mathbf{ra}=\alpha$.

1213. Знайти основу перпендикуляра, опущеного з точки A $(2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ на площину $\mathbf{r}(\mathbf{i}+\mathbf{k})=1$.

1214. Знайти проекцію точки $\mathbf{r}_1\ \{4;\ -3;\ 1\}$ на площину

$$\mathbf{r}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})=3.$$

1215. Написати рівняння площини, проведеної через точку $A(\mathbf{r}_1)$ перпендикулярно до прямої $\mathbf{ra}=\mathbf{b}$.

1216. Через полюс провести площину, перпендикулярну до прямої

$$[\mathbf{r}(\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})]=2\mathbf{i}-11\mathbf{j}-3\mathbf{k}.$$

1217. Через точку $\mathbf{r}_1\{5;\ 1;\ 4\}$ провести площину так, щоб вона була паралельна даним прямим:

$$[\mathbf{r}(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})]=\mathbf{i}+5\mathbf{j}+17\mathbf{k}\ \text{ і }\ [\mathbf{r}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+8\mathbf{k})]=3\mathbf{i}-11\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

1218. Чи проходить площина $\mathbf{r}(4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})=-3$ через пряму

$$[(\mathbf{r}-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k})\ (2\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k})]=0?$$

1219. Перевірити, чи лежить пряма $[\mathbf{r}(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})]=-3\mathbf{i}-$ $-4\mathbf{j}+23\mathbf{k}$ на площині

$$\mathbf{r}(8\mathbf{i}-9\mathbf{j}-22\mathbf{k})=59.$$

1220. Скласти рівняння площини, яка проходить через дану точку $A(\mathbf{r}_1)$ і дану пряму $[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\ \mathbf{a}]=0$.

1221. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $A(3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})$ і через пряму $[(\mathbf{r}-4\mathbf{i}+3\mathbf{j})\ (5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})=0$.

1222. Через пряму $[(\mathbf{r}-2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})\ (5\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})=0$ провести площину, перпендикулярну до площини

$$\mathbf{r}(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-3\mathbf{k})=7.$$

1223. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\ \mathbf{a}]=0$ і перпендикулярна до площини $\mathbf{rA}=\alpha$.

1224. Знайти проекцію прямої

$$[(\mathbf{r}-4\mathbf{j}+\mathbf{k})\ (4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k})]=0$$

на площину

$$\mathbf{r}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})+8=0.$$

1225. Перевірити, що прямі

$$[(\mathbf{r} - 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})\ (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})] = 0$$

і

$$[(\mathbf{r} - 8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 6\mathbf{k})\ (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})] = 0$$

перетинаються, і написати рівняння площини, яка через них проходить.

1226. Провести площину через дані дві паралельні прямі

$$[(\mathbf{r} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})\ (7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k})] = 0$$

і

$$[(\mathbf{r} - \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})\ (7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k})] = 0.$$

1227. Через пряму $[(\mathbf{r} - 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})\ (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})] = 0$ провести площину, паралельну прямій $[(\mathbf{r} + 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})\ (4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k})] = 0$.

1228. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A\,(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ на пряму $[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})] = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

1229. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A\,(\mathbf{r}_1)$ на пряму $[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)\,\mathbf{a}] = 0$.

1230. Знайти проекцію точки $\mathbf{r}_1\ \{6;\ 9;\ 7\}$ на пряму

$$[\mathbf{r}\,(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})] = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

1231. Обчислити віддаль точки $A\,(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$ від прямої $[\mathbf{r}\,(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -10\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 25\mathbf{k}$.

1232. Знайти точку, симетричну з точкою $A\,(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 10\mathbf{k})$ відносно прямої $[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})] = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

1233. Дано вершини трикутника $A\,(4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$, $B\,(2\mathbf{i})$ і $C\,(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$. Скласти рівняння висоти, яка проходить через вершину B.

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ

ЧАСТИНА ПЕРША

1. Див. рис. 79.

2. a) $x = +4$; b) $x_1 = +2$; $x_2 = -2$; c) $x_1 = +2$; $x_2 = -3$; d) $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1$; e) $x_1 = x_2 = -2$; f) рівняння має уявні корені; побудувати точки з уявними координатами не можна.

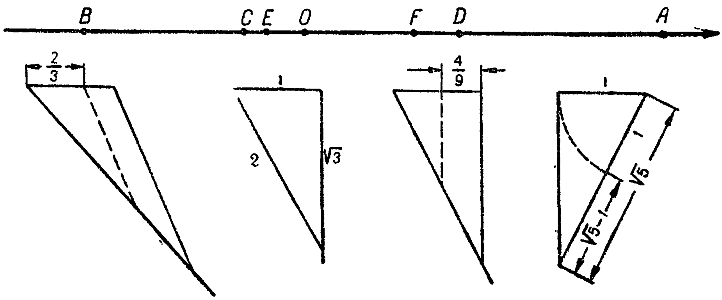

Рис. 79.

3. Див. рис. 80.

4. a) A_1 (—3); b) A_2 (—7); c) A_3 (+7). Вказівка. Дві точки симетричні відносно третьої, якщо знаходяться по різні сторони, але на рівних віддалях від неї. Точка збігається з симетричною точкою, якщо повернути пряму в площині рисунка біля центра симетрії на 180°.

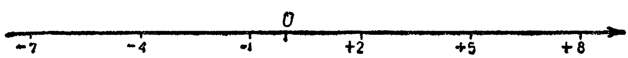

Рис. 80.

5. a) $A(+3)$; $B(+{}^5/_3)$; $C(-1)$; $D(-{}^8/_3)$; $M\left(\frac{x}{3}\right)$; b) $A(+18)$; $B(+10)$; $C(-6)$; $D(-16)$; $M(2x)$; c) $A(+3{,}6)$; $B(+2)$; $C(-1{,}2)$; $D(-3{,}2)$; $M\,\frac{2x}{5}$.

6. $x = \frac{5000}{4687}a$, де a — число верст, x — відповідне число кілометрів. Формулу можна значно спростити, беручи до уваги, що

$$\frac{5000}{4687} = 1{,}0667\ldots \approx 1{,}0(6)\ldots = {}^{16}/_{15}{}^{1}, \text{ і, отже, } x \approx {}^{16}/_{15}a.$$

7. $x = {}^5/_4\, t$.

8. a) $A(+3)$; $B(-1)$; $C(-3)$; $D(-5)$; $E(-10)$; $M(x-3)$; b) $A(+11)$; $B(+7)$; $C(+5)$; $D(+3)$; $E(-2)$; $M(x+5)$.

9. У точку $O'(+8)$. Вказівка. Користуємося формулою переносу початку координат: $x = x' + a$. В даному випадку нам відома початкова

[1] Знак $\approx$ вживається як знак наближеної рівності.

координата точки ($x = +7$) і нова координата ($x = -1$); шуканою є координата нового початку a.

10. $x = {}^{20}/_{19}\ (t-1)$, де t — показ термометра, x — шукана температура за шкалою Цельсія. Вказівка: Ця задача зводиться до складання формули переходу від однієї системи координат до другої, причому початок координат переноситься в точку ($+1$), і, крім того, змінюється одиниця довжини; щоб узнати відношення початкової і нової одиниць довжини, звертаємо увагу на температуру кипіння води; там, де на старій шкалі стоїть $+96°$, повинно стояти $+100°$. Отже, частина шкали, вміщена між $+1°$ і $+96°$, тобто та, що має 95 початкових одиниць, матиме за новою системою 100 одиниць. Отже $e'/e = {}^{95}/_{100} = {}^{19}/_{20}$, і формула вказаного подвійного перетворення буде: $t = {}^{19}/_{20}\,x + 1$. Щоб одержати відповідь, треба тільки розв'язати це рівняння відносно x.

11. Перенести початок координат у точку (-7) і змінити напрям.

12. Перенести початок координат у точку ($+10$) і змінити напрям.

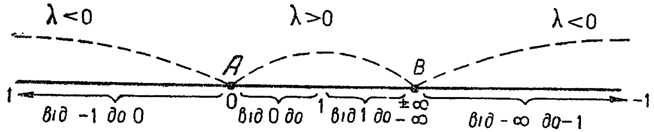

Рис. 81

13. a) зміна масштабу: $e' = 5e$; b) зміна масштабу і напряму: $e' = 3e$; c) перенесення початку координат у точку (-1) і збільшення масштабу вдвоє; d) перенесення початку координат у точку ($+3$) і зміна напряму; e) перенесення початку координат у точку ($+5$); зміна напряму і зменшення масштабу вдвоє; f) зміна масштабу: $e' = ne$; g) перенесення початку в точку ($+a$); h) перенесення початку в точку ($+a$); зміна масштабу у відношенні $e'/e = n$. Якщо $n > 0$, то напрям збережено; якщо $n < 0$, то напрям змінено.

14. Початок координат перенесено в точку ($+4$); напрям змінено і масштаб зменшено вдвоє. Вказівка. Зручно користуватися загальною формулою перетворення координат $x = nx' + a$ (див. задачу 13,h). Вставляючи замість x по черзі значення $+3$ і $+7$ і замість x' відповідно $+2$ і -6, дістанемо два рівняння, з яких визначимо n і a. Дістанемо $n = -{}^{1}/_{2}$, $a = 4$, що і приводить до вказаної відповіді.

15. $x = 53{,}4$. Вказівка. Задача розв'язується за формулою $x = (e'/e)x' + x_0$. В даному випадку $x = 57$; $x' = 4$; $e'/e = {}^{9}/_{10}$; $x_0 = ?$

16. $AB = +7$; $CD = -11$; $EF = -3$; $OG = +6$; $GO = -6$; $KO = +3$; $MN = +3$.

17. a) $P(+7)$; b) $P(-9)$; c) $P(-4)$; d) $P(+9)$.

18. $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -3$; $\lambda_3 = -{}^{3}/_{2}$.

19. a) $M(+3)$; b) $M(+5{,}7)$; c) $M(+13{,}5)$; d) точка M збігається з A; e) відповідної точки поділу немає.

20. $B\,(-4{,}2)$.

21. $C'(+{}^{1}/_{3})$; $B'(+3{}^{2}/_{3})$; $A'(+1{}^{4}/_{9})$. Вказівка. Якщо точка C поділяє відрізок AB у відношенні λ, то четверта гармонійна до C відносно A і B поділяє той самий відрізок у відношенні $-\lambda$.

22. $x \approx 52{,}8$ *см* (з точністю до 1 *мм*). Вказівка. Точка опори повинна збігатися з точкою прикладення рівнодіючої сили, тобто повинна ділити відрізок між точками прикладення діючих сил на частини, обернено пропорціональні цим силам.

23. $x = 1{,}05$ *м*. Вказівка. На опору B тисне половина ваги балки, тобто 40 *кг*. Отже, від ваги в 200 *кг* на її долю повинно припасти $110 - 40 = 70$ *кг*, а на долю опори A — решта 130 *кг*. Приймаємо точку A за початок координат і ділимо відрізок AB у відношенні $70 : 130 = 7 : 13$.

24. Не ближче, ніж на віддалі 47,5 *см*.

25. Див. рис. 81. Значення λ написані під лінією. Вказівка.

$$A \equiv M;\ \lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{AA}{AB} = 0.\quad B \equiv M;\quad \lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{AB}{BB} = \infty.$$

$$M \longrightarrow \infty;\ \lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{AB + BM}{MB} = \frac{AB}{MB} - 1;\quad \lambda \longrightarrow -1.$$

ЧАСТИНА ДРУГА

26. Див. рис. 82.

27. Див. рис. 83, а) A (+3; —8); b) B_1 (+4; +3) і B_2 (+3; +4); с) C_1 (0; 0), C_2 (+4; +4) і дві точки з уявними координатами.

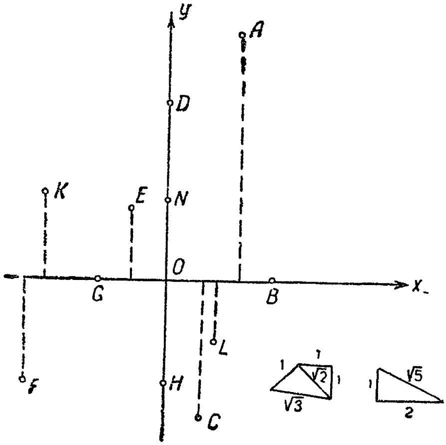

Рис. 82.

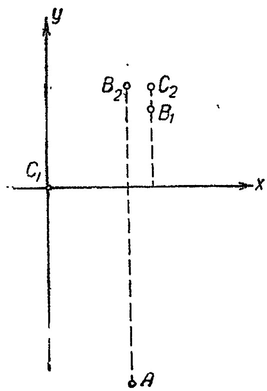

Рис. 83.

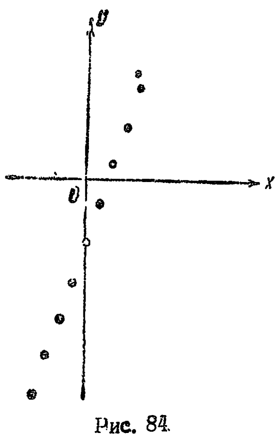

Рис. 84.

x	a) y	b) y
—4	— 17	+ 16
—3	— 14	+ 9
—2	— 11	+ 4
—1	— 8	+ 1
0	— 5	0
+1	— 2	+ 1
+2	+ 1	+ 4
+3	+ 4	+ 9
+4	+ 7	+ 16

28. Див. таблицю і рисунки 84, 85.

29. $M_1 (+3; -2)$, $M_2 (-3; +2)$, $M_3 (-3; -2)$.

30. a) $M_1 (+1; +5)$ і $M_2 (-5; +5)$; b) $M_1 (-2; +8)$ і $M_2 (-2; +2)$

31. $x = y$ або $x = -y$.

32. a) (0; 0), $(+1; 0)$, $(+1; +1)$, $(0; +1)$ або (0; 0), $(-1; 0)$, $(-1; +1)$, $(0; +1)$ або (0; 0), $(-1; 0)$, $(-1; -1)$, $(0; -1)$ або (0; 0), $(+1; 0)$; $(+1; -1)$; $(0; -1)$ залежно від того, які сторони квадрата прийняті за осі координат; b) $(+\frac{1}{2}\sqrt{2}; 0)$; $(0; +\frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}; 0)$, $(0; -\frac{1}{2}\sqrt{2})$; c) $(+\frac{1}{2}; +\frac{1}{2})$; $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(+\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.

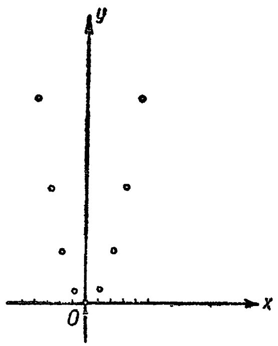

Рис. 85.

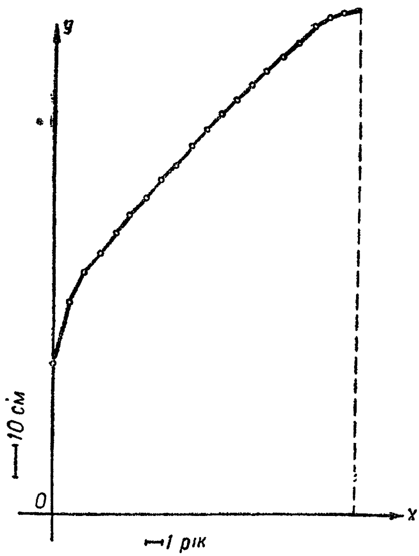

Рис. 86.

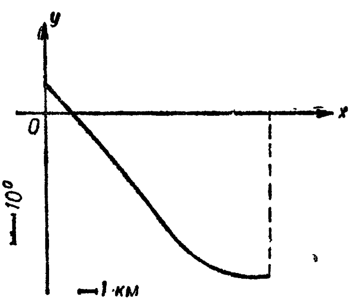

Рис. 87.

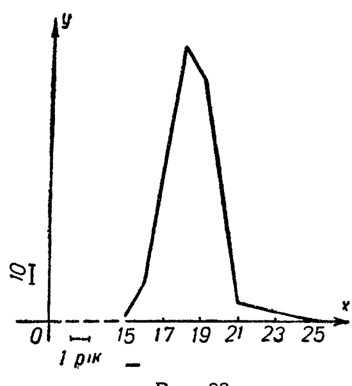

Рис. 88.

33. $(+a; 0)$, $(+\frac{1}{2}a; +\frac{1}{2}\sqrt{3a})$, $(-\frac{1}{2}a; +\frac{1}{2}\sqrt{3a})$, $(-a; 0)$, $(-\frac{1}{2}a; -\frac{1}{2}\sqrt{3a})$ і $(+\frac{1}{2}a; -\frac{1}{2}\sqrt{3a})$.
34. Див. рис. 86.
35. Див. рис. 87.
36. Див. рис. 88.

37. Див. рис. 89: a) № 1 і 6 на віддалі 9 *км* від Москви, № 5, 8, 7, 10 на віддалі 45 *км*, № 7, 8, 9, 10 на віддалі 19,5 *км*. b) Опівдні немає ні одного поїзда в дорозі, о 20 годині № 7, 8, 10. c) 3^{56}, 5^{48}, 7^{45}, 11^{0}, 16^{0} 18^{15}, 18^{36}, 20^{03}, 20^{22}, 2^{36}. d) Зустрічаються № 4 і 6, і ні один не переганяє.

38. $s = \frac{gt^2}{2}$; $h = 50 - \frac{gt^2}{2}$; $x \equiv t, y \equiv h$. Момент падіння: $h = 0$, коли $\frac{gt^2}{2} = 50$; $t = \sqrt{\frac{100}{g}} \approx 3{,}2$. Графік — дуга параболи. Див. таблицю і рис. 90.

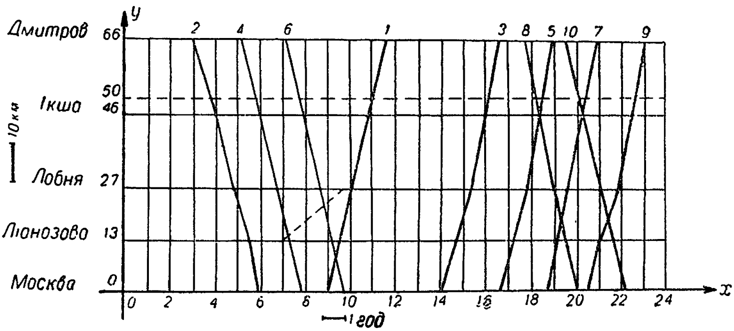

Рис. 89.

39. Див. рис. 91. Вказівка. Вага балки P розподіляється рівномірно на обидві опори; вага людини p розподіляється на опори обернено пропорціонально віддалі її від цих опор. Звідси легко вивести формулу, за якою обчислюється тиск на опору B: $y = \frac{P}{2} + \frac{p}{l}x$. Для числового прикладу ми маємо графік, зображений на рис. 91: $y = 60 + 13x$. Цей графік і є відрізок прямої між точками C (0; +60) і D (+5; +125).

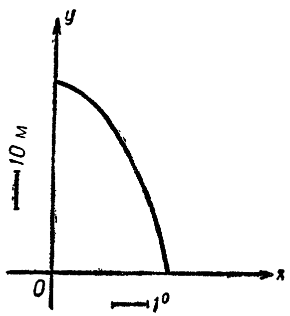

Рис 90.

t''	s	h
0	0	50
½	$1^2/_9$	$48^7/_9$
1	4,9	45,1
1½	11,02	38,98
2	19,6	30,4
2½	30,6	19,4
3	44,1	5,9
3,2	50	0

40. Див. рис. 92. Вказівка. Виразивши довжини в дециметрах і сили в кілограмах, дістанемо: $P = \frac{12}{R}$. За самим змістом задачі $R \geqslant r$; тому будемо надавати R значень, починаючи від 1 *дм*, і обмежимося значенням 10 *дм*. Одержаний графік є дуга гіперболи.

41. 5; 10; 5; 13. **42.** $AB = 5$; $BC = 13$; $CA = 8\sqrt{2}$.

43. $AB = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{50}$; $BC = \sqrt{40}$; $AC^2 = AB^2 + BC^2$

43*. Кут при вершині Q тупий, оскільки $PR^2 > PQ^2 + QR^2$.

44. Задача має два розв'язання: $y_1 = +1$; $y_2 = -1$. **45.** M_1 (0; —3), M_2 (0; —9). **46.** (+6; +6), (—8; —8), (—8; +8), (+6; —6). **47.** $AB = 5\sqrt{2}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

48. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. **49.** B (+6; +4). **50.** $x_1 = 3 + 4\sqrt{3}$; $y_1 = 4$, або $x_2 = 3 - 4\sqrt{3}$; $y_2 = -4$. **51.** $M(+5;\ 0)$. **52.** $18x - 8y = 53$. **52*.** $M_1(+8;\ 0)$ або $M_2(-1;\ +3\sqrt{3})$. **53.** $M(-5;\ +4)$. Вказівка. Визначаємо точку M з умов: $AB = MB$ і $AC = MC$. 53*. $B(+2;\ +5)$ і $D(+16;\ +3)$

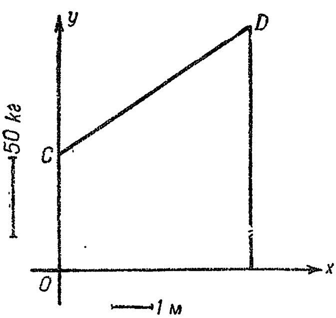

Рис. 91.

Рис. 92

54. $M(-1,\ -2)$.

55. $M(+2;\ +10)$. Вказівка. Центр лежить на перпендикулярі, проведеному до дотичної в точці дотику; звідси випливає, що абсциса центра дорівнює +2; ординати ми визначаємо з умови: $MA = MB$.

56. Існує два круги, які задовольняють умови задачі. Їх центри: $M_1(+1;\ -1)$ і $M_2(+5;\ -5)$ і радіуси $r_1 = 1$, $r_2 = 5$.

57. $S = 7$ кв. од.

58. $P = 15 + 5\sqrt{5}$; $S = 25$ кв. од.

58*. 12,5 кв. од. Вказівка. Для обчислення площі многокутника розбиваємо його на трикутники.

59. (а) і (b) — лежать; (с) — не лежить.

60. (—5; 0).

61. $C(+5;\ -2)$.

61*. $AB = DC$ і $AB \parallel DC$; $h = 2{,}2$. Вказівка. Для обчислення висоти можна скористатися площею і довжиною основи.

62. $M(+4;\ -2{,}5)$, $N(+2;\ +1)$, $P(+1;\ -3{,}5)$. **62*.** $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$ і $\sqrt{41}$. **63.** B(+11; +5). **64.** $A(+8;\ +3)$, $B(-2;\ -1)$. Вказівка. Умова, що кінець A ковзає по прямій лінії, паралельній до осі x, визначає ординату цієї точки ($y_1 = 3$); так само визначена абсциса точки B ($x_2 = -2$). Задача зводиться до обчислення координат точок $A(x_1;\ +3)$ і $B\ (-2;\ y_2)$, яких невистачає, знаючи середину відрізка AB.

65. $x_1 = -2$; $y_1 = -6$; $x_2 = 8$; $y_2 = 2$; $x_3 = -6$; $y_3 = 10$. **65*.** $C\ (2x_2 - x_1;\ y_1)$ і $D(x_2;\ 2y_1 - y_2)$ або $C'(x_1;\ 2y_2 - y_1)$ і $D'(2x_1 - x_2;\ y_2)$. **66.** $C(+10{,}5;\ +10)$, $D(+4;\ -3)$. Вказівка. Скористаємося тією властивістю, що діагоналі паралелограма поділяються при перетині пополам. Шукані вершини визначаються як кінці відрізків, у яких відомі початок і середина.

67. $D(-4; -1)$. Вказівка. Вводимо допоміжну точку, яка є перетином діагоналей (див. задачу 66).

68. $M_1(+5{,}4;\ +2{,}8)$, $M_2(+7{,}8;\ +3{,}6)$, $M_3(+10{,}2;\ 4{,}4)$, $M_4(+12{,}6;\ +5{,}2)$. Вказівка. Ділимо відрізок AB у чотирьох різних відношеннях: $\lambda_1 = {}^1/_4$; $\lambda_2 = {}^2/_3$; $\lambda_3 = {}^3/_2$; $\lambda_4 = {}^4/_1$.

69. $P(+7{,}2;\ +5{,}4)$. Вказівка. $OM = 5$; $OP = 9$; $PM = -4$; $\frac{OP}{PM} = -{}^9/_4$. Точка P ділить відрізок OM у відношенні $\lambda = -{}^9/_4$.

69*. $M\left(+\frac{196}{65};\ +\frac{112}{65}\right)$. Вказівка. З подібності трикутників визначаємо відношення, в якому точка M поділяє відрізок $AB\left(\lambda = \frac{16}{49}\right)$.

70. $(-2; +1)$. Вказівка. Шукана точка поділяє кожну медіану у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини.

71. $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. Вказівка. Центр ваги трикутника збігається з точкою перетину його медіан (див. задачу 70).

72. $C(-a; -b)$. Вказівка. Можна скористатися виразами для координат центра ваги трикутника (див. задачу 71).

73. $M(+3^1/_3;\ +5^2/_3)$. Вказівка. Бісектриса кута трикутника поділяє протилежну сторону на частини, пропорціональні прилягаючим сторонам.

74. $B_1(+11;\ 0)$, $C_1(+8;\ +11{,}5)$. Вказівка. Шукані вершини поділяють відрізки AB і AC у відношенні $\lambda = -{}^5/_3$.

75. $M(-2; +1)$. Вказівка. Зробити рисунок, провести спільні дотичні, лінію центрів, з'єднати центри кругів з точками дотику P_1 і P_2. З подібності трикутників MC_1P_1 і MC_2P_2 виходить, що шукана точка M ділить відрізок C_1C_2 у відношенні $\lambda = -{}^3/_7$. Дані двоє кіл перетинаються, а тому мають тільки одну пару спільних дотичних.

76. $C(+6; 0)$. Вказівка. Шукана точка лежить на осі абсцис; отже, вона має ординату, рівну нулеві. Знаючи ординату шуканої точки і ординати двох точок A і B, які лежать з нею на одній прямій, визначаємо відношення, в якому ця точка ділить відрізок AB, а знаючи це відношення, обчислюємо невідому абсцису шуканої точки. (Порівн. з розв'язанням задачі 60).

77. $(+5; -7)$. Вказівка. Див. задачу 76.

78. $M(+1; +2)$. Вказівка. Позначимо через λ відношення, в якому шукана точка $M(x, y)$ поділяє діагональ AC. Це відношення може бути виражене або через абсциси трьох точок A, C і M, або через їх ординати. Порівнюючи між собою ці два вирази для одного і того ж відношення λ, ми дістанемо рівняння, яке пов'язує координати x і y шуканої точки. Друге рівняння між цими невідомими дістанемо, прирівнявши два вирази для відношення λ_1, в якому та ж точка M поділяє діагональ BD.

79. $M(+5{,}5;\ +4{,}75)$. Вказівка. Можна послідовно знайти спочатку центр ваги двох матеріальних точок, а потім центр ваги знайденої точки і третьої даної точки.

80*. $M\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3};\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$. Порівняти з задачею 71.

81. $x = \frac{a^2}{2(a+b)}$; $y = \frac{b^2}{2(a+b)}$. Вказівка. Вершини кута приймаємо за початок координат, а осі координат спрямовуємо по сторонах кута.

82. $\bar{x} = \frac{x_1(b+c) + x_2(a+c) + x_3(a+b)}{2(a+b+c)}$, $\bar{y} = \frac{y_1(b+c) + y_2(a+c) + y_3(a+b)}{2(a+b+c)}$.

83. $x = 0$, $y \approx +1{,}5867$. Вказівка. За вісь x приймаємо пряму AB, за вісь y — вісь симетрії ферми EC. Оскільки стержні однорідні, то вага їх пропорціональна довжині.

84. $x = 8{,}2$; $y = +6{,}2$. Вказівка. Діагоналлю AC поділяємо чотири-

кутник на два трикутники ABC і ADC і знаходимо центр ваги кожного трикутника окремо. Центр ваги чотирикутника поділяє віддаль між знайденими точками у відношенні, оберненому до відношення площ відповідних трикутників, бо вага трикутників пропорціональна їх площі.

85. $x = 7$; $y = 8$.

86. Див. рис. 93.

87. $d_1 = 2$; $d_2 = 3$. Вказівка (див. рис. 94). $d_1 = MP = AM \times \sin(\pi - \omega) = y \cdot \sin\omega = 4 \cdot {}^1/_2 = 2$; $d_2 = MQ = AL = OA \cdot \sin(\pi - \omega) = x \cdot \sin\omega = 6 \cdot {}^1/_2 = 3$.

88. $M_1(+3;\ +2)$, $M_2(-3;\ +2)$, $M_3(-3;\ -2)$ і $M_4(+3;\ -2)$. Вказівка. Задача допускає чотири розв'язання, бо не вказано, по який бік від осей знаходиться точка.

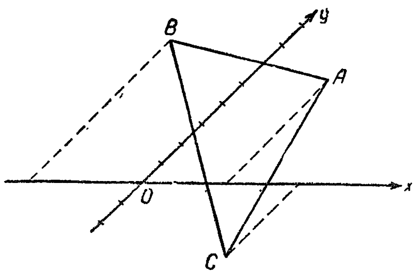

Рис. 93.

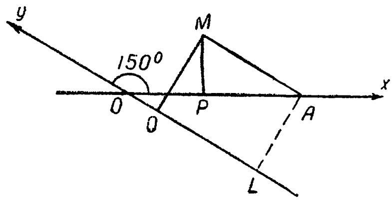

Рис. 94.

89. $x = -8$; $y = +5$.

90. $(0;\ 0)$, $(+1;\ 0)$, $(+2;\ +1)$, $(+2;\ +2)$, $(+1;\ +2)$, $(0;\ +1)$.

91. $d = 2$.

92. $AM = 7$.

93. $AB = 5$; $AC = 2\sqrt{21}$; $BC = 7$.

94. $C_1\left(+\frac{9}{2};\ -\frac{1+4\sqrt{3}}{2}\right)$ або $C_2\left(+\frac{9}{2};\ \frac{-1+4\sqrt{3}}{3}\right)$. Вказівка. Шукана вершина C повинна задовольняти умови: $CA = AB$ і $CB = AB$.

95. $\omega = \frac{\pi}{3}$.

96. $AB = 5$. Вказівка. Користуючись формулою (5), знаходимо точки $A(x;\ 0)$ і $B(0;\ y)$, в яких пряма MN перетинає осі координат, а потім обчислюємо віддаль між знайденими точками.

97. $\varphi = 30°$.

98. $y = -5$. Вказівка. Скористаємося формулою (3), в якій згідно умови задачі $\varphi = \omega - \varphi$.

99. $M_1(+1;\ +{}^1/_2)$; $M_2(+9;\ +4{}^1/_2)$. Вказівка. Для знаходження шуканої точки користуємося формулами (3′) і (1′).

100. $M_1(-1;\ +10)$, $M_2(-13;\ -2)$, $M_3(-7+2\sqrt{3};\ 4-2\sqrt{3})$; $M_4(-7-2\sqrt{3};\ 4+2\sqrt{3})$.

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
2φ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\rho = a\sin 2\varphi$	0	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$	0

Вказівка. Всі шукані точки знаходяться на віддалі 6 одиниць від даного центра C; крім того, для одного діаметра ми маємо $\varphi = \omega - \varphi$, а для другого діаметра $\varphi = \pi + (\omega - \varphi)$.

101. $S = 3{,}25$ кв. од.

102. $\omega = 30^\circ$ або $\omega = 150^\circ$.

103. Див. рис. 95.

104. a), b), c) — на колах з центрами в полюсі і радіусами, відповідно рівними 1,5 і a; d), e), f), g) — на променях, які виходять з полюса і утворюють з полярною віссю кути 30°, 60°, 90°, φ.

105. a) $\left(1; \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(3; \frac{5\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$, $(\rho; \varphi+\pi)$; b) $\left(1; \frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(3; \frac{4\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$, $(\rho; 2\pi - \varphi)$.

106. $(a; 0)$, $\left(a\sqrt{3}; \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2a; \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(a\sqrt{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(a; \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(0; \frac{0}{0}\right)$.

П р и м і т к а. Полюс має радіус-вектор, рівний нулеві, і неозначену амплітуду.

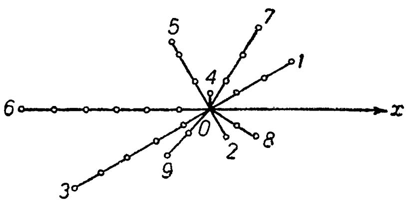

Рис. 95.

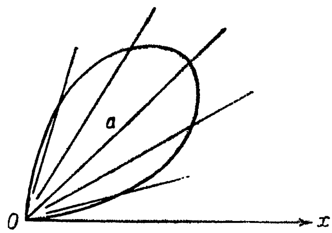

Рис. 96.

107. Див. рис. 96 і відповідну таблицю.

108. Графік являє собою півколо, діаметр якого дорівнює P (рис. 97).

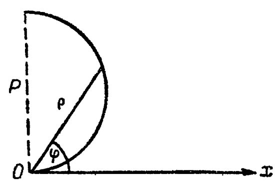

Рис. 97.

109. $AB = \sqrt{3}$, $CD = 10$, $EF = 5$.

110. $AB = BC = CA = 7$.

111. $M_1(1; 0)$ і $M_2(7; 0)$.

112. $S = {}^1\!/_2\, \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$. В к а з і в к а. Скористаємося тригонометричною формулою для площі трикутника: $S = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$.

113. $S = 1$ кв. од.

114. $S = 6\,(5\sqrt{3} - 3)$ кв. од. В к а з і в к а. Зробити рисунок і обчислити шукану площу, комбінуючи площі трикутників, які мають одну вершину в полюсі, тобто трикутників OAB, OBC і OAC.

115. $A(+1; +\sqrt{3})$, $B(-1; +1)$, $C(0; +5)$, $D\left(+\frac{3\sqrt{3}}{2}; -{}^3\!/_2\right)$.

116. $(5; \operatorname{arc\,tg}({}^4\!/_3))$, $\left(\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$, $(5; 0)$.

117. $\rho \cos \varphi = a$.

118. $x^2 + y^2 = a^2$.

119. $P_x = 3\sqrt{3}$; $P_y = 3$.

120. $P = 10$ *кг*; $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4}$.

121. $\text{пр}_x\, AB = 2$; $\text{пр}_y\, AB = -1$. В к а з і в к а. Проекції відрізка на осі дорівнюють різницям однойменних координат кінців. Знак проекції залежить від того, чи збігається її напрям з додатним або від'ємним напрямом осі проекції

122. $R = 13$.

123. a) $x = x'$; $y = -y'$; b) $x = y'$; $y = x'$

124. a) Змінити напрям на обох осях; b) на осі x зменшити одиницю масштабу втроє, на осі y збільшити одиницю вдвоє.

125. a) Перенести початок координат у точку $O'(-5; 0)$; b) перенести початок координат у точку $O'''(0; +2)$; c) перенести початок координат у точку $O''(+3; -3)$.

126. $(+5; -8)$, $(+11; -12)$, $(+4; +4)$, $(+8; -3)$, $(+4; 0)$.

127. $d = 5$.

128. $d = 0$. Точки A і B збігаються.

129. Координати нового початку відносно старої системи: $a = +5$, $b = -1$. Координати старого початку відносно нової системи: $a' = -5$, $b' = +1$

130. a) $A(-3; -2)$; $B(+5; +1)$, $M(y; -x)$; b) $A(+3; +2)$, $B(-5; -1)$, $M(-y; x)$; c) $A(-2, +3)$, $B(+1; -5)$, $M(-x; -y)$.

131. $A(+{}^3/_2; -{}^5/_2)$; $M\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)$.

132. $x = \frac{(x'-y')\sqrt{2}+1}{2}$; $y = \frac{(x'+y')\sqrt{2}+1}{2}$.

133. $B_1\left(4+\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $C_1\left(3+\frac{5\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$, $D_1(3; \sqrt{3}-1)$.

Вказівка. За нові осі координат приймаємо нове положення сторін прямокутника (A_1B_1 і A_1D_1). Перетворення складається з переносу початку в точку $(+4; -1)$ і повороту осей на кут $\alpha = 30°$. Формули цього перетворення такі: $x = x'\frac{\sqrt{3}}{2} - y'\frac{1}{2} + 4$ і $y = x'\frac{1}{2} + y'\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. Координати вершин прямокутника після переміщення відомі відносно нової системи: $A_1(0; 0)$, $B_1(5; 0)$, $C_1(+5; +2)$ і $D_1(0; +2)$. Треба тільки за вищенаведеними формулами обчислити координати цих точок відносно початкової системи координат. Зробити рисунок.

134. $A(0; -{}^9/_5)$; $B(0; +{}^{16}/_5)$; $C(-{}^{12}/_5; 0)$; $x = {}^4/_5x' - {}^3/_5y' + {}^{48}/_{25}$. $y = {}^3/_5x' + {}^4/_5y' + {}^{36}/_{25}$. Зробити рисунок.

135. $x = x' - \frac{y'}{\sqrt{2}} + a$; $y = \frac{y'}{\sqrt{2}}$.

136. $x' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $y' = \frac{5}{2}$.

137. $(-1; 0)$, $(+1; 0)$, $(0; +\sqrt{3})$, $(0; -\sqrt{3})$, $x = x' - \frac{y'}{\sqrt{3}} + 1$, $y = x' + \frac{y'}{\sqrt{3}} + 1$.

138. a) $S = \frac{1}{2}[x'_1(y'_2 - y'_3) + x'_2(y'_3 - y'_1) + x'_3(y'_1 - y'_2)]$, де для координат третьої вершини, яка збігалася раніше з початком координат, введені такі позначення: $-a = x'_3$ і $-b = y'_3$; b) $S = \frac{\sin\omega}{2}(x'_1y'_2 - y'_1x'_2)$.

139. $x'^2 + y'^2 = 4$.

140. $x' \cdot y' = 0$.

140*. $O'(-3; +1)$; перетворене рівняння: $x'^2 + 2x'y' - y'^2 - 7 = 0$.

141. $2x' \cdot y' = a^2$.

142. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

143. 1) Бісектриса нормального координатного кута; 2) зовнішня бісектриса того самого кута; 3) сукупність обох бісектрис; 4) уявна крива з однією лише дійсною точкою в початку координат; 5) коло, яке має центр в початку координат, і радіус, рівний a; 6) пряма, паралельна осі абсцис; 7) сукупність двох прямих,

a) $2x + 3y = 6$

x	y
0	+2
+1	+4/3
+2	+2/3
+3	—0
+4	—2/3
. . .	. . .
—1	+8/3
—2	+10/3
. . .	. . .

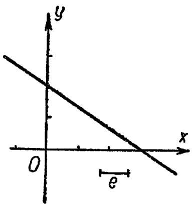

Рис. 98.

b) $y = x - 5$

x	y
0	—5
+1	—4
+2	—3
. . .	. . .
+5	0
+6	+1
. . .	. . .
—1	—6
. . .	. . .

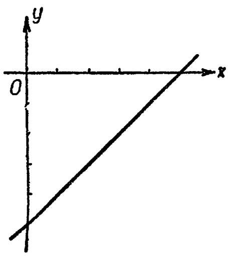

Рис. 99.

c) $y = x^2$

x	y
0	0
±1	1
±2	4
±3	9
. . .	. . .
±1/2	1/4
±1/4	1/16
. . .	. . .

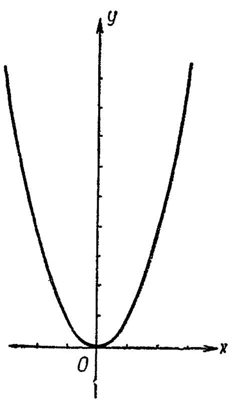

Рис. 100.

d) $y = (x - 1)^2 + 2$

x	y
0	+ 3
+1	+ 2
+2	+ 3
+3	+ 6
+4	+11
. . .	. . .
—1	+ 6
—2	+11
. . .	. . .

