DOI 10.15276/imms.v14.no3.215
УДК 006.91:620.1:678

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol.14 (2024), No. 3, pp. 215-225

МОДЕЛЮВАННЯ ВНУТРІШНІХ ПРОЦЕСІВ В НЕМЕТАЛЕВИХ ГЕТЕРОГЕННИХ МАТЕРІАЛАХ ПРИ АКУСТИЧНОМУ ІНФРАЧЕРВОНОМУ ТЕРМОМЕТРИЧНОМУ МЕТОДІ КОНТРОЛЮ

В.М.Тонконогий[1], М.О.Голофєєва[2], Ю.О.Морозов[3], Р.В.Горбатюк[4]

Національний університет «Одеська політехніка»
1, Шевченка пр., м. Одеса, 65044, Україна
Email: vmt47@ukr.net[1]; mgolofeyeva@gmail.com[2]; morozov@op.edu.ua[3]; ruslan.gorbatiuk@stud.op.edu.ua[4]

Однією з тенденцій розвитку промисловості є заміна традиційних конструкційних матеріалів неметалевими гетерогенними структурами. Це дає можливість отримувати матеріали із запланованими властивостями. При цьому необхідно вивчати механізми організації структури таких матеріалів на кожному масштабному рівні. Тут значну роль відіграють неруйнівні методи контролю. Для виробів з гетерогенних матеріалів перспективними є методи активного термічного контролю. Представляють інтерес процеси в матеріалах цього класу при їх контролі акустичним інфрачервоним термометричним методом. Можна зазначити, що специфіка застосування методу неруйнівного контролю, а також фізичні явища, які виникають в неметалевих гетерогенних матеріалах під час вібраційного впливу на них, не вивчені в повному обсязі для його практичного застосування. Гетерогенність структури, з одного боку, дозволяє створювати матеріали з широким діапазоном властивостей, а з іншого – ускладнює описання процесів, що викликають проявлення зазначених властивостей. Стаття присвячена математичному моделюванню цих процесів. Для комплексного аналізу міцнісних характеристик необхідно враховувати зв’язок термопружних полів, тобто необхідно одночасно визначати температурні та деформаційні поля. Розглянутий трансверсально-ізотропний простір, що можна представити як призму, яка складається із решітки із трьох взаємно перпендикулярних стрижнів, розташованих вздовж координатних осей x, y та z, причому взаємно перпендикулярна сітка у двох напрямках має однакові розміри. Всередині цього простору на довільній кусочно-безперервній поверхні розташовані дефекти структури будь-якої природи.

Вступ. Тенденцією розвитку різних галузей промисловості є широке використання неметалевих гетерогенних матеріалів. Велика різноманітність типів структур і складових компонентів дозволяє отримувати середовища із заздалегідь запланованими властивостями. Звичайно, ефективне використання матеріалів зазначеного типу, а також виробів з них неможливе без достовірного вимірювання параметрів процесів у них на всіх етапах життєвого циклу продукції.

Якщо розглядати об’єкт із неметалевого різнорідного матеріалу з точки зору метрологічного забезпечення якості, то його можна трактувати як складний. Найбільш перспективними для контролю виробів з неметалевих гетерогенних матеріалів є неруйнівні методи. У той же час існують проблеми з їх використанням, пов'язані з рядом особливостей і фізичних явищ, характерних для цього класу матеріалів. Серед них слід виділити немагнітність, низьку електропровідність, взаємодію ультразвукових хвиль з елементами армування, високі характеристики демпфування. Серед найбільш перспективних методів, що дозволяють виявити особливості будови неметалевого гетерогенного матеріалу, можна виділити активні термічні методи, що базуються на аналізі аномалій на термограмах поверхонь об’єктів дослідження, які можуть бути ознаками наявності відхилень в об'ємі матеріалу. У цьому випадку інформація про виявлені особливості будови неметалевого гетерогенного матеріалу міститься в амплітудно-часових характеристиках отриманого температурного поля.

Представляють інтерес внутрішні процеси, що відбуваються в матеріалах цього класу при їх контролі акустичним інфрачервоним термометричним методом. Специфіка застосування зазначеного методу неруйнівного контролю, а також фізичні явища, які виникають у неметалевих гетерогенних матеріалах під час вібраційного впливу на них, вивчені не в повній мірі для їхнього практичного застосування. Для комплексного аналізу міцнісних характеристик необхідно враховувати зв'язок термопружних полів, тобто необхідно одночасно визначати температурні та деформаційні поля.

Аналіз досліджень і публікацій. В роботі [1] представлена математична модель, що дозволяє отримати значення потужності нагріву тріщини, яка розташована перпендикулярно напрямку розповсюдження механічних коливань. В [2] наведений вираз, що дозволяє визначити вклад пружної енергії системи в залежності від тріщини, що утворилася. Недоліками цих моделей