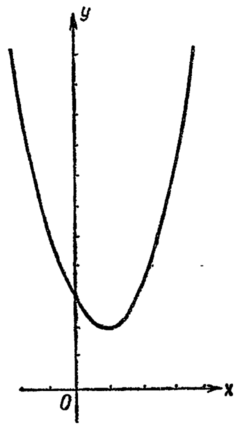

Рис. 101.

e) $y = x^3$

x	y
0	0
+1	+ 1
+2	+ 8
+3	+27
. . .	. . .
—1	— 1
—2	— 8
—3	—27
. . .	. . .
+1/2	+1/8
. . .	. . .

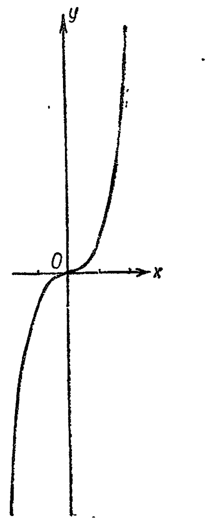

Рис. 102.

паралельних осі y; 8) сукупність двох осей координат; 9) сукупність трьох прямих: осі ординат ($x = 0$) і двох прямих, їй паралельних; 10) сукупність двох прямих, з яких одна паралельна осі ординат ($x + a = 0$), а друга паралельна осі абсцис ($y - b = 0$).

144. Див. рис. 98—102.

145. Див. рис. 103—105.

a) $xy = 4$

x	y
$+1$	$+4$
$+1/2$	$+8$
$+1/4$	$+16$
$x \to 0$	$y \to \infty$
$+2$	$+2$
$+3$	$+1^1/_3$
$+4$	$+1$
$+6$	$+2/3$
$+8$	$+1/2$
...	...
-1	-4
$-1/2$	-8
...	...

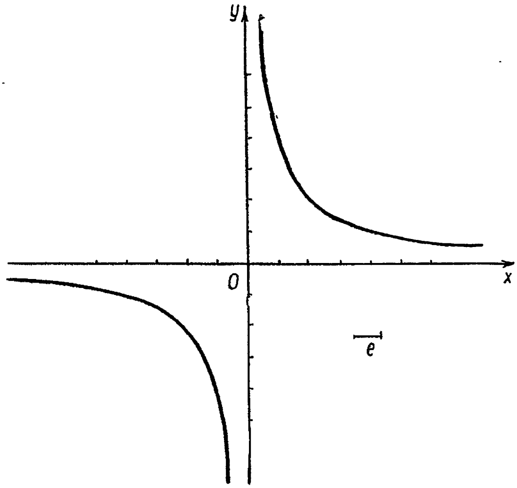

Рис. 103.

b) $y = \dfrac{1}{x^2}$

x	y
± 1	$+1$
± 2	$+1/4$
± 3	$+1/9$
± 4	$+1/16$
...	...
$\pm 1/2$	$+4$
$\pm 1/3$	$+9$
$\pm 1/4$	$+16$
...	...

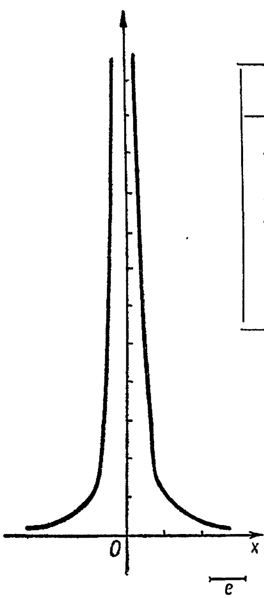

Рис. 104.

c) $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

x	y	x	y
$+0$	$+0$	-1	-2
$+1$	$+2$	-2	$-8/5$
$+2$	$+8/5$	...	...
$+3$	$+12/10$	$+1/2$	$+8/5$
$+4$	$+16/17$	$+1/3$	$+12/10$
$+5$	$+20/26$	$+1/4$	$+16/17$
...	...	...	...

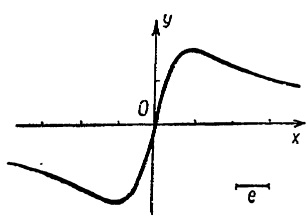

Рис. 105.

a) $y = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi\ldots$
y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	-1	$0\ldots$

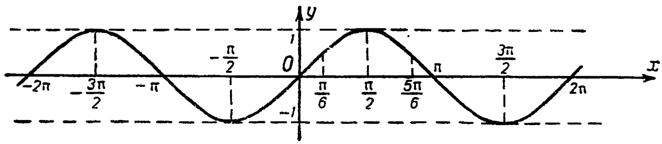

Рис. 106.

b) $y = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi\ldots$
y	$+1$	$+\frac{1}{2}$	0	-1	0	$+1\ldots$

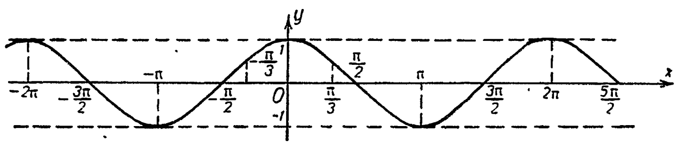

Рис. 107.

c) $y = \operatorname{tg} x$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$x \to \frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}\ldots$
	0	$+1$	$y \to \pm\infty$	-1	0	$+1\ldots$

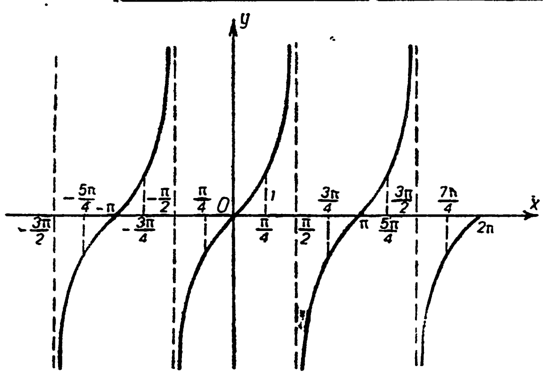

Рис. 108.

146. Див. рис. 106—108.
147. Див. рис. 109.
148. Див. рис. 110.
149. Див. рис. 111.
150. Див. рис. 112.
151. Точки A і C лежать на кривій; точка B не лежить на ній.
152. Проходить.
153. Через початок координат проходять криві (b) і (e).
154. Рівняння кривої не повинно мати вільного члена.

φ	ρ (№ 147)	ρ (№ 148)
0	0	∞
$\pi/12$	. . .	12
$\pi/6$	$\pi/12 \approx 0{,}26$	6
$\pi/4$	$\pi/8 \approx 0{,}39$	4
$\pi/3$	$\pi/6 \approx 0{,}52$	3
$\pi/2$	$\pi/4 \approx 0{,}79$	2
$2\pi/3$	$\pi/3 \approx 1{,}05$	$3/2$
$3\pi/4$	$3\pi/8 \approx 1{,}18$	$4/3$
π	$\pi/2 \approx 1{,}57$	1
$5\pi/4$	. . .	$4/5$
$4\pi/3$	. . .	$3/4$
$3\pi/2$	$3\pi/4 \approx 2{,}36$	$2/3$
$5\pi/3$	. . .	$3/5$
2π	$\pi \approx 3{,}14$	$1/2$
$5\pi/2$	. . .	$2/5$
3π	$3\pi/2 \approx 4{,}71$	$1/3$
4π	$2\pi \approx 6{,}28$	$1/4$
. . .	. . .	

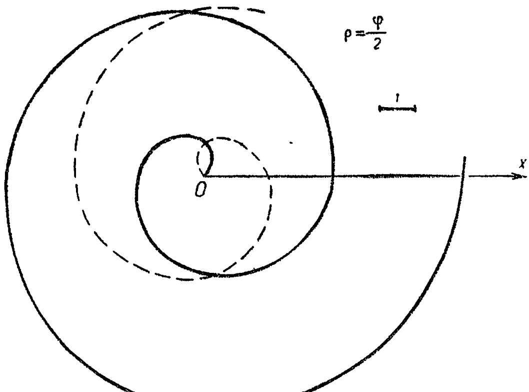

Рис. 109.

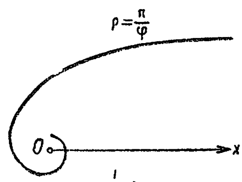

Рис. 110.

В к а з і в к а. Якщо ми будемо надавати від'ємних значень полярним координатам, то дістанемо другу вітку кривої, яка позначена пунктиром.

При будуванні немає необхідності обчислювати наближені значення радіуса-вектора — достатньо взяти відрізок довжиною π і відкладати указані його долі.

155. $x - y + 2 = 0$. Пряма перпендикулярна до AB і ділить цей відрізок пополам. В к а з і в к а. Щоб скласти рівняння шуканого геометричного місця, виражаємо формулою властивість твірної точки M, а саме: $AM = BM$. Заміняємо відрізки їх виразами через координати і робимо можливі спрощення.

155*. $x - y = 4$. В к а з і в к а. Знаходимо точку C відрізка MN, через яку проходить шукана пряма. Вибравши на MN будь-який відрізок, для якого точка C служить серединою, зведемо задачу до відомого випадку. Див. задачу 155.

156. $x^2 + y^2 = 4$. Коло з центром у початку координат і радіусом $r = 2$. В к а з і в к а. Твірна точка $M(x, y)$ має властивість: $AM = \frac{BM}{2}$.

157. $x^2 + y^2 + 24x = 180$, або доповнивши члени, які мають абсцису x, до повного квадрата, можна переписати це рівняння так: $(x + 12)^2 + y^2 = 324$. Це — коло з центром у точці $(-12;\ 0)$ і радіусом $r = 18$. В к а з і в к а. Потрібне розміщення сил буде досягнуте, якщо на відрізку P як на основі ми побудуємо трикутник, бічні сторони якого відносяться між собою як $2:3$

φ	ρ (№ 149)	ρ (№ 150)
0	0	∞
$\frac{\pi}{12}$	. . .	. . .
$\frac{\pi}{6}$	. . .	. . .
$\frac{\pi}{4}$	. . .	. . .
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{a}{2}$	8
$\frac{\pi}{2}$	a	4
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3a}{2}$	$\frac{8}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	. . .	. . .
π	$2a$	2
$\frac{5\pi}{4}$	. . .	. . .
$\frac{4\pi}{3}$	. . .	$\frac{8}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	a	4
$\frac{5\pi}{3}$	. . .	8
2π	0	. . .
$\frac{5\pi}{2}$	. . .	. . .
3π	. . .	. . .
4π	. . .	. . .
...	. . .	. . .

$$\rho = a(1 - \cos\varphi)$$

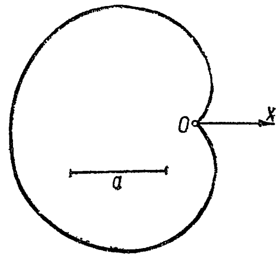

Рис. 111

$$\rho = \frac{4}{1 - \cos\varphi}$$

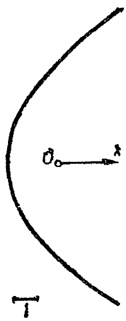

Рис. 112.

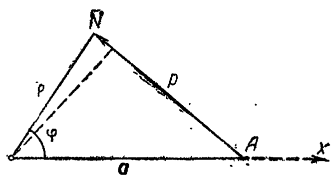

Рис. 113.

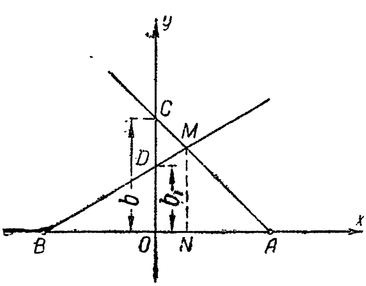

Рис. 114.

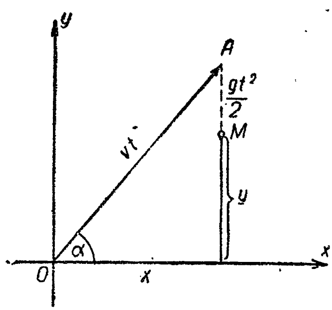

Рис. 115.

Ці сторони і будуть шукані складові сили. Але таких трикутників можна побудувати безліч, і дослідження полегшується, якщо відоме геометричне місце їх вершин. За початок координат приймаємо точку прикладення сили, а напрям її приймаємо за додатний напрям осі абсцис. Зробити рисунок.

158. $y = cx$. Пряма, яка проходить через точку перетину даних двох прямих. В к а з і в к а. Дані прямі приймаємо за осі координат і розв'язуємо задачу в косокутних координатах.

158*. $x - y - 2 = 0$.

159. $\rho \sin \varphi = \frac{M}{a}$ або $y = \frac{M}{a}$. Пряма паралельна осі x, якщо за вісь x прийнята пряма OA (рис. 113).

160. Коло $x^2 + y^2 = a^2$. Пряма AB прийнята за вісь x, і початок координат поділяє відрізок AB пополам.

161. $x^2 + y^2 = a^2$. В к а з і в к а. Вираз для відрізків b і b_1 знаходимо з розгляду подібних трикутників: $\triangle MNA \sim \triangle COA$ і $\triangle BOD \sim \triangle BNM$ (рис. 114).

161* Коло $x^2 + y^2 = 14$, або $4(x^2 + y^2) = 2s^2 - a^2$, де $s^2 = b^2 + c^2$. В к а з і в к а. За вісь x прийнята пряма, на якій лежить основа трикутників; початок координат збігається з серединою цієї основи.

162. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = a^2 - c^2$. В к а з і в к а. За вісь абсцис приймаємо пряму, яка з'єднує фокуси. Початок координат вибираємо посередині між фокусами.

162*. Еліпс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$, див. задачу 162.

163. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = c^2 - a^2$. Вибір осей той самий, що і в задачі 162.

163*. Гіпербола $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$, див. задачу 163.

164. $y^2 = 2px$. В к а з і в к а. За вісь x приймаємо перпендикуляр, опущений з фокуса на директрису. Початок координат беремо посередині між фокусом і директрисою.

164*. Парабола $x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$, див. задачу 164.

165. a) $6y - x = 0$; b) $y = 2x + 6$; c) $x^2 + y^2 = a^2$; d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

В к а з і в к а. Якщо дано рівняння руху точки, які визначають її координати через проміжний параметр (в даному випадку через t), то, виключивши цей параметр з обох рівнянь, дістанемо одно рівняння, яке зв'язує тільки координати точки, тобто звичайне рівняння тієї кривої, яку описує точка при своєму русі. Дані рівняння також визначають траєкторію точки, але тільки в параметричній формі.

166. $y^2 = 2\frac{v^2}{g}x$ (дуга параболи). В к а з і в к а. Слід подати раніш траєкторію в параметричній формі (див. задачу 165).

167. $y = mx - nx^2$, де $m = \operatorname{tg}\alpha$ і $n = \frac{g}{2v^2 \cdot \cos^2\alpha}$. В к а з і в к а. Складаємо спочатку рівняння траєкторії в параметричній формі, а саме: визначаємо положення, яке повинно займати тіло після t''. Користуємося вказівкою, даною в тексті до задачі 166. В даному випадку ми дістанемо $x = vt \cdot \cos\alpha$ $y = vt \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$ (рис. 115).

168. $y = x - \frac{x^2}{80}$; $d = 80$. Накреслити цю криву.

168*. $x - y = \frac{1}{2} \cdot (a - b)$, якщо траєкторії рухомих точок прийняти за осі координат, напрям руху — за додатний напрям відповідної осі, а вихідні точки позначені $A(a;\ 0)$ і $B(0;\ b)$.

169. $xy = a^2$, де a^2 — площа кожного прямокутника. Після перетворення координат дістанемо $\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1$. Це — гіпербола (див. задачу 163).

169*. $xy = \frac{s}{2}$, де s — площа трикутника, див. вказівку до задачі 169.

170. Гіпербола $x \cdot y = \text{const}$ (див. задачу 169).

171. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$ або $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

172. $x^2 \cdot y^2 = (y + a)^2 (b^2 - y^2)$. Вказівка. Щоб установити потрібне співвідношення між текучими координатами (x і y) і даними параметрами a і b, користуємося подібністю трикутників, до яких входять ці відрізки [1].

173. $y (x^2 + y^2) = a (x^2 - y^2)$. Вказівка. Відносно способів складення рівняння див. задачу 172.

174. $2r \cdot \cos^3 \varphi$ або $(x^2 + y^2)^2 = 2rx^3$.

175. Дуги двох кіл: 1) $(x - r^2) + (y - r)^2 = 2r^2$, для $y > 0$ і 2) $(x - r^2) + (y + r)^2 = 2r^2$, для $y < 0$. Розв'язання (рис. 116). Згідно з означенням кривої: $OM = OA + AM = OA + AB$. Ми знаходимо такий вираз для OM, OA і AB: $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, $OA = 2r \cos \varphi = \frac{2rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $AB = \pm 2r \sin \varphi =$

$$= \pm \frac{2ry}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{Bmatrix} + \text{ якщо } \varphi > 0 \text{ і, отже, } y > 0, \\ - \text{ якщо } \varphi < 0 \text{ і, отже, } y < 0. \end{Bmatrix}.$$

Вставляючи одержані вирази відрізків у основне рівняння, маємо: $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2rx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \pm \frac{2ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, або $x^2 + y^2 - 2rx \pm 2ry = 0$. Доповнюючи групу членів, які мають абсцису, і групу членів, які мають ординату, до повних квадратів, дістанемо рівняння кіл, даних у відповіді.

176. $y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$.

177. $\rho = a \cdot \sin 2\varphi$ або $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$. Крива являє собою чотири пелюстки, які сходяться в початку координат.

178. $\rho = a \cdot \cos \varphi + b$ або $(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2 (x^2 + y^2)$. Вказівка. Крива буде описана цілком тільки тоді, коли A опише коло двічі.

179. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Розв'язання (рис. 117).

$$x = MB \cdot \cos t = BP \cdot \cos^2 t = AB \cdot \cos^3 t = a \cdot \cos^3 t;$$
$$y = AM \sin t = AP \cdot \sin^2 t = AB \cdot \sin^3 t = a \sin^3 t.$$

Отже, одержано параметричне рівняння астроїди: $x = a \,.\, \cos^3 t$ і $y = a \,.\, \sin^3 t$. Виключаючи з цих двох рівнянь параметр t, дістанемо рівняння астроїди, вказане у відповіді.

180. $x = a\,(t - \sin t)$; $y = a\,(1 - \cos t)$. Розв'язання (рис. 118).

$$x = OA = OB - AB = \smile MB - MP = at - a \cdot \sin t =$$
$$= a\,(t - \sin t);\ y = AM = BC - PC = a - a \cdot \cos t = a\,(1 - \cos t).$$

---

[1] Спробувати скласти рівняння в полярних координатах, вибравши за полярну вісь пряму, яка проходить через точку A паралельно OB. Це рівняння випливає безпосередньо з самого визначення кривої. Одержаний результат перевірити, зробивши перетворення координат (перехід від полярних координат до прямокутних і перенесення початку) і діставши рівняння, вказане у відповіді.

181. Вказівка (рис. 119). Вершина прямокутника P описує нерухомий кут, радіус якого $OP = a$. Коло, яке проходить через точки P, M і C має радіус $\frac{a}{4}$ і котиться без ковзання по першому колу. Щоб у цьому впевнитися, досить довести, що $\smile MP = \smile PD$.

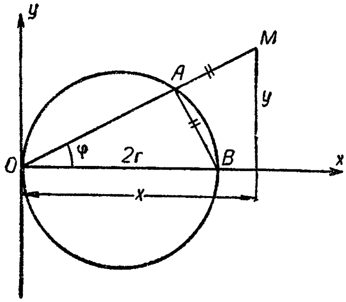

Рис. 116.

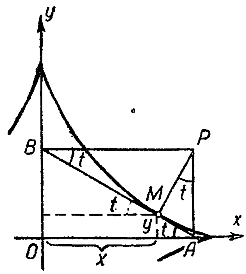

Рис. 117.

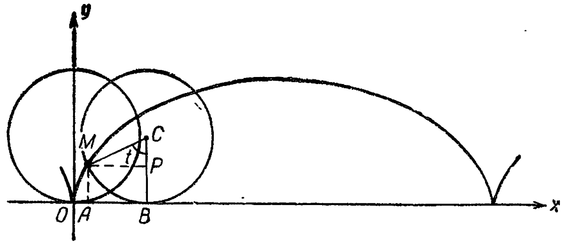

Рис. 118.

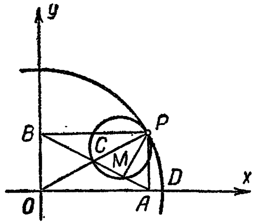

Рис. 119.

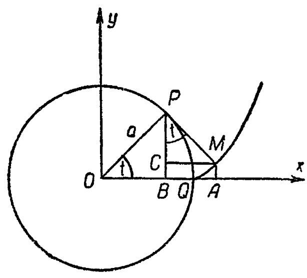

Рис. 120.

182. (рис. 120). $x = a(\cos t + t \sin t)$; $y = a(\sin t - t \cos t)$. Вказівка. До змотування кінець нитки знаходиться в точці Q. При змотуванні натягнута нитка збігається з дотичною до круга, причому довжина $PM = \smile PQ = at$.

183. Перша пряма проходить через точки A, E і F, друга проходить через C, D і F. Точка F є точкою перетину обох прямих.

184. $y = -5x + 2$. Вказівка. Рівняння прямої, яке має шукані параметри, має вигляд: $y = kx + b$. Оскільки точки P і Q лежать на цій прямій, то їх координати повинні задовольняти її рівняння. Зробивши підстановку, дістанемо два рівняння для визначення k і b.

185. a) $k = 2$, $b = 3$; b) $k = -{}^5/_2$, $b = 4$; c) $k = -{}^3/_8$, $b = -2$. **Вказівка.** Треба розв'язати рівняння відносно ординати, тоді коефіцієнт при x буде дорівнювати кутовому коефіцієнту, а вільний член дорівнює шуканому відрізку.

186. **Вказівка.** Для побудови прямої треба знати дві її точки. Для запропонованих прямих відомі координати точок їх перетину з віссю координат $(0;\ b)$; тому для кожної прямої досить знайти ще по одній точці.

187. $y = x$; $y = -x$; $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; $y = 0$.

188. $y = -0{,}4\,x$.

189. Пряма лінія з кутовим коефіцієнтом, рівним v, відсікає на осі ординат відрізок s_0.

190. $v = 16$ *км/год*. **Вказівка.** Див. задачу 189.

191. $y = \frac{v_2}{v_1}x$. **Вказівка.** В будь-який момент рухома точка матиме абсцису $x = v_1t$ і ординату $y = v_2t$. Виключаючи t з цих двох рівнянь, ми дістанемо шукану траєкторію.

192. $y = \frac{g_2}{g_1}x$.

193. $y = \pm x \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

194. $y = 0$; $y = 2\sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$; $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.

195. $x_1 = +6$; $y_1 = 0$; $y = -{}^2/_3\,x + 4$.

196. a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 0; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $\operatorname{arc\,tg}(-{}^3/_4)$.

Вказівка. Користуємося формулою (3) в тексті.

197. a) $y = 4x$; b) $y = -2x$; c) $y = -3x$ або $y = {}^1/_3\,x$; d) $y = -(2 + \sqrt{3})\,x$ або $y = -(2 - \sqrt{3})\,x$.

198. a) $y = -1$; b) $y = x - 4$ або $y = -x + 2$; c) $y = 3x - 10$.

199. $y = -2x + 14$; $x_2 = +6$; $y_2 = +2$; $d = 3\sqrt{5}$. **Вказівка.** Шукана траєкторія — перпендикуляр, опущений з точки $(+3;\ +8)$ на дану пряму.

200. $y = {}^3/_4 x - {}^5/_2$.

201. $y = -{}^3/_7 x + {}^{23}/_7$ або $y = {}^7/_3 x - {}^{73}/_3$. **Вказівка.** Оскільки промінь падає на пряму під кутом 45°, то відбитий промінь буде перпендикулярний до нього.

202. $y = -2x + 7$ і $y = {}^1/_2 x - 3$. **Вказівка.** Обидва катети проходять через дану точку $(+4;\ -1)$; один з них утворює з гіпотенузою кут 45° (трикутник рівнобедрений), другий катет перпендикулярний до першого.

203. Другий катет: $2x - 3y + 11 = 0$; гіпотенуза $x + 5y - 40 = 0$ або $5x - y - 18 = 0$.

204. $y = \frac{x}{2} - {}^5/_2$; $y = x - 2$; $y = 2x - 1$.

205. $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x$ (перпендикуляр до осі x); $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ (перпендикуляр до осі y).

206. Пряма утворює з осями x і y кути $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і $\omega - \varphi = -\frac{\pi}{6}$. **Вказівка.** Користуємося формулою (3'). Тут $\vartheta = \varphi$; $k = 0$; $k' = -2$; $\omega = \frac{\pi}{3}$;

207. $(AB)\ y = 0$; $(BC)\ y = -\sqrt{3}x + a\sqrt{3}$; $(CD)\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + a\sqrt{3}$;

$(DE)\ y = 2a\sqrt{3}$; $(EF)\ y = -\sqrt{3}x - a\sqrt{3}$; $(FA)\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$. **208.** $\vartheta = \frac{\pi}{6}$.

209. $\omega = 60°$ або $\omega = 300°$. Вказівка. Користуємося формулою (3′), яка дана в тексті.

210. $\omega = 60°$ або $\omega = 300°$. Вказівка. Користуємося умовою перпендикулярності (5′).

211. $y = {}^1/_5 x - 1$.

212. $11x + y - 17 = 0$.

213. $x + 2y - 7 = 0$ і $2x - 3y = 0$.

214. a) $3x - 4y + 12 = 0$; $4x + 3y + 16 = 0$, $2x - y - 2 = 0$; b) $7x - y + 3 = 0$; c) $x + 7y + 4 = 0$; d) $3x - 4y + 12 = 0$. Вказівка. Бісектриса поділяє протилежну сторону на частини, пропорціональні прилеглим сторонам; тому для складання рівняння (с) треба знайти довжину сторін AB і BC і поділити сторону AC у відношенні $\lambda = \frac{AB}{BC}$. При обчисленнях припускаємо, що $\omega = \frac{\pi}{2}$.

215. $y = 2x$.

216. $3x + 4y - 16 = 0$; $5x + 3y - 1 = 0$; $2x - y - 7 = 0$.

217. $BC \parallel DA$; $3x - 5y + 5 = 0$; $x - y = 0$; $y - 1 = 0$. Вказівка. Щоб перевірити паралельність двох сторін даного чотирикутника, обчислюємо кутові коефіцієнти його сторін за формулою (6). Щоб скласти рівняння середньої лінії, обчислюємо координати середин двох непаралельних сторін AB і CD. При складанні рівняння діагоналі AC ми можемо скористатися рівнянням (7), даним у тексті; тоді рівняння AC матиме вигляд: $\frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{0}$, але рівність цих двох дробів має місце лише тоді, коли чисельник другого дробу дорівнює нулеві, тобто $y - 1 = 0$, бо інакше права частина рівняння безконечно велика, в той час як ліва частина набуде конечних значень.

Отже, обидва написані рівняння рівнозначні, і діагональ AC паралельна осі x, що безпосередньо випливає з того, що дві її точки A і C мають однакові ординати.

218. Вказівка. Щоб перевірити, чи проходять три прямі через одну точку, знаходимо спочатку точку перетину двох з них (розв'язуємо сумісно їх рівняння) і потім дивимось, чи задовольняють знайдені координати рівняння третьої прямої.

219. $(A'B')\ 2x - 5y - 18 = 0$; $(B'C')\ x + 3y - 20 = 0$; $(C'A')\ 3x - 2y - 5 = 0$ або $(A''B'')\ 6x - 15y + 72 = 0$; $(B''C'')\ x + 3y + 34 = 0$; $(C''A'')\ 3x - 2y + 25 = 0$. Вказівка. Щоб скласти рівняння сторін більшого трикутника, обчислюємо координати його вершин. Вершина A' лежить на прямій MA, причому віддаль її від центра подібності M, тобто відрізок MA', в три рази більша від відрізка MA; іншими словами, точка A' поділяє відрізок MA у відношенні $\lambda = -{}^3/_2$. Вершини B' і C' поділяють в тому ж відношенні відрізки MB і MC. Другий трикутник симетричний з першим відносно центра подібності, і його вершини утворюються поділом відрізків MA, MB і MC у відношенні $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$.

220. a) лежать; b) не лежать.

221. $y = 7$.

222. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Вказівка. Промінь повинен бути напрямлений так, що якби він не відбився від осі x, то пройшов би через точку B', симетричну з B відносно осі x. Задача зводиться до визначення кута між прямою AB' і віссю x.

223. $M(+1;\ 0)$. Вказівка. Легко впевнитися, що ламана AMB, при будь-якому положенні точки M на осі x, має однакову довжину з ламаною AMB_1, де B_1 — точка, симетрична з точкою B відносно осі x, а ця остання ламана має найменшу довжину, коли всі три точки A, M і B_1 лежать на одній прямій. Щоб розв'язати цю задачу, треба спочатку знайти точку перетину прямої AB_1 з віссю x.

224. $M_1(0;\ +2)$ і $M_2(0;\ -8)$.

225. $\pm\frac{X}{5} \pm \frac{Y}{2} = 1$.

226. $x + y + a = 0$ і $x - y = 0$.

227. a) $a = -4$, $b = 6$; b) $a = {}^1/_2$, $b = -2$; c) $a = 1$, $b = 1$; d) $a = -4$, $b = -10$.

228. $S = 9$ кв. од.

229. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ або $\frac{x}{4} + \frac{y}{{}^3/_2} = -1$.

230. $x + y = 7$.

230*. $3x + y - 2 = 0$; $x - 3y - 14 = 0$; $x - 3y + 16 = 0$ і $3x + y - 32 = 0$.

231. $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$.

232. a) $b = -a$; b) $b = a$; c) $b = -a\sqrt{3}$. Вказівка. $k = -\frac{b}{a}$.

233. Довжина $d = 7$.

234. $x + y - 4 = 0$.

235. $S = 12$ кв. од.

236. $\frac{x}{\lambda a} + \frac{y}{\lambda b} = 1$ — пряма, паралельна початковій.

236*. Пряма $x + y = 3$.

237. Прямі c), e) і f) дані нормальними рівняннями. Вказівка. Нормальне рівняння (при $\omega = 90^\circ$) характеризується тим, що сума квадратів коефіцієнтів при x і y дорівнює одиниці ($\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$) і вільний член від'ємний.

238. $\frac{4x - 3y + 10}{-5} = 0$; $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 3 = 0$; $0{,}6x + 0{,}8y - 1{,}5 = 0$;

$$\frac{x - 2y + 3}{-\sqrt{5}} = 0;\quad \frac{y}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} - 2 = 0;\quad -x\cos 10^\circ - y\sin 10^\circ - 4 = 0 \text{ або } x\cos 190^\circ + y\sin 190^\circ - 4 = 0.$$

239. $p = {}^2/_3$. 240. $r + 5$.

241. $r = 5$.

242. a) $\frac{x}{2\sqrt{7}} + \frac{5y}{2\sqrt{7}} - \frac{2}{\sqrt{7}} = 0$; b) $\frac{1}{7}x + \frac{5\sqrt{3}}{14}y - \frac{1}{2} = 0$;

c) $-\frac{5}{2\sqrt{13}}x - \frac{1}{\sqrt{13}}y - \frac{\sqrt{13}}{2} = 0$.

243. $p = {}^1/_6$; $\alpha = 0$; $\beta = \frac{\pi}{4}$. 244. $\delta = 2$.

245. a) $\delta = 3$; b) $\delta = 4$; c) $\delta = 5^2/_3$; d) $\delta = 0$, тобто точка P_4 лежить на даній прямій; e) $\delta = -2{,}2$.

246. $\delta = -1$.

247. $\omega = \frac{\pi}{3}$.

248. $h_A = \frac{29\sqrt{5}}{28}$; $h_B = 4^6/_{13}$; $h_C = 2$. В к а з і в к а. Щоб обчислити довжину висот, знаходимо абсолютні величини віддалей кожної вершини від протилежної сторони.

249. $\delta = \frac{25}{\sqrt{34}}$.

250. $M_1\,(0;\ -12)$ і $M_2\,(0;\ +4/_3)$.

252. $d = 14^2/_{17}$.

253*. $x + y = 7 \pm 5\sqrt{2}$; (дві прямі).

254. $4x + 3y - 25 = 0$ і $24x - 7y + 125 = 0$.

255. $d = 0{,}5$.

256. $12x + 5y - 26 = 0$ і $12x + 5y - 78 = 0$.

257. $8x - 12y + 11 = 0$.

258. $x - 2y = 0$ і $x - 2y + 5 = 0$ або $2x + y = 0$ і $2x + y - 5 = 0$.

259. $M(+1;\ +8)$.

260. $C_1(-5/_3;\ +11^1/_4)$, $C_2\,(-15;\ +5/_4)$, $C_3(-5/_3);\ -8^3/_4)$, $C_4\,(+11^2/_3;\ +5/_4)$. В к а з і в к а. Ця задача має чотири розв'язання, оскільки відомі тільки абсолютні величини віддалей шуканої точки від даних прямих; ці віддалі можуть мати як додатні, так і від'ємні значення.

262. $4x - 12y + 7 = 0$ і $6x + 2y - 5 = 0$. (Див. задачу 261.)

263. $M_1(0;\ +1)$, $M_2(-9;\ +4)$, $M_3(0;\ -5)$, $M_4(+3;\ +4)$. В к а з і в к а. Центр круга, вписаного в трикутник, повинен знаходитися на рівних віддалях від трьох його сторін, тобто повинен лежати на перетині бісектрис трьох кутів трикутника. Існує чотири точки, які задовольняють умови задачі: точка перетину трьох внутрішніх бісектрис трикутника (M_1) і точки перетину внутрішньої бісектриси кожного з кутів A, B або C з зовнішніми бісектрисами двох інших кутів (M_2, M_3 і M_4).

264. $x + 2y - 5 = 0$ і $x - 6y + 11 = 0$. В к а з і в к а. Всяка пряма, яка проходить через точку $M(+1;\ +2)$, зобразиться рівнянням $y - 2 = k\,(x - 1)$ або $kx - y - k + 2 = 0$. Віддаль цієї прямої від точки $A(+3;\ +3)$ буде $d_1 = \frac{3k - 3 - k + 2}{\sqrt{1 + k^2}}$ і від точки $B(+5;\ +2)$ буде $d_2 = \frac{5k - 2 - k + 2}{\sqrt{1 + k^2}}$. Згідно з умовою задачі $d_1 = \pm d_2$, або, користуючись знайденими виразами цих віддалей, $\frac{2k - 1}{\sqrt{1 + k^2}} = \pm \frac{4k}{\sqrt{1 + k^2}}$. Звідси, взявши той або інший знак, ми дістанемо два значення для кутового коефіцієнта k; отже, задачу задовольняють дві прямі, вказані у відповіді *.

265. $y - 3 = 0$ і $12x - 5y - 117 = 0$. В к а з і в к а. Для шуканої прямої вибираємо форму рівняння, розв'язану відносно ординати: $y = kx + b$. З двох умов, що віддаль d_1 цієї прямої від точки A дорівнює шести $\left(\frac{2k + 3 + b}{\sqrt{1 + k^2}} = \pm 6\right)$ і віддаль d_2 тієї ж прямої від точки B дорівнює чотирьом $\left(\frac{5k + 1 + b}{\sqrt{1 + k^2}} = \pm 4\right)$,

* Можна було б розв'язати задачу, користуючись деякими геометричними міркуваннями, а саме: неважко бачити, що умову задачі задовольняють дві прямі, які проходять через точку M: одна з них паралельна прямій AB, а друга проходить через середину відрізка AB.

визначаємо обидва параметри k і b. Ця задача повинна мати чотири розв'язання; геометрично вона зводиться до знаходження спільних дотичних до двох кіл, які мають центри в точках A і B і радіуси, відповідно рівні 6 і 4; у даному прикладі тільки дві з цих дотичних є дійсними прямими, дві інші — уявні прямі; для них ми знаходимо уявні значення параметрів.

266. Точка може переміщатися по двох прямих: $y = 0$ і $y = \sqrt{3}x$.

267. $y = {}^{8}/_{15}x - {}^{2}/_{3}$.

268. $x + 2y - 23 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 6 = 0$ і $2x - y + 14 = 0$. Вказівка. Рівняння перших сторін можна скласти простіше, користуючись тим, що квадрат — це фігура, симетрична відносно свого центра; тому сторона, яка проходить через точку A, повинна разом з тим пройти і через точку B', симетричну з B відносно M.

270. a) $3x - 4y - 12 = 0$; b) ${}^{3}/_{5}x - {}^{4}/_{5}y - {}^{12}/_{5} = 0$; c) $y = {}^{3}/_{4}x - 3$ і

d) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3} = 1$.

271. a) $\vartheta = \dfrac{3\pi}{4}$, якщо вважати, що кут утворений обертанням першої прямої проти годинникової стрілки до збігу з другою прямою; b) $\vartheta = \dfrac{\pi}{3}$; c) $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$; d) $\vartheta = \dfrac{\pi}{4}$.

272. $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{\pi}{4}$. 273. $\vartheta = \dfrac{2\pi}{3}$.

274. Прямі a) і b) паралельні між собою, до них обох перпендикулярна пряма d); прямі e) і g) паралельні, до них перпендикулярна пряма f).

275. $\omega = \dfrac{\pi}{4}$.

276. $a_1 = 2$; $a_2 = -{}^{2}/_{3}$. Вказівка. Визначаємо невідомий параметр a з умови пропорціональності коефіцієнтів при координатах у рівняннях паралельних прямих:

$$\frac{a+1}{3a} = \frac{-2a}{-8}.$$

277. $a_1 = 0$; $a_2 = 1$.

279. $4x + y = 0$.

280. $4x - 7y - 15 = 0$. Вказівка. Скористаємося рівнянням прямої, яка проходить через дану точку: $A(x - x') + B(y - y') = 0$. Що ж стосується вибору коефіцієнтів A і B, то відповідні вказівки дані в розв'язанні задачі 278.

281. $5x - 6y = 0$. Розв'язання. Шукана пряма проходить через початок координат, тому вільний член її рівняння дорівнює нулеві і рівняння матиме вигляд $Ax + By = 0$. З умови перпендикулярності даної і шуканої прямої маємо $\dfrac{A}{5} = -\dfrac{B}{6}$; позначивши ці відношення через λ, дістанемо: $A = 5\lambda$ і $B = -6\lambda$. Вставляємо одержані значення коефіцієнтів у рівняння шуканої прямої: $5\lambda x - 6\lambda y = 0$ або $5x - 6y = 0$. Отже, при складанні рівняння прямої, перпендикулярної до даної, найпростіше за коефіцієнт при x взяти коефіцієнт при y в даному рівнянні, а за коефіцієнт при y взяти даний коефіцієнт при x, причому у одного з цих коефіцієнтів треба змінити знак.

282. $x + 4y - 3 = 0$. (Див. задачу 281.)

283. $5x - 3y - 25 = 0$ і $5x - 3y + 9 = 0$.

284. $(x - x')\sin\alpha - (y - y')\cos\alpha = 0$.

285. $7x + 5y = 0$.

286. $x + 7y - 27 = 0$.

287. a) $(+2;\ +5)$; b) прямі паралельні між собою; c) $(-1;\ +4)$.

288. $(+3;\ 0)$; $(0;\ -5)$ і $(-2;\ +1)$.

289. $x = {}^{29}/_{14}$; $y = -{}^{5}/_{14}$.

290. $M(0;\ +3)$; $\vartheta = \operatorname{arc\,tg}(-2)$.

291. $(+3;\ +1)$, $(+12;\ -2)$, $(+8^{10}/_{13};\ +3^{4}/_{13})$, $(+6^{3}/_{13};\ -4^{4}/_{13})$. Вказівка. При розв'язанні задачі можна скористатися тим, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і ділять одна одну пополам.

291*. $2x - 11y + 17 = 0$; $2x - y + 7 = 0$; $2x - 11y + 67 = 0$ і $2x - y - 3 = 0$.

292. $Q'(+10;\ +21)$. Вказівка. З точки Q опускаємо перпендикуляр на дану пряму і знаходимо точку їх перетину M. Ця точка M служить серединою відрізка між даною точкою Q і шуканою Q'.

293. $x - y - 7 = 0$ і $x - 2y - 10 = 0$. Вказівка. Визначаємо першу вершину A паралелограма як точку перетину двох даних сторін, потім визначаємо протилежну вершину C як кінець діагоналі AC, у якої відомі початок A і середина M. Шукані сторони проходять через точку C і паралельні двом даним сторонам паралелограма.

293*. $S = 37\ {}^{11}/_{13}$ кв. од.

294. $C(+2;\ +4)$. Вказівка. Вершину C визначаємо як точку перетину висоти CH (вона проходить через H і перпендикулярна до AB) і сторони BC (проходить через B і перпендикулярна до AH).

295. $M_1(+2;\ +5)$, якщо $BM \parallel AC$, або $M_2(+14;\ +17)$, якщо $AB \parallel CM$.

296. У перших трьох випадках прямі проходять через одну точку, а в останньому — не проходять.

297. $3a + 7b + 3 = 0$.

300. a) $4x - y = 0$; b) $11y - 16 = 0$; c) $11x - 4 = 0$; d) $17x - 40y + 52 = 0$. Вказівка. Користуємося рівнянням пучка прямих: $2x + 5y - 8 + q\,(x - 3y + 4) = 0$. У першому випадку треба підібрати параметр q так, щоб вільний член перетворився на нуль: $-8 + 4q = 0$, звідки $q = 2$. У другому випадку параметр q підбирається так, щоб коефіцієнт при x перетворився на нуль; у третьому випадку треба прирівняти до нуля коефіцієнт при ординаті y; останній випадок — див. задачу 299.

301. $2x - y - 5 = 0$.

302. $x + 3y - 9 = 0$; $68x - 17y + 57 = 0$; $65x - 26y + 72 = 0$. Розв'язання. Рівняння будь-якої прямої, яка проходить через першу вершину, тобто через точку перетину перших двох сторін, буде: $5x - 2y + 6 + q\,(4x - y + 3) = 0$. Шукана пряма, яка проходить через цю вершину, повинна бути паралельна третій стороні трикутника; отже, коефіцієнти при координатах в їх рівняннях повинні бути пропорціональні: $\dfrac{5 + 4q}{1} = \dfrac{-2 - q}{3}$, звідки $q = -{}^{17}/_{13}$. Вставляючи знайдене значення параметра в рівняння пучка, дістанемо рівняння шуканої прямої $x + 3y - 9 = 0$. Так само визначимо рівняння решти шуканих прямих, які проходять через дві інші вершини трикутника.

303. $22x + 33y - 35 = 0$, $5x - y + 3 = 0$ і $17x + 34y - 38 = 0$.

304. $x - y - 3 = 0$ (BC); $4x + 5y - 20 = 0$ (AC); $3x - 12y - 1 = 0$ (CH).

305. $14x - 7y + 32 = 0$ і $7x + 21y - 75 = 0$. Вказівка. Рівняння основних прямих пучка ми дістанемо з рівняння цього пучка при таких значеннях параметра: $q = 0$ і $q = \infty$.

306. $2x - 5y - 2 = 0$. Розв'язання. Перший спосіб. Шукана пряма зображається при підхожих значеннях параметра q і q' як рівнянням $x + y - 1 + q\,(x - 1) = 0$, так і рівнянням $2x - 3y + q'\,(y + 1) = 0$. А щоб два рівняння являли собою одну і ту ж саму пряму, треба, щоб усі коефіцієнти цих двох рівнянь, включаючи і вільні члени, були пропорціональні, тобто $\dfrac{1 + q}{2} = \dfrac{1}{q' - 3} = \dfrac{1 + q}{-q'}$. З цих двох рівнянь визначаємо q і q'; порівнюючи, наприклад,

перше і останнє відношення, ми відразу дістанемо $q' = -2$; прирівнюючи перші два відношення між собою і заміняючи q' знайденим значенням, дістанемо $q = -{}^7/_5$. Якщо ми вставимо в рівняння першого пучка $q = -{}^7/_5$ або в рівняння другого пучка $q' = -2$, то дістанемо одну і ту ж пряму $2x - 5y - 2 = 0$, яка і є спільною прямою обох пучків. Другий спосіб. Позначивши коефіцієнти шуканої прямої через A, B, C, можна скористатися умовою (23) проходження трьох прямих через одну точку, що приведе до розв'язання двох рівнянь:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ і } \begin{vmatrix} A & B & C \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ або } \left\{ \begin{matrix} A + C = 0, \\ 3A + 2B - 2C = 0 \end{matrix} \right\},$$

звідки $A : B : C = 2 : -5 : -2$.

307. $y = 0$; $x - 3 = 0$ і $x - y - 6 = 0$.

308. $x + 4y - 4 = 0$. Вказівка. Рівняння всякої прямої, яка проходить через точку $P(0;\ +1)$, має вигляд: $y = kx + 1$. Знаходимо абсциси точок перетину цієї прямої з даними прямими; $x_1 = \dfrac{7}{3k - 1}$ і $x_2 = \dfrac{7}{2 + k}$.

Півсума цих абсцис повинна дорівнювати абсцисі точки P, тобто нулеві. З цієї умови визначаємо кутовий коефіцієнт шуканої прямої.

308*. $x + y - 3 = 0$.

309. $y = \dfrac{\lambda}{q} x$. Вказівка. Кінці відрізка рухомої прямої, розміщеної між осями, будуть: $A(bq;\ 0)$ і $B(0;\ b)$. Точка M, яка поділяє відрізок AB у відношенні λ, має координати $x = \dfrac{bq}{1 + \lambda}$ і $y = \dfrac{\lambda b}{1 + \lambda}$. Виключаючи з цих двох рівностей змінний параметр b, ми дістанемо рівняння шуканої траєкторії.

309*. a) $14x - 43y + 29 = 0$; b) $2x - 25y + 23 = 0$. **310.** $(7 - \sqrt{5};\ 3\sqrt{5} - 10)$ і $\left(+\dfrac{14}{3};\ -3\right)$. **310*.** $h = \dfrac{21}{\sqrt{17}}$; $M\left(+\dfrac{17}{12};\ +\dfrac{11}{3}\right)$; $S = 13^1/_8$ кв. од. **311.** $2x + 7y + 22 = 0$; $7x + 2y - 13 = 0$; $x - y + 2 = 0$.

311*. $3x + 4y - 15 = 0$; $h = 4{,}4$. **312.** $2x + y - 8 = 0$; $x - 3y + 10 = 0$; $x + 4y - 4 = 0$. Вказівка. Визначаємо точку M перетину медіан, потім визначаємо кінець медіани AM — точку D, яка ділить відрізок AM у відношенні $\lambda = -3$. Через точку D проводимо пряму так, щоб відрізок її, розміщений між даними медіанами, ділився у точці D пополам (див. задачу 308); це і буде сторона трикутника, протилежна вершині A.

312*. $S_1 : S_2 = 4 : 3$.

313. $x + 7y - 6 = 0$; $x - y - 6 = 0$; Вказівка. При розв'язанні цієї задачі можна скористатися тим, що сторони кута розміщені симетрично відносно його бісектриси; тому сторони AB і BC симетричні відносно бісектриси кута $B(x + y - 2) = 0$; іншими словами, на стороні BC лежить точка A_1, симетрична з даною вершиною A відносно прямої $x + y - 2 = 0$; так само на стороні BC лежить ще точка A_2, симетрична з A відносно бісектриси кута $C(x - 3y - 6) = 0$. Таким чином, ми можемо знайти дві точки A_1 і A_2 прямої BC (див. задачу 292); можемо, отже, скласти її рівняння і визначити решту вершин трикутника як точки перетину сторони BC з даними бісектрисами кутів B і C.

314. $S_1 = 18{,}75$ кв. од. або $S_2 = 33\,^1/_3$ кв. од.

314*. $S = \dfrac{1}{2} \begin{vmatrix} \dfrac{61}{53} & \dfrac{237}{53} & 1 \\ \dfrac{9}{29} & \dfrac{137}{29} & 1 \\ -\dfrac{121}{74} & \dfrac{97}{74} & 1 \end{vmatrix} \approx 1{,}68$ кв. од. **315.** $\left(+\dfrac{10}{3};\ +\dfrac{7}{3}\right)$.

316. a) $\rho = p \cdot \sec(\varphi - \alpha)$; b) $\rho \cdot \sin(\vartheta - \varphi) = a \cdot \sin\vartheta$. Вказівка. Для виведення цих рівнянь зробити рисунки, а потім перевірити результат переходом до прямолінійної системи координат.

316*. $\rho \sin(\vartheta - \varphi) = \rho_1 \sin(\vartheta - \varphi_1)$.

317. $$\frac{\rho \cdot \sin(\varphi - \varphi_1)}{\rho_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi - \varphi_1)}}{\sqrt{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_2\rho_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}.$$

Вказівка. Це рівняння можна одержати, користуючись результатами задачі 316*, або безпосередньо з рисунка. У всякому випадку вияснити геометричний смисл одержаної пропорції.

317*. a) $\varphi = \frac{\pi}{5}$; b) $\rho = 4\sec\left(\varphi - \frac{5\pi}{6}\right)$; $\rho = 4\sec\left(\varphi - \frac{11\pi}{6}\right)$; c) $\rho\cos\varphi = = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, d) $\rho\sin\varphi = 1$; e) $\rho\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \frac{3}{2}$; f) $\frac{7\sqrt{3}}{12}\rho\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{12}\right) =$
$$= \sqrt[3]{\rho^2 - 10\rho\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{12}\right) + 25}.$$

Вказівка. При розв'язанні цих задач можна скористатися результатами задач 316—317.

318. a) $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$; b) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$; c) $x^2 + + (y-4)^2 = 169$.

319. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$. Центром служить середина AB.

320. $a = +^8/_3$; $b = 0$; $(x - ^8/_3)^2 + y^2 = ^{85}/_9$.

321. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$.

323. a) $(x-3)^2$ $(y-4)^2 = 25$ (див. задачу 322): b) дані три точки лежать на одній прямій; тому провести через них коло не можна.

324. Точки C, E і F лежать на колі; точки A і G лежать всередині кола; точки B і D лежать поза колом. Вказівка. Про положення точки відносно кола ми судимо по її відстані від центра цього кола. Залежно від того, чи буде ця відстань менша, рівна або більша радіуса, точка лежить всередині кола, на ній або поза нею.

325. $a = 4$; $b = -3$; $r = 2$.

326. a) $(x-2)^2 + y^2 = 4$; b) $x^2 + (y+3)^2 = 16$; c) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 25$;
$$\text{d)}\ \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{58}{9}.$$

327. a) Круг нульового радіуса; маємо тільки одну дійсну точку, а саме: початок координат. b) Уявний круг; не має ні однієї дійсної точки. c) Круг нульового радіуса з дійсної точкою $(-5; +2)$. d) Уявний круг з уявним радіусом $r = \sqrt{-4}$.

328. a) $x^2 + y^2 = 9$; b) $x^2 + y^2 - 6x = 0$. Точка A служить центром круга, точка B лежить на колі. В обох випадках після перетворення вісь x є діаметром кола.

329. $x^2 + y^2 = 49$.

330. Якщо $F = 0$, то коло проходить через початок координат. Якщо $D = 0$ або $E = 0$, то коло симетричне відносно осі ординат або осі абсцис, тобто центр лежить на одній з цих осей. Якщо $A = 0$, дане рівняння не зображає кола, а тому ми не розглядаємо цього випадку.

331. a) Вісь абсцис перетинає коло на початку координат і в точці $(+8; 0)$; вісь ординат перетинає коло в початку координат і в точці $(0: -6)$. b) Коло дотикається до осі абсцис в точці $(+3; 0)$ і перетинає вісь ординат у точках $(0; +9)$ і $(0; +1)$. c) Коло дотикається до осі x у точці $(+2; 0)$ і дотикається до осі y у точці $(0; -2)$. d) Коло не має дійсних точок перетину ні з тією ні з другою віссю.

332. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Вказівка. Оскільки коло дотикається до осі абсцис на початку координат, то вісь ординат служить її діаметром.

333. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ і $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$.

334. $(x - 17)^2 + (y - 17)^2 = 17^2$ і $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$. Вказівка. Якщо коло дотикається до обох осей координат, то центр його лежить на бісектрисі координатного кута, і ми маємо $a = b$, крім того, радіус кола дорівнює віддалі центра від дотичної, тобто від осі x або осі y; отже, $r = a = b$, і в даному випадку рівняння кола матиме вигляд: $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$. Отже, шукане рівняння має тільки один невідомий параметр a, який ми визначимо з умови, що коло проходить через точку $A(+2;\ +9)$.

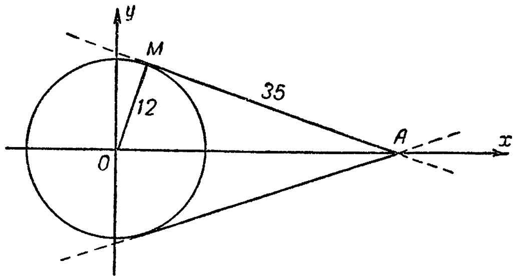

Рис. 121.

335. $(x - 5)^2 + (y \pm 5\sqrt{2})^2 = 50$. Вказівка. Якщо коло дотикається осі x, то абсциса центра дорівнює абсцисі точки дотику, а ордината центра за абсолютною своєю величиною дорівнює радіусу; тому рівняння шуканого кола має вигляд: $(x - 5)^2 + (y \pm r)^2 = r^2$. Точки перетину цього кола з віссю ординат ($x = 0$) ми дістанемо з рівняння $y^2 \pm 2ry + 25 = 0$. За умовою задачі різниця коренів цього квадратного рівняння дорівнює 10, тобто $y_1 - y_2 = 10$ або $2\sqrt{r^2 - 25} = 10$; звідси визначаємо єдиний невідомий параметр r рівняння.

336. $a = +30$; $b = +48$ або $a = -30$; $b = +48$.

337. $(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 36$. Вказівка. Радіус кола дорівнює віддалі його центра від дотичної.

338. a) $(+3;\ -1)$ і $(+2;\ -2)$; b) пряма дотикається до кола в точці $(-4;\ +6)$; c) дійсних точок перетину не має.

339. Прямі a) і b) перетинають коло; пряма c) дотикається і d) проходить поза колом. Вказівка. Про розміщення прямих відносно кола ми судимо по віддалі цих прямих від центра. Залежно від того, чи буде ця віддаль менша, рівна, чи більша радіуса — пряма перетинає, дотикається або проходить поза колом.

340. $4x - 2y - 9 = 0$. Вказівка. Радіус, який проходить через дану точку, перпендикулярний до шуканої хорди.

341. $x - 2y - 5 = 0$.

342. $4x + 3y - 35 = 0$.

343. $2x - 3y + 9 = 0$. Вказівка. Можна звести дане рівняння кола до нормального вигляду і скористатися загальним рівнянням дотичної.

344. $y = 0$ і $20x - 21y = 0$.

345. a) $y - 7x = 0$ і $x - y = 0$; b) $4x - 3y - 25 = 0$ і $3x + 4y - 25 = 0$ (див. задачу 344).

346. $2x - y \pm 5 = 0$.

347. $12x + 35y = 444$. Вказівка. Рівняння даного кола відоме: $x^2 + y^2 = 144$. Визначивши координати точки A (рис. 121) з прямокутного трикутника OMA, зведемо задачу до проведення дотичних до даного кола з даної точки.

348. $(x - {}^7/_2)^2 + (y - {}^7/_2)^2 = {}^{25}/_2$ і $(x - {}^{13}/_{18})^2 + (y - {}^{13}/_{18})^2 = {}^{25}/_{162}$.

349. $(+5; -6)$. В к а з і в к а. Координати точки дотику можна було б дістати, розв'язавши разом рівняння даного кола і даної прямої, але можна їх визначити інакше, користуючись загальним рівнянням дотичної до даного кола: $(x-1)(x_1-1)+(y+3)(y_1+3)=25$. Оскільки це рівняння і дане рівняння $4x-3y-38=0$ зображають одну і ту ж пряму, то коефіцієнти цих двох рівнянь повинні бути пропорціональні: $\frac{x_1-1}{4}=\frac{y_1+3}{-3}=\frac{x_1-3y_1+15}{38}$. З цих двох рівнянь першого степеня визначаємо координати точки дотику x_1 і y_1.

350. $3x-4y-2=0$. В к а з і в к а. Внаслідок припинення дії сили точка M повинна продовжувати свій шлях прямолінійно в тому напрямі, який вона мала в момент припинення сили. Напрям руху точки по кривій визначається в будь-який момент напрямом дотичної до неї. Отже, точка M повинна продовжувати рух по дотичній до кола в точці A.

351. $(-0{,}4, +8{,}8)$, якщо точка M рухалась по колу проти годинникової стрілки; $(+6; +4)$, якщо точка M рухалась у зворотному напрямі. В к а з і в к а. Задача зводиться до знаходження точок дотику тих дотичних до кола, які проходять через точку $(-2; 0)$. (Див. задачу 350).

352. $\varphi=\frac{\pi}{3}$. В к а з і в к а. Шуканий кут є кут між двома дотичними, проведеними з даної точки до даного кола.

352.* $x^2+y^2=2r^2$.

353. $5x+2y-7=0$.

354. $x+y-4=0$.

355. $x^2+y^2-10x-8y+37=0$.

356. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ і $(x-2{,}8)^2+(y-0{,}4)^2=1$. В к а з і в к а. Точка M лежить поза даним колом, і, судячи по величині радіусів даного і шуканого кола, ці двоє кіл можуть дотикатися тільки зовні.

357. $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

358. $(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2=r_1^2+r_2^2$. В к а з і в к а. Лінія центрів і радіуси, напрямлені в точку перетину двох ортогональних кіл, утворюють прямокутний трикутник.

359. $(x+1)^2+(y-3)^2=9$ і $\left(x-\frac{41}{13}\right)^2+\left(y-\frac{3}{13}\right)^2=9$.

360. $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ і $(-7; +1)$.

361. Зовнішні дотичні: $y-2=0$ і $4x-3y-10=0$; внутрішні дотичні: $x-1=0$ і $3x+4y-5=0$.

362. $t=4$;

363. $t_1=3$; $t_2=0$ (точка M лежить на колі); $t_3=i\sqrt{6}$ (точка M лежить всередині кола); $t_4=\sqrt{10}$.

364. $(x-5)^2+(y+2)^2=25$, тобто коло, концентричне з даним, має радіус $R=\sqrt{r^2+4^2}$.

365. a) $x^2+y^2+8x-26y=0$; b) $x^2+y^2+16x-42y=0$ — кола, які проходять через точки перетину даних кіл; c) $x-2y=0$ — пряма, так звана радикальна вісь двох даних кіл.

367. a) $2(a_1-a)x+2(b_1-b)y+a^2-a_1^2+b^2-b_1^2-r^2+r_1^2=0$; b) $2x+7y+8=0$; c) $4x+4y+5=0$. В к а з і в к а. Якщо рівняння двох кіл $U=0$ і $U_1=0$ дані в такій формі, що коефіцієнти при квадратах координат дорівнюють одиницям, то рівняння радикальної осі цих кіл $U_1-U=0$.

369. $(x-2)^2+(y-6)^2=50$.

370. $(x-2)^2+(y+6)^2=13$. В к а з і в к а. Центр шуканого кола лежить на радикальній осі даних двох кіл, а радіус дорівнює за довжиною дотичній, яку можна провести з центра до одного з даних кіл.

371. $(-2;\ -2)$.

372. $(x+2)^2+(y-3)^2=6$. Вказівка. Центр шуканого кола збігається з радикальним центром трьох даних кіл, а радіус дорівнює дотичній, проведеній з радикального центра до одного з цих кіл.

373. Коло, яке дотикається всередині до даного кола в точці P і має радіус $R=\frac{a\lambda}{1+\lambda}$.

374. Коло, радіус якого дорівнює $\frac{a}{2}$; центр його знаходиться посередині між точкою P і центром даного кола. Точка P служить центром подібності обох кіл.

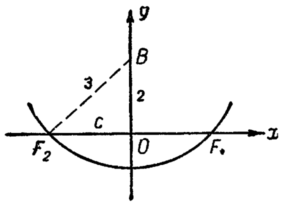

Рис. 122.

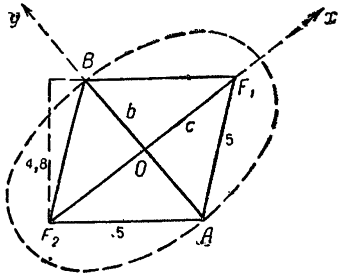

Рис. 123.

375. a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; c) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; d) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$. e) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

376. $2a=26$; $2b=10$; $e=\frac{12}{13}$; $F_1(+12;\ 0)$; $F_2(-12;\ 0)$.

377. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$. Вказівка. Дані віддалі можуть бути виражені через параметри еліпса так: $a+c$ і $a-c$.

378. $c^2=a^2-b^2$ (рис. 122).

379. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ або $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, залежно від того, чи проходить еліпс через кінці великої чи малої діагоналі ромба. Вказівка. Для визначення параметрів еліпса ми можемо скористатися такими співвідношеннями (рис. 123): $b^2+c^2=25$ і $2bc=5\cdot 4{,}8$ (площа ромба).

380. Еліпс з півосями 13 і 5 *см*. Вершини при основі трикутника служать фокусами цього еліпса.

381. Вказівка. Ми користуємося побудовою трикутника за стороною ($2c$), прилеглим кутом (φ) і сумою двох інших сторін ($2a$). Якщо кут φ змінюватиметься, вершина M опише еліпс. Повторюючи цю побудову при різних значеннях кута φ, ми можемо дістати скільки завгодно точок еліпса (рис. 124).

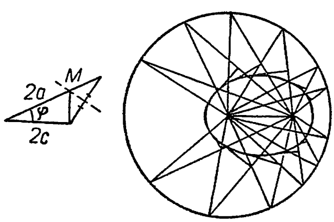

Рис. 124.

382. $cx \pm a^2=0$.

383. $x=\pm 9$.

384. $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$. **385.** a) $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $e=\frac{\sqrt{10}}{5}$; c) $e={}^1/_2$. **386.** $e\approx\approx 0{,}08$. **387.** $(\pm 5;\ \pm 2)$. **388.** $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$. Вказівка. Визначаємо параметри еліпса a^2 і b^2 з тієї умови, що координати даних точок повинні задовольняти його рівняння.

390. Точки A і E лежать на еліпсі; B і G — всередині еліпса: точки C і D— поза еліпсом. Вказівка. Див. задачу 389.

391. $A(+6;\ 0)$, $B\left(+\frac{6}{7};\ +\frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$; $C\left(+\frac{6}{7};\ -\frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$. Вказівка. Шуканий трикутник симетричний відносно великої осі. Сторона трикутника дорівнює подвоєній ординаті вершини B.

392. $M_1\left(-\frac{15}{2};\ +\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$ і $M_2\left(-\frac{15}{2};\ -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$.

393. Вершини великої осі.

394. $d=4^1/_3$. Вказівка. Визначаємо перш за все фокальні радіуси-вектори даної точки; сума їх дасть більшу вісь еліпса; далі визначаємо ексцентриситет і шукану віддаль $d_1=\frac{r_1}{e}$.

395. $M_1(+3;\ -3)$ і $M_2\left(+\frac{69}{13};\ +\frac{21}{13}\right)$.

396. $M_1M_2=\frac{2b^2}{a}$.

397. $M_1M_2=\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

398. $S=68^4/_7$ кв. од. Вказівка. Сторони всякого прямокутника, вписаного в еліпс, повинні бути паралельні його осям.

399. $a_4=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

400. $4x+9y-13=0$. Вказівка. Кутовий коефіцієнт хорди, яка проходить через дану точку $[y-1=k(x-1)]$, треба вибрати так, щоб при спільному розв'язанні її рівняння з рівнянням еліпса півсума коренів одержаного квадратного рівняння дорівнювала відповідній координаті даної точки $\left(\frac{x_1+x_2}{2}=1\text{ або }\frac{y_1+y_2}{2}=1\right)$ залежно від того, яку з координат ми будемо виключати при розв'язанні системи рівнянь.

401. $x-2y-8=0$.

402. $y=3$ і $12x+7y+51=0$. Розв'язання. Спосіб 1. Можна взяти рівняння будь-якої прямої, яка проходить через дану точку $[y-3==k(x+6)]$, і підібрати кутовий коефіцієнт так, щоб при спільному розв'язанні рівняння цієї прямої і рівняння еліпса дістати рівні корені (прирівняти підкореневе число нулеві). Спосіб 2. Можна скористатися рівнянням дотичної до еліпса $\left(\frac{xx_1}{15}+\frac{yy_1}{9}=1\right)$ і визначити координати точки дотику $(x_1,\ y_1)$ з двох умов: по-перше, дотична проходить через точку $A(-6;\ +3)$; отже, ми маємо $\frac{-6x_1}{15}+\frac{3y_1}{9}=1$, і, по-друге, точка дотику лежить на даному еліпсі, тобто $\frac{x_1^2}{15}+\frac{y_1^2}{9}=1$.

403. $2x - y \pm 12 = 0$. Вказівка. Рівняння всякої прямої, паралельної даній, має вигляд $y = 2x + b$. Треба тільки підібрати параметр b з умови дотику. (Див. перший спосіб розв'язання задачі 402). Можна скористатися рівнянням дотичної до даного еліпса $\left(\frac{xx_1}{30} + \frac{yy_1}{24} = 1\right)$, визначивши координати точки дотику з умови, що кутовий коефіцієнт повинен дорівнювати 2 $\left(\text{тобто } \frac{4x_1}{5y^1} = 2\right)$ і що точка дотику лежить на еліпсі $\left(\frac{x_1^2}{30} + \frac{y_1^2}{24} = 1\right)$. (Див. другий спосіб розв'язання задачі 402).

404. $12x - 13y \pm 169 = 0$. (Див. вказівку до задачі 403).

405. $(+5; -4)$. Вказівка. Рівняння дотичної дано: $4x - 5y - 40 = 0$; з другого боку, всяка дотична до даного еліпса зображається рівнянням $16xx_1 + 25\,yy_1 - 800 = 0$. Якщо ці два рівняння зображають одну і ту ж пряму, то коефіцієнти їх пропорціональні, тобто $\frac{16x_1}{4} = -\frac{25y_1}{5} = \frac{800}{40}$. Звідси визначаємо точки дотику. Інакше можна було б їх знайти, розв'язавши разом рівняння еліпса і його дотичної.

406. Чотири дотичних задовольняють умову задачі: $\pm 3x + 4y + 15 = 0$.

407. Вказівка. Кінці одного і того ж діаметра симетричні відносно початку координат, тобто відповідні координати їх рівні за абсолютною величиною, але мають протилежні знаки.

408. $x - y \pm 3 = 0$ і $x + y \pm 3 = 0$. Вказівка. Вершини всякого описаного навколо еліпса ромба (зокрема і квадрата) повинні лежати на осях еліпса. Крім того, сторони квадрата повинні відсікати на їх осях рівні відрізки.

409. $x \pm 5 = 0$.

411. $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

412. Задача має два розв'язання: 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $(+4; +{}^9/_5)$; 2) $\frac{16x^2}{225} + \frac{y^2}{16} = 1$; $(+{}^9/_4; +{}^{16}/_5)$. Вказівка. Для визначення параметрів еліпса зручно скористатися умовою дотикання, виведеною в задачі 411.

413. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. (Див. задачу 411).

414. $x + y \pm 3 = 0$; $x - y \pm 3 = 0$. Вказівка. Зручно застосувати ознаку дотику прямої і еліпса (див. задачу 411).

415. $2x + y \pm 5 = 0$; $2x - y \pm 5 = 0$.

418. Коло $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Розв'язання. Нехай $M(X, Y)$ буде одна з шуканих точок, коли обидві дотичні, проведені до еліпса з цієї точки, повинні бути перпендикулярні між собою. Рівняння всякої прямої, яка проходить через точку M, буде: $y - Y = k\,(x - X)$ або $kx - y + (Yx - kX) = 0$. Умова того, що ця пряма дотикається до еліпса, матиме вигляд: $k^2\,a^2 + b^2 = (Y - kX)^2$, або після перетворення: $k^2\,(a^2 - Y^2) + 2XYk + (b^2 - Y^2) = 0$. Це квадратне рівняння визначає кутові коефіцієнти обох дотичних, які проходять через точку M, але за умовою перпендикулярності цих дотичних добуток коренів вказаного квадратного рівняння повинен дорівнювати від'ємній одиниці: $k_1 \cdot k_2 = -1$ або $\frac{b^2 - Y^2}{a^2 - X^2} = -1$ (добуток коренів квадратного рівняння дорівнює вільному члену, поділеному на коефіцієнт при квадраті невідомого). Ми дістали рівняння, яке пов'язує координати шуканих точок, тобто рівняння шуканого геометричного місця. Після елементарних перетворень дістанемо остаточно $X^2 + Y^2 = a^2 + b^2$.

420. $\frac{(x - x')^2}{a^2} + \frac{(y - y')^2}{b^2} = 1$.

421. $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ або $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{(^{25}/_3)^2}=1$, залежно від того, чи збігається з віссю абсцис велика чи мала вісь еліпса.

422. $\frac{(x-7)^2}{49}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$.

423. $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{^{75}/_7}=1$.

424. $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{r\lambda}{1+\lambda}\right)^2}=1$. Вказівка. За умовою $\frac{OM}{MP}=\lambda$ (рис. 125) визначаємо ординату біля точки M, яка ділить відрізок QP у відношенні λ; ордина-

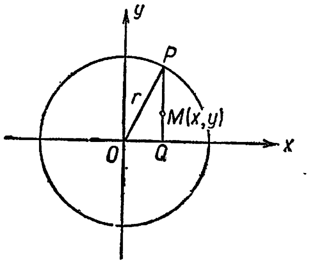

Рис. 125.

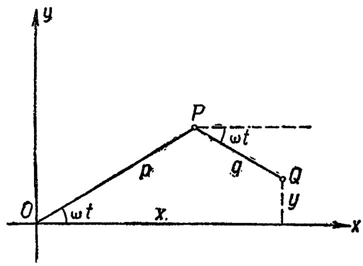

Рис. 126.

та початкової точки Q дорівнює нулеві, ординату з кінцевої точки P визначаємо з рівняння кола: $y_2=\sqrt{r^2-x^2}$; отже, $y=\frac{\lambda\sqrt{r^2-x^2}}{1+\lambda}$. Перетворивши це рівняння, дістанемо остаточно рівняння еліпса, вказане у відповіді.

425. $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{3}\right)^2}=1$.

426. $\frac{x^2}{(p+q)^2}+\frac{y^2}{(p-q)^2}=1$, тобто еліпс з півосями $p+q$ і $p-q$. Якщо $p<q$, точка Q описує еліпс, рухаючись проти годинникової стрілки; якщо $p<q$, точка Q переміщається по еліпсу в зворотному напрямі. Якщо $p=q$, то точка Q при повному оберті стержня OP опише двічі відрізок осі x завдовжки $2(p+q)$. Вказівка. Визначимо координати точки Q через t'' від початку руху. В цей час стержень p (рис. 126) буде нахилений до осі абсцис під кутом ωt, а стержень q під кутом $-\omega t$. Координати точки Q визначаться як проекції ламаної OPQ на осі координат. Шукану траєкторію ми одержимо, виключивши t з двох рівнянь, які визначають координати точки Q.

427. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ або коло $x^2+y^2=a^2$, якщо M збігається з серединою відрізка AB. Вказівка. Сторони прямого кута приймаємо за осі координат. Параметрами кривої будуть віддалі точки M від кінців відрізка AB (рис. 127), а саме: $AM=a$ і $BM=b$.

428. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, якщо через a і b позначені відрізки ковзаючого стержня від точки M до точок перетину з віссю ординат і віссю абсцис.

429. a) $l = 5$; $AM = 3$; b) $l = 5$; $AM = 4$; c) $l = 10$; $AM = 5$.

430. Еліпс з центром у точці (0; +1) і з півосями $a = \sqrt{14}$ і $b = \sqrt{7}$, напрямленими паралельно осям координат.

431. $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} + \left(y - \dfrac{b}{2}\right)^2 : \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = 1.$

432. $\dfrac{(x - {}^3/_2)^2}{({}^5/_2)^2} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$ Вказівка. Точка M (рис. 128) описує еліпс, фокусами якого служать центр круга і точка $A(+3;\ 0)$.

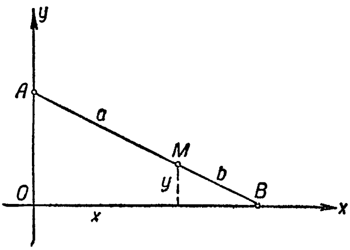

Рис. 127.

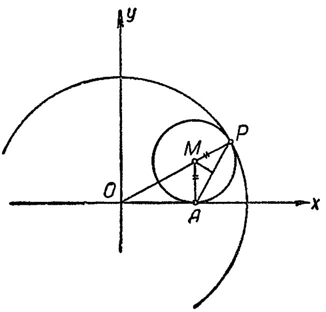

Рис. 128.

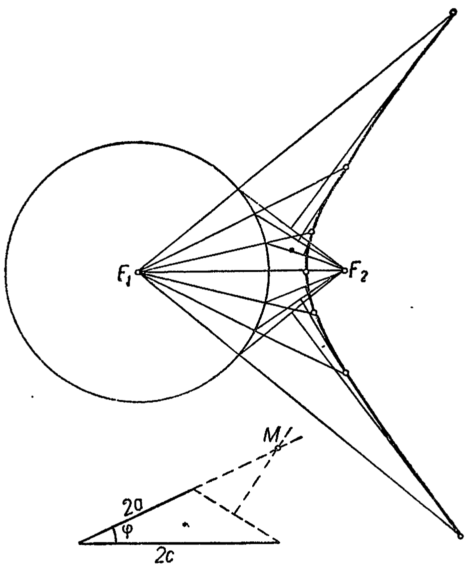

Рис. 129.

433. a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; b) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{75} = 1$; c) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{2} = 1$; d) $\dfrac{x^2}{15} - \dfrac{y^2}{6} = 1$.

434. $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1.$

435. Вказівка (рис. 129). Користуємося побудовою трикутника за основою $2c$, кутом при ньому φ і різницею двох інших сторін $2a$. Повторюючи цю побудову при різних значеннях кута φ, дістанемо точки гіперболи. Ліву вітку гіперболи ми дістанемо, прийнявши правий фокус за вершину кута, який лежить до більшої сторони трикутника.

436. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1.$

437. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{144} = 1.$

438. В к а з і в к а (рис. 130). c є гіпотенуза прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють a і b.

439. a) $F_1(+5;0)$, $F_2(-5;0)$; b) $e={}^5/_3$; c) $y=\pm{}^4/_3x$, $x=\pm{}^9/_5$;

d) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$; $e'={}^5/_4$.

439*. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$.

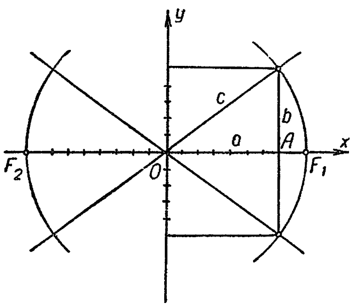

Рис. 130.

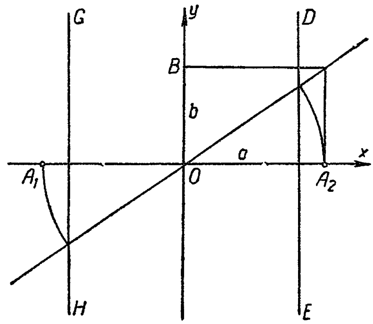

Рис. 131.

440. DE і GH є шукані директриси гіперболи (рис. 131).

440.* $\delta=b$.

441. a) $a=2\sqrt{3}$, $b=2$; b) $a=6$, $b=6$; c) $a=\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{5}$; d) $a=\frac{3\sqrt{19}}{5}$, $b=\sqrt{19}$.

442. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ і $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$.

442*. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ або $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{\frac{256}{9}}=1$.

443. a) $\alpha=120^\circ$, b) $\alpha=90^\circ$.

444. a) $e=\frac{2}{\sqrt{3}}$; b) $e=\sqrt{2}$; c) $e=\sqrt{3}$.

445. $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$.

446. $r_1=9$, $r_2=19$, $\operatorname{tg}\vartheta=\frac{28\sqrt{2}}{41}\approx 0{,}97$.

447. a) $x=\pm{}^4/_5\sqrt{34}$, $y=\pm 1{,}8$ (4 точки); b) $x=+9{,}6$ $y=\pm{}^3/_5\sqrt{119}$ (2 точки). В к а з і в к а. Якщо фокальні радіуси-вектори якої-небудь точки гіперболи перпендикулярні один до одного, то вони разом з відрізком осі, розміщеним між фокусами, утворюють прямокутний трикутник і пов'язані співвідношенням $r_1^2+r_2^2=4c^2$.

448. $e \leqslant 1+\sqrt{2}$. Розв'язання. Якщо на гіперболі існує точка, для якої $r_1 = d_2$, то для неї ж, внаслідок рівності $\frac{r^2}{d_2} = e$, матимемо $\frac{r_2}{r_1} = e$ або $\frac{ex+a}{ex-a} = e$; звідси визначаємо абсцису шуканої точки $x = \frac{a(1+e)}{e^2-e}$. Але всі дійсні точки гіперболи мають ту властивість, що їх абсциси $x \geqslant a$; отже, ми повинні мати $\frac{1+e}{e^2-e} \geqslant 1$. Розв'язуючи цю нерівність і беручи до уваги, що ексцентриситет гіперболи $e > 1$, дістанемо $e \leqslant 1+\sqrt{2}$.

449. $\delta_1 \cdot \delta_2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}$. Вказівка. Ця властивість цілком характеризує гіперболу, тобто гіперболу можна розглядати як геометричне місце точок, добуток віддалей яких від двох прямих є величина стала, і ці прямі служать асимптотами гіперболи.

450. $\left(\pm \frac{14\sqrt{3}}{3};\ \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ — чотири точки.

451. a) (+10, +2) і (—10; —2); b) пряма дотикається до гіперболи в точці (+10; —2); c) дійсних точок перетину немає; d) $\left(-\frac{15\sqrt{10}}{4};\ -\frac{9}{2}\right)$ і другої точки перетину немає, пряма паралельна одній з асимптот.

452. $x-2y-12=0$ і $x+2y+8=0$.

452.* $9x \pm 4\sqrt{34y} = 0$. Вказівка. Визначаємо координати кінців шуканого діаметра з двох умов: ці точки лежать на гіперболі і знаходяться на віддалі $20:2=10$ від центра гіперболи.

453. $3x-4y-5=0$. Вказівка. Див. задачу 400.

453*. $y = \frac{b^2}{a^2 k}\cdot x$, де k — кутовий коефіцієнт паралельних хорд.

454*. Вказівка. Див. задачі 453 і 454.

455. $\left(\pm \frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}};\ \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)$. Задача можлива, коли $b > a$.

456. $x+y=1$.

457. 1) $3x+2y=6$ і $3x-2y=6$. 2) Тільки одна дотична $3x+2y+6=0$, бо точка (—4; +3) лежить на гіперболі. 3) Дійсних дотичних провести до гіперболи через точку (+5; —1) не можна, бо ця точка лежить всередині гіперболи.

458. a) $x+y+3=0$ і $x+y-3=0$; b) дійсних дотичних в цьому напрямі немає; c) $2x+y+\sqrt{54}=0$ і $2x+y-\sqrt{54}=0$.

459. $|k| \geqslant \frac{b}{a}$.

460. $\left(+\frac{8\sqrt{5}}{5};\ +\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)$ і $\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5};\ -\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)$. Вказівка. Кутовий коефіцієнт всякої дотичної до гіперболи має вигляд: $k = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}$. У даному випадку ми маємо $\frac{9x'}{8y'} = \sqrt{3}$. З цього рівняння і з рівняння гіперболи визначаємо координати точки дотику.

461. $8x+\sqrt{11y}-20=0$ і $8x-\sqrt{11y}-20=0$.

462. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$.

463. $A^2a^2-B^2b^2=C^2$.

464. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. Вказівка. Невідомі параметри гіперболи a і b найпростіше визначити, скориставшись даним кутовим коефіцієнтом асимптоти: $b:a={}^1/_2$ і умовою дотику гіперболи і даної прямої: $25a^2-36b^2=64$. (Див. задачу 463).

465. $x^2+y^2=a^2-b^2$. У випадку рівносторонньої гіперболи $a=b$ і шукане геометричне місце точок зводиться до однієї лише точки — центра гіперболи. Якщо $a<b$, то у гіперболи немає і однієї пари перпендикулярних одна до одної дотичних. (Див. задачі 418 і 459).

466. $\pm cx\pm ay=a^2$; $\left(\pm c;\ \pm\frac{b^2}{a}\right)$.

467. Вказівка. Співфокусні криві можуть бути подані такими двома рівняннями: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$ і $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2-c^2}=1$.

468. $\delta_1\cdot\delta_2=-b^2$. Вказівка. Знак мінус у шуканого добутку пояснюється тим, що фокуси гіперболи знаходяться по різні сторони від будь-якої її дотичної.

470. $S=\frac{c^2\sin\varphi}{2}$; φ — кут між асимптотами.

470*. $(1+\lambda)^2\cdot x\cdot y=2\lambda S$ рівняння гіперболи, асимптоти якої збігаються з осями координат.

471. $\frac{(x-x_1)^2}{a^2}-\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1$.

472. a) $\frac{(x-1)^2}{5^2}-\frac{(y+2)^2}{3^2}=1$; $x_1=+1$; $y_1=-2$; $a=5$ і $b=3$;

b) $\frac{(x+1)^2}{6}-\frac{(y+1)^2}{5}=1$; $x_1=-1$; $y_1=-1$; $a=\sqrt{6}$ і $b=\sqrt{5}$;

c) $\frac{(x+3)^2}{4}-y^2=1$; $x_1=-3$; $y_1=0$; $a=2$ і $b=1$. Вказівка. Члени, які мають x, і члени, які мають y, доповнюємо до повних квадратів і, перенісши вільний член направо, ділимо на нього всі члени рівняння.

473. $\frac{(x+15)^2}{9^2}-\frac{y^2}{12^2}=1$. Вказівка. В даному випадку зручно користуватися довжиною фокальної хорди, перпендикулярної до дійсної осі: $l=\frac{2b^2}{a}$.

474. $$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$$

475. $$\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1.$$

476. Рівностороння гіпербола, вершини якої збігаються з точками A і B. Р о з в'я з а н н я. Визначаємо ординату твірної точки M з двох трикутників AMN і BMN (рис. 132): $y = (x + a) + 9\varphi$ і $y = (x - a) \operatorname{ctg} \varphi$. З цих двох рів-

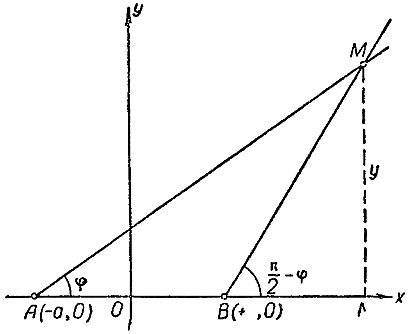

Рис. 132.

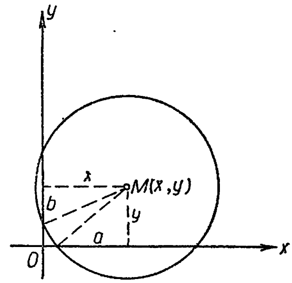

Рис. 133.

нянь виключаємо параметр φ (найпростіше перемножити обоє рівнянь) і тоді дістанемо рівняння шуканого геометричного місця: $x^2 - y^2 = a^2$.

477. Директриса гіперболи, відповідна тому фокусу, з якого проведені перпендикуляри.

478. Рівностороння гіпербола $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ (рис. 133).

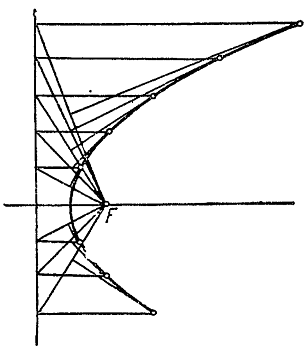

Рис. 134.

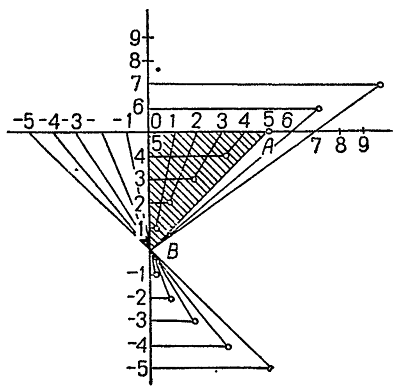

Рис. 135.

479. В к а з і в к а. Центр кола і дана зовнішня точка служать фокусами гіперболи. Радіус даного кола дорівнює дійсній осі гіперболи. (Див. задачу 432).

480. a) $y^2 = 12x$; b) $y^2 = 10x - 25$; c) $y^2 = 16x$; d) $x^2 = 8y$; e) $x^2 = -18y$.

481. $A(+18;\ +12)$ і $B(+18;\ -12)$.

482. $OM = 10$.

483. В к а з і в к а. Ми шукаємо точки параболи на прямих, паралельних її осі (рис. 134).

484. Парабола $y^2 = \dfrac{a^2}{b} x$.

485. Для зазначеної побудови можна скористатися різними прямокутними трикутниками, наприклад рівнобедреними з катетами $a = b = 5$ або трикут-

ником з катетами $a = 10$ і $b = 20$; $a = 15$ і $b = 45$ і т. д., аби тільки $\frac{a^2}{b} = 5$. Візьмемо перший з цих трикутників; тоді для одержання точок параболи поза трикутником продовжуємо обидва катети в обидва боки і продовжуємо наносити на них рівні поділки; точки поділу нумеруємо, як вказано на рис. 135.

486. Якщо точка (x_1, y_1) належить зовнішній області, то ми маємо $y^2_1 - 2px_1 > 0$. Якщо точка (x_1, y_1) належить внутрішній області, то $y^2_1 - 2px_1 < 0$. Якщо точка (x_1, y_1) лежить на параболі, то її координати задовольняють рівняння $y^2_1 - 2px_1 = 0$.

487. $a_3 = 4p\sqrt{3}$. Вказівка. Трикутник розміщений симетрично відносно осі параболи; одна з вершин його збігається з вершиною параболи, а протилежна сторона перпендикулярна до осі параболи.

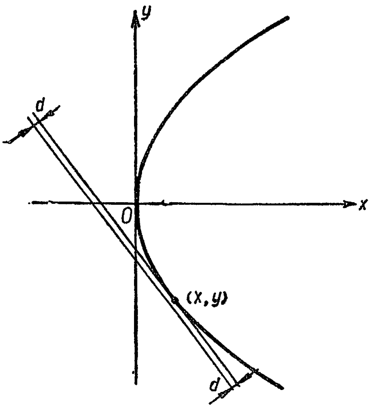

Рис. 136.

488. a) $(+2; -6)$ і $(+{}^1/_2; +3)$; b) пряма дотикається до параболи в точці $(+{}^2/_9; +2)$; c) дійсних точок перетину немає; d) $(+{}^1/_2; +3)$; пряма паралельна осі симетрії.

489. $(+{}^5/_4; +\sqrt{15})$, $(+{}^5/_4; -\sqrt{15})$ і дві уявні точки перетину.

490. $x - 2 = 0$.

491. $l = 2p$.

491*. $x - 10 = 0$; $2x - y\sqrt{5} = 0$; $2x + y\sqrt{5} = 0$.

492. $2x - y - 3 = 0$. Вказівка. Див. задачу 400.

493. $x + y + 2 = 0$ і $2x + 5y + 25 = 0$.

494. $(+9; -6)$. Вказівка. Визначаємо координати точки дотику з умови пропорціональності коефіцієнтів у рівнянні даної прямої $x + 3y + 9 = 0$ і в рівнянні дотичної до параболи $yy_1 = 2(x + x_1)$ або $2x - y_1y + 2x_1 = 0$.

496. a) $x + y + 3 = 0$ в точці $(+3; -6)$ і $x - y + 3 = 0$ в точці $(+3; +6)$; b) $y = 3x + 1$; c) $x - 2y + 12 = 0$; d) $3x + y + 1 = 0$. 497. $p = 2bk$.

498. $|d| = 2$. Вказівка. Якщо пряма не перетинає параболи, то найкоротша віддаль параболи від прямої буде віддаль від прямої тієї точки параболи, в якій дотична паралельна даній прямій (рис. 136).

499. $p = {}^5/_2$. Вказівка. Виражаємо координати точки дотику через невідомий параметр p (див. задачу 494) і вставляємо їх у рівняння параболи. Можна також скористатися результатом задачі 497.

500. $x + 3y + 15 = 0$ і $x - 3y + 15 = 0$. Вказівка. Значення параметрів шуканої прямої зручно обчислюються з умови дотику прямої і кривої. (Див. задачі 497 і 411).

500*. $S_1 : S_2 = 2$. Площа вписаного в параболу трикутника вдвоє більша площі відповідного описаного трикутника.

503. Директриса параболи $x = -\frac{p}{2}$.

504. a) $(y - b)^2 = 2p(x - a)$; b) $(y - b)^2 = -2p(x - a)$; c) $(x - a)^2 = 2p(y - b)$; d) $(x - a)^2 = -2p(y - b)$. Розв'язання. a) Переносимо початок координат у точку (a, b), не змінюючи напряму осей (рис. 137). Тоді в новій схемі координат рівняння параболи буде $y'^2 = 2px'$. Переходимо назад до попередньої системи, за формулами перетворення координат: $x' = x - a$, $y' = y - b$. Рівняння параболи матиме вигляд: $(y - b)^2 = 2p(x - a)$. Це і є шукане рівняння.

505. a) $A = 0$ і $B = 0$; b) $C = 0$ і $B = 0$.

506. a) $(-2;\ +1)$; $p=5$; вісь паралельна осі x; b) $(0;\ 7)$; $p=3$; вісь паралельна осі x; c) $(+2;\ 0)$; $p=-4$; напрям осі збігається з від'ємним напрямом осі x; d) $(+3;\ +5)$; $p=2$; вісь параболи паралельна осі y; e) $\left(-\frac{B}{2A};\ \frac{4AC-B^2}{4A}\right)$; $p=\frac{1}{2A}$; вісь параболи паралельна осі y; f) $(+4;\ -1)$; $p={}^1/_2$; вісь паралельна осі y g) $(-3;\ -9)$; $p={}^1/_2$; вісь паралельна осі y. Вказівка. Заздалегідь перетворити дані рівняння і звести їх до того типу рівнянь, який розглянутий у задачі 504.

507. Вказівка. Взявши спільну вісь парабол за вісь абсцис і вмістивши початок координат в спільному фокусі, дістанемо для розглядуваних парабол такі рівняння: $y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$ і $y^2=-2q\left(x-\frac{q}{2}\right)$. Далі визначаємо точки перетину цих парабол, дотичні в знайдених точках і впевнимося в

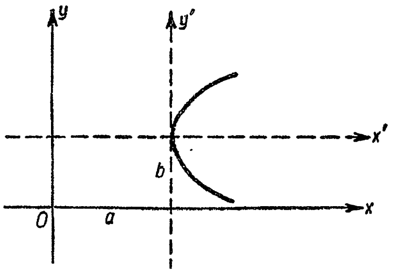

Рис. 137.

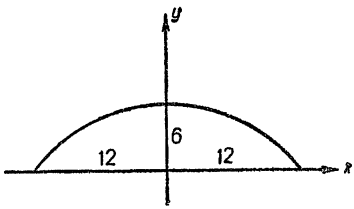

Рис. 138.

перпендикулярності дотичних, проведених до обох парабол у спільних їх точках.

508. $\frac{x}{a}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Порівняти з рівнянням прямої відносно відрізків. Вказівка. Оскільки вісь параболи збігається з віссю x і вершина розміщена в точці $(+a;\ 0)$, то рівняння параболи матиме вигляд: $y^2=2p\,(x-a)$ (див. задачу 504). Для визначення параметра p скористаємося тим, що парабола проходить через точку $(0;\ \pm b)$.

509. $-\frac{x}{5}+\frac{y^2}{36}=1$. (Див. задачу 508). **510.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b}=1$.

511. $p=-12$. Вказівка (рис. 138). Скористаємося рівнянням параболи відносно відрізків, які вона відсікає на осях координат (див. задачу 510).

512. $|p|=2{}^2/_3$. **513.** $h=5$ *м*. **514.** $y^2=\frac{p}{2}x$.

515. Парабола з вершиною в фокусі даної параболи і з параметром вдвоє меншим.

516. Пряма обертається біля точки $(2p;\ 0)$.

517. Парабола, дана точка якої є фокусом і дана пряма — директрисою.

518. Дві параболи: $y^2=\pm 2x+1$.

519. a) $\rho=a$; b) $\rho=2a\cdot\cos\varphi$; c) $\rho^2-2\rho_1\rho\cos(\varphi-\varphi_1)=a^2-\rho_1^2$.

520. $\rho^2=\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\varphi}$.

521. $\varphi=\arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$.

522. a) $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$; b) $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$, де величина $p = \frac{b^2}{a}$ називається параметром еліпса.

523. $a = 2\sqrt{2}$; $b = \sqrt{6}$; $2c = 2\sqrt{2}$. 524. $\rho^2 = \frac{-b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}$.

525. $\theta = \frac{2\pi}{3}$, якщо через θ позначено один з тих кутів, всередині яких розміщена гіпербола.

526. $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$, де $p = \frac{b^2}{a}$.

527. Рівняння асимптот: $\rho = \frac{2}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$ і $\rho = \frac{2}{\sin\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right)}$; рівняння директрис: $\rho = -\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}$ і $\rho = -\frac{3\sqrt{2}}{\cos\varphi}$. 528. $\rho = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

529. $M\ (3;\ \arccos{}^1/_3)$ — дві точки, симетричні відносно полярної осі.

530. $\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$. 531. a) $\left(\frac{p}{2};\ \pi\right)$ — вершина параболи; b) дві точки $\left(p;\ \frac{\pi}{2}\right)$ і $\left(p;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

532. $|\delta_1\delta_2| = p^2$. 533. a) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; b) $y^2 = \frac{2}{3}x$; c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; d) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

534. $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$. Вказівка. Беремо загальне рівняння кривої другого порядку: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. Якщо воно зображає шукану криву, то його повинні задовольняти координати даних точок. Вставляючи в загальне рівняння координати кожної з даних точок, дістанемо п'ять умов, які пов'язують коефіцієнти a_{ik}. З цих співвідношень визначаємо відношення п'яти коефіцієнтів до шостого і вставляємо їх у загальне рівняння, заздалегідь поділене на цей шостий коефіцієнт.

535. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y = 0$.

536. Умову задачі задовольняють дві криві параболічного типу: $x^2 - 8x - y + 15 = 0$ і $9x^2 + 6xy + y^2 - 72x - 24y + 135 = 0$.

537. $x^2 - 4xy + 3y^2 - 4y = 0$.

538. $xy + 15 = 0$.

539. $x^2 - 8y = 0$.

540. 1) $(+7;\ +5)$; 2) $(-1;\ -1)$; 3) $(0;\ +1)$; 4) центра немає; крива параболічного типу; 5) крива має цілу лінію центрів: $x + y + 1 = 0$; 6) $\left(+\frac{10}{3};\ +\frac{4}{3}\right)$; 7) $\left(+\frac{3}{4};\ -\frac{5}{4}\right)$; 8) лінія центрів: $x + 3y + 2 = 0$; 9) центра немає, крива параболічного типу; 10) лінія центрів: $x - 2y + 5 = 0$.

541. Рівняння являє собою центральну криву, якщо тільки $a \neq 9$. Рівняння являє собою криву параболічного типу, якщо $a = 9$ і $b \neq 9$. Крива має лінію центрів: $2x + 6y + 3 = 0$, якщо одночасно $a = 9$ і $b = 9$. Вказівка. Задача зводиться до дослідження тієї системи двох рівнянь $\left\{\begin{array}{l} 2x + 6y + 3 = 0 \\ 6x + 2ay + b = 0 \end{array}\right\}$,

з якої визначаються координати центра. Відповідь залежить від того, чи буде ця система означена, суперечлива, неозначена.

542. Криві a), b), c) мають центр на початку координат: крива d) має лінію центрів: $3x - 2y = 0$; крива e) має центр на початку координат, якщо $\delta \neq 0$, і має лінію центрів $a_{11}x + a_{12}y = 0$, якщо $\delta = 0$.

543. $2x^2 - 6xy + 5y^2 - 11 = 0$. В к а з і в к а. Зручно скористатися рівнянням кривої, віднесеної до центра: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0$. Нам треба буде залишити старші члени без зміни $(2x^2 - 6xy + 5y^2)$, відкинути члени першого степеня, а для знаходження вільного члена досить обчислити обидва дискримінанти: $\Delta = -11$ і $\delta = 1$.

544. a) $7x^2 + 4xy + 4y^2 - 83 = 0$; b) $x^2 - 2xy + 4 = 0$; c) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 40 = 0$.

545. $a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 + a_{33} = 0$. В к а з і в к а. Скористатися рівнянням кривої, віднесеної до центра (7), і зробити зворотний перехід до початкової системи координат.

546. $5x^2 - 5xy + 2y^2 - 5x - 2y = 0$.

547. Пряма лінія $3x + y = 0$. В к а з і в к а. Скласти рівняння для визначення координат центра; виключивши з них параметр a, дістанемо рівняння шуканого геометричного місця.

548. $4x^2 - 8xy - 2y^2 + 9y - 4 = 0$. В к а з і в к а. Через дані чотири точки проходить безліч кривих ліній; всі вони зображаються рівнянням:

$$2x^2 - 4\lambda xy + (4\lambda + 1)y^2 - 4x - (4\lambda + 1)\,y = 0,$$

де λ — змінний параметр.

549. a) еліпс ($\Delta \neq 0$; $\delta > 0$); b) гіпербола ($\Delta \neq 0$; $\delta < 0$); c) парабола ($\Delta \neq 0$; $\delta = 0$); d) уявні прямі, які перетинаються у дійсній точці $(+7; +5)$; ($\Delta = 0$; $\delta > 0$); e) пара дійсних прямих ($\Delta = 0$; $\delta < 0$), що перетинаються.

550. 1) Гіпербола ($\Delta = 16$; $\delta = -8$); 2) еліпс ($\Delta = -64$; $\delta = 8$); 3) пара дійсних прямих ($\Delta = 0$; $\delta = -1$), що перетинаються; 4) пара дійсних прямих $\left(\Delta = 0;\ \delta = -\dfrac{81}{4}\right)$, що перетинаються; 5) гіпербола $\left(\Delta = -\dfrac{1}{4};\ \delta = -\dfrac{5}{4}\right)$; 6) еліпс ($\Delta = -13$; $\delta = 1$); у випадку прямокутної системи координат це рівняння зображає коло; 7) парабола ($\Delta = -4a^2$; $\delta = 0$); 8) парабола ($\Delta = -1$; $\delta = 0$); 9) парабола ($\Delta = -32$; $\delta = 0$); 10) пара дійсних паралельних прямих ($\Delta = 0$; $\delta = 0$); прямі не зливаються, тому що існують мінори дискримінанта, наприклад: $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, які не дорівнюють нулеві; 11) пара прямих ($\Delta=0$; $\delta = 0$, що зливаються, і всі мінори другого порядку дискримінанта Δ дорівнюють нулеві).

551. a) Дві прямі, паралельні осям координат: $x - a = 0$ і $y - b = 0$; b) вісь ординат $x = 0$ і пряма $x - 2y + 5 = 0$; c) двічі взята пряма $x - 2y = 0$; d) двічі взята пряма $3x + 5y = 0$; e) дві паралельні прямі: $2x - 3y + 5 = 0$ і $2x - 3y - 5 = 0$.

553. a) $3x - 2y = 0$ і $7x + 5y = 0$; b) $x + y + 1 + \sqrt{5} = 0$ і $x + y + 1 - \sqrt{5} = 0$; c) $y - 5x = 0$ і $x + y - 1 = 0$; d) $2x - y + 3 = 0$; прямі зливаються.

555. a) Пара прямих $x - y = 0$ і $2x + 5y = 0$; b) двічі взята пряма $x + 2y = 0$; c) пара прямих $5x - y - 0$ і $2x - y = 0$; d) пара уявних прямих, які перетинаються на початку координат.

556. a) $a = 0$; b) $a = -{}^1/_2$. В к а з і в к а. Знаходимо значення дискримінантів: $\Delta = -\dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{4}$ і $\delta = 2a$. У першому випадку $\delta = 0$, в другому випадку $\Delta = 0$.

557. a) $a_1 = \frac{5}{3}$ і $a_2 = \frac{5}{4}$; b) $a_1 = 1$ і $a_2 = -1$.

558. Однорідне рівняння другого степеня $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$, бо вільний член $\frac{\Delta}{\delta} = 0$.

558*. $a_{33} = -5$.

559. $a = 4$; $b = -3$.

560. Рівняння зображає еліпс при будь-якому значенні $\lambda > 1$; воно зображає параболу при єдиному значенні $\lambda = 1$; при всіх значеннях $\lambda < 1$ рівняння зображає гіперболу; зокрема, коли $\lambda = -24$, гіпербола розпадається на дві прямі, що перетинаються; $x - 6y - 3 = 0$ і $x + 4y - 1 = 0$.

561. При всіх значеннях параметра λ рівняння зображає гіперболу; тільки при двох значеннях $\lambda_1 = 5$ і $\lambda_2 = -12{,}5$ гіперболи вироджуються в пари дійсних прямих, що перетинаються.

562. Задача неозначена, бо чотири останні точки лежать на одній прямій $x + 2y - 6 = 0$, і, отже, шукана крива розпадається на цю пряму і пряму, яка проходить через початок координат. Ввівши позначення $\frac{a_{11}}{a_{22}} = \lambda$, ми можемо шукану криву подати таким рівнянням:

$$2\lambda x^2 + (4\lambda + 1)\,xy + 2y^2 - 12\lambda x - 6y = 0$$

або $(x + 2y - 6)(2\lambda x + y) = 0$.

563. $(+5;\ 0)$; $(+2;\ 0)$ і $(0;\ +5)$; $(0;\ +1)$.

564. a) Крива дотикається до осі абсцис у точці $(+2;\ 0)$ і перетинає вісь ординат лише в одній точці $(0;\ +4)$; (вісь абсцис перетинає криву в точках $(+3;\ 0)$ і $(+1;\ 0)$; b) вісь ординат паралельна осі цієї параболи і перетинає її лише в одній точці $(0;\ +3)$; c) крива проходить через початок координат і в початку координат дотикається до осі абсцис; вісь ординат вона перетинає в початку координат і в точці $(0;\ +2)$.

565. $l = 2$.

566. При $\lambda = \pm 5$ крива відсікає на осі ординат хорду, рівну 3; при $\lambda = \pm 4$ крива дотикається до осі ординат. В к а з і в к а. Задача зводиться до дослідження квадратного рівняння $y^2 + \lambda y + 4 = 0$, яке дістанемо з рівняння кривої, поклавши $x = 0$. Для виконання першої умови потрібно, щоб різниця коренів цього квадратного рівняння $y_2 - y_1 = 3$. Для виконання другої умови потрібно, щоб $y_2 = y_1$.

567. a) $(+1;\ 0)$ і $\left(+\frac{1}{2};\ -\frac{5}{2}\right)$; b) точки перетину уявні; c) пряма дотикається до кривої в точці $(+1;\ 0)$; d) $\left(+\frac{1}{2};\ \ +\frac{1}{6}\right)$, пряма перетинає криву лише в одній точці.

568. $5x + 8y - 24 = 0$; $5x - 8y - 8 = 0$; $x - 4y - 2 = 0$ і $x + 4y - 3 = 0$.

569. $7x + 4y + 10 = 0$ в точці $(-2;\ +1)$ і $3x - 4y + 18 = 0$ в точці $(-2;\ +3)$.

570. $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{a^2} = 1$; $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$; $yy_1 = p(x + x_1)$; $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 2$.

571. $2x + 5y = 0$ і $2x + y = 0$. В к а з і в к а. Визначаємо координати точки дотику з двох умов: 1) оскільки дотична проходить через початок координат, то вільний член в її рівнянні повинен дорівнювати нулеві, тобто $a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33} = 0$, або в нашому випадку: $2x' + \frac{5}{2}y' + 1 = 0$; 2) координати точки дотику задовольняють рівняння даної кривої.

572. $7x - 2y - 13 = 0$; $x - 3 = 0$.

573. a) Точка $(-2;\ +1)$ лежить на даній кривій, а тому через неї можна провести тільки одну дотичну, рівняння якої $7x + 4y + 10 = 0$; b) дане рівняння

зображає криву, яка розпалася і складається з двох прямих, що перетинаються в точці $(+3;\ -3)$. Всі дотичні до цієї кривої, тобто всі прямі, які зустрічають її в двох точках, що злилися, повинні проходити через точку $(+3;\ -3)$; отже, через всяку точку можна провести тільки одну дотичну до даної кривої; виняток становить тільки точка $(+3;\ -3)$, через яку проходить безліч дотичних. Єдина дотична, яка проходить через точку $(-2;\ +1)$, має рівняння $4x + 5y + 3 = 0$.

574. $y + 4 = 0$ і $3y - 4 = 0$. В к а з і в к а. Координати точки дотику визначаємо з рівнянь: $F_{x'} = 0$ (в рівнянні дотичної, паралельної до осі x, коефіцієнт при абсцисі дорівнює нулеві) і $2F' = 0$ (координати точки дотику задовольняють рівняння кривої).

576. $25x^2 \pm 30xy + 9y^2 - 150x - 90y + 225 = 0$ (дві параболи).

577. $6x^2 + 3xy - y^2 + 2x - y = 0$. В к а з і в к а. Оскільки шукана крива проходить через початок координат, то вільний член її рівняння дорівнює нулеві $(a_{33} = 0)$. З умови дотикання кривої і прямої $4x + 3y + 2 = 0$ в точці $(+1;\ -2)$ виходить:

$$\frac{a_{11} - 2a_{12} + a_{13}}{4} = \frac{a_{21} - 2a_{22} + a_{23}}{3} = \frac{a_{31} - 2a_{32}}{2}.$$

Нарешті, з тієї умови, що крива дотикається до прямої $x - y - 1 = 0$ в точці $(0;\ -1)$, випливає $\frac{-a_{12} + a_{13}}{1} = \frac{-a_{22} + a_{23}}{-1} = \frac{-a_{23}}{-1}$. З цих п'яти рівнянь визначаємо відношення коефіцієнтів шуканого рівняння.

578. $y = 2x$ і $y = -3x$ В к а з і в к а. Кутові коефіцієнти шуканих прямих визначаються з рівняння: $a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$.

579. $3x - y - 6 = 0$ і $x - 2y - 2 - 0$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

580. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. В к а з і в к а. Дане рівняння зображає параболу; всі зазначені прямі паралельні осі симетрії і, отже, паралельні між собою.

581. $\lambda = \frac{3}{4}$.

582. a) $2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ $(k_1 = 0;\ a_{11} = 0)$; b) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ $(k_1 = \infty;\ a_{22} = 0)$; c) $2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ $(k_1 = 0$ і $k_2 = \infty;\ a_{11} = 0$ і $a_{22} = 0)$.

583. a) $a_{11} = a_{13} = 0$; b) $a_{22} = a_{23} = 0$; c) $a_{11} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0$.

584. $6x^2 - xy - 2y^2 + 4y = 0$.

585. $xy + 4x + 6y = 0$.

586. $2x_2 - xy - 3y^2 - x - 6y - 15 = 0$.

586*. $x^2 - 4y^2 - 2x + 4y = 0$, тобто крива другого порядку, яка розпалася на дві дійсні прямі, що перетинаються: $x - 2y = 0$ і $x + 2y - 2 = 0$. В к а з і в к а. Дані умови задачі задовольняє безліч кривих; всі вони зображаються рівнянням: $x^2 + 2\lambda xy + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ при різних значеннях параметра λ. Далі розв'язуємо згідно вказівки до задачі 547.

588. $x + 2y + 3 = 0$ і $7x - 5y + 2 = 0$.

589. $y - 1 = 0$ і $4x + 5y + 3 = 0$.

590. $x - 1 = 0$ і $x - 2y + 3 = 0$.

591. $x + 1 = 0$.

592. $2x - y - 8 = 0$.

593. $49x - 49y + 44 = 0$.

594. a) $6x + 7y + 4 = 0$; b) $7x + 10y + 5 = 0$; c) $x + 3y + 1 = 0$.

595. $17x - 4y - 4 = 0$. В к а з і в к а. Шуканий діаметр спряжений з хордами, паралельними даній прямій.

596. $(-3;\ +5)$. В к а з і в к а. Шукану точку ми знаходимо як точку перетину даної прямої і спряженого з нею діаметра.

597. Умову задачі задовольняють дві пари спряжених діаметрів: $6x - 2y + 11 = 0$ і $3x - y - 7 = 0$ або $2y - 5 = 0$ і $3x - 3y - 2 = 0$.

Вказівка. Кутові коефіцієнти шуканих діаметрів визначаються з двох рівнянь: $3 - 3(k + k_1) + 5kk_1 = 0$ (умова спряженості відносно даної кривої) і $\frac{k - k_1}{1 + kk_1} = 1$ $\left(\text{кут між діаметрами дорівнює } \frac{\pi}{4}\right)$.

598. a) $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$; b) $kk' = \frac{b^2}{a^2}$.

599. $2x - y - 5 = 0$.

600. $k_1 = {}^3/_2$; $k_2 = -{}^5/_{12}$; $a'^2 = {}^{130}/_{23}$; $b'^2 = {}^{169}/_{23}$, де a' і b' означають довжину шуканих півдіаметрів.

601. $\varphi = 120°$. 602. $2a' = 4\sqrt{2}$; $2b^1 = 2\sqrt{5}$.

603. $2a = 22$; $2b = 6$. **Вказівка.** Користуємося теоремами Аполлонія.

604. $\varphi = \arcsin{}^1/_7$. **Вказівка.** Для гіперболи мають місце такі співвідношення між півосями (a, b) і спряженими півдіаметрами (a', b'): $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$ і $ab = a'b' \sin\varphi$. (Порівняти з теоремами Аполлонія для еліпса, наведеними в задачі 602).

605. $y = 2x$ і $y = {}^1/_3x$ або $y = -2x$ і $y = -{}^1/_3x$. (Див. задачу 597).

606. a) $x - 3y = 0$; b) $x - 3y - 6 = 0$; c) $3x - 9y - 7 = 0$; d) $5x - 15y - 8 = 0$ і $5x - 15y - 19 = 0$; e) $10x - 30y - 27 = 0$.

607. $y - p = 0$.

608. $x - 12 = 0$.

609. a) $2x + 2y + 1 = 0$ і $x - y + 2 = 0$; b) $28x + 21y + 4 = 0$ і $33x - 44y - 6 = 0$; c) $x + y = 0$ і $x - y = 0$. **Вказівка.** Кутові коефіцієнти головних осей можуть бути визначені з такого рівняння: $a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$. Вставляючи кутовий коефіцієнт однієї з осей у загальне рівняння діаметра $F_x + kF_y = 0$, дістанемо рівняння другої (спряженої з нею) осі.

610. Головні осі кривої, яка розпалася на дві прямі, що перетинаються, збігаються з бісектрисами кутів, утворених цими прямими.

612. a) $x + 2y - 1 = 0$; b) $39x - 26y - 12 = 0$; $(+{}^{18}/_{169}; -{}^{51}/_{169})$; c) $y - 1 = 0$; $(-1; +1)$.

613. $5x + 5y + 2 = 0$. **Вказівка.** Перша крива — центральна, рівняння пучка її діаметрів таке: $2x - y - 1 - k(x + 2y + 1) = 0$, друга — з даних кривих парабола; кутовий коефіцієнт всіх її діаметрів $k_1 = -\frac{\alpha}{\beta} = -1$. Щоб знайти спільний діаметр цих двох кривих, досить знайти той діаметр вищенаведеного пучка, який має кутовий коефіцієнт, рівний -1.

615. $19x^2 - 56xy + 43y^2 - 6 = 0$.

616. a) Початок координат збігається з центром кривої; b) вісь абсцис збігається з одним з діаметрів кривої, а вісь ординат паралельна спряженому діаметру; c) осі координат паралельні двом спряженим діаметрам, і крива проходить через початок координат; d) осі координат збігаються з двома спряженими діаметрами; e) вісь ординат збігається з одним з діаметрів, а вісь абсцис паралельна спряженому діаметру; f) осі координат паралельні двом спряженим діаметрам.

617. $10x^2 - 5y^2 - 1 = 0$. **Вказівка.** Переносимо початок координат в центр кривої; тоді рівняння її буде: $2x^2 - 12xy - 7y^2 + 1 = 0$. Потім знаходимо напрям головних осей кривої з рівняння $a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$, яке в нашому випадку буде: $2k^2 - 3k - 2 = 0$. Визначивши $k_1 = 2$ і $k_2 = -{}^1/_2$, достатньо буде повернути осі координат на кут $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 2$, щоб сумістити їх з головними осями кривої. Відповідні формули перетворення координат будуть $x = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}$ і $y = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}$. Користуючись ними, ми перетворимо рівняння кривої, віднесеної до центра, і шукане рівняння кривої, віднесеної до головних осей.

618. a) $5x^2 + 10y^2 = 1$; b) $13y^2 - 52x^2 = 1$; c) $2x^2 - 2y^2 = 1$; d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; e) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. 619. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. Вказівка. Оскільки центр кривої збігається з початком координат, то для розв'язання задачі досить змінити напрям осей. Визначаючи кутові коефіцієнти головних напрямів, обчислюючи за знайденими кутовими коефіцієнтами кути нахилу головних осей до осі абсцис і складаючи формули перетворення координат, ми повинні пам'ятати, що початкова система координат—косокутна $\left(\omega = \frac{\pi}{3}\right)$. Остаточний вигляд формул перетворення такий:

$$x = \frac{x' - y'\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ і } y = \frac{x' + y'\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

620. a) Еліпс $8/3x^2 + 4y^2 = 1$; b) коло $x^2 + y^2 = 16$. Вказівка. В задачі b) головні напрями неозначені; за головні осі можна вибрати будь-які взаємно перпендикулярні діаметри.

621. a) Парабола проходить через початок координат; b) вісь ординат паралельна осі параболи; c) вісь ординат збігається з діаметром, спряженим з хордами, паралельним осі абсцис; d) початок координат лежить на параболі, вісь ординат збігається з діаметром, який проходить через цю точку параболи, а вісь абсцис— з дотичною, проведеною в кінці діаметра; e) вісь абсцис збігається з діаметром, спряженим з хордами, паралельними осі ординат.

622. $y^2 = 2x$. Вказівка. Знаходимо кутовий коефіцієнт головної осі: $k = -\frac{\alpha}{\beta} = -{}^3/_4$. Рівняння головної осі дістанемо з рівняння пуску діаметрів: $9x + 12y - 20 + k'(12x + 16y + 15) = 0$, якщо припустити $k' = -\frac{1}{k} = {}^4/_3$. Розв'язуючи спільно рівняння параболи і рівняння головної осі, переконуємося, що вершина параболи збігається з початком координат, тому для приведення рівняння до найпростішого вигляду досить повернути осі координат на кут $\alpha \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$. Відповідні формули перетворення координат будуть: $x = \frac{4x' + 3y'}{5}$, $y = \frac{-3x' + 4y'}{5}$.

623. a) $y^2 = 2\sqrt{2}x$; b) $y^2 = 6x$; c) $y^2 = {}^3/_4x$. Вказівка. a) Знаходимо рівняння головної осі: $x + y - 2 = 0$; визначаємо вершину $(+1; +1)$. Після перенесення початку координат у вершину рівняння параболи буде: $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y = 0$. Дальніше перетворення полягає в повороті осей; відповідні формули $x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}$. Приклади b) і c) розв'язуються за тим же планом, але береться до уваги, що початкова система координат — косокутна.

624. a) $y^2 = x^2 + \sqrt{2}x$; b) $x^2 + 2y^2 - 8x = 0$; c) $y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$. Вказівка. a) Дана крива — гіпербола. Її головні осі мають рівняння: $x + y + 1 = 0$ і $x - y - 2 = 0$. На другій осі маємо дві дійсні вершини $(0; -2)$ і $(+1; -1)$. Переносимо початок координат у другу з цих вершин і повертаємо осі координат на кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

625. a) $6x - 2y + 19 = 0$ і $2x + 2y - 1 = 0$; b) $6x + 14y + 11 = 0$ і $2x + 2y - 1 = 0$; c) $5y + 3 = 0$ і $25x - 5y + 13 = 0$; d) $2x - 3y + 1 = 0$

і $x - 1 = 0$. Вказівка. Рівняння асимптоти кривої ми дістанемо з рівняння пучка її діаметрів $F_x + kF_y = 0$, вставляючи замість кутового коефіцієнта спряжених хорд (k) кутовий коефіцієнт самої асимптоти, визначеної з рівняння $a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$.

626. $2x - y + 5 = 0$ і $x + 2y - 1 = 0$ (при всіх значеннях λ).

627. Вказівка. Пропорціональність коефіцієнтів при старших членах випливає з умови паралельності асимптот обох кривих; пропорціональність коефіцієнтів при членах першого степеня випливає з умови збігу асимптот.

628. $(Ax + By + C); (A_1x + B_1y + C_1) + \lambda = 0$, де λ — довільний параметр. Вказівка. При розв'язанні цієї задачі ми користуємося, по-перше, тим, що рівняння кривих, які мають спільні асимптоти, відрізняються тільки вільними членами (після множення на деякі сталі множники; див. задачу 627) і, по-друге, тим, що сукупність двох прямих є окремий вид кривої другого порядку (крива, що розпалася), яка має ці дві прямі своїми асимптотами.

629. $10x^2 + 21xy + 9y^2 - 41x - 39y + 4 = 0$. Вказівка. Зручно скористатися розв'язанням задачі 628.

630. $2x^2 - xy - x + y + 5 = 0$.

630*. $a_{11} - 2a_{12}\cos\omega + a_{22} = 0$. Вказівка. В рівносторонньої гіперболи асимптоти взаємно перпендикулярні.

631. Відсутній або один член з квадратом однієї з координат ($a_{11} = 0$ або $a_{22} = 0$) або відсутні обидва члени з квадратами координат ($a_{11} = a_{22} = 0$).

632. $35xy - 34y^2 - 34y - 2 = 0$. 633. $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$. Вказівка. Оскільки центр гіперболи збігається з початком координат, то перетворення полягає в зміні напряму осей координат; за нові осі вибираємо асимптоти, тобто прямі, які утворюють з віссю абсцис кути $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b}{a}\right)$ і $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right)$. Відповідні формули перетворення будуть такі: $x = \frac{a(x' + y')}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ і $y = \frac{-b(x' - y')}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

634. $2xy + 11 = 0$. Вказівка. Оскільки в даному рівнянні відсутні члени з квадратами координат, то осі координат паралельні до асимптот і для виконання зазначеного перетворення досить перенести початок координат у центр гіперболи, не змінюючи напряму осей.

635. $xy = {}^3/_{40}$. Вказівка. Оскільки формули перетворення координат при переході до асимптот утворюються досить складні, то можна спочатку віднести гіперболу до її головних осей, а потім уже скористатися розв'язком задачі 633.

636. a) До рівняння еліпса можуть увійти або всі три члени другого степеня, або два члени з квадратами координат (коли еліпс віднесений до спряжених напрямів). Рівняння еліпса з одним старшим членом бути не може. b) В рівняння гіперболи можуть увійти всі три старші члени, або два з них в будь-якій комбінації: обидва члени з квадратами координат, якщо гіпербола віднесена до спряжених напрямів, або один член з квадратом, а другий — з добутком координат, якщо одна з осей координат паралельна асимптоті гіперболи. Нарешті, рівняння гіперболи може мати один старший член, а саме: добуток координат, коли обидві осі координат паралельні асимптотам. c) Рівняння параболи має або всі три старші члени, або тільки один член з квадратом однієї з координат, коли одна з осей координат паралельна осі параболи.

637. $13x^2 + 52y^2 = 1$.

638. a) $x^2 - y^2 = 11\sqrt{2}$; $I_1 = 0$; $I_2 = -2$; $I_3 = 44$; b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; $I_1 = 7$; $I_2 = -144$; $I_3 = -144^2$; c) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$; $I_1 = 10$; $I_2 = 9$; $I_3 = -81$;

d) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; $I_1 = 5$; $I_2 = -36$; $I_3 = 36^2$; e) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$; $I_1 = 8$; $I_2 = -9$; $I_3 = 81$. Вказівка. Як ми бачили при розв'язанні задачі 637, $a'_{11} + a'_{22} = I_1$; $a'_{11} \cdot a'_{22} = I_2$ і $a'_{11}a'_{22} \cdot a'_{33} = I_3$; тому коефіцієнти при квадратах текучих координат у спрощеному рівнянні центральної кривої можуть бути визначені як корені такого рівняння: $z^2 - I_1 z + I_2 = 0$ (характеристичне рівняння), а вільний член $a'_{33} = \frac{I_3}{I_2}$.

639. a) $y^2 = 4\sqrt{2}\,x$; b) $y^2 = \frac{6}{\sqrt{5}}x$; c) $y^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}x$; d) $y^2 = \frac{1}{5\sqrt{5}}x$. Вказівка. Шукане рівняння має вигляд: $a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x = 0$ при $\omega' = \frac{\pi}{12}$. Для визначення двох невідомих коефіцієнтів a'_{22} і a'_{13} користуємося першим і третім інваріантами, бо другий інваріант дорівнює нулеві (для параболи $\delta = 0$). Легко скласти і загальні формули, які полегшують обчислення, а саме: $a'_{22} = I_1$ і $a'_{13} = \pm\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}$. Отже, спрощене рівняння параболи має вигляд: $I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}\,x = 0$.

640. a) $15x^2 - y^2 + 3 = 0$; b) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$; c) $y^2 = \sqrt{3}x$. 640*. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. **641.** $xy = {}^5/_2$. **642.** a) $xy = 1{,}2$; b) $xy = \frac{\sqrt{29}}{25}$; c) $xy = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

643. $9x^2 - 4y^2 \pm 36x = 0$. Вказівка. Знак перед останнім членом знаходиться в залежності від того, в яку з двох вершин гіперболи перенесено початок координат.

644. $x + 3y + 2 = 0$.

645. 1) $4x + 7y + 1 = 0$; 2) $x - 4 = 0$; 3) $x - 6y + 1 = 0$; 4) центр кривої поляри не має; 5) $2x + 3y - 3 = 0$; 6) $a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$; 7) $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$; 8) $\frac{5x}{9} - \frac{3y}{4} = 1$; 9) $3x - y - 9 = 0$; 10) поляра неозначена, бо крива розпадається на дві прямі: $x - y = 0$ і $x - 3y + 2 = 0$ і точка $(+1; +1)$ є точкою їх перетину.

646. $(+1; 0)$. Вказівка. Координати полюса ми знаходимо з умови пропорціональності коефіцієнтів у рівнянні поляри точки (x_1, y_1) відносно даної кривої, а саме: $(3x_1 - 3y_1 - 2)\,x - (3x_1 - 5y_1 + 3)\,y - (2x_1 + 3y_1 - 10) = 0$, і в рівнянні прямої $x - 6y + 8 = 0$.

647. 1) $(+5; +1)$; 2) $(+{}^3/_2; -{}^1/_2)$. Координати полюса в даному випадку визначаються з рівнянь: $a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} = 0$ і $a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} = 0$, тому, що в рівнянні поляри (осі x) не входять вільний член і член, який має абсцису; 3) $(-2; 0)$; 4) пряма служить діаметром кривої і полюса не має; 5) полюс неозначений; за полюс можна прийняти будь-яку точку прямої $9x - y + 19 = 0$. Крива розпадається на пару прямих, які разом з даною і знайденою прямою утворюють чотири гармонічних промені; 6) $(+4; -3)$; 7) $(-5; -7{,}5)$.

648. $(-3; +1)$. Вказівка. Шукана точка — полюс даної прямої.

649. $5x + y + 2 = 0$. Вказівка. Шукана хорда є поляра точки M.

650. $(+{}^3/_2; 2)$. Вказівка. Шукана точка є точка перетину даної прямої з полярою початку кординат.

651. Кожна точка прямої $4x - y + 30 = 0$ спряжена з точкою $(+5; +1)$, бо ця пряма служить полярою даної точки.

652. $x + 5y - 15 = 0$. Вказівка. Шукана пряма проходить через точки M (0; +3) і через полюс $P(-5; +4)$ даної прямої $x - 3y + 22 = 0$.

653. $$\begin{vmatrix} a_{21}a_{12}a_{13}A \\ a_{21}a_{22}a_{23}B \\ a_{31}a_{32}a_{33}C \\ A_1B_1C_10 \end{vmatrix} = 0.$$

Для еліпса, даного канонічним рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ця умова матиме вигляд: $AA_1\,a^2 + BB_1\,b^2 = CC_1$. Вказівка. Координати полюса першої прямої повинні задовольняти рівняння: $\frac{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}}{A} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}}{B} = \frac{a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}}{C}$ або, позначаючи через λ величину цих відношень: $a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} - A\lambda = 0$; $a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} - B\lambda = 0$; $a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} - C\lambda = 0$. Крім того, згідно з умовою задачі, полюс першої прямої повинен лежати на другій прямій, тобто ті самі координати (x_1, y_1) повинні ще задовольняти четверте рівняння: $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$. Умова сумісності цих чотирьох рівнянь і буде шуканою умовою.

654. Вказівка. Щоб спростити доведення, вибираємо прямокутні координати і вміщуємо початок координат в центрі круга.

660. Прямокутник, складений з двох дотичних у вершинах малої осі ($y = \pm 4$) і двох директрис еліпса ($x = \pm 10$).

661. Трикутник, складений з трьох дотичних до гіперболи $2x - y - 2 = 0$, $2x + y - 2 = 0$ і $x + 2 = 0$.

662. Еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Розв'язання. Позначимо через x' і y' координати будь-якої точки кола; тоді дотична до кола в цій точці має рівняння $xx' + yy' - 9 = 0$. Шукаємо полюс (x_1, y_1) цієї прямої відносно еліпса. Рівняння поляри точки (x_1, y_1) відносно даного еліпса повинно мати такий вигляд: $6x_1x + 9y_1y - 54 = 0$. Отже, для однієї і тієї ж прямої (поляри точки x_1, y_1) одержали два рівняння; тому коефіцієнти цих рівнянь будуть пропорціональні: $\frac{6x_1}{x'} = \frac{9y_1}{y'} = \frac{54}{9}$, звідки $x_1 = x'$ і $y_1 = {}^2/_3 y'$. Координати полюса (x_1, y_1) виражені через координати (x', y') точки дотику поляри до кола. Щоб виключити ці допоміжні координати (x', y'), скористаємося тим, що вони задовольняють рівняння кола $x'^2 + y'^2 = 9$. Вставляючи в це рівняння $x'^2 = x_1^2$ і $y'^2 = \frac{9}{4}y_1^2$, дістанемо остаточно $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$. Це і є рівняння шуканого геометричного місця полюсів.

663. Той самий еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, причому полюсом будь-якої дотичної до еліпса служить точка того самого еліпса, симетрична з точкою дотику відносно осі абсцис.

665. $x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$. Вказівка. З умови, що початок координат служить полюсом прямої $2x + 3y - 1 = 0$, випливає, що, $\frac{a_{13}}{2} = \frac{a_{23}}{3} = \frac{a_{33}}{-1}$; умова, що точка (—1; +1) служить полюсом прямої $2x + y + 0$, дасть тільки одне нове рівняння: $\frac{-a_{11} + a_{12} + a_{13}}{2} = \frac{-a_{12} + a_{22} + a_{23}}{1}$;

крім того, координати центра $(+{}^3/_2;\ +{}^1/_2)$ повинні задовольняти рівняння $F_x = 0$ і $F_y = 0$, тому $3a_{11} + a_{12} + 2a_{13} = 0$ і $3a_{12} + a_{22} + 2a_{23} = 0$. З одержаних п'яти однорідних рівнянь ми можемо визначити відношення шести коефіцієнтів рівняння шуканої кривої.

666. $7x^2 + 2xy - 6x - 10y + 15 = 0$.

667. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$. Вказівка. Парабола є геометричне місце точок $M(x, y)$, віддалі яких від фокуса $(-{}^1/_3;\ -{}^2/_3)$ і від директриси $(3x - 3y + 8 = 0)$ рівні між собою, тобто $(x + {}^1/_3)^2 + (y + {}^2/_3)^2 = \dfrac{(3x - 3y + 8)^2}{18}$. Перетворивши це рівняння, ми дістанемо шукане рівняння параболи.

668. Умову задачі задовольняють дві параболи: $x^2 + 4xy + 4y^2 - 14x + 22y + 24 = 0$, $x^2 + 4xy + 4y^2 - 14x - 18y + 24 = 0$.

669. $4xy + 3y^2 - 2y - 1 = 0$. Вказівка. Користуємося такою властивістю кривих другого порядку: $r : d = e$.

670. $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 7 = 0$.

671. $xy = {}^1/_2$. Вказівка. Ексцентриситет рівносторонньої гіперболи $e = \sqrt{2}$.

672. $F_1(+4;\ +3)$; $F_2(0;\ -1)$; $2x + 2y - 15 = 0$ і $2x + 2y + 3 = 0$.

673. $F(0;\ 0)$; $4x + 3y + 2 = 0$.

674. $3x^2 - 6xy - 5y^2 + 24y - 12 = 0$. Вказівка. Скористаємося тим, що різниця фокальних радіусів-векторів будь-якої точки гіперболи дорівнює її дійсній осі.

675. $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 40y + 41 = 0$. Вказівка. Знайдемо перш за все точку дотику даної дотичної до шуканого еліпса. З цією метою можна скористатися тим, що фокальні радіуси-вектори, проведені в точці дотику, утворюють рівні кути з дотичною, або, інакше кажучи, тим, що радіус-вектор, проведений у точку дотику з одного фокуса, проходить через точку, симетричну з іншим фокусом відносно дотичної.

676. Не можна, бо обидва фокуси $F_1(+1;\ +3)$ і $F_2(-1;\ +2)$ лежать по одну сторону від дотичної $x - y + 4 = 0$, що можливо тільки у еліпса.

677. $x^2 - 6xy + y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$. Вказівка. Обчислюємо віддалі фокусів від даної директриси $\delta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ і $\delta_2 = -\dfrac{5}{\sqrt{2}}$. Оскільки ці віддалі мають різні знаки, то фокуси розміщені по різні сторони від директриси; отже, шукана крива — гіпербола. Враховуючи, що $|\delta_1| < |\delta_2|$, робимо висновок, що дана директриса спряжена з першим фокусом $F_1(+1;\ +1)$. Для складення рівняння кривої треба ще знати або її ексцентриситет, або дійсну вісь; але обидві ці величини можна обчислити, знаючи відстань між фокусами і відстань від фокуса до відповідної директриси.

678. $9x^2 + 4xy + 6y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$. Вказівка. Шукана крива — еліпс $(e < 1)$. Її рівняння можна скласти, скориставшись тим, що сума фокальних радіусів-векторів будь-якої її точки дорівнює великій осі. Велику вісь можна обчислити, знаючи віддаль між фокусами і ексцентриситет.

679. $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$.

680. Умову задачі задовольняють дві параболи: $4x^2 + 4xy + y^2 - 10y - 15 = 0$ і $4x^2 + 4xy + y^2 + 12x - 34y - 15 = 0$.

681. $11x^2 - 20xy - 4y^2 + 18x + 36y = 0$. Вказівка. Шукана крива — гіпербола; це видно з того, що центр і точка кривої лежать по різні сторони від даної директриси. Написавши рівняння дійсної осі, переконуємося, що вона проходить через початок координат, тобто початок координат служить однією з вершин шуканої гіперболи.

682. $4x^2 + 6xy - 4y^2 - 26x + 18y - 39 = 0$. Вказівка. Центр кривої, рівняння дійсної осі і віддаль c від центра до фокуса знаходимо безпосередньо з умов задачі. Для обчислення ексцентриситету можна скориситатися тим, що віддаль

фокуса до асимптоти дорівнює уявній півосі b, а щоб скласти рівняння директриси, скористаємося тим, що директриса відсікає на асимптотах відрізки рівні дійсній півосі a. Задачу можна розв'язати простіше, помітивши, що дані асимптоти взаємно перпендикулярні, і, отже, $e = \sqrt{2}$. Крім того, легко показати, що директриса проходить через основу перпендикуляра, опущеного з фокуса гіпер-

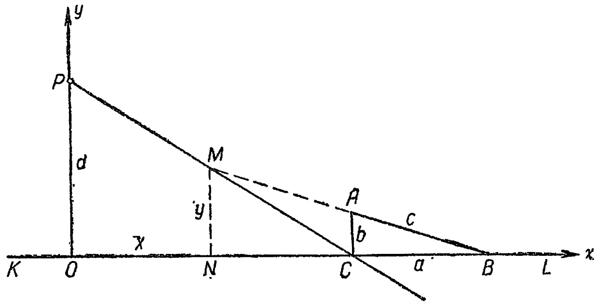

Рис. 139.

боли на її асимптоту. Обчислювати координати центра і інших точок немає потреби, якщо користуватимемось рівнянням пучка прямих.

683. $3x^2 + 4xy - 8x - 4y + 4 = 0$.

684. $xy - y_1x - x_1y = 0$, де $(x_1\ y_1)$ — центр пучка прямих. Це — гіпербола, центр якої збігається з центром пучка, а асимптоти паралельні осям координат.

684*. $ay^2 + bxy - a(b + d)y + abd = 0$. Вказівка. За осі координат приймаємо пряму KL і перпендикуляр, опущений на неї з точки P. Віддаль точки P від KL позначаємо через d. Для складання шуканого рівняння розгля-

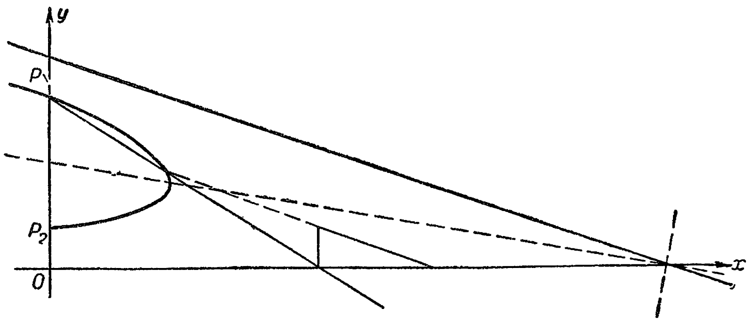

Рис. 140.

даємо дві пари подібних трикутників (рис. 139), а саме: $\triangle OPC \sim \triangle NMC$ і $\triangle ABC \sim \triangle MNB$. Дослідження. Шукана крива є гіпербола (рис. 140). Вісь абсцис служить однією з її асимптот. Друга асимптота паралельна гіпотенузі рухомого трикутника $\left(k_2 = -\dfrac{b}{a}\right)$. Гіпербола перетинає вісь ординат на двох точках: $P(0;\ d)$ і $P_1(0;\ b)$. Центр кривої має координати $x_0 = \dfrac{a(b + d)}{b}$; $y_0 = 0$. Якщо віднести гіперболу до осей, то рівняння її буде: $(c - a)x^2 -$

$-(c+a)y^2-2abd=0$; якщо віднести гіперболу до асимптот, то рівняння її перетворюється в таке: $xy=-\dfrac{acd}{b}$.

685. $b^2x^2+a^2y^2-2ch\cdot xy=(pq-h^2)^2$. Вказівка. За осі координат вибираємо перпендикулярні прямі нерухомої площини. Параметрами кривої можуть служити: віддаль h точки C від прямої AB і відрізки p і q, які відсікає перпендикуляр CD на цій прямій (рис. 141). Шукана траєкторія має таке рівняння: $(p^2+h^2)\,x^2+(q^2+h^2)y^2-2h\,(p+q)\,xy=(pq-h^2)^2$, або, позначаючи через a, b і c сторони трикутника ABC, дістанемо простіше рівняння, наведене в відповіді. Дослідження. Всяка точка рухомої площини (C)

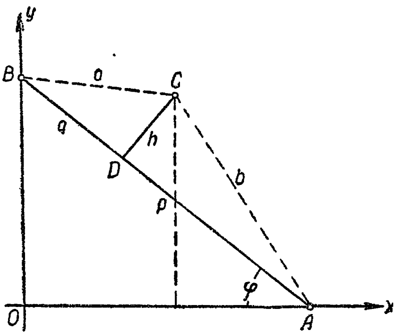

Рис. 141.

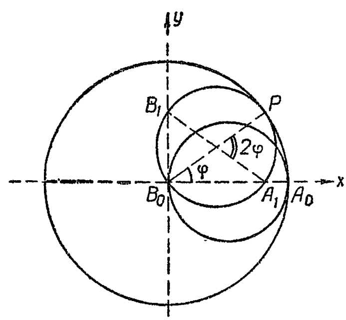

Рис. 142.

описує еліпс з центром на початку координат, за винятком точок кола, для якого відрізок AB служить діаметром: ці точки переміщаються по прямих, які проходять через початок координат. Якщо точка C лежить на одній прямій з точками A і B ($h=0$; $a=q$; $b=p$), то осі відповідного еліпса збігаються з осями координат, а півосі його за величиною дорівнюють віддалям твірної точки від основних точок B і A (див. задачу 427). Розглядуваний рух площини називається еліптичним; механічне його здійснення можливе за допомогою еліптичного циркуля (див. задачу 429).

686. Велика піввісь дорівнює $\dfrac{c}{2}+m$, а менша дорівнює $\dfrac{c}{2}-m$, де m — віддаль точки C від середини відрізка AB. Точки, розміщені на одній і тій же прямій, яка проходить через середину відрізка AB, описують еліпси з осями, що збігаються. Точки, однаково віддалені від середини відрізка AB, описують еліпси з відповідно рівними осями. Вказівка. При еліптичному русі площини точки A' і B' ковзають по прямих OA' і OB', і траєкторію точки C можна розглядати як траєкторію точки відрізка $A'B'$, кінці якого ковзають по двох перпендикулярних прямих.

686*. Всі точки описують еліпси, за винятком точок кола, що котиться, які переміщаються по діаметрах нерухомого кола. Вказівка. Вказаним коченням одного кола по другому здійснюється еліптичний рух площини. Щоб у цьому переконатися, досить показати, що діаметр A_0B_0 круга, що котиться (рис. 142), ковзає своїми кінцями по двох перпендикулярних діаметрах нерухомого круга ($\text{arc}\,A_0P=\text{arc}\,A_1P$).

687. $b^2x^2+a^2y^2+abxy-2ab^2x-2a^2by+a^2b^2=0$, якщо за осі координат прийняті сторони CB і CA. Шукане геометричне місце — еліпс, який дотикається сторін трикутника CB і AB в його вершинах B і A.

687*. Парабола $4x^2-8hy+(4h^2-a^2)=0$, де a — основа, h — висота трикутника. Вказівка. За вісь абсцис прямокутної системи координат прийнята пряма, по якій ковзає основа трикутника; вісь ординат проходить через нерухому вершину.

688. Дуга еліпса, який має центр у точці A; одна з осей напрямлена по прямій AL. Величина півосей: MC і $[MC - 2AB]$. Вказівка. Частина стержня CD, розміщена між нерухомою лінійкою AL і прямою AN (рис. 143), до неї перпендикулярною, має сталу довжину, рівну $2AB$. Отже, еліптичний рух площини здійснюється, якщо відрізок BC сталої довжини ковзає одним кінцем по прямій, а другим — по колу, центр якого лежить на тій самій прямій, а радіус дорівнює ковзному відрізку.

689. Крива четвертого порядку:

$$[(x^2 - r^2 - d^2)(l-d)^2 + y^2(l^2 + d^2)]^2 - 4d^2[(l-d)^2r^2 - \\ - y^2l^2][(l-d)^2 - y^2] = 0,$$

де r — довжина кривошипа, l — довжина шатуна, d — віддаль твірної точки M від кінця шатуна B. Вказівка. Для складання рівняння зручно виразити

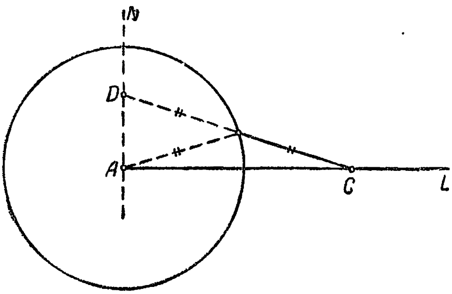

Рис. 143.

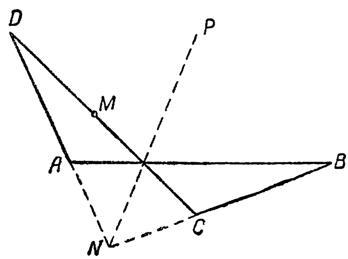

Рис. 144.

координати твірної точки як проекції ламаної ABM на осі координат. Щоб виключити з одержаних рівностей допоміжні кути, користуємося тим, що в трикутнику ABC сторони r і l пропорціональні синусам протилежних кутів.

690. $(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2)$. Зробити рисунок.

691. Вказівка. Дослідити траєкторії точок NC_1D і ввести в розгляд вісь симетрії антипаралелограма.

692. $(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 - b^2y^2)$. Зробити рисунок.

693. Вказівка. Точка N (рис. 144) описує дугу гіперболи, фокусами якої служать точки A і B. Вісь симетрії NP антипаралелограма служить дотичною до гіперболи в точці N; по відношенню до неї твірна точка M і центр гіперболи (середина AB) є точки симетричні.

694. Розв'язання. Оскільки рівнобедрені трикутники AOC, ADC і ABC мають спільну основу AC, то три вершини їх O, D і B лежать весь час на одній прямій. Далі, зазначаємо, що $OD \cdot OB = l^2 - a^2 = \text{const}$ як степінь точки O відносно кола з центром в A і радіусом a. Точка D описує коло, центр якого M і радіус $MD = b$; її рівняння в полярних координатах (прийнявши O за полюс і OM за полярну вісь) буде: $\rho = 2b \cdot \cos\varphi$. Траєкторія точки B зобразиться в полярних координатах таким рівнянням: $\rho = \dfrac{l^2 - a^2}{2b \cdot \cos\varphi}$ $\left(\text{з рівності } OB = \dfrac{l^2 - a^2}{OD}\right)$, або в декартових координатах (оскільки $\rho\cos\varphi = x$) матимемо $x = \dfrac{l^2 - a^2}{2b}$; тобто абсциса є величина стала; відповідна лінія є пряма, перпендикулярна до полярної осі.

ЧАСТИНА ТРЕТЯ

695. Див. рис. 145.

696. $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0,\ 0\right)$, $\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;\ 0\right)$, $\left(0;\ -\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;\ a\right)$, $\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};\ a\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;\ a\right)$, $\left(0;\ -\frac{a\sqrt{2}}{2},\ a\right)$.

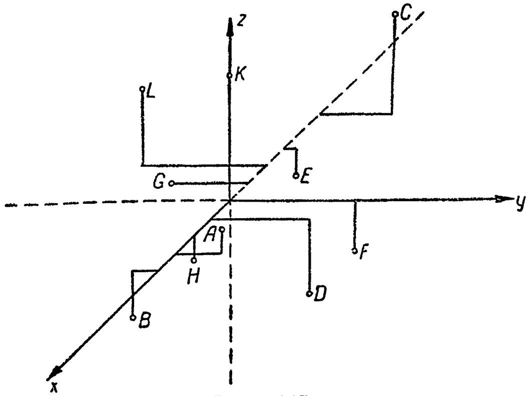

Рис. 145.

697. Симетричні відносно початку координат: $(-3;\ +1;\ -2)$ і $(-a,\ -b,\ -c)$.

Симетричні відносно осі	Для точки P	Для точки M	Симетричні відносно осі	Для точки P	Для точки M
(xy)	$+3;-1;-2$	$a,\ \ b,\ -c$	x	$+3;+1;-4$	$a,\ -b,\ -c$
(yz)	$-3;-1;+2$	$-a,\ \ b,\ \ c$	y	$-3;-1;-2$	$-a,\ \ b,\ -c$
(zx)	$+3;+1;+2$	$a,\ -b,\ \ c$	z	$-3;+1;+2$	$-a,\ -b,\ \ c$

698. а) На площині, яка ділить пополам двогранний кут між площинами координат xOz і zOy; b) на перетині площин, які ділять пополам двогранні кути між (xz) і (zy) і між (xy) і (xz).

699. Аплікати точок поверхні обчислюються за формулою: $z = xy$. Площини, паралельні площині (yz), перетинають поверхню по прямих лініях, які перетинають вісь x. В початковому положенні, коли січна площина збігається з площиною (yz), лінія перетину збігається з віссю ординат; потім, у міру віддалення площини від початку координат, пряма поступово змінює свій напрям і повертає на прямий кут, поки x зміниться від нуля до безконечності. Таку ж серію прямих ми дістаємо, перетинаючи поверхню площинами, паралельними площині (xz). Лінії перетину поверхні площинами, паралельними площині (xy), є вітки рівносторонніх гіпербол, асимптоти яких паралельні осі x і осі y; осі цих гіпербол зростають у міру віддалення січної площини від площини (xy).

700. $OA + 13$; $d_x = 5$; $d_y = 4\sqrt{10}$; $d_z = 3\sqrt{17}$.

701. $M(-6;\ -4;\ +3)$.

702. $\cos\alpha = {}^3/_7$; $\cos\beta = {}^2/_7$; $\cos\gamma = {}^6/_7$; $\cos\alpha_1 = \cos\beta_1 = \cos\gamma_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

703. $R = 15$; $\alpha = \arccos {}^2/_3$; $\beta = \arccos {}^1/_3$; $\gamma = \arccos {}^2/_3$.
704. 45 або 135°.

705. Умову задачі задовольняють дві точки: $M_1\ (+4\sqrt{2};\ +4;\ +4)$ і $M_2\ (+4\sqrt{2};\ -4;\ +4)$.

706. $\cos\varphi_1 = \dfrac{2\sqrt{10}}{11}$; $\cos\varphi_2 = \dfrac{3\sqrt{13}}{11}$; $\cos\varphi_3 = \dfrac{\sqrt{85}}{11}$, причому $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2} - \gamma$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} - \beta$ і $\varphi_3 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

707. $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 2$. Вказівка. Це співвідношення рівнозначне такому: $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$.

708. a) $\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2 = \rho^2$; b) $\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = 2\rho^2$.

709. $\cos\alpha' = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$; $\cos\beta' = \dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}$; $\cos\gamma' = 0$.

711. $AB = 3$; $\cos\alpha = {}^2/_3$; $\cos\beta = -{}^2/_3$; $\cos\gamma = -{}^1/_3$.

712. $X = \pm 12$, $Y = \pm 9$, $Z = 0$. Кінець вектора може виявитися при зазначених умовах у чотирьох різних точках; $B_1(+15;\ +11;\ +7)$, $B_2(+15;\ -7;\ +7)$, $B_3(-9;\ +11;\ +7)$, $B_4(-9;\ -7;\ +7)$. Розв'язання. Визначаємо перш за все косинуси кутів α, β і γ. Згідно з умовою задачі ми маємо: $\sin\alpha = 3\lambda$, $\sin\beta = 4\lambda$ і $\sin\gamma = 5\lambda$. Підносимо ці рівності до квадрата і додаємо їх; тоді ми дістанемо $2 = 50\lambda^2$ (див. задачу 707), звідки $\lambda = \pm {}^1/_5$. Оскільки додатний напрям обертання в просторі не установлений, то ми можемо вважати, що кут між двома напрямами не перевищує 180°, а тому обмежимося розглядом тільки додатного значення $\lambda = +{}^1/_5$. Тоді ми дістанемо: $\sin\alpha = {}^3/_5$, $\sin\beta = {}^4/_5$ і $\sin\gamma = 1$, звідки знаходимо, що $\cos\alpha = \pm {}^4/_5$, $\cos\beta = \pm {}^3/_5$ і $\cos\gamma = 0$. Проектуючи силу $R = 15$ на осі координат, дістанемо її складові: $X = 15 \cdot \cos\alpha = \pm 12$, $Y = \pm 9$ і $Z = 0$. Але ці самі складові дорівнюють різницям однойменних координат кінців вектора, який зображає силу R, тобто $x_2 - x_1 = \pm 12$, $y_2 - y_1 = \pm 9$, $z_2 - z_1 = 0$. Знаючи координати початку вектора ($x_1 = 3$, $y_1 = 2$ і $z_1 = 7$), обчислюємо координати кінця, причому при різних комбінаціях знаків дістанемо чотири розв'язки.

713. $\cos\alpha = {}^7/_{11}$; $\cos\beta = {}^6/_{11}$; $\cos\gamma = \pm {}^6/_{11}$; $Z = \pm 6$; $B_1\ (+9;\ +5;\ +11)$; $B_2\ (+9;\ +5;\ -1)$.
714. $(0;\ 0;\ +{}^{14}/_9)$.
715. $M\ (0;\ +1;\ -2)$.
716. $(+2;\ +1;\ -2)$. Вказівка. Визначаємо центр як точку, рівновіддалену від зазначених чотирьох точок.

717. $\left(+\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ +\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$, $\left(+\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, якщо тетраедр розміщений у першому октанті.

718. $\cos\varphi = \cos a \,.\, \cos a'$.
719. $\varphi = 60°$.
720. $\cos\varphi = {}^{20}/_{21}$.
721. $\cos\alpha = {}^3/_5$; $\cos\beta = {}^4/_5$; $\cos\gamma = 0$. Вказівка. Обчислюємо напрямні косинуси прямої AB: $\cos\alpha' = -{}^4/_5$; $\cos\beta' = {}^3/_5$; $\cos\gamma' = 0$; напрямні косинуси осі z такі: $\cos\alpha'' = \cos\beta'' = 0$, $\cos\gamma'' = 1$. Якщо ми позначимо через α, β і γ кути, утворені шуканою прямою з осями координат, то внаслідок умов перпендикулярності їх косинуси задовольняють дві умови: $-{}^4/_5\cos\alpha + {}^3/_5\cos\beta = 0$ і $1 \cdot \cos\gamma = 0$.

723. $$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вказівка. Шукану умову ми дістанемо, якщо виразимо аналітично, що напрям (α, β, γ), перпендикулярний до кожної з даних прямих (напрям перпендикуляра до площини, що вміщує в собі). Ця умова виконується тоді, коли прямі лежать не в одній, а в паралельних площинах.

724. πab. В к а з і в к а. Осі еліпса є проекціями двох перпендикулярних діаметрів круга, з яких один паралельний лінії перетину площини круга і площини еліпса (проектується без зміни своєї величини), а другий разом з своєю проекцією (малою віссю еліпса) утворює лінійний кут φ, рівний кутові між зазначеними площинами. Звідси $\varphi = \frac{b}{a}$, і ми можемо обчислити площину еліпса як проекції даного круга.

725. $S = 3{,}5$ кв. од. В к а з і в к а. Користуємося проекціями шуканої площі еліпса на три координатні площини.

726. $S = 9$ кв. од. В к а з і в к а. Заздалегідь обчислюємо площі проекцій даного трикутника на три координатні площини.

727. В к а з і в к а. Знайти координати середин сторін косого чотирикутника і напрям прямих, які їх з'єднують.

728. В к а з і в к а. Перевірити, що середини відрізків PQ, MN і KL мають однакові координати, тобто що вони збігаються (рис. 146).

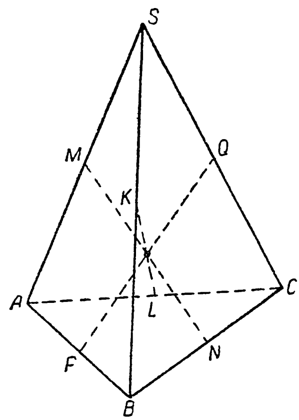

Рис. 146.

729. $C(+4;\ -5;\ -2)$.

730. $A\,(+{}^{14}/_3;\ -8;\ +12)$; $B\,({}^{11}/_3;\ +7;\ -13)$ і решта точок поділу $D(+{}^{4}/_3;\ -2;\ +2)$; $E\,(-{}^{1}/_3;\ +1;\ -3)$.

$$731.\quad \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4};\quad \overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4};\quad \overline{z} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

В к а з і в к а. Центр ваги тетраедра лежить на прямій, яка з'єднує будь-яку з вершин тетраедра з центром ваги протилежної грані, і поділяє відрізок між цими точками у відношенні 3 : 1.

732. $\lambda_1 = {}^7/_2$; $\lambda_2 = {}^1/_5$; $\lambda_3 = -{}^1/_2$.

733. Дані прямі перетинаються в точці $(-{}^3/_2;\ +{}^5/_2;\ +11)$. Р о з в'я з а н н я. Якщо прямі AB і CD перетинаються, то існує точка, яка лежить одночасно на обох прямих. Позначимо через λ відношення, в якому шукана точка поділяє відрізок AB, і через μ відношення, в якому вона поділяє відрізок CD; тоді координати цієї точки можуть бути виражені двояким способом, і, прирівнюючи ці вирази, ми дістанемо:

$$-\frac{3}{1+\lambda} = \frac{2+4\mu}{1+\mu}\ (1);\quad \frac{5}{1+\lambda} = \frac{-1-3\mu}{1+\mu}\ (2)\ \text{і}\ \frac{15+7\lambda}{1+\lambda} = \frac{4}{1+\mu}\ (3).$$

Отже, якщо існує точка перетину даних двох прямих, то повинні існувати два числа λ і μ, які задовольняють ці два рівняння. Ділячи (1) на (2), виключаємо λ і дістанемо; $\mu = -{}^7/_{11}$ і $\lambda = 1$. Ці значення параметрів задовольняють і останнє рівняння. Вставляючи їх у вирази шуканих координат, обчислюємо ці останні.

734. Дані чотири точки лежать в одній площині; крім того, точки A, B і C лежать на одній прямій. В к а з і в к а. Щоб розв'язати цю задачу, достатньо перевірити, чи перетинаються прямі AB і CD.

735. (0; 0; 0) (+7; —1; +3), (+11; — 4; +2) і (+6; —3; —1). В к а з і в к а. Визначимо початкове положення центра ваги (див. задачу 731); $\overline{x} = -1$; $\overline{y} = 1$; $\overline{z} = -1$. Задача зводиться до такого перенесення початку координат, при якому точка, що має координати (—1; + 1; — 1), матиме нові координати (+6; —2; +1).

736. $x = -x' + a$; $y = -y' + a$; $z = -z' + a$, де a — ребро куба.

737. $3x^2 + y^2 - 2zx + 2 + 0$.

738. $z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$. Вказівка. Формули перетворення мають такий вигляд:

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}; \; y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \text{ і } z = z'.$$

739. a) $x = z'$; $y = x'$, $z = y'$; b) $x = {}^2/_3 x' - {}^1/_3 y' + {}^2/_3 z'$; $y = {}^2/_3 x' + {}^2/_3 y' - {}^1/_3 z'$; $z = -{}^1/_3 x' + {}^2/_3 y' + {}^2/_3 z'$. Вказівка. Поворот на 120° є третина повного обороту; при такому повороті вісь абсцис перейде у вісь ординат, а вісь ординат — у вісь аплікат, і ця остання —в вісь абсцис. Поворот на 60° є половина попереднього повороту; вісь x' утворює рівні кути з осями x і y $(\alpha = \beta)$ і лежить в одній площині з віссю обертання і віссю z; отже,

$$\gamma = 2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{де } \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ є кут між діагоналлю куба і його ребром.}$$

740. a) Сферична поверхня з центром в початку координат і радіусом $R = 1$; b) круглий циліндр, вісь якого збігається з віссю z; напрямне коло має радіус $r=1$; c) дві площини, паралельні площині (yz) і які проходять по обидві сторони від неї на віддалі, рівній одиниці; d) сукупність двох площин: $x - y = 0$, $x + y = 0$, які поділяють двогранний кут між площинами (xz) і (yz) пополам; e) поверхня, яка має тільки одну дійсну точку—початок координат; f) всі дійсні точки цієї поверхні лежать на одній прямій — на осі z; g) площина (yz), двічі взята ; h) сукупність всіх трьох координатних площин: $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$; i) площина, яка проходить через вісь x і нахилена до площини (xy) під кутом $\frac{\pi}{6}$ (Циліндрична поверхня, яка має прямолінійну напрямну).

741. a) Коло, розміщене в площині, паралельній до площини (xz); центр її має координати $(+1; -1; 0)$ і радіус $r = 4$; b) гіпербола, площина якої паралельна площині (yz); центр гіперболи має координати $(+2; 0; 0)$; дійсна вісь паралельна осі y і дорівнює 6; уявна вісь паралельна осі z і дорівнює 4; c) парабола, розміщена в площині, яка поділяє двогранний кут між площинами (xz) і (yz) пополам; вершина параболи збігається з початком координат, вісь параболи збігається з віссю z, і параметр її $p = 1$; d) дві прямі, які лежать у площині (xy), проходять через початок координат і утворюють з віссю x кути в 60° і 120°. Вказівка. c) Дослідження кривої утруднюється тим, що площина кривої $(x = y)$ не паралельна ні одній з координатних площин. Позбавитись цієї незручності можна, перетворивши систему координат, а саме, повернувши площину (xz) біля осі z на кут 45° до злиття з площиною кривої.

742. Гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. Вказівка. Рівняння проектуючого циліндра ми дістанемо, виключивши z з двох даних рівнянь.

743. Еліпс $\left\{ \begin{array}{r} {}^1/_4(x-1)^2 + z^2 = 1; \\ y = 0. \end{array} \right\}$. Вказівка. Проекцією кривої на площину служить лінія перетину цієї площини з циліндром, який проходить через цю криву і має твірні, перпендикулярні до площини проекції.

744. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 6)^2 = 49$.

745. Коло $\left\{ \begin{array}{r} (x-5)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9; \\ x = 4. \end{array} \right\}$. Вказівка. Точки шуканого геометричного місця мають дві незалежні одна від одної властивості; тому це геометричне місце повинно бути лінією.

746. $6x + 10y - 10z + 5 = 0$. Вказівка. Шукана площина є геометричним місцем точок рівновіддалених від двох даних точок.

747. Пряма лінія $\left\{ \begin{array}{r} 10x + 2z = 35; \\ y = 0. \end{array} \right\}$

748. $2pz = x^2 + y^2$. Ця поверхня утворюється від обертання параболи $x^2 = 2pz$ навколо своєї осі і називається параболоїдом обертання. Вказівка.

Віддаль даної точки від даної площини позначаємо через p. Перпендикуляр, опущений з точки на площину, приймаємо за вісь z. Площину (xy) проводимо через середину цього перпендикуляра.

749. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = a^2 - c^2$. Вказівка. Ця поверхня утворюється від обертання еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ навколо фокальної осі і називається еліпсоїдом обертання.

750. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, де $a = MA$, $b = MB$ і $c = MC$. Вказівка. Оскільки точка A перебуває весь час на площині (yz), то проекція сталого відрізка $AM = a$ на вісь абсцис дорівнює абсцисі точки M, тобто $x = a \cdot \cos\alpha$. Так само проектуємо відрізки $BM = b$ і $CM = c$ відповідно на осі y і z. Щоб виключити з одержаних рівностей напрямні косинусів стержня, користуємося співвідношенням $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Одержана поверхня називається трьохосним еліпсоїдом.

751. Вказівка. Візьмемо, наприклад, площину, паралельну площині (xy), тобто припустимо, що $z = h$. Розв'язуючи це рівняння разом з рівнянням еліпсоїда, дістанемо: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$. Зводимо обидва члени в правій частині до спільного знаменника і ділимо все рівняння на вільний член; тоді дістанемо: $\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2 - h^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2(c^2 - h^2)}{c^2}} = 1$, або $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - h^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{c}\sqrt{c^2 - h^2}\right)^2} = 1$.

Якщо $|h| < c$, шукана лінія перетину є дійсний еліпс. Якщо $|h| = c$, еліпс розпадається на дві уявні прямі з дійсною точкою перетину. Якщо $|h| > c$, еліпс уявний.

752. $y(x + z - a) = xz$. Розв'язання. Позначимо через $M(x, y, z)$ будь-яку точку шуканої поверхні. Ця точка має ту властивість, що вона лежить на одній прямій з трьома точками, які належать відповідно трьом ребрам куба, а саме: з точками $A(a, y_1, 0)$, $B(x_2, a, a)$ і $C(0, 0, z_3)$. Інакше умову можна виразити так: прямі MA, MB і MC мають один і той же напрям, або аналітично: $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = (x - a) : (y - y_1) : z = (x - x_2) : (y - a) = x : y : (z - z_3)$. З цих пропорцій випишемо тільки ті відношення, які не мають проміжних параметрів x_2, y_1 і z_3, а саме: $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{y - a}{z - a}$; $\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{z}{x - a}$ і $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{x}{y}$. Помноживши ці рівності, виключимо напрямні косинуси стержня і дістанемо рівняння, яке повинні задовольняти координати будь-якої точки поверхні: $\frac{x(y - a)z}{y(x - a)(z - a)} = 1$, або після спрощень дістанемо рівняння, зазначене у відповіді.

753. Площина проходить через точки A, B, C і F.

754. $(+5;\ +3;\ +2)$. Вказівка. Оскільки точка переміщається паралельно осі y, то її абсциса і апліката залишаються незмінними. Задача зводиться до знаходження точки, яка лежить на даній площині і має $x = +5$ і $z = +2$.

755. Вказівка. Якщо позначити через (x_1, y_1, z_1) і (x_2, y_2, z_2) координати точок прямої, які задовольняють дане рівняння, то координати будь-якої іншої точки цієї прямої можна виразити таким чином: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ і $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

756. a) Площина паралельна осі y; b) площина паралельна площині (xz); c) площина паралельна осі z; d) площина проходить через початок координат; e) площина проходить через вісь абсцис.

757. a) $y + 5 = 0$; b) $x + 3y = 0$; c) $9y - z - 2 = 0$.

758. a) —6; 4; 12; b) 3; 15; —5; c) 1; —1; 1; d) —6; ∞; $^3/_2$ (площина паралельна осі y); e) 0; 0; 0; f) 7; ∞; ∞ [площина паралельна площині (yz)].

759. Див. рис. 147.

760. $a = 3$. Вказівка. Оскільки дана площина відсікає на осях x і y додатні відрізки, а на осі z — від'ємний, то куб розміщається в п'ятому октанті і вершина куба, яка лежить на даній площині, має координати $x = y = -z = a$, де a — шукане ребро куба.

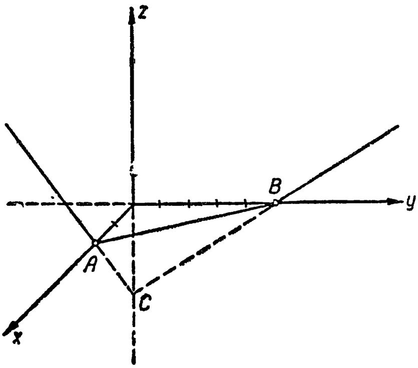

Рис. 147.

761. $x + y + z - 3 = 0$.

762. $\frac{x}{4} - \frac{y}{2\sqrt{5}} + \frac{z}{3} = 1$.

763. a) $^2/_{11}x - {}^9/_{11}y + {}^6/_{11}z - 2 = 0$; b) $-{}^2/_3x - {}^2/_{15}y + {}^{11}/_{15}z - 4 = 0$; c) $-{}^6/_{11}x + {}^6/_{11}y + {}^7/_{11}z - 3 = 0$.

764. $p = 10$.

765. $6x + 2y + 3z \pm 42 = 0$.

766. $\cos\alpha = -{}^2/_3$; $\cos\beta = +{}^1/_3$; $\cos\gamma = -{}^2/_3$.

767. $\cos\alpha = {}^{10}/_{15}$; $\cos\beta = {}^2/_{15}$; $\cos\gamma = {}^{11}/_{15}$.

768. $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Вказівка. Шуканий кут дорівнює куту між перпендикуляром до даної площини і віссю x.

769. $P(-2;\ -4;\ +18)$. Вказівка. Шукану точку легко визначити за радіусом-вектором ($\rho = 2p$) і напрямними косинусами його, бо він перпендикулярний до даної площини.

770. $3x - 6y + 2z - 49 = 0$.

771. a) $d = {}^3/_2$; b) $d = 0$, точка лежить на площині; c) $d = -4$.

772. $h_s = 3$.

773. $6x - 7y + 6z - 94 = 0$.

774. $A'(+{}^9/_7;\ -{}^{13}/_7;\ +{}^{17}/_7)$. Вказівка. В цій задачі потрібно знайти точку A'', симетричну з точкою A відносно даної площини. Обчислюємо віддаль точки A від цієї площини; $d = 3$; отже, $AA' = 2d = 6$. Напрям відрізка AA' протилежний напряму перпендикуляра, опущеного на площину з початку координат, бо $d > 0$, тобто точка A і початок координат лежать по різні сторони від площини. Знаючи величину відрізка, його початок і напрям, можна знайти його кінець.

775. a) $\varphi = \arccos 0{,}7$; b) площини перпендикулярні одна до одної; c) площини паралельні між собою.

776. $\varphi = \arccos {}^4/_{13}$.

777. a) $x - 4y + 5z + 15 = 0$; b) $(2x - y - z = 0$; c) $x \pm \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$.

778. $x + 3y = 0$ і $3x - y = 0$.

779. $x = \frac{3\sqrt{5}x' + 4\sqrt{5}y' + 10z' + 9}{15}$; $y = \frac{\sqrt{5}y' - 2z' - 2}{3}$;

$z = \frac{-6\sqrt{5}x' + 2\sqrt{5}y' + 5z' + 7}{15}$. Вказівка. Нові координати (x', y', z') будь-якої точки (x, y, z) дорівнюють віддалям цієї точки до даних площин, тобто $x' = \frac{3x - 6z + 1}{3\sqrt{5}}$; $y = \frac{4x + 5y + 2z}{3\sqrt{5}}$ і $z' = \frac{2x - 2y + z - 3}{3}$, причому знаки вибрані згідно останньої умови. Розв'язуючи ці рівняння відносно старих координат, дістанемо шукані формули.

780. $x + 2y + 2z - 9 = 0$ або $y - 2 = 0$. Вказівка. Зручніше шукати нормальне рівняння площини. Для визначення чотирьох параметрів $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ і p маємо три відомих віддалі і співвідношення між напрямними косинусами прямої.

781. $x + 2y - 6z + 3 = 0$ і $4x + y + z - 1 = 0$. Вказівка. Шукані площини являють собою геометричне місце точок, рівновіддалених від даних площин. Для точок однієї з шуканих площин ці віддалі рівні за величиною і знаком, для точок другої площини віддалі рівні за абсолютною величиною, але мають протилежні знаки.

782. $M\,(0;\ 0;\ +3)$. Вказівка. Існує ще одна точка, а саме $M_1\,(0;\ 0;\ -{}^5/_2)$, віддалі якої від двох даних площин рівні за абсолютною величиною, але протилежні за знаком.

783. $M\,(+{}^2/_9;\ +{}^2/_9;\ -{}^2/_9)$. Вказівка. У відповіді дано центр тієї сфери, яка розміщена всередині даного тетраедра. Існують інші сфери, які також дотикаються до граней даного тетраедра, але розміщені поза ним.

784. $d = 4$. Вказівка. Оскільки початок координат лежить між даними паралельними площинами, то шукана віддаль визначається як сума віддалей кожної площини від початку координат: $d = p_1 + p_2 = 1 + 3 = 4$. Інакше шукану віддаль можна дістати, обчисливши віддаль будь-якої точки однієї з площин від другої площини.

785. $3x - 6y - 2z + 35 = 0$ і $3x - 6y - 2z - 7 = 0$.

786. $4x - y - 14z = 0$.

787. $x - 3y - z + 2 = 0$ (ABC); $x - 4y - z + 2 = 0$ (ABD); $2x - 8y - 3z + 6 = 0$ (ACD); $2x - 11y - 3z + 9 = 0$ (BCD).

788. $V = {}^1/_2$ куб. од.

789. a) Не можна; b) можна.

790. a) $(+3;\ -1;\ 0)$; b) точки перетину всіх трьох площин немає, бо I і III площини паралельні між собою; c) точка перетину неозначена: всі три площини проходять через одну і ту ж пряму.

791. a) Всі чотири площини проходять через одну і ту ж точку; b) дані площини не мають спільної точки.

792. a) $9x + 3y + 5z = 0$; b) $23x - 32y + 26z - 17 = 0$; c) $21x + 14z - 3 = 0$; d) $7x + 14y + 5 = 0$. Вказівка. Скористатися рівнянням пучка площин.

793. $41x - 19y + 52z - 68 = 0$ і $33x + 4y - 5z - 63 = 0$.

794. $3x + 4y - z + 1 = 0$ і $x - 2y - 5z + 3 = 0$.

795. $15x - 3y - 26z - 6 = 0$. Вказівка. Шукана площина належить пучкові площин, визначеному даною площиною і площиною (xy).

796. $3x - 4y - 5 = 0$ і $387x - 164y - 24z - 421 = 0$. Вказівка. Площини, які дотикаються до сфери, проходять на віддалі, що дорівнює радіусу, від центра сфери.

797. $2x + 2y - 2 - 1 = 0$.

797*. Площина (xz).

798. $x + 20y + 7z - 12 = 0$ і $x - z + 4 = 0$.

799. $A = {}^{13}/_3$; $D = {}^{23}/_3$.

800. a) $2y - z = 0$; b) $y - 3 = 0$; c) $3x - y = 0$.

801. a) Пряма проходить через початок координат; b) пряма паралельна осі z; c) пряма паралельна площині (xz); d) пряма паралельна осі x; e) пряма збігається з віссю y; f) пряма перпендикулярна до осі x і перетинає її; g) пряма лежить на площині (yz).

802. $D = 3$. Вказівка. Для дотримання умови задачі потрібно, щоб обидві площини, які визначають пряму, перетинали вісь z в одній і тій же точці.

803. $B = -6$; $D = -27$. Вказівка. Якщо пряма лежить у площині (xy), то вона перетинає осі абсцис і ординат (пор. задачу 802). Можна також скористатися тим, що площина (xy) належить пучкові площин: $x - 2y + z - 9 + k\,(3x + By + z + D) = 0$.

804. a) $A = 0$; $A_1 = 0$, тобто обидві площини паралельні осі x: b) $\dfrac{B}{B_1} = \dfrac{D}{D_1}$,

тобто обидві площини перетинають вісь y в одній і тій же точці $x = 0$; $y = -\frac{D}{B} = -\frac{D_1}{B_1}$, $z = 0$; c) $C = D = 0$ і $C_1 = D_1 = 0$, тобто обидві площини проходять через вісь z; d) $\frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$. Якщо пряма паралельна площині (yz), то в пучку площин $Ax + By + Cz + D + \lambda\,(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$, що проходять через неї, повинна існувати площина, паралельна площині (yz), тобто $B + \lambda B_1 = 0$ і $C + \lambda C_1 = 0$ при одному і тому ж значенні λ*; e) $\frac{A}{A_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}$ тому, що пучок $Ax + By + Cz + D + \lambda\,(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$ має площину (xz), тобто при одному і тому ж значенні λ ми маємо $A + \lambda A_1 = 0$, $C + \lambda C_1 = 0$ і $D + \lambda D_1 = 0$; f) $D = D_1 = 0$, тобто обидві площини проходять через початок координат.

805. $11x - 4y + 6 = 0$; $9x - z + 7 = 0$ і $36y - 11z + 23 = 0$.

806. $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0; \\ z = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5y + 2z + 2 = 0; \\ x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x - 3z + 7 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$

807. $A(-1;\ +7{,}5;\ 0)$. $B\ (+2;\ 0;\ +3)$ і $C\ (0;\ +5;\ +1)$.

808. $\begin{cases} 4x - 3y + z - 3 = 0; \\ 2x + 3y + z - 6 = 0. \end{cases}$ В к а з і в к а. Шукана проекція — лінія перетину площини проекції $(2x + 3y + z - 6 = 0)$ з перпендикулярною до неї площиною, яка проходить через дану пряму (див. задачу 792, d).

809. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

810. $\frac{x}{4} = \frac{z-2}{3}$; $y = 0$; $x - 4 = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{-5}$; $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$; $-x = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-4}$; $\frac{x-4}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-7}$; $\frac{x-5}{-6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-2}$;

811. Дані три точки лежать на одній прямій лінії $\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$.

812. $x_3 = 0$; $y_3 = \frac{x_2y_1}{x_2 - x_1}$; $z_3 = -\frac{x_1z_2}{x_2 - x_1}$.

813. a) $\cos\alpha = {}^4/_{13}$; $\cos\beta = {}^3/_{13}$; $\cos\gamma = {}^{12}/_{13}$; b) $\cos\alpha = {}^{12}/_{25}$, $\cos\beta = {}^9/_{25}$; $\cos\gamma = {}^{20}/_{25}$.

814. $x - 1 = \frac{y+5}{\sqrt{2}} = -(z-3)$.

815. $\cos\varphi = {}^{72}/_{77}$.

816. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$.

817. $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1}$. В к а з і в к а. При складанні рівнянь прямої ми скористалися точкою $(0;\ 0;\ -3)$, яка лежить на цій прямій, але можна було б взяти і іншу точку тієї ж самої прямої. Що стосується кутових коефіцієнтів, то вони повинні бути пропорціональні вказаним знаменникам $m : n : p = 9 : 5 : 1$.

---

* Цю саму умову ми могли б одержати, користуючись виразами для кутових коефіцієнтів прямої, даними формулою (11).

818. $\cos\alpha = {}^6/_{11}$; $\cos\beta = {}^7/_{11}$; $\cos\gamma = {}^6/_{11}$.

819. $\cos\varphi = {}^{98}/_{195}$.

820. a) $\begin{cases} x-2=0; \\ y+5=0; \end{cases}$ b) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+5}{-6} = \dfrac{z-3}{9}$;

c) $\dfrac{x-2}{-11} = \dfrac{y+5}{17} = \dfrac{z-3}{13}$.

821. $\begin{cases} 3x+z=0; \\ y+0, \end{cases}$ або, зберігаючи канонічну форму: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{-3}$.

822. a) і b) перетинаються. Вказівка. В прикладі b) можна замінити дані системи рівнянь канонічними рівняннями тих же прямих або застосувати ознаку проходження чотирьох площин через одну точку: $\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$

823. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$. Вказівка. Оскільки шукана пряма проходить через точку A $(+2;\ +3;\ +1)$, то її рівняння мають вигляд $\dfrac{x-2}{m} = \dfrac{y-3}{n} = \dfrac{z-1}{p}$. Кутові коефіцієнти, або, вірніше, їх відношення, визначаємо з умови перпендикулярності до даної прямої $(2m - n + 3p = 0)$ і умови перетину з даною прямою:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0 \text{ або } 8m - 11n - 9p = 0.$$

824. $\dfrac{x}{33} = \dfrac{y}{-26} = \dfrac{z}{27}$.

825. $\dfrac{x-4}{13} = \dfrac{y}{37} = \dfrac{z+1}{58}$.

826. $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y+8}{7} = \dfrac{z+9}{1}$. Вказівка. Кутові коефіцієнти прямої відомі з умови паралельності $m : n : p = 8 : 7 : 1$. З умови перетину шуканої прямої з двома даними прямими треба визначити координати $(a,\ b,\ c)$ якої-небудь точки шуканої прямої. Одну з цих координат можна взяти довільно; наприклад, можна припустити $a = 0$, тобто вибрати точку перетину прямої з площиною (yz); тоді з двох умов перетину можна визначити дві координати b і c, яких невистачає.

827. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+3}{4}$. Вказівка. Рівняння шуканої прямої має чотири відомих параметри: два відношення кутових коефіцієнтів і дві координати якої-небудь точки на прямій (третій координаті можна надати довільного значення). Для визначення цих параметрів маємо чотири рівняння; два виражають умову перпендикулярності шуканої прямої до двох даних, два інших виражають умову перетину шуканої прямої з двома даними прямими.

828. (0; 0; —2). Розв'язання. Позначимо три рівних відношення, які входять у рівняння даної прямої, через ρ, тобто $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1} = \rho$; тоді $x = 4\rho + 12$, $y = 3\rho + 9$ і $z = \rho + 1$. Встановлюючи ці значення координат у рівняння площини, дістаємо: $26\rho + 78 = 0$; звідки $\rho = -3$, і остаточно, користуючись знайденими виразами для координат, маємо: $x = 0$; $y = 0$; $z = -2$.

829. a) Пряма паралельна площині; b) точка перетину неозначена: пряма лежить у площині; c) (+2 +3; +1).

830. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{-7}=\frac{z-2}{1}$.

831. $A=-1$.

832. $A=4$; $B=-8$.

833. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$.

834. $4x+5y-2z=0$.

835. (+5; —1; 0). Вказівка. З точки A опускаємо перпендикуляр на дану площину; його рівняння будуть: $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

Потім шукаємо точку перетину цього перпендикуляра з площиною. Знайдена таким чином точка і є шукана проекція.

836. a) Лежить; b) і c) не лежить.

837. $8x-9y-22z-59=0$.

838. $11x-17y-19z+10=0$.

839. $\frac{x+9}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}$.

840. $8x-22y+z-48=0$.

841. $5x+7y+9z-44=0$.

842. $17x-13y-16z-10=0$.

843. $16x-27y+14z-159=0$.

844. $23x-16y+10z-153=0$.

845. $x+y-z+3=0$. Вказівка. Задача можлива тільки тому, що дана пряма паралельна даній площині.

846. Не можна, бо дана пряма перетинає площину в кінцевій точці, а тому і всяка площина, що проходить через неї, перетне дану площину.

847. $\frac{x-1}{68}=\frac{y}{70}=\frac{z-7}{-67}$.

848. $d=\sqrt{22}$. Вказівка. Через дану точку проводимо площину, перпендикулярну до даної прямої (вона зобразиться рівнянням: $4x+3y+2z-69=0$); потім шукаємо точку перетину цієї площини з даною прямою (+10; +7; +4). Віддаль між знайденою і даною точками і буде шукана віддаль точки від прямої.

849. M (+3; —1; 0).

850. M (+2; —3; +5).

851. (+2; +9; +6). Вказівка. Проводимо через точку P площину, перпендикулярну до даної прямої, і шукаємо точку її перетину з цією прямою. Знайдена точка і є середина відрізка між даною точкою P і шуканою точкою.

852. $d=3$. Вказівка. Для розв'язання задачі досить знайти віддаль будь-якої точки одної прямої від другої прямої, наприклад, віддаль точки (+2; —1; 0) від другої з заданих прямих.

853. $d=7$. Вказівка. Найкоротша віддаль між двома прямими, які не лежать на одній площині, вимірюється довжиною їх спільного перпендикуляра; але складати рівняння спільного перпендикуляра і відшукувати точки його перетину з обома прямими було б досить складно. Ми досягнемо мети простіше, обчисливши віддаль між двома паралельними площинами, проведеними через дані прямі. Достатньо провести через першу пряму площину, паралельну другій прямій, і обчислити віддаль від цієї площини до точки, заданої на другій прямій.

854. $d=13$.

855. $\frac{x-2}{74}=\frac{y}{57}=\frac{z}{-110}$.

856. $\frac{x-4}{32}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-5}$ і $\frac{x-4}{4}=\frac{y-1}{-13}=\frac{z+2}{23}$.

857. $46x-22y+35z-92=0$.

858. $d=\sqrt{2/3}$.

860. a) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=36$; b) $x^2+y^2+z^2=49$; c) $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=121$; d) $(x-6)^2+(y+8)^2+(z-3)^2=100$.

861. $(x-1)^2+(y-5/2)^2+(z-3/2)^2=38/4$. Вказівка. В рівняння шуканої сфери $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-C)^2=R^2$ вставляємо по черзі замість текучих координат координати вершин тетраедра, оскільки сфера через них проходить. Одержимо таким чином чотири рівняння для визначення невідомих параметрів a, b, c і R.

862. $(+1;\ 6;\ 0)$ $r=5$. Вказівка. Коло дано як переріз кулі площиною; центр цього кола ми дістанемо, опустивши перпендикуляр з центра сфери на січну площину і знайшовши їх точку перетину. Радіус кола (r) можна обчислити за формулою: $r=\sqrt{R^2-d^2}$, де R — радіус сфери, а d — віддаль центра сфери від січної площини.

863. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. Вказівка. Центр шуканої сфери повинен лежати на осі z (на перпендикулярі, проведеному через центр плоского перерізу до площини цього перерізу). Тому шукане рівняння має вигляд: $x^2+y^2+(z-c)^2$ і має тільки два параметри: c і R. Припустивши в цьому рівнянні, що $z=0$, ми дістанемо рівняння лінії перетину сфери з площиною (xy)

$\begin{cases} x^2+y^2+c^2=R^2 \\ z=0. \end{cases}$ Зіставивши ці рівняння з даними рівняннями тієї ж лінії, дістанемо: $R^2=c^2+16$.

Отже, рівняння сфери може мати тільки один невідомий параметр (c), який ми зможемо визначити з умови проходження сфери через дану точку $(0;\ -3;\ +1)$.

864. Еліпс: $\begin{cases} 5x^2+5z^2-8xz-74x+70z+274=0 \\ y=0. \end{cases}$

865. a) $(+3;\ -4;\ -1)$, $R=4$; b) $(-1;\ +2;\ 0)$, $R=3$; c) сфера уявна, бо $R=\sqrt{-1}$; d) $R=0$; тільки одна дійсна точка $(+2;\ -6;\ +1)$.

866. $x^2+y^2+z^2-14x-10y+2z+7=0$. Вказівка. Шукана сфера належить пучкові: $x^2+y^2+z^2-6x-8y-11+\lambda(4x+y-z-9)=0$. Значення параметра λ визначаємо з умови проходження сфери через дану точку.

867. $A^2+B^2+C^2=\frac{D^2}{R^2}$. Вказівка. Шукану умову ми дістанемо, виразивши аналітично, що віддаль даної площини від центра кулі дорівнює радіусу цієї кулі.

868. $x-y+2z-3=0$ і $x-y+2z-15=0$. Пояснити, чому ці дві площини паралельні між собою. Вказівка. При сумісному розв'язанні рівнянь прямої і сфери зручно ввести параметр ρ, рівний відношенням, взятим з рівнянь прямої. Знайшовши точки дотику, можна скористатися загальним рівнянням дотичної площини до сфери.

869. $3y+4z=0$ і $5y-12z=0$. Вказівка. Рівняння всякої площини, яка проходить через вісь x, має вигляд: $By+Cz=0$. Треба знайти коефіцієнти B і C таким чином, щоб віддаль цієї площини від центра сфери $(-5;\ +8;\ -1)$ дорівнювала радіусу (4), тобто відношення цих коефіцієнтів визначиться з рівнянням:

$$\frac{8B-C}{\sqrt{B^2+C^2}}=\pm 4.$$

870. $10x-11y-2z+189=0$; $10x-11y-2z-261=0$. Вказівка. Рівняння шуканих площин має вигляд $10x-11y-2z+D=0$. Вільний

член визначиться з умови, що дотична площина відстоїть від центра сфери (4; 0; 2) на віддалі радіуса, тобто з рівності

$$\frac{40-4+D}{\sqrt{10^2+11^2+2^2}}=\pm 15.$$

871. $(x+5)^2+(y-3)^2+z^2=121$. Вказівка. Центр шуканої сфери знаходиться на перетині трьох площин: двох площин, які перпендикулярні до дотичних і проходять через відповідні точки дотику, і площини, яка перпендикулярна до хорди (що з'єднує дві точки дотику) і проходить через її середину.

872. $(x-y)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=25$. Вказівка. Радіус шуканої поверхні дорівнює радіусу даної сфери, доданому до віддалі між їх центрами: $R=r+d$.

873. Радикальна площина: $4x-6y+6z-11=0$.

874. Радикальна вісь: $\begin{cases} 5x-3y+3z+7=0; \\ 2x-4y-2z+1=0. \end{cases}$

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2={}^1/_2.$$

Перевірити, що радикальна вісь трьох кульових поверхонь перпендикулярна до площини їх центрів.

875. $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=17$. Вказівка. Центром шуканої сфери служить радикальний центр чотирьох даних поверхонь, тобто точка, яка має ту властивість, що дотичні, проведені з неї до всіх чотирьох поверхонь, мають однакову довжину. Будь-яка з цих дотичних дорівнюватиме радіусу шуканої сфери.

876. $2x^2+2y^2-z^2=0$. Розв'язання. Оскільки твірна шуканого конуса проходить через початок координат, то вона буде зображена такими рівняннями: $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{1}$ або $x=mz$ і $y=nz$. Виключивши x, y і z з цих двох рівнянь і з рівнянь напрямної, дістанемо таке співвідношення між кутовими коефіцієнтами твірної: $m^2+n^2={}^1/_2$. В це рівняння вставимо замість m і n їх значення, запозичені з рівнянь твірної: $m=\frac{x}{z}$ і $n=\frac{y}{z}$, тоді дістанемо шукане рівняння конуса $\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2={}^1/_2$.

877. $2y^2+xz-8x=0$. Вказівка. Напрямна буде дана рівняннями: $\begin{cases} y^2=4x, \\ z=0; \end{cases}$ рівняння твірної матимуть такий вигляд: $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=z-8$. Залежність між кутовими коефіцієнтами твірної така: $2n^2=-m$.

878. $18y^2+50z^2+75xz+225x-450=0$. Вказівка. Даний еліпс служить напрямною, дана точка — вершиною шуканого конуса.

879. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

880. $3x^2+123y^2+23z^2-18xy-22xz+50yz+18x-54y-66z+27=0$.

881. $(y-5x)^2-10(x^2+y^2+z^2)=0$. Розв'язання. Всяка пряма, яка проходить через початок координат, зобразиться рівняннями: $x=mz$ і $y=nz$. Нам треба знайти залежність, яка існує між кутовими коефіцієнтами m і n прямої, коли ця пряма дотикається до даної сфери. У випадку дотикання пряма і сфера мають дві злиті точки перетину, а отже, при сумісному розв'язанні їх рівнянь ми повинні одержати дійсні і рівні корені; іншими словами, підкорінна кількість, яку ми одержимо при розв'язанні квадратного рівняння, яке визначає одну з координат точки перетину після виключення двох інших; ця підкорінна кількість повинна дорівнювати нулеві. Додаємо його і прирівнюємо до нуля; тоді дістанемо: $(n-5m)^2-10(m^2+n^2+1)=0$; це і є шукане об-

меження, накладене на кутові коефіцієнти дотичних. Вставляючи в це рівняння замість m і n їх значення з рівнянь твірної, дістаємо шукане рівняння конуса.

882. $xy + xz + y = 0$. Вказівка. За напрямну шуканого конуса можна прийняти коло, яке перетинає всі три осі і розміщене в будь-якій площині, що утворює рівні кути з осями координат. Таке коло може бути зображене рівняннями: $\begin{cases}(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = 6a^2; \\ x + y + z = 3a.\end{cases}$

883. Конус $40(x-2)^2 - 9y^2 - 9z^2 = 0$. Вказівка. Дана пряма перетинає вісь x у точці $(+2;\ 0;\ 0)$; отже, шукана поверхня є конус з вершиною в цій точці. Умова, яка пов'язує кутові коефіцієнти твірної, полягає в тому, що твірна нахилена під сталим кутом до осі абсцис.

884. $(x-3)^2 + y^2 - (z-5)^2 = 0$.

885. $(x - {}^5/_2 z)^2 + (y - {}^3/_2 z)^2 = 25$. Вказівка. Рівняння напрямної мають вигляд: $\frac{x-a}{5} = \frac{y-b}{3} = \frac{z}{2}$. Співвідношення, яке пов'язує параметри a і b, таке: $a^2 + b^2 = 25$.

886. a) $2y^2 + 2z^2 - 2yz + 12y - 10z - 3 = 0$; b) $(x-y)^2 + 3z^2 - 8(x-y) - 8z - 26 = 0$.

887. $(2x+z)^2 - 10(2x+z) + 25y^2 = 0$.

888. $3[(x-z)^2 + (y-z)^2 - 1] - (x+y-2z)^2 = 0$.

889. $(10x - 5y - 5z + 2)^2 + (-5x + 10y - 5z + 11)^2 + (5x + 5y - 10z + 13)^2 = 294$. Вказівка. Напрямною циліндра служить коло, яке лежить у площині, перпендикулярній до даних прямих, і яке проходить через точки перетину цієї площини з даними прямими.

890. У площині (xy) маємо еліпс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; у площині (yz) маємо еліпс $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$; у площині (zx) маємо еліпс $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$. Еліпсоїд має шість дійсних вершин: $A\ (+6;\ 0;\ 0)$; $A_1(-6;\ 0;\ 0)$; $B\ (0;\ +4;\ 0)$; $B_1\ (0;\ -4;\ 0)$; $C\ (0;\ 0;\ +3)$; $C_1\ (0;\ 0;\ -3)$. Довжина осей: $2a = 12$; $2b = 8$; $2c = 6$.

891. Площини, паралельні площині (xy), перетинають еліпсоїд по колах; площини, паралельні іншим координатним площинам, перетинають його по еліпсах. Дійсні лінії перетину утворюються, якщо січні площини знаходяться від центра не далі відповідних вершин. Кожна лінія перетину подібна паралельному головному перерізу — осі їх пропорціональні. Дана поверхня є еліпсоїд обертання; його вісь обертання — вісь z.

892. $a : a_1 = c : c_1 = 3 : \sqrt{5}$.

893. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Вказівка. Рухомий еліпс (рис. 148) зображається рівняннями: $\left\{\begin{aligned}\frac{x^2}{(\lambda a)^2} + \frac{z^2}{(\lambda c)^2} = 1; \\ y = d.\end{aligned}\right\}$. Піввісь λc дорівнює значенню z, обчисленому з рівняння нерухомого еліпса при $y = d$. Виконавши обчислення, дістанемо: $\lambda^2 = \frac{b^2 - d^2}{b^2}$. Виключивши з цієї рівності і з рівнянь рухомого еліпса (1) проміжні параметри d і λ, дістанемо рівняння шуканої поверхні.

894. Еліпс $\begin{cases}x^2 + 2y^2 - 4x = 0; \\ z = 0.\end{cases}$

895. $(+2;\ 0;\ +{}^1/_2)$. Вказівка. Центр кривої проектується в центрі її проекції.

896. Див. рис. 149, 150, 151 і відповідні таблиці на стор. 268—269.

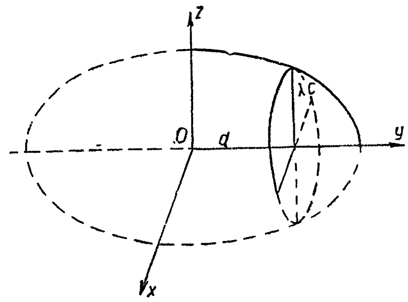

Рис. 148.

896. Переріз однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$.

I. Площинами, паралельними площині xy:

$z=0$, $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$;

$z=\pm 1$, $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$;

$z=\pm 2$, $\frac{x^2}{72}+\frac{y^2}{32}=1$;

$z=\pm 3$, $\frac{x^2}{117}+\frac{y^2}{52}=1$;

$z=\pm 4$, $\frac{x^2}{180}+\frac{y^2}{80}=1$;

$z=\pm 5$, $\frac{x^2}{261}+\frac{y^2}{116}=1$.

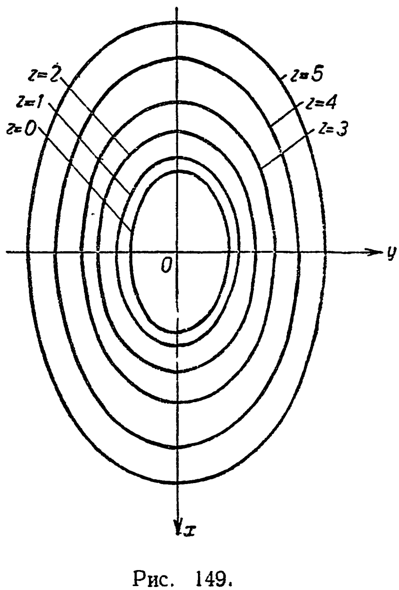

Рис. 149.

II. Площинами, паралельними площині xz:

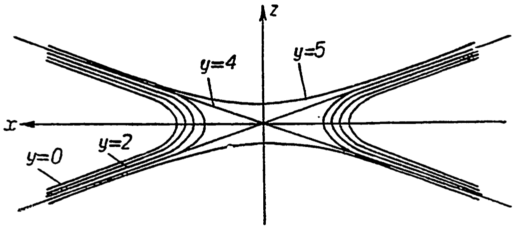

Рис. 150.

$y = 0, \quad \frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{4} = 1,$

$y = \pm 1, \quad \frac{x^2}{{}^{135}/_4} - \frac{z^2}{{}^{15}/_4} = 1;$

$y = \pm 2, \quad \frac{x^2}{27} - \frac{z^2}{3} = 1;$

$y = \pm 3, \quad \frac{x^2}{{}^{63}/_4} - \frac{z^2}{{}^{7}/_4} = 1;$

$y = \pm 4, \quad \frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{4} = 0;$

$y = \pm 5 - \frac{x^2}{{}^{81}/_4} + \frac{z^2}{{}^{9}/_4} = 1.$

III. Площинами, паралельними площині zy:

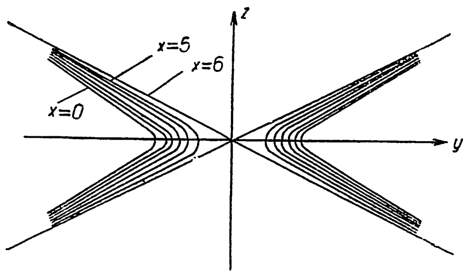

Рис. 151.

$x = 0, \quad \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1;$

$x = \pm 1, \quad \frac{y^2}{{}^{140}/_9} - \frac{z^2}{{}^{35}/_9} = 1;$

$x = \pm 2, \quad \frac{y^2}{{}^{128}/_9} - \frac{z^2}{{}^{32}/_9} = 1;$

$x = \pm 3, \quad \frac{y^2}{12} - \frac{z^2}{3} = 1;$

$x = \pm 4, \quad \frac{y^2}{{}^{80}/_9} - \frac{z^2}{{}^{20}/_9} = 1;$

$x = \pm 5, \quad \frac{y^2}{{}^{44}/_9} - \frac{z^2}{{}^{11}/_9} = 1;$

$x = \pm 6, \quad \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 0.$

897. Шукана лінія складається з пари прямих, які перетинаються в точці $(+6;\ -2;\ +2)$, тобто дана площина дотикається до поверхні в цій точці.

898. Дві площини, паралельні площині $(xz): y = \pm\sqrt{18}$, і дві площини, паралельні площині $(yz): x = \pm\sqrt{24}$. Шукати площини, які задовольняють умови задачі, серед площин, паралельних площині (xy), не доводиться, бо відповідний головний переріз — уявний.

899. Круглі конуси, осі обертання яких збігаються в прикладі a) з віссю z, в прикладі b) з віссю y і в прикладі c) з віссю x. При цьому в першому прикладі величина a є радіус поперечного перерізу, проведеного на віддалі b) від вершини ($z = \pm b$, $x^2 + y^2 = a^2$).

900. $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Вказівка. Для розв'язання задачі можна розглянути переріз площиною (xz) або скористатися готовою формулою $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$

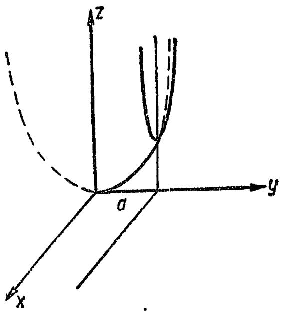

Рис. 152.

903. Еліптичний параболоїд $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ або гіперболічний параболоїд $z = \frac{y^2}{2q} - \frac{x^2}{2p}$, залежно від того, чи збігається напрям осі рухомої параболи з додатним або від'ємним напрямом осі нерухомої параболи. Вказівка. Складаємо рівняння нерухомої параболи: з цією метою вводимо допоміжний параметр d — віддаль площини нерухомої параболи від площини (xz). Вершина параболи матиме координати (0: d; $\frac{d^2}{2q}$) (рис. 152) і рівняння самої параболи: $y = d$ і $x^2 = \pm 2p(z - \frac{d^2}{2q})$. Виключивши із цих рівнянь допоміжний параметр d, дістанемо рівняння шуканої поверхні.

904. a) $M_1(+2; -3; 0)$ і $M_2(0, 0; +2)$; b) $M(+4; +2; +9)$ — пряма торкається поверхні; c) пряма лежить цілком на поверхні; d) $M_1(+4; +1; +3)$; пряма паралельна одній з асимптот.

905. $2l = 22$.

906. Таких хорд можна провести безліч; усі вони лежать у площині $288x + 225y - 400z - 1201 = 0$. Вказівка. Шукана пряма зобразиться системою рівнянь: $\frac{x-2}{m} = \frac{y-1}{n} = \frac{z+1}{1}$. Розв'язуючи їх разом з рівнянням даної поверхні (виключаємо координати x і y) і зважаючи на умову задачі, яку можна виразити рівністю $\frac{z_1 + z_2}{2} = -1$, дістанемо тільки одно співвідношення: $228m + 225n - 400 = 0$, яке повинні задовольняти кутові коефіцієнти шуканої прямої. Виключивши ці коефіцієнти з одержаної рівності і з рівнянь прямої, дістанемо рівняння геометричного місця шуканих прямих.

907. Таких прямих можна провести безліч; їх геометричне місце є конус $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} - (z-2)^2 = 0$.

908. Для еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ми дістанемо уявний конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, тобто дійсних прямих, які задовольняють умову задачі, немає.

Для обох гіперболоїдів $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \pm 1$ дістанемо один і той же конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, причому твірні цього конуса служать асимптотами поверхні. Цей конус називається асимптотичним. Вказівка. З розбору цієї задачі виходить, що еліпсоїд не має дійсних асимптот, а гіперболоїди мають безліч асимптот: цілий асимптотичний конус, з вершиною в центрі поверхні.

909. Єдиною вершиною обох параболоїдів є початок координат. Геометричне місце шуканих прямих визначається рівнянням $\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q} = 0$. Для еліптичного параболоїда ми маємо дві уявні площини, які перетинаються по осі z, тобто вісь z

є єдина дійсна пряма, яка задовольняє умови задачі. У випадку гіперболічного параболоїда ми маємо дві дійсні площини, які також перетинаються по осі z; кожна з цих площин має одну з прямолінійних твірних, розміщених у площині xy, а саме: $\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}} = 0$ або $\frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}} = 0$.

910. Конус $10(x-5)^2 + 20(x-5)(y-1) - 34(y-1)^2 - 55z^2 = 0$.

911. Циліндр $2(x-z)^2 + 2(x-z)(y-z) + 4(y-z)^2 - 7 = 0$.

912. $\frac{x-6}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-8}{4}$ і $\frac{x-6}{9} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-8}{20}$. Вказівка. Цю задачу можна розв'язати або безпосередньо, тобто розв'язуючи сумісно рівняння поверхні з рівняннями прямої, яка проходить через дану точку, і прирівнюючи до нуля всі коефіцієнти в рівнянні, одержаному після виключення двох координат, або користуючись загальними рівняннями прямолінійних твірних.

913. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ і $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Вказівка. Прямолінійні твірні однієї серії визначаються рівняннями: $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = k, \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = \frac{z}{k}. \end{cases}$ Зводимо їх до канонічного вигляду $\frac{x-2k}{2} = \frac{y-k}{-1} = \frac{z}{k}$. Параметр k визначаємо з умови паралельності з площиною $3x + 2y - 4z = 0$.

914. Зручно, написавши рівняння цих проекцій, скористатися умовою дотикання прямої і кривої другого порядку.

915. Проекції прямолінійних твірних дотикаються до параболічних перерізів у площинах (xz) і (yz), а в площинах (xy) вони становлять пучки прямих, паралельних тим двом прямим, на які розпадається лінія перетину поверхні і площини (xy).

916. Вказівка. Для доведення досить показати, що всі прямолінійні твірні гіперболоїда обертання становлять рівні кути з віссю обертання (з віссю z), що найкоротша віддаль всякої прямолінійної твірної до осі z вимірюється за відповідним радіусом горлового круга ($x^2 + y^2 = a^2$; $z = 0$) і за величиною, рівною цьому радіусу. Можна і безпосередньо вивести рівняння поверхні, яка утворюється від обертання прямої навколо осі, що лежить з нею в одній площині.

917. Однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$. Вказівка. Утворена пряма зображається системою рівнянь: $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z}{1}$. Умова перетину цієї прямої з трьома даними дасть три рівності, які зв'язують параметри a, b, m і n. Виключаючи чотири параметри з цих трьох рівностей і двох рівнянь твірності, одержимо шукану поверхню.

918. Гіперболічний параболоїд: $z = \frac{x^2}{4} - y^2$. Вказівка. Знайдемо точки перетину обох траєкторій з площиною (xy): $(+1;\ -{}^1/_2;\ 0)$ і $(-1.\ +{}^1/_2;\ 0)$ і приймемо їх за положення рухомих точок у початковий момент руху; Нехай, далі, по першій прямій точка піднімається (рух точки збігається з додатним напрямом прямої), а по другій прямій відповідна точка опускається вниз (щоб напрям руху збігався з напрямом прямої, змінимо знаки кутових коефіцієнтів у другої прямої на протилежні). Тоді рівняння траєкторій зручніше буде переписати так: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+{}^1/_2}{1} = \frac{z}{2}$ і $\frac{x+1}{2} = \frac{y-{}^1/_2}{1} = \frac{z}{-2}$, або в параметричній формі $\left\{\begin{aligned} x &= 2\rho + 1, \\ y &= \rho - {}^1/_2, \\ z &= 2\rho \end{aligned}\right\}$ (1) і $\left\{\begin{aligned} x &= 2\rho_1 - 1, \\ y &= \rho_1 + {}^1/_2, \\ z &= -2\rho_1 \end{aligned}\right\}$ (2). В цих рівняннях

ρ і ρ_1 зображають величини, пропорціональні віддалям рухомих точок від їх початкових положень. За умовою задачі ці віддалі повинні бути рівні між собою в будь-який момент руху; крім того, множники пропорціональності для обох прямих однакові $\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\frac{1}{3}\ \text{і}\ \frac{1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}=\frac{1}{3}\right)$; тому можна прямо припустити $\rho=\rho_1$. Пишемо тепер рівняння прямої, яка проходить через обидві рухомі точки [координати цих точок дані рівностями (1) і (2)]: $\frac{x-2\rho-1}{2}=\frac{y-\rho+{}^1/_2}{-1}=\frac{z-2\rho}{4\rho}$. Виключимо параметр ρ з цих двох рівнянь і тоді дістанемо рівняння шуканої поверхні.

919. Гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=z$. Вказівка. На твірну пряму $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ накладено три умови: перетин з двома прямими і паралельність з даною площиною. Виразимо ці умови аналітично і з одержаних трьох рівнянь виключимо відношення кутових коефіцієнтів; тоді ми дістанемо одно співвідношення, яке пов'язує координати (a, b, c) будь-якої точки твірної прямої, це і дасть нам рівняння шуканої поверхні, якщо замінити a, b і c текучими координатами.

920. $4x-12y+9z-6=0$. 921. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+{}^1/_2}{2}$.

922. $2x+2y-3z\pm12=0$. Вказівка. Визначаємо координати точки дотику з умови пропорціональності коефіцієнтів двох рівнянь: $\frac{x_1x}{21}+\frac{y_1y}{6}+\frac{z_1z}{4}=1$ і $2x+2y-3z+D=0$ з умови, що ці координати задовольняють рівняння еліпсоїда.

923. $x-y-2z-2=0$. Вказівка. Розв'язавши задачу для параболоїда в загальному вигляді, впевнитися, що умови її може задовольняти не більше однієї площини.

924. $x-2y-4z=0$. Вказівка. Ця площина дотикається до конуса вздовж всієї твірної конуса, яка проходить через дану точку.

925. Вказівка. Рівняння нормалі в будь-якій точці (x', y', z') конуса можуть бути написані так: $\frac{x-x'}{x'/a^2}=\frac{y-y'}{y'/b^2}=\frac{z-z'}{-z'/c^2}$; віссю конуса служить вісь z, тобто пряма $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$. Перетин цих двох прямих перевіряється за формулою (13) § I розд. X.

926. $a^2=b^2=c^2$, тобто всі три осі еліпсоїда рівні між собою, і ми маємо кульову поверхню.

927. Всі три точки двох головних перерізів $\begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$ і $\begin{cases} y=0, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$

928. $4x+5y\pm40=0$. Вказівка. Всі дотичні до площини даного циліндра повинні бути паралельні осі z.

929. Вказівка. Показати, що всі нормалі циліндра перпендикулярні до її твірних і, отже, паралельні площині, до них перпендикулярної.

931. a) $A^2a^2+B^2b^2\pm C^2c^2=\pm D^2$; b) $A^2p\pm B^2q=2CD$.

932. a) $x-3z=0$; $3x-2y-3z-18=0$; пряма перетинає поверхню в двох дійсних точках; b) дійсних дотичних площин провести не можна; пряма не має дійсних точок перетину з поверхнею; c) $x-2y-3-6=0$; пряма дотикається до поверхні і через неї можна провести тільки одну дотичну площину.

933. $\sqrt{15}\cdot y-2z+2=0$ і $\sqrt{15}\cdot y+2z-2=0$; $(0;+2\sqrt{15};+16)$ і $(0;-2\sqrt{15};+16)$.

934. У випадку еліпсоїда, двопорожнинного гіперболоїда і еліптичного параболоїда пряма не повинна перетинати поверхні в дійсних точках. У випадку однопорожнинного гіперболоїда і гіперболгічного параболоїда пряма повинна перетнути поверхню в двох дійсних різних точках.

935. $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-21}{6}$ і $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{-21}{14}$. В к а з і в к а. Можна знайти проекцію лінії їх перетину на площину $(xy) : 4x^2 - y^2 - 40x + 8y + 84 = 0$ і знайти рівняння кожної з тих прямих, на які ця лінія розпадається: $2x - y - 6 = 0$ і $2x + y - 14 = 0$. Кожне з цих рівнянь дасть площину, яка проектує шукану пряму на площину (xy). Кожна з шуканих прямих буде зображена одним з цих рівнянь і рівнянням дотичної площини. Інакше можна розв'язати цю задачу, знайшовши точку дотику даної площини і поверхні і склавши рівняння прямолінійних твірних, які проходять через знайдену точку.

936. $16x \pm 13z = 0$.

937. $r = \frac{6\sqrt{10}}{5}$. В к а з і в к а. Площини кругових перерізів дані рівняннями $y \pm 3z = k$. Ці площини паралельні осі абсцис. Круговий переріз може дотикатися до горлового еліпса тільки тоді, коли він проходить через одну з його вершин, які лежать на осі y, тобто через точку $(0;\ +2;\ 0)$ або $(0;\ -2;\ 0)$. Відповідні значення параметра будуть: $k = \pm 2$. Всі чотири круги, які задовольняють умови задачі, лежать у площині $y \pm 3z = \pm 2$ і мають однакові радіуси. Ми обчислимо цей радіус, знайшовши центр відповідного перерізу [проектуємо їх на площину (xz)].

938. $(0;\ -1;\ +{}^1/_2)$ і $(0;\ +1;\ +{}^1/_2)$. В к а з і в к а. Площини кругових перерізів дані рівняннями: $y \pm z = k$. Задача зводиться до знаходження точок параболоїда, в яких дотичні площини паралельні цим площинам.

939. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy + 6yz - 2zx + 20y + 12z + 12 = 0$.

940. $x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy - 2yz - 4zx - 1 = 0$.

941. 1) $\left(-1;\ +\frac{3}{2};\ 0\right)$; центральна поверхня, $\Delta \neq 0$; 2) лінія центрів: $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$; $\Delta = 0$; вершини в кінцевій частині простору немає; циліндр; 3) центра в кінцевій частині простору немає, $\Delta \neq 0$, дана поверхня — параболоїд; 4) $\left(+\frac{14}{3};\ +3+\frac{1}{3}\right)$; центральна поверхня; 5) площина центрів: $2x - y + 3z + 2 = 0$; система (9) має два незалежних, але суперечливих рівняння; пара паралельних площин; 6) поверхня не має центра в кінцевій частині простору, $\Delta \neq 0$, параболоїд; 7) $(0;\ +2;\ -2)$, $\Delta = 0$, конус; 8) центра немає; $\Delta = 0$; рівняння, які визначають вершину, несумісні; дана поверхня — параболічний циліндр.

942. $x^2 - 14y^2 + 10z^2 - 4xy - 24yz + 6zx - 5 = 0$.

943. 1) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4 = 0$; 2) $y + 3xy + 2yz + xz + 0{,}8 = 0$; 3) $x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$.

944. Дискримінант рівняння поверхні дорівнює нулеві; координати вершини: $x = 0$; $y = 1$; $z = 0$. Що конус дійсний, видно, наприклад, з того, що в перетині з площиною (x) він дає дійсну гіперболу $\begin{cases} 2x^2 - z^2 + 8x + 4 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

945. $a = -2$.

946. 1) Гіперболічний циліндр. В к а з і в к а. $\Delta = 0$; рівняння, з яких визначають координати вершини конуса, несумісні; з площиною (xy) перетинається по гіперболі: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. 2) Уявний конус. В к а з і в к а. $\Delta = 0$, координати вершини: $x = 0$; $y = 0$; $z = 1$; в перетині з площиною (xy) маємо уявний еліпс $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ 3) Пара дійсних площин, що перетинаються. Вказівка. $\Delta = 0$; вершиною служить будь-яка точка прямої $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$; з площиною (xy), яка не проходить через цю площину, перетинається по двох дійсних прямих: $2x^2 + 4xy - 8x - 12y + 6 = 0$. 4) Дійсний конус. Вказівка. $\Delta = 0$; вершина лежить в точці $(+2; +1; 0)$; з площиною (yz) перетинається по гіперболі, що не розпалася. 5) Еліптичний циліндр; $\Delta = 0$, рівняння, з яких визначають вершини конуса, несумісні; з площиною (xz) перетинається по дійсному еліпсу $\begin{cases} x^2 + 4z^2 + 2x - 4 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$ 6) Пара уявних площин, які перетинаються по дійсній прямій $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$. В перетині з будь-якою площиною, яка не проходить через вказану пряму, дістанемо пару уявних прямих.

947. 1) Уявний конус з вершиною в початку координат; 2) дві дійсні площини, які перетинаються по прямій: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-1}$; 3) дійсний конус з вершиною на початку координат; 4) пара площин, що злилися; 5) пара уявних площин, які перетинаються по дійсній прямій: $x = -y = -z$.

948. Вісь x перетинає поверхню в точках $(+2; 0; 0)$ і $(+\frac{1}{2}; 0; 0)$; вісь y перетинає поверхню в уявних точках; вісь z дотикається до поверхні в точці $\left(0; 0; -\frac{3}{2}\right)$.

949. a) $a_{14}^2 - a_{11}a_{44} = 0$; b) $a_{11} = 0$; c) $a_{11} = a_{14} = 0$; d) $a_{11} = a_{14} = a_{44} = 0$; e) $a_{14}^2 - a_{11}a_{44} < 0$. Вказівка. Задача зводиться до дослідження квадратного рівняння $a_{11}x^2 + 2a_{14}x + a_{44} = 0$, яке ми одержимо, припустивши в загальному рівнянні поверхні другого порядку $y = 0$ і $z = 0$.

950. a) $a_{12}xy + a_{23}yz + a_{31}zx = 0$; b) $2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + a_{44} = 0$. Вказівка. Див. задачу 949, випадки d) і c).

951. $M_1(+1; +2; +3)$ і $M_2(+2; -1; -4)$. Розв'язання. Позначимо рівні відношення, які входять до рівняння прямої, через ρ: $\frac{x}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-10}{7} = \rho$; тоді матимемо: $x = -\rho$; $y = 3\rho + 5$; $z = 7\rho + 10$. Вставляючи ці значення координат у рівняння поверхні і виконавши можливі спрощення, одержимо: $\rho^2 + 3\rho + 2 = 0$, звідки $\rho_1 = -1$ і $\rho_2 = -2$. Знаючи значення ρ, які відповідають шуканим точкам перетину, обчислюємо координати цих точок.

952. a) Пряма цілком лежить на поверхні; b) пряма дотикається до поверхні в точці $(-3; 0; 0)$.

953. Вісь z і пряма $\frac{x}{-16} = \frac{y}{24} = \frac{z}{9}$. Вказівка. Всяку пряму, яка проходить через початок координат, можна подати рівняннями: $x = mz$, $y = nz$. Якщо пряма цілком лежить на поверхні, то, виключаючи з цих рівнянь і з рівняння поверхні дві координати x і y, ми повинні одержати квадратне рівняння відносно z, яке задовольняється будь-якими значеннями z, тобто всі коефіцієнти цього рівняння повинні дорівнювати нулеві. Прирівнявши до нуля всі коефіцієнти цього рівняння, ми і дістанемо ті рівності, з яких визначаються кутові коефіцієнти шуканої прямої.

954. $\frac{x+\sqrt{12}}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ і $\frac{x-\sqrt{12}}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$. Вказівка. Шукану пряму можна подати рівняннями $\frac{x-a}{2} = \frac{y-b}{1} = \frac{z}{-1}$, або інакше: $x = a - 2z$, $y = b - z$. Вставляючи ці значення x і y в рівняння поверхні, ми по-

винні одержати тотожність. З умови, що всі коефіцієнти одержаної рівності повинні дорівнювати нулеві, визначаємо невідомі параметри a і b.

955. a) $a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{12}mn + 2a_{23}np + 2a_{31}pm = 0$; b) $\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - \frac{p^2}{c^2} = 0$; c) $\frac{m}{n} = \pm\sqrt{\frac{p_1}{q_1}}$.

956. 1), 4), 5) мають асимптотичні напрями; 2) і 3) — не мають.

957. Всі прямі, для яких $m : n : p = 2 : 1 : 0$. Прямолінійні твірні $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{0}$ і $\frac{x-4{,}5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{0}$.

958. $xz + yz - 2y = 0$.

959. Дійсний конус $2xy + yz - xz = 0$.

960. Єдина пряма $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$. Вказівка. Відповідний конус розпався на пряму уявних площин, які перетинаються по дійсній прямій.

961. Існує одна дійсна пряма, яка задовольняє умову задачі: $x = 1$; $y = -1$.

962. Пара площин: $2x + y - 3z = 0$ і $x - y + z = 0$.

963. Дійсний конус другого порядку, що не розпадається.

964. 1) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 + 2(x-1)(y-1) - 2(y-1)(z+1) + 6(x-1)(z+1) = 0$; дійсний конус; 2) уявний конус: $9(x-4)^2 + 36y^2 + 4(z+3)^2 = 0$; 3) дійсний конус: $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right) = 0$.

965. a) еліпс $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 + 2xy + 5x - 8 = 0 \\ z = 0; \end{cases}$

b) гіпербола $\begin{cases} 3z^2 + 2yz - z - 1 = 0 \\ x = 0; \end{cases}$

c) дві прямі $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$

965*. $x^2 + 3z^2 - 4xy + 6z - 1 = 0$.

966. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$. Вказівка. Шукана умова рівнозначна умові розпадання на пару прямих ліній перетину поверхні з площиною (xy).

967. Дійсний еліпс. Вказівка. Складаємо рівняння циліндра, який проектує криву, яку вивчаємо, на площину (yz). З цією метою треба виключити x з рівняння поверхні і січної площини (див. задачу 742). Рівняння циліндра буде: $3y^2 + 4z^2 + 36y - 96z + 384 = 0$. Це саме рівняння дасть нам напрямну циліндра в площині (yz), якщо розглядати y і z як координати точки на площині (yz). Дослідження рівняння виявить, що напрямна є дійсний еліпс; отже, циліндр — еліптичний і лінія, яку вивчаємо і яку він проектує, також еліпс.

968. Гіпербола. Вказівка. Циліндр, який проектує криву на площину (xz), — гіперболічний; його рівняння $25x^2 + 8z^2 + 32xz + 10x + 8z = 0$.

969. a) Пара дійсних прямих, що перетинаються; b) уявна крива другого порядку. Вказівка. a) Рівняння проектуючого циліндра таке: $5x^2 - 14xy + 10x - 14y + 5 = 0$; його напрямна розпадається на пару дійсних прямих ($\Delta = 0$; $\delta < 0$), що перетинаються; b) напрямна проектуючого циліндра — уявний еліпс; задача може бути спрощена, якщо звернути увагу, що дана поверхня— кульова і січна площина знаходиться від центра на віддалі більшій, ніж радіус.

970. $x - 4y + 2z = 0$. Вказівка. Шукана площина є геометричне місце хорд поверхні, які проходять через початок координат і поділяються в ньому пополам.

971. $5x + 6y + 7z - 4 = 0$; $\frac{x}{5} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-4}{7}$. Вказівка. Користуємося рівнянням дотичної площини (10), даним у тексті.

972. $3z + 2 = 0$. Лінія перетину — пара уявних прямих.

973. $x + 2y - 2 = 0$ і $x + 2y = 0$. Вказівка. Всяку дотичну площину до даної поверхні можна подати рівнянням: $(4x' + 2z')\,x + (6y' - 4)y + (2x' + 4z' - 2)\,z + (-4y' - 2z' + 3) = 0$. Координати точки дотику визначаємо з умови паралельності цієї площини і даної площини $x + 2y + 7 = 0$, тобто з умови пропорціональності коефіцієнтів їх рівнянь $\frac{4x' + 2z'}{1} = \frac{6y' - 4}{2}$; $2x' + 4z' - 2 = 0$. Крім того, ці ж координати задовольняють рівняння поверхні.

974. $M_1(-1;\ 2 + \sqrt{5}\ ;\ +1)$ і $M_2(-1;\ 2 - \sqrt{5};\ +1)$.

975. $4x - 5y - 2z + 2 = 0$. Вказівка. Всяку площину, яка проходить через дану пряму, можна подати рівнянням: $4x - 5y + \lambda(z - 1) = 0$; для розв'язання задачі потрібно тільки знайти значення параметра λ, при якому ця площина дотикається до поверхні, тобто при якому коефіцієнти її рівняння пропорціональні коефіцієнтам загального рівняння дотичної площини. Примітка. Через дану пряму можна провести тільки одну дотичну площину до поверхні, тому що сама ця пряма є дотичною прямою до поверхні.

976. $2x - z = 0$. Вказівка. Якщо дотична площина проходить через вісь ординат, то в її рівнянні вільний член і коефіцієнт при y повинні дорівнювати нулеві ($-8y' = 0$ і $2x' - z' = 0$). З цих умов і з рівнянь даної поверхні визначаємо координати точки дотику шуканої площини.

977. Конус: $x^2 - 4xz - 8yz = 0$. Вказівка. Всяка пряма, яка проходить через початок координат, може бути подана рівняннями: $x = mz$ і $y = nz$; розв'язуючи їх сумісно з рівняннями даної поверхні, дістанемо: $(m^2 + 2n^2 + 2mn + 2)\,z^2 - 2\,(m + 2n + 2)\,z + 2 = 0$. Для всіх прямих, які дотикаються до поверхні, це рівняння повинно мати дійсні і рівні корені, тобто підкорінний вираз, одержаний при розв'язанні рівняння, повинен дорівнювати нулеві: $-m^2 + 4m + 8n = 0$. Виключаючи кутові коефіцієнти m і n і з цього співвідношення і з рівнянь прямої, дістанемо рівняння шуканого геометричного місця.

978. Еліпс: $\begin{cases} 3x^2 + 8xy + 8y^2 - 4x - 8y = 0, \\ x + 2y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$ Вказівка. Щоб знайти геометричне місце точок дотику конуса до поверхні, розв'язуємо сумісно рівняння твірної конуса ($x = mz$ і $y = nz$) і рівняння поверхні. Для визначення аплікати точки дотику дістанемо рівняння: $(m^2 + 2n^2 + 2mn + 2)\,z^2 - 2\,(m + 2n + 2)\,z + 2 = 0$, звідки внаслідок рівності коренів цього рівняння маємо:

$z = \frac{m + 2n + 2}{m^2 + 2n^2 + 2mn + 2}$. Виключивши з цього рівняння і з рівнянь твірної обидва параметри m і n, дістанемо співвідношення, яке пов'язує координати точок дотику $x^2 + 2y^2 + 2xy + 2z^2 - x - 2y - 2z = 0$. Отже, шукана лінія дотику лежить на первісній і на заново одержаній поверхні, а оскільки рівняння цих поверхонь мають однакові старші члени, то, віднявши одно рівняння з другого, дістанемо рівняння площини $x + 2y + 2z - 2 = 0$, яка проходить через ту ж саму лінію дотику. Отже, шукана лінія — плоска, і її можна розглядати як перетин конуса $x^2 - 4xz - 8yz = 0$ з площиною $x + 2y + 2z - 2 = 0$ або як перетин цієї ж площини з циліндром, який проектує вивчену криву на одну з площин координат.

979. Еліптичний циліндр: $x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 4y = 0$. Вказівка. Прямі, паралельні осі z, зображаються рівняннями $x = a$ і $y = b$. Розв'язуючи їх сумісно з рівняннями поверхні і користуючись умовами дотику, дістанемо співвідношення, яке повинні задовольняти параметри a і b, а саме: $a^2 + 2b^2 + 2ab - 2a - 4b = 0$. Виключивши параметри a і b з одержаного рівняння і з рівнянь твірної, дістанемо рівняння шуканого геометричного місця.

980. a) $7x+17y+19z+19=0$; b) $2x+y+3z+4=0$; c) $x+5y+6z+7=0$; d) $3x+6y+8z+9=0$. Вказівка. Користуємося рівнянням (11), даним у тексті. Якщо хорди паралельні осі x, то їх кутові коефіцієнти будуть такі: $m=1$; $n=0$ і $p=0$ і рівняння спряженої з ними площини буде $F_x=0$. Рівняння $F_y=0$ і $F_z=0$ зображають діаметральні площини, спряжені з хордами, паралельними осі y і осі z.

981. $x=y=z$; $x-2y+1=0$. Вказівка. Рівняння діаметра ми дістанемо як рівняння прямої, яка проходить через початок координат і через центр даної поверхні.

982. $2x-2y+3z=0$; $m:n:p=1:-2:2$. Вказівка. Визначаємо координати центра і, знаючи три точки шуканої площини, пишемо її рівняння. Кутові коефіцієнти спряжених хорд визначаємо з умови пропорціональності коефіцієнтів одержаного рівняння і загального рівняння діаметральної площини даної поверхні. При розв'язанні цієї задачі можна скористатися рівнянням зв'язку діаметральних площин і визначити параметри з умови проходження площини через дві дані точки: тоді обчислювати координати центра не потрібно.

983. $x+3y-z-1=0$; $\dfrac{x+{}^1/_3}{2}=\dfrac{y-{}^2/_9}{-1}=\dfrac{z+{}^2/_3}{5}$.

984. $27x-33y+37z+44=0$.

985. $\cos\varphi=\dfrac{23}{\sqrt{37\cdot 21}}$. Вказівка. Рівняння відповідної діаметральної площини: $x-6z=0$; кутові коефіцієнти спряжених хорд $m:n:p=1:-2:4$.

986. $2x+y+4z=0$.

987. $7x-28y-14z-8=0$. Вказівка. Кожна діаметральна площина має безліч спряжених діаметральних площин — всі площини, які проходять через спряжений їй діаметр.

988. $3x-5y-6=0$; $x-z=0$ і $5x-y-10=0$; див. вказівку до задачі 987.

989. $m_1=n_1=0$, $p_1=1$; $m_2=n_2$, $p_2=0$; $m_3=-n_3$, $p_3=0$. Вказівка. Корені розв'язуючого рівняння такі: $s_1=-5$; $s_2=3$; $s_3=1$. Головні осі паралельні осі z і бісектрисам кута (xy).

990. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{0}$; $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$; $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Вказівка. Знаходимо центр поверхні $(+1;\ -1;\ +1)$, головні напрями і проводимо через центр прямі, які мають головні напрями. Корені розв'язуючого рівняння $s_1=-2$; $s_2=3$; $s_3=6$.

991. $x-y=0$; $x+y-z=0$; $3x+3y+6z-2=0$. Вказівка. Знаходимо головні напрями: $m_1=-1, n_1=1$, $p_1=0$; $m_2:n_2:p_2=1:1:-1$; $m_3:n_3:p_3=1:1:2$ і пишемо рівняння площин, з ними спряжених. Корені розв'язуючого рівняння $s_1=2$; $s_2=3$; $s_3=-6$.

992. $x^2+2y^2+3z^2-2=0$. Вказівка. Щоб скласти шукані формули перетворення координат, знаходимо координати центра: $x_0=1$; $y_0=2$; $z_0=-1$, тобто координати нового початку; потім знаходимо напрям нових осей, які збігаються з головними напрямами поверхні. Заздалегідь знаходимо корені розв'язуючого рівняння $s_1=3$; $s_2=6$ і $s_3=9$; тоді визначаються головні напрями: $m_1:n_1:p_1=1:2:2$; $m_2:n_2:p_2=2:1:-2$; $m_3:n_3:p_3=2:-2:1$ і кути, утворені новими осями з старими, будуть також відомі: $\cos\alpha={}^1/_3$; $\cos\beta={}^2/_3$; $\cos\gamma={}^2/_3$; $\cos\alpha_1={}^2/_3$; $\cos\beta_1={}^1/_3$; $\cos\gamma_1=-{}^2/_3$; $\cos\alpha_2={}^2/_3$; $\cos\beta_2=-{}^2/_3$; $\cos\gamma_2={}^1/_3$. Шукані формули перетворення координат будуть: $x=\dfrac{x'+2y'+2z'+3}{3}$; $y=\dfrac{2x'+y'-2z'+6}{3}$; $z=\dfrac{2x'-2y'+z'-3}{3}$. Щоб знайти спрощене рівняння, немає необхідності користуватися цими формулами. Рівняння центральної поверхні, віднесеної до головних осей, має тільки члени

з квадратами координат і вільний член, а коефіцієнти при старших членах — знайдені уже корені розв'язуючого рівняння ($s_1 = 3$, $s_2 = 6$; $s_2 = 9$); вільний же член знаходимо як відношення дискримінанта рівняння до дискримінанта старших членів.

У даному випадку, оскільки координати центра уже визначені, простіше поставити їх замість текучих координат у ліву частину початкового рівняння, яка після цієї заміни буде дорівнювати шуканому вільному членові ($2F' = -6$). Отже, шукане рівняння поверхні, віднесеної до головних осей, буде: $3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 6 = 0$, або, після скорочення на 3, дістанемо: $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2 = 0$.

993. 1) $4x^2 + 8y^2 - 2z^2 - 5 = 0$ ($s_1 = 4$; $s_2 = 8$; $s_3 = -2$; $x_0 = -1$; $y_0 = -1$; $z_0 = +1$). 2) $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ ($s_1 = s_2 = -3$; $s_3 = 6$; $x_0 = 1$; $y_0 = 1$; $z_0 = -1$). 3) $3x^2 + 6y^2 - 2z^2 + 6 = 0$ ($s_1 = 3$; $s_2 = 6$; $s_3 = -2$; $-\frac{\Delta}{\delta} = 6$). 4) $2x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 32 = 0$ ($s_1 = 2$; $s_2 = 5$; $s_3 = 8$; $x_0 = -1$; $y_0 = -1$; $z_0 = 0$). 5) $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$ ($s_1 = 3$; $s_2 = 6$; $s_3 = 0$). Поверхня має цілу лінію центрів: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$. Переносимо початок координат в одну з її точок, наприклад у точку (0; 1; 0); тоді $2F' = -6$.

994. $x^2 + y^2 = 3$. Вказівка. Оскільки дана поверхня є поверхня обертання, то тільки один головний напрям означений, а саме той, який відповідає кореневі розв'язуючого рівняння $s = 0$. Приймемо його за напрям нової осі z; $m_3 : n_3 : p_3 = 2 : -1 : 2$. Два других напрями можуть бути взяті довільно, тільки б вони були перпендикулярні між собою і перпендикулярні до знайденого напряму. Якби, наприклад, вибрати $m_1 : n_1 : p_1 = 1 : 0 : -1$ і $m_2 : n_2 : p_2 = 1 : 4 : 1$, то формули перетворення матимуть вигляд: $x = \frac{3x' + y' + 2\sqrt{2}z'}{3\sqrt{2}}$, $y = \frac{4y' - \sqrt{2}z'}{3\sqrt{2}}$ і $z = \frac{-3x' + y' + 2\sqrt{2}z'}{3\sqrt{2}}$. Початок координат зберігаємо оскільки лінія центрів $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ проходить через початок координат (рівняння не має членів першого степеня).

995. $14x^2 - 4y^2 - \frac{16z}{\sqrt{14}} = 0$. Вказівка. Корені розв'язуючого рівняння: $s_1 = 14$; $s_2 = 4$; $s_3 = 0$. Головні напрями $m_1 : n_1 : p_1 = 2 : 4 : 1$; $m_2 : n_2 : p_2 = 1 : -1 : 2$; $m_3 : n_3 : p_3 = -3 : 1 : 2$. Формули перетворення напрямів осей: $x = \frac{2x'}{\sqrt{21}} + \frac{y'}{\sqrt{6}} - \frac{3z'}{\sqrt{14}}$; $y = \frac{4x'}{\sqrt{21}} - \frac{y'}{\sqrt{6}} + \frac{z'}{\sqrt{14}}$ і $z = \frac{x'}{\sqrt{21}} + \frac{2y'}{\sqrt{6}} + \frac{2z'}{\sqrt{14}}$. Після перетворення координат рівняння поверхні матиме вигляд:

$$14x^2 - 4y^2 + \frac{48x}{\sqrt{21}} + \frac{24y}{\sqrt{6}} - \frac{16z}{\sqrt{14}} + 1 = 0.$$

Далі, вибираємо початок координат так, щоб $F_{x'} = 0$, $F_{y'} = 0$ і $2F' = 0$ $\left[F_{x'} = 14x' + \frac{24}{\sqrt{21}};\ F_{y'} = -4y' + \frac{12}{\sqrt{6}}\right]$.

Після перенесення початку координат рівняння поверхні буде: $14x^2 - 4y^2 -$

$-\frac{16}{\sqrt{14}}=0$. Задачу можна розв'язати і простіше, знаючи. що найпростіше рівняння параболоїда має вигляд: $s_1x^2+s_2y^2\pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{s_1s_2}}z=0$.

996. $2x^2+5y^2-5\sqrt{2}z=0$. Вказівка. Див. вказівку до задачі 995.

997. Двопорожнинний гіперболоїд. Вказівка. Обчислюємо перш за все дискримінанти рівняння поверхні і старших членів: $\Delta=-16$, $\delta=+32$; обидва вони не дорівнюють нулеві, і, отже, дане рівняння зображає центральну поверхню, яка не вироджується в конус. Щоб визначити тип поверхні, звертаємося до розв'язуючого рівняння: $s^3+s^2-22s-32=0$. Розв'язувати його немає потреби; досить визначити знаки його коренів: з цією метою можемо скористатися таким правилом: якщо ліва частина кубічного рівняння, яке має тільки дійсні корені, розміщена за спадаючими степенями невідомого, то число додатних коренів рівняння дорівнює числу змін знаків у ряду його коефіцієнтів, а число від'ємних коренів дорівнює числу сталостей знаків у цьому ряду. В нашому випадку коефіцієнти розв'язуючого рівняння мають такі знаки: $++--$, тобто ми маємо одну зміну знаків (між другим і третім коефіцієнтами) і дві сталості (між першим і другим і між третім і четвертим). Отже, розв'язуюче рівняння має один додатковий і два від'ємні корені; крім того, відношення дискримінантів $\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)$ від'ємне, а тому дане рівняння, згідно з таблицею, наведеною в тексті, зображає двопорожнинний гіперболоїд.

998. 1) Однопорожнинний гіперболоїд. Вказівка. Поверхня центральна. ($\Delta\neq 0$; $\delta\neq 0$). Розв'язуюче рівняння ($s^3-2s^2-3s+4=0$) має два додатних і один від'ємний корінь, крім того, $\frac{\Delta}{\delta}<0$. 2) Двопорожнинний гіперболоїд. Вказівка. $\Delta\neq 0$; $\delta\neq 0$; $\frac{\Delta}{\delta}>0$. Розв'язуюче рівняння ($s^3-6s^2+7s+2=0$) має два додатних і один від'ємний корінь. 3) Еліпсоїд. Вказівка. $\Delta\neq 0$; $\delta\neq 0$; $\frac{\Delta}{\delta}<0$. Всі корені розв'язуючого рівняння ($s^3-6s^2+11s-6=0$) додатні. 4) Гіперболічний параболоїд. Вказівка. $\Delta\neq 0$, $\delta=0$; $s_1=0$; $s_2>0$; $s_3<0{,}5$. 5) Еліптичний циліндр. Вказівка. $\Delta=0$; $\delta=0$; $s_1=0$; $s_2>0$; $s_3>0$. Можна також скористатися перетином циліндра з площиною (xy), який дає дійсний еліпс; $\begin{cases}4x^2+2y^2-4xy-2y-4=0;\\ z=0.\end{cases}$

999. $31x^2-51y^2+20z^2-26xy+60xz+20yz+26x+102y-20z-51=0$. Пара площин, які перетинаються по спільному перпендикуляру даних прямих, проведеному в точці їх перетину.

1000. Гіперболічний параболоїд $y^2+2yz-z^2+4x-2=0$.

ЧАСТИНА ЧЕТВЕРТА

1001. Див. рис. 153. $\overline{MA}=-\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}$; $\overline{MB}=\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{2}$; $\overline{MC}=\frac{\mathrm{b}+\mathrm{a}}{2}$; $\overline{MD}=\frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{2}$.

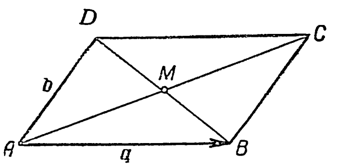

Рис. 153.

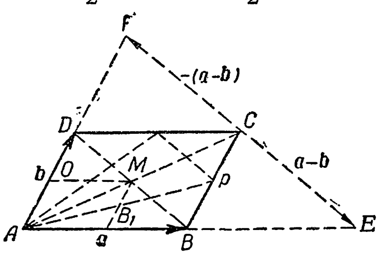

Рис. 154.

1002. Див. рис. 154. 1) з ΔACE; 2) з ΔACF; 3) з ΔABD; 4) з паралелограма AB_1MD_1; 5) з ΔMBC; 6) і 7) з ΔAPQ.

1003. a) $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$; $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ і $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ можна зобразити діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. З рівності довжин діагоналей паралелограма випливає, що він прямокутний; b) $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні. Діагоналі паралелограма можуть бути колінеарні лише тоді, коли його сторони колінеарні; c) $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ мають однаковий напрям, бо рівні одиничні вектори їх напрямів; d) $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні і мають однаковий напрям; e) і f) $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні, але мають протилежний напрям.

1004. $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$, бо діагональ ділить кут паралелограма пополам тільки у випадку ромба.

1005. a) $\alpha = \beta = 0$, якщо $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ неколінеарні; b) $\alpha = \beta$, якщо $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні і мають протилежні напрями; c) $\alpha = -\beta$, якщо $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ мають однаковий напрям.

1006. Див. рис. 155, $\overline{AM} = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2}$ або $\overline{AM} = \frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{2}$; $\overline{BN} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2}$ або $\overline{BN} = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{2}$; $\overline{CP} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{2}$ або $\overline{CP} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2}$.

1007. $\overline{AM} = -\left(\mathbf{b} + \frac{\mathbf{a}}{2}\right)$; $\overline{BN} = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}}{2}$; $\overline{CP} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2}$.

1008. $\overline{D_1A} = -(\mathbf{c} + {}^1/_5\,\mathbf{a})$; $\overline{D_2A} = -(\mathbf{c} + {}^2/_5\,\mathbf{a})$; $\overline{D_3A} = -\mathbf{c} + {}^3/_5\,\mathbf{a})$; $\overline{D_4A} = -(\mathbf{c} + {}^4/_5\,\mathbf{a})$.

1009. В к а з і в к а. Щоб три вектори $\overline{AM}$, $\overline{MN}$ і $\overline{CP}$ (рис. 155) могли служити сторонами трикутника, необхідно, щоб $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = 0$. Справедливість цього рівняння перевіримо, виразивши кожну з медіан через сторони основного трикутника $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, пам'ятаючи, що $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$.

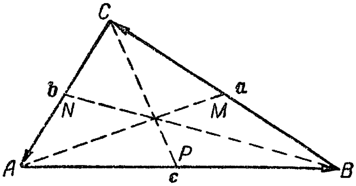

Рис. 155.

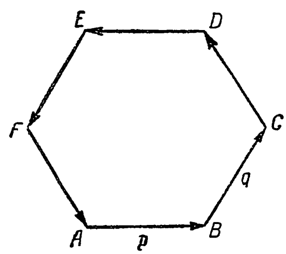

Рис. 156.

1010. $\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{c}}{c} - \frac{\mathbf{b}}{b}$; $\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}$; $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{b}}{b} - \frac{\mathbf{a}}{a}$; $\mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{c}}{c} + \frac{\mathbf{b}}{b}$; $\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{c}}{c}$; $\mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{b}}{b} + \frac{\mathbf{a}}{a}$; $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}_1$ і $\mathbf{r}_1$ мають напрями бісектрис внутрішніх кутів. A, B і C; $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}_2$ і $\mathbf{r}_2$ мають напрям бісектрис однойменних зовнішніх кутів трикутника (див. задачу 1004).

1011. Абсолютна величина суми не зміниться, але вектор-сума виявиться повернутим на той самий кут. Вказаний поворот усіх доданків не вплине на суму лише в двох випадках: 1) коли кут повороту $\omega = 2\pi n$ (де n — будь-яке ціле число) і 2) коли сума дорівнює нулеві.

1012. В к а з і в к а. Кожний парний добуток — довжини сторони трикутника на одиничний перпендикулярний вектор — є вектор, довжина якого дорівнює довжині відповідної сторони, а напрям — їй перпендикулярний. Отже, цей вектор можна одержати з вектора, який збігається з стороною трикутника після повороту на прямий кут (див. задачу 1011).

1013. В к а з і в к а. Рівність нулеві розглядуваної суми випливає найпростіше з того факту, що поворот всіх доданків на кут 120° (або 240°) не змінить суми (див. задачу 1011).

1014. Сума векторів, які з'єднують центр правильного n-кутника з його вершинами, рівними нулеві, оскільки не зміниться від повороту всіх додаваних векторів на кут $\omega = \frac{2\pi}{n}$ (або на кут, йому кратний).

1015. Див. рис. 156. a) $\overline{CD} = -\mathrm{p} + \mathrm{q}$; $\overline{DE} = -\mathrm{p}$; $\overline{EF} = -\mathrm{q}$; $\overline{FA} = \mathrm{p} - \mathrm{q}$; $\overline{AC} = \mathrm{p} + \mathrm{q}$; $\overline{AD} = 2\mathrm{q}$; $\overline{AE} = 2\mathrm{q} - \mathrm{p}$; b) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$; $\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = -1$; $\frac{\overline{CF}}{\overline{AB}} = -2$.

Відношення $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ смислу не має, бо ці два вектори неколінеарні.

1016. $\overline{AC} = {}^3/_2\mathrm{m} + {}^1/_2\mathrm{n}$; $\overline{AD} = \mathrm{m} + \mathrm{n}$; $\overline{AF} = -{}^1/_2\mathrm{m} + {}^1/_2\mathrm{n}$; $\overline{EF} = -{}^1/_2\mathrm{m} - {}^1/_2\mathrm{n}$.

1017. $\overline{AB} = {}^1/_2\mathrm{a} - {}^1/_2\mathrm{b}$; $\overline{BC} = {}^1/_2\mathrm{a} + {}^1/_2\mathrm{b}$; $\overline{CD} = -{}^1/_2\mathrm{a} + {}^1/_2\mathrm{b}$; $\overline{DA} = -{}^1/_2\mathrm{a} - {}^1/_2\mathrm{b}$.

1018. $\overline{BC} = -\frac{b}{a}\mathrm{a} + \mathrm{b}$; $\overline{CD} = \frac{b-a}{a}\mathrm{a}$; $\overline{AC} = \frac{a-b}{a}\mathrm{a} + \mathrm{b}$; $\overline{BD} = -\mathrm{a} + \mathrm{b}$.

1019. $\overline{AD} = \frac{m}{m+n}\mathrm{b} + \frac{n}{m+n}\mathrm{c}$.

1020. a) і b) розкладення завжди можливе і має єдиний розв'язок; c) і d) розв'язків може бути два, один або ні одного залежно від модулів даних доданків.

1021. $\overline{BC} = \overline{B'C'} = \mathrm{q}$; $\overline{CD} = \overline{C'D'} = -\mathrm{p}$; $\overline{AB} = \overline{DC'} = \mathrm{p} + \mathrm{r}$; $\overline{AD'} = \overline{BC'} = \mathrm{q} + \mathrm{r}$; $\overline{AC} = \overline{A'C'} = \mathrm{p} + \mathrm{q}$; $\overline{AC'} = \mathrm{p} + \mathrm{q} + \mathrm{r}$; $\overline{CA'} = -\mathrm{p} - \mathrm{q} + \mathrm{r}$; $\overline{D'A'} = -\mathrm{q}$; $\overline{A'B'} = \mathrm{p}$; $\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \mathrm{r}$; $\overline{BA'} = \overline{CD'} = -\mathrm{p} + \mathrm{r}$; $\overline{DA'} = \overline{CB'} = -\mathrm{q} + \mathrm{r}$; $\overline{BD} = \overline{B'D'} = -\mathrm{p} + \mathrm{q}$; $\overline{BD'} = -\mathrm{p} + \mathrm{q} + \mathrm{r}$; $\overline{DB'} = \mathrm{p} - \mathrm{q} + \mathrm{r}$.

1022. $\overline{BC} = \mathrm{c} - \mathrm{b}$; $\overline{CD} = \mathrm{d} - \mathrm{c}$; $\overline{DB} = \mathrm{b} - \mathrm{d}$; $\overline{DM} = \frac{\mathrm{b} + \mathrm{c}}{2} - \mathrm{d}$; $\overline{AQ} = \frac{\mathrm{b} + \mathrm{c} + \mathrm{d}}{3}$.

1023. a) $\mathrm{l} + \mathrm{m} + \mathrm{n} = 0$; b) $2\mathrm{l} + \mathrm{m} - \mathrm{n} = 0$; c) l, m, n,— некомпланарні. В к а з і в к а. Щоб знайти лінійну залежність між l, m і n, треба з трьох рівностей, які їх визначають, виключити допоміжні вектори a, b і c; якщо ж цього зробити не можна, вектори l, m і n некомпланарні і тоді з даних рівностей можна дістати розкладення a, b і c по векторах l, m і n. Так, у випадку c) ми дістанемо $\mathrm{a} = \mathrm{l} - \mathrm{m}$; $\mathrm{b} = -\mathrm{l} + 2\mathrm{m} - \mathrm{n}$ і $\mathrm{c} = \mathrm{l} - \mathrm{m} + \mathrm{n}$.

1024. a) $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, b) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$. В к а з і в к а. Користуємося умовою компланарності векторів: $\mathrm{p} = \lambda\mathrm{q}$; c) співвідношення між коефіцієнтами, яке не залежить від вибору основних векторів a, b і c, не існує.

1025. $3\mathrm{m} + 2\mathrm{n} - 3\mathrm{p} + 4\mathrm{q} = 0$. В к а з і в к а. Шукана лінійна залежність утворюється виключенням a, b і c з даних чотирьох рівностей.

1026. $s = {}^2/_5\mathrm{m} + {}^3/_5\mathrm{n} + \frac{3}{5}\mathrm{p}$. В к а з і в к а. Див. задачу 1025.

1027. a) Може бути чотири вектори, з яких ніякі два не є колінеарними і ніякі три не є компланарними; якщо два з даних векторів колінеарні, то всі чотири компланарні; якщо три з них колінеарні, то колінеарні всі чотири; якщо три з них компланарні, то компланарні всі чотири; b) **b**, **c** і **d** компланарні; c) **c** і **d** колінеарні; d) $\mathbf{d} = 0$ — йому можна приписати будь-який напрям.

1028. $\lambda = \mu = 0$, якщо $\mathbf{c} = 0$, $\lambda = 0$ і $\mu \neq 0$, якщо **c** і **b** колінеарні; $\lambda \neq 0$ і $\mu = 0$; якщо **c** і **a** колінеарні.

1029. Ні. З умови задачі випливає, що вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ перпендикулярний до осі проекції.

1030. Несправедливо; добуток вектора **a** на скаляр a не може дорівнювати скаляру, а являє собою вектор, колінеарний вектору **a**; 2) справедливо — на основі правила множення скалярів; якщо **a** і **b** неколінеарні; 3) несправедливо (див. вип. 1); 4) несправедливо; 5) справедливо; 6 і 7) справедливо на основі властивостей переміщуваності і розподільності скалярного множення; 8) справедливо тільки для колінеарних векторів.

1031. Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

1032. Скалярного добутку трьох векторів бути не може, бо скалярний добуток двох векторів є скаляр, помноживши який на третій вектор, дістанемо вектор, колінеарний цьому останньому; тому і скалярний куб вектора розглядати немає смислу. Куб скаляра вектора, як і всякого скаляра, має певний смисл.

1034. $\mathbf{ab} = -5$. Розв'язання: $\mathbf{ab} = (3\mathbf{p} - 2\mathbf{q})(\mathbf{p} + 4\mathbf{q}) = 3\mathbf{pp} + 12\mathbf{pq} - 2\mathbf{pq} - 8\mathbf{qq} = 3 - 8 = -5$, бо за умовою $\mathbf{p}^2 = \mathbf{q}^2 = 1$ і $\mathbf{pq} = \mathbf{qp} = 0$.

1035. 143.

1036. 104.

1037. $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca} = -3/2$. Вказівка. Завдяки умові $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ ми можемо розглядати ці три вектори як сторони правильного трикутника, а тому кут між кожними двома послідовними векторами дорівнює 120°.

1038. $\mathbf{pq} = 9$.

1040. $|\mathbf{a}| = 5$. Розв'язання. $a = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{(3\mathbf{m} - 4\mathbf{n})^2} = \sqrt{9m^2 - 24(\mathbf{mn}) + 16n^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

1041. $\mathbf{P} = \sqrt{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 + \gamma^2 c^2}$.

1042. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$.

Примітка. Кут $(\widehat{\mathbf{ab}})$ є зовнішній кут трикутника; суміжний з ним внутрішній кут позначений C.

1043. $|A + B| = 15$; $|A - B| = \sqrt{593} \approx 24{,}35$. **1044.** $\mathbf{R} = \sqrt{37}$.

1045. Рівнодіюча дорівнює нулеві (див. задачу 1011).

1046. $(\widehat{\mathbf{ab}}) = \frac{\pi}{4}$ Розв'язання. $\cos(\widehat{\mathbf{ab}}) = \frac{\mathbf{ab}}{ab} = \frac{(3\mathbf{p} + 2\mathbf{q})(\mathbf{p} + 5\mathbf{q})}{\sqrt{(3\mathbf{p} + 2q)^2} \cdot \sqrt{(\mathbf{p} + 5q)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1047. $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. Вказівка. Виразити заздалегідь медіани через катети.

1048. $A = \frac{\pi}{2}$; $B = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$ і $C = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **1049.** $Q = 7$; $\cos(\widehat{\mathbf{Qm}}) = 6/7$; $\cos(\widehat{\mathbf{Qn}}) = -2/7$; $\cos(\widehat{\mathbf{Qp}}) = 3/7$.

1050. Вказівка. Достатньо показати, що у випадку ромба, тобто коли $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, скалярний добуток діагоналей дорівнює нулеві.

1051. Вказівка. Обчислити скалярний добуток **pc** і переконатися, що він дорівнює нулеві.

1052. $\alpha = 40$. 1053. $\widehat{(st)} = \frac{\pi}{3}$. 1054. $\text{пр.}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \frac{\mathbf{AB}}{B} = 2$; $\cos\widehat{(\mathbf{Bm})} = {}^5/_{13}$; $\cos\widehat{(\mathbf{Bn})} = -{}^{12}/_{13}$.

1055. 1) Задача не має розв'язку, якщо а $= 0$ і $P \neq 0$. 2) Якщо $P = 0$ і а $= 0$, то за x можна взяти будь-який вектор. 3) Якщо $P = 0$ і а $\neq 0$, задача може мати безліч розв'язків; за x можна взяти будь-який вектор, перпендикулярний до а. 4) Якщо $P \neq 0$ і $a \neq 0$, то існує безліч розв'язків. Серед них є вектор найменшої довжини (колінеарний **а**), саме $\mathbf{x} = \frac{P}{a^2}\mathbf{a}$. Решта розв'язків утвориться з вказаного додаванням до нього будь-якого вектора, перпендикулярного до а (див. задачу 1039).

1056. $|\overline{AM}| = 6$; $|\overline{AD}| = \frac{12\sqrt{5}}{5}$. Вказівка. Треба заздалегідь виразити вектор-медіану і вектор-висоту через сторони трикутника, а потім уже через одиничні вектори: $\overline{AM} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$ і $\overline{AD} = \overline{AB} + \lambda \cdot \overline{BC}$, де λ треба обчислити з умови перпендикулярності $\overline{AD}$ і $\overline{BC}$.

1057. $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{ab}}{a^2}\,\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

1058. Перші три пальці лівої руки становлять ліву трійку, ті самі пальці правої руки — праву трійку.

1062. $|\mathbf{ab}| = \mathbf{c}$; $|\mathbf{bc}| = \mathbf{a}$; $|\mathbf{ca}| = \mathbf{b}$.

1063. $|\mathbf{ab}| = -\mathbf{c}$; $|\mathbf{bc}| = -\mathbf{a}$; $|\mathbf{ca}| = -\mathbf{b}$.

1064. $\alpha = -15$.

1067. Змінити напрям обертання вектора **а**.

1069. Задача не має розв'язку в двох випадках: 1) коли $\mathbf{B} = 0$ і $\mathbf{A} \neq 0$ і 2) коли **А** і **В** не перпендикулярні одно одному. Якщо ж **А** і **В** взаємно перпендикулярні, то існує безліч векторів **X**, які задовольняють умови задачі. Всі вони перпендикулярні до **А**. Серед них є вектор (перпендикулярний до **В**) найменшої довжини, а саме: його модуль $|X| = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{B}|}$; решта розв'язків утворюється з вказаного вектора додаванням до нього будь-якого вектора, паралельного вектору **В** (див. задачу 1065).

1071. Рівності 1) і 2) не вірні, бо $[\mathbf{ab}] \neq [\mathbf{ba}]$. Рівність 3) справедлива лише у випадку $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

1072. $[(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})] = 2|\mathbf{ba}|$. Ця тотожність стверджує, що площа паралелограма, побудованого на діагоналях даного паралелограма, вдвічі більша площі основного паралелограма.

1073. $\alpha = a^2b^2$.

1074. $|[\mathbf{PQ}]| = 11$.

1075. 37,5 кв. од.

1076. $CD = 3{,}8$.

1077. $\mathbf{P} = 3\mathbf{a} - 17\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$.

1078. $|\mathbf{Q}| = 21$.

1079. $\sin\varphi = \sqrt{\frac{248}{273}}$.

1080. $\text{пр.}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = {}^6/_7$, якщо **p**, **q** і **r** становлять праву трійку; $\text{пр.}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = -{}^6/_7$, якщо **p**, **q** і **r** становлять ліву трійку.

1082. Вказівка. Якщо вектори **а**, **b** і **с** компланарні, то при обчисленні їх змішаного добутку можна замінити **с** через **а** і **b**, тобто $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

1083. $v = |4([\mathbf{CB}]\,\mathbf{A})|$.

1084. 1) $v = 25$ куб. од.; 2) $v = 0$. Вказівка. Друга відповідь очевидна, бо з розкладу відповідних векторів видно, що вони компланарні.

1085. $h = \dfrac{49}{\sqrt{323}}$.

1086. 1) і 3) компланарні; 2) некомпланарні.

1087. Вказівка. Скористатися формулою розкладання подвійного векторного добутку.

1089. a) Рівності рівнозначні, тобто з $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ випливає, що $\alpha\mathbf{A} = \alpha\mathbf{B}$; з $\alpha\mathbf{A} = \alpha\mathbf{B}$ випливає, що $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Іншими словами, обидві частини векторної рівності можна помножити або поділити на один і той же скаляр. b) З першої рівності випливає друга, але не навпаки. Помноживши рівні вектори скалярно на один і той же вектор, ми дістаємо рівні скаляри, але рівні скалярні добутки не можна «скоротити» на спільний множник, бо з рівності $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$ випливає тільки, що $(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{C} = 0$, тобто $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \perp \mathbf{C}$. c) З першої рівності випливає друга, але не навпаки. Помноживши рівні вектори на один і той же третій (векторно), дістанемо рівні вектори, але рівні векторні добутки не можна «скорочувати» на спільний співмножник. З рівності $|\mathbf{AC}| = |\mathbf{BC}|$ випливає лише, що $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \parallel \mathbf{C}$. d) Рівності рівнозначні.

1090. Вказівка. Помножити всі члени даної векторної рівності на вектор $\mathbf{c}$ (скалярно) і скористатися тим, що змішаний добуток дорівнює нулеві, тоді два з співмножників рівні. Після перетворення дістанемо $[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c} = 0$, а це і є умовою компланарності трьох векторів.

1091. $[\mathbf{ca}]\mathbf{b} = 0$. Вказівка. Корисно, не користуючись готовими умовами компланарності трьох векторів, розв'язати задачу, виключивши з даної рівності $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ коефіцієнти λ і μ. Виняток λ може бути досягнутий множенням обох частин рівності векторно на $\mathbf{a}$. Виключення μ може бути досягнуто множенням уже перетвореної рівності на $\mathbf{b}$ (скалярно).

1092. $\mathbf{x} = \dfrac{\alpha\mathbf{b} + [\mathbf{ac}]}{\mathbf{ab}}$. Розв'язання. Помножимо обидві частини другої рівності $[\mathbf{xb}] = \mathbf{c}$ векторно на $\mathbf{a}$: $[[\mathbf{xb}]\,\mathbf{a}] = [\mathbf{ca}]$. Розкладемо подвійний векторний добуток $\mathbf{b}\,(\mathbf{xa}) - \mathbf{x}(\mathbf{ba}) = [\mathbf{ca}]$. Заміняючи з першої рівності $\mathbf{xa} = \alpha$, одержимо $\alpha\,\mathbf{b} - \mathbf{x}\,(\mathbf{ba}) = [\mathbf{ca}]$. Розв'язавши це рівняння відносно $\mathbf{x}$, дістанемо вищенаведену відповідь.

1093. $\mathbf{x} = \dfrac{\alpha\,[\mathbf{bc}] + \beta\,[\mathbf{ca}] + \gamma\,[\mathbf{ab}]}{[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}}$. Розв'язання. З даних трьох рівнянь намагаємось дістати такі скалярні добутки, рівні нулеві:

$$\begin{array}{r|l}
\mathbf{xa} = \alpha & \cdot\,\beta \\
(-)\quad & \\
\mathbf{xb} = \beta & \cdot\,\alpha \\
\hline
\mathbf{x}(\alpha\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}) = 0, \text{ тобто } \mathbf{x} \perp \alpha\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}, &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\mathbf{xb} = \beta & \cdot\,\gamma \\
(-)\quad & \\
\mathbf{xc} = \gamma & \cdot\,\beta \\
\hline
\mathbf{x}\,(\beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{b}) = 0, \text{ тобто } \mathbf{x} \perp \beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{b}, &
\end{array}$$

а якщо $\mathbf{x}$ перпендикулярний до двох даних векторів, то він колінеарний їх векторному добуткові: $\mathbf{x} = \lambda\,[(\alpha\mathbf{b} - \beta\mathbf{a})\,(\beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{b})] = \lambda \cdot \beta\,\{\alpha\,[\mathbf{bc}] + \beta\,[\mathbf{ca}] + \gamma\,[\mathbf{ab}]\}$. Для визначення λ помножаємо обидві частини скалярно на $\mathbf{b}$ і заміняємо $\mathbf{xb} = \beta$; тоді дістаємо $\beta = \lambda\beta\,\{\alpha\,[\mathbf{bc}]\,\mathbf{b} + \beta\,[\mathbf{ca}]\,\mathbf{b} + \gamma\,[\mathbf{ab}]\,\mathbf{b}\} = \lambda\beta^2\,([\mathbf{ca}]\,\mathbf{b})$, звідки

$$\lambda = \frac{1}{\beta\,([\mathbf{ca}]\,\mathbf{b})} = \frac{1}{\beta\,([\mathbf{ab}]\,\mathbf{c})}.$$

Встановлюючи це значення λ в одержаний вираз для $\mathbf{x}$, дістанемо вищенаведену відповідь.

1094. $r_4 = r_1 + r_3 - r_2$.

1095. У точці перетину діагоналей паралелограма. (Відповідь єдина). Вказівка. При будь-якому виборі полюса для всякого паралелограма маємо $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$, тобто $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2\,(r_2 + r_4)$.

1096. Вказівка. Середини всіх трьох відрізків мають один і той же радіус-вектор $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{4}$, де $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ і $\mathbf{r}_4$ означають радіуси-вектори вершини тетраедра.

1097. Вказівка. Заздалегідь вивести формулу для радіуса-вектора центра ваги трикутника: $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}$, де r_1, r_2 і r_3 — радіуси-вектори вершин при довільно вибраному полюсі.

1098. Вказівка. Позначивши через r_1, r_2, r_3 ... r_n радіуси-вектори даних матеріальних точок (при довільно вибраному полюсі), заздалегідь показати, що їх центр ваги визначається радіусом-вектором $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\dots+\mathbf{r}_n}{n}$.

1099. $r_2 - r_1 = \lambda (r_3 - r_1)$ або $[(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)] = 0$. Вказівка. Умова виражає колінеарність векторів AB і AC.

1100. Три точки колінеарні.

1101. $\alpha (r_2 - r_1) + \beta (r_3 - r_1) + \gamma (r_4 - r_1) = 0$, де α, β і γ не рівні нулеві одночасно.

1102. $S = {}^1/_2 \,|[r_2 - r_1)(r_3 - r_1]|$.

1102*. Вказівка. Скористатися тим, що площа трикутника ABC дорівнює нулеві.

1103. $\overline{AB} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\overline{BC} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $\overline{CA} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

1104. Не можна, бо вектори, задані своїми координатами, є вільні вектори. При паралельному переміщенні трикутника в просторі проекції його сторін на осі не змінюються.

1105. $B(6;\ -4;\ 5)$; $C(9;\ -6;\ 10)$; $\overline{CA}\{-7;\ 1; -7\}$.

1106. Вказівка. $r_2 - r_1 = r_3 - r_4$, тобто сторони AB і DC рівні і паралельні.

1106*. $\mathbf{r}_1' = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_2' = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{r}_2' = 0$; $\mathbf{r}_4' = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

1107. $\text{пр}_x\, \mathbf{a} = X = 13$; $\mathbf{a}_y = Y\mathbf{j} = 7\mathbf{j}$.

1108. $(\mathbf{ab}) = -20$.

1109. $a = \sqrt{154}$; $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{154}}$, $\cos\beta = \frac{8}{\sqrt{154}}$, $\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{154}}$.

1110. $\mathbf{P}\{3,\ -9,\ \pm 3\sqrt{6}\}$.

1111. $\mathbf{a}\{{}^6/_{11};\ {}^7/_{11};\ -{}^6/_{11}\}$ або $\mathbf{a}\{-{}^6/_{11};\ -{}^7/_{11};\ {}^6/_{11}\}$.

1112. $\mathbf{p}\{0;\ -{}^4/_5;\ {}^3/_5\}$ або $\mathbf{p}\{0;\ {}^4/_5;\ -{}^3/_5\}$.

1113. $\mathbf{R}\{20;\ 9;\ 12\}$; $R = 25$; $\cos\alpha = {}^{20}/_{25}$; $\cos\beta = {}^9/_{25}$; $\cos\gamma = {}^{12}/_{25}$.

1114. $\alpha = 15$; $\gamma = -{}^1/_5$.

1115. $\mathbf{P}_1 \left\{\frac{15}{\sqrt{17}};\ \frac{25}{\sqrt{17}};\ 0\right\}$ і $\mathbf{P}_2 \left\{-\frac{15}{\sqrt{17}};\ -\frac{25}{\sqrt{17}};\ 0.\right\}$

1116. $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{6}$; $\cos B = {}^4/_{21}$; $\cos C = \frac{9\sqrt{2}}{14}$.

1116*. $S = \frac{5}{2}\sqrt{17}$ кв. од.

1117. $v = 6$ куб. од. Вектори $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{R}$ утворюють ліву трійку, бо змішаний добуток є число від'ємне.

1118. a) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ і $\mathbf{C}$ некомпланарні; b) $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$ компланарні.

1119. $$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Порівняти одержаний результат з відповіддю задачі 1101 і визначити зв'язок між ними.

1120. $\frac{y_1x - x_1y}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{y_2x - x_2y}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = 0.$

1121. $\mathbf{rk} = 0$ — рівняння площини (xy); $\mathbf{rj} = 0$ —рівняння площини (xz); $\mathbf{ri} = 0$ — рівняння площини (yz); $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{k}$ — рівняння осі z; $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{i}$ — рівняння осі x; $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{j}$ — рівняння осі y.

1122. $\mathbf{r}(\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -8.$

1123. Перша точка належить вказаному геометричному місцю, а друга — ні.

1124. $\mathbf{r}^2 - 2(\mathbf{rr}_1) = 0$ або $\mathbf{r}(\mathbf{r} - 2\mathbf{r}_1) = 0.$

1125. Радіус-вектор центра $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; довжина радіуса $a = 7$.

1126. $\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) + \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = 0.$

1127. $C\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right)$; $a = {}^1/_2\,|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

1128. $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{r}^2 - 6\mathbf{ri} = 16 \\ \mathbf{rk} = 0 \end{array}\right\}$. Примітка. Друге рівняння виражає умову, що всі розглядувані точки лежать на площині (xy); без цього обмеження одно перше рівняння визначить сферу з тим же центром і радіусом.

1129. a) Кульова поверхня з центром $C(-4\mathbf{k})$ і радіусом $a = 2$; b) кульова поверхня з центром $C_1(6\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$ і радіусом $a = 15$.

1130. $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = a^2$. Вказівка. Для розв'язання задачі вводимо позначення: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ і $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$.

1131. $\mathbf{ri} = 4$. Дане геометричне місце точок є площина, перпендикулярна до осі x і яка проходить через точку $A(4; 0; 0)$.

1132. a) Площина перпендикулярна до осі y і проходить через точки $(0; -5; 0)$; b) площина перпендикулярна до осі z і проходить через точку $(0; 0; 6)$.

1134. $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$, де x і y позначають координати текучого радіуса-вектора $\mathbf{r}$.

1135. Пряма, яка проходить через точку $A(\mathbf{r}_1)$ паралельно вектору $\mathbf{a}$.

1136. $[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] = 0.$

1137. $\mathbf{rr}_1 = a^2$. Вказівка. При виведенні цього рівняння користуємося перпендикулярністю дотичної до радіуса, проведеною в точку дотику, і тим, що дана точка $A(\mathbf{r}_1)$ лежить на колі.

1138. a) $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) = 0$; b) $\left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{2} - \mathbf{r}_2\right)\right] = 0$;

c) $\mathbf{r}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_3^2 - \mathbf{r}_2^2)$; d) $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{c}_1 + \mathbf{b}_1) = 0$,

де $\mathbf{c}_1$ — одиничний вектор сторони $\overline{AB}$; $\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$ і $\mathbf{b}_1$—одиничний вектор сторони $\overline{CA}$; $\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|}$.

1139. Нормальними є рівняння 3) і 4).

1140. Див. рис. 157.

1141. Див. рис. 158.

1142. $\mathbf{r}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} - \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}\right) - \frac{5}{\sqrt{14}} = 0.$

1143. $p = 3$.

1144. $p = 1$. Див. рис. 159.

1145. $\cos(\widehat{\mathbf{ni}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos(\widehat{\mathbf{nj}}) = -\frac{3\sqrt{2}}{10}$; $\cos(\widehat{\mathbf{nk}}) = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

1146. Точки A і C лежать на даній площині, точка B не лежить на ній.

1147. $P\left(\frac{\alpha}{a^2}\,\mathbf{a}\right)$, в другому випадку $P(p \cdot \mathbf{n})$. Вказівка. Шукана точка має радіус-вектор, колінеарний a, тобто $r_1 = \lambda a$. Множник λ обчислюється з умови, що точка лежить на площині.

1148. $r_1 = {}^{10}/_9(i + 2j - 2k)$.

1149. $r({}^4/_{13}i + {}^{12}/_{13}j - {}^3/_{13}k) - 4 = 0$ або ${}^4/_{13}x + {}^{12}/_{13}y - {}^3/_{13}z - 4 = 0$, якщо текучий радіус-вектор виразити через текучі координати: $r = xi + yj + zk$.

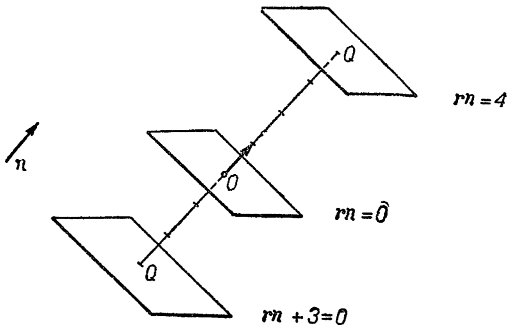

Рис. 157.

1150. $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = (rn)$; $Ax + By + Cz = (ra)$, де $r\{x, y, z\}$, $n\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ і $a\{A; B; C\}$.

1151. $r(11i - 7j - 9k) + 15 = 0$.

1152. $(r - r_1)r_1 = 0$ або $rr_1 - r_1^2 = 0$.

1153. $\delta_1 = -\dfrac{28}{\sqrt{65}}$; $\delta_2 = \dfrac{4}{\sqrt{30}}$; $\delta_3 = 0$, тобто точка лежить на площині.

1154. $r(n_1 - n_2) = p_1 - p_2$ і $r(n_1 + n_2) = p_1 = p_2$.

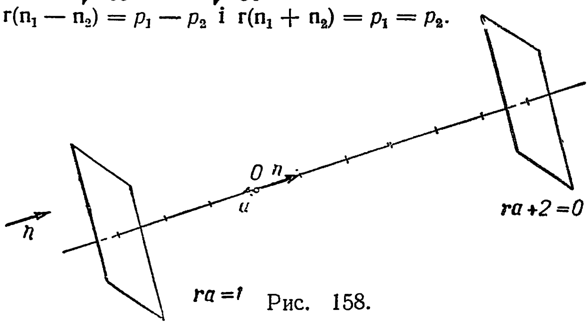

Рис. 158.

1155. 1) Площина проходить через полюс; 2) площина паралельна орту k; 3) площина проходить через полюс і паралельна i, тобто проходить через вісь x; 4) площина перпендикулярна орту k; 5) площина перпендикулярна орту i і проходить через полюс, тобто збігається з координатною площиною (yz).

1156. a) $(ri) - 2 = 0$, b) $r(j + k) + 4 = 0$; c) $r(4i + 5j - k) + 30 = 0$.

1156*. a) $rk = 0$; b) $r(3i - 8j + k) = 41$; c) $r(2j + 3k) = 0$.

1157. $r(i + 3j - 2k) - 3 = 0$.

1158. $r(i + 26j + 11k) = 0$.

1159. $r(3i - 5j) + 14 = 0$.

1160. $r(24i - 5j - 30k) - 41 = 0$.

1161. $r(-2i + 36j + 10k) = 0$.

1162. $r(11i - 5j + 4k) = 34$.

1163. 1) $\frac{\alpha}{\lambda}$; $\frac{\alpha}{\mu}$; $\frac{\alpha}{\nu}$; 2) $\frac{\alpha}{\mathbf{ai}}$; $\frac{\alpha}{\mathbf{aj}}$; $\frac{\alpha}{\mathbf{ak}}$.

1164. $\mathbf{r}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 10$.

1165. 1) Площини паралельні; 2) $\varphi = \arccos 0{,}7$; 3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

1166. $\mathbf{r}(3\mathbf{i}-8\mathbf{j}+\mathbf{k})+7=0$.

1167. $d = 7$. Вказівка. В даному випадку шукана віддаль визначається формулою $d = p_1 + p_2$, бо площини лежать по різні сторони від полюса.

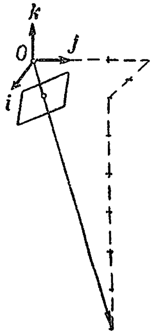

Рис. 159.

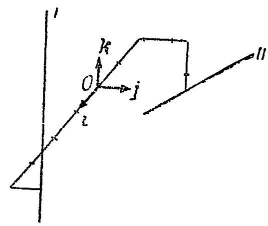

Рис. 160.

1168. $\mathbf{r}(4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}) = 57$ і $\mathbf{r}(4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}) = -3$.
1169. $\mathbf{r}(23\mathbf{i}+5\mathbf{j}-11\mathbf{k})+15=0$.
1170. $\mathbf{r}[\mathbf{ab}] = 0$.
1171. $\mathbf{r} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.
1173. $\mathbf{r}(21\mathbf{i}+4\mathbf{j}+14\mathbf{k}) = 20$.

1174. $\mathbf{r}\left(\mathbf{a}-\frac{(\mathbf{ac})}{(\mathbf{bc})}\mathbf{b}\right) = \alpha - \frac{(\mathbf{ac})}{(\mathbf{bc})}\beta$.

1175. 1) $p_1 = 13$; 2) $p_2 = \frac{3}{14}\sqrt{42}$; 3) $p_3 = 0$.

1175*. Прямі лежать в одній і тій же площині, яка проходить через полюс, паралельні між собою і розміщені на однаковій віддалі, але по різні сторони від полюса.

1176. $[\mathbf{r}(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k})] = \pm\sqrt{17}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})$.
1177. $\mathbf{rb} = 0$.

1178. 1) $\mathbf{r}_1 = \frac{[\mathbf{ab}]}{\mathbf{a}^2}$; 2) $\mathbf{r}_1 = [\mathbf{nN}]$; 3) $\mathbf{r}_1 = -0{,}72\mathbf{i}+0{,}04\mathbf{j}+0{,}8\mathbf{k}$.

1179. 1) $[\mathbf{r}[\mathbf{ab}]] = 0$; 2) $[\mathbf{r}(10\mathbf{i}-23\mathbf{j}-\mathbf{k})] = 0$.
1180. $P(2; -{}^3/_2; -{}^1/_2)$ або, користуючись іншим записом: $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - {}^3/_2\mathbf{j} - {}^1/_2\mathbf{k}$.
1181. Див. рис. 160. Вказівка. Перш ніж будувати пряму, треба знайти одну з її точок, найпростіше основу перпендикуляра, опущеного з полюса на пряму (див. задачу 1180). Для першої прямої $\mathbf{r}_1 = 4\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Для другої прямої: $\mathbf{r}_1 = -2\mathbf{i} + {}^3/_2\mathbf{j} - {}^3/_2\mathbf{k}$.
1182. 1) Пряма паралельна орту $\mathbf{i}$, тобто осі x; 2) пряма паралельна орту $\mathbf{j}$, тобто осі y; 3) пряма паралельна орту $\mathbf{k}$, тобто осі z; 4) пряма перпендикулярна орту $\mathbf{k}$, тобто паралельна площині (xy); 5) пряма перпендикулярна орту $\mathbf{i}$, тобто паралельна площині (yz); 6) пряма перпендикулярна орту $\mathbf{j}$, тобто паралельна площині (xz); 7) пряма лежить у площині (yz); 8) пряма лежить у площині; яка проходить через вісь z.

1183. 1) $[\mathbf{ra}] = \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{k}$; 2) $[\mathbf{ra}] = \gamma\mathbf{k}$; 3) $[\mathbf{ra}] = 0$.
1184. 1) $\delta_1 = \sqrt{14}$; 2) $\delta_2 = 10$; 3) $\delta_3 = 2\sqrt{41}$.
1185. $[\mathbf{r}(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})] = 18\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$.
1186. $[\mathbf{r}(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})] = 10\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
1187. $[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]] = 0$.
1187*. $[\mathbf{r}, \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}] = 3(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.
1188. 1) $[\mathbf{r}(4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})] = 5\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$; 2) $x = 2 + 4\lambda$, $y = 1 - \lambda$, $z = 3 + 2\lambda$ або $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$.

1189. 1) $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{-6}$; 2) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z+2}{7}$; 3) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{6} = \dfrac{z}{-3}$.

1190. $\dfrac{x + \frac{\beta}{\nu}}{\lambda} = \dfrac{y - \frac{\alpha}{\nu}}{\mu} = \dfrac{z}{\nu}$, якщо $\nu \neq 0$. В к а з і в к а. Помножаючи послідовно обидві частини даного векторного рівняння скалярно на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ і $\mathbf{k}$ і виразивши текучий радіус-вектор через текучі координати, дістанемо три рівняння: $\nu y - \mu z = \alpha$, $-\nu x + \lambda z = \beta$, $\mu x - \lambda y = \gamma$. Якщо $\nu \neq 0$, перші два рівняння можна переписати в тому вигляді, який дано у відповіді. Третє рівняння є їх наслідком.

1191. $[\mathbf{ra}] = \mathbf{b}$, де $\mathbf{a}\{m,n,p\}$; $\mathbf{b} = [\mathbf{r}_1\mathbf{a}] = [(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})(m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k})]$; $\mathbf{r}\{x,y,z\}$.
1192. $[\mathbf{r}(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k})] = 25\mathbf{i} - 19\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

1192*. $$\delta = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z - z_0 & x - x_0 \\ p & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

1193. $[\mathbf{r}(5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k})] = 9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$; $[\mathbf{r}(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k})] = \mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $[\mathbf{r}(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})] = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

1194. В к а з і в к а. Користуємося рівнянням прямої, яка проходить через дві точки.

1196. Умова паралельності $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2} = \dfrac{\nu_1}{\nu_2}$. Умова перпендикулярності $\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0$.
1197. 1) $[\mathbf{r}(-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})] = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 10\mathbf{k}$; 2) $[\mathbf{r}(5\mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 13\mathbf{k})] = 19\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$.

1198. 1) $\cos\varphi = -\dfrac{3}{\sqrt{87}}$; 2) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

1199. $[\mathbf{r}(4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k})] = 13(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$; $\varphi = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{7}}{6}\right)$.

1200. $\delta = 0.9\sqrt{3/11}$.
1201. $[\mathbf{r}(-3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})] = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. В к а з і в к а. Можна перенести полюс в дану точку, скористатися рівнянням перпендикуляра, опущеного з полюса на дану пряму (див. задачу 1179), і перейти назад до старого полюса.
1202. $[\mathbf{r}[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]] = 0$.
1203. $[\mathbf{r}(13\mathbf{i} + 37\mathbf{j} + 58\mathbf{k})] = 37\mathbf{i} - 245\mathbf{j} + 148\mathbf{k}$. В к а з і в к а. Можна скористатися задачею 1202 і вказівкою до задачі 1201.

1204. $\delta = \dfrac{16}{\sqrt{6}}$.

1204*. $[\mathbf{r}, 11\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 22\mathbf{k}] = -33\mathbf{i} + 105\mathbf{j} + 36\mathbf{k}$.
1205. $\delta = 2\sqrt{21}$.

1205*. $d = \dfrac{\begin{Vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{Vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 p_1 \\ n_2 p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 m_1 \\ p_2 m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 n_1 \\ m_2 n_2 \end{vmatrix}^2}}$.

1206. 1) Перетинаються в точці $\mathbf{r}\{1; -2; 0\}$; 2) перетинаються в точці $\mathbf{r}\{-3; 5; -3\}$.

1206*. $|[\mathbf{ri}]| = \frac{1}{\sqrt{2}} |[\mathbf{r}, \mathbf{i} + \mathbf{j}] + \mathbf{i} - \mathbf{j}|$ або $x^2 - y^2 - 2xy - 4z + 2 = 0$, тобто гіперболічний параболоїд.

1207. 1) $\mathbf{r}\ \{0; 0; -2\}$; 2) $\mathbf{r}\ \{2; 3; 1\}$; 3) пряма паралельна площині; 4) пряма лежить на площині, точка перетину неозначена.

1208. $[\mathbf{r}(5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k})] = 13\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$. **1209.** $\alpha = -1$. **1210.** $\alpha = 4$, $\beta = -8$. **1211.** $[\mathbf{r}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k})] = 6\mathbf{i} - 16\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$. **1212.** $[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}] = 0$ або $[\mathbf{ra}] = [\mathbf{r}_1\mathbf{a}]$. **1213.** $A'\ (5\mathbf{j} + \mathbf{k})$. **1214.** $\mathbf{r}'\ \{5; -1; 0\}$. **1215.** $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{a} = 0$ або $\mathbf{ra} = \mathbf{r}_1\mathbf{a}$. **1216.** $\mathbf{r}\ (\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = 0$. **1217.** $\mathbf{r}(23\mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = 78$.

1218. Проходить.

1219. Лежить.

1220. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}] = 0$. Вказівка. Задача рівнозначна складанню рівняння площини по двох точках і паралельному їй вектору $\mathbf{a}$ (див. формулу (42) § 3 цього розділу).

1221. $\mathbf{r}\ (-8\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 22\mathbf{k}) + 59 = 0$.

1222. $\mathbf{r}\ (-11\mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 19\mathbf{k}) = 10$.

1223. $(\mathbf{r} - r_1)\,[\mathbf{a}\mathbf{A}] = 0$.

1224. $[\mathbf{r}\ (7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})] = \mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 29\mathbf{k}$.

1225. $\mathbf{r}\ (8\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 48$.

1226. $\mathbf{r}\ (17\mathbf{i} - 13\mathbf{j} - 16\mathbf{k}) = 10$.

1227. $\mathbf{r}\ (23\mathbf{i} - 16\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) = 153$. Вказівка. Задача зводиться до завдання: провести площину через дану точку паралельно до двох даних векторів.

1228. $[\mathbf{r}\ (10\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 19\mathbf{k})] = 7\mathbf{i} - 37\mathbf{j} - 29\mathbf{k}$. Вказівка. Проводимо через дану точку A площину, перпендикулярну до даної прямої $\mathbf{r}\ (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 5$; знаходимо точку перетину її з даною прямою: $B\ ({}^{32}/_{14}\mathbf{i} - {}^{1}/_{14}\mathbf{j} + {}^{9}/_{14}\mathbf{k})$ і через дві точки A і B проводимо шукану пряму.

1229. Найзручніше шуканий перпендикуляр подати системою двох рівнянь, а саме: рівнянням площини, яка проходить через точку перпендикулярно до прямої, і площини, яка проходить через точку і пряму: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{a} = 0, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}] = 0$. **1230.** $\mathbf{r}'\{10; 7; 4\}$. **1231.** $\delta = 3$. **1232.** $A'\ (2\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$. **1233.** $[\mathbf{r}(74\,\mathbf{i} + 57\mathbf{j} - 110\mathbf{k})] = 220\mathbf{j} + 114\mathbf{k}$.

ОЛЬГА НИКОЛАЕВНА ЦУБЕРБИЛЛЕР

Задачи и упражнения по аналитической геометрии

(На украинском языке)

Ведучий редактор *О. Печковська*

Технічний редактор *В. Писаренко* Коректор *З. Богданова*

Обкладинка художника *А. Пустовіта*

Здано до складання 20.IX 1954 р. Підписано до друку 16.III 1955 р. Формат паперу 60×92/16. Обсяг: $18^1/_4$ фізичн. арк.; 18,25 умовн. арк.; 24,31 облік.-видавн. арк. Тираж 5000 прим. БФ 04105.

Государственное издательство технической литературы УССР
г. Киев, ул. Красноармейская, 11

Зам. № 123. Надруковано з матриць Київської кн.-журнальної ф-ки в друкарні б. школи ФЗУ Головвидаву Міністерства культури УРСР. Київ, Золотоворітська, 11.

Ціна книги 8 крб. 55 коп.

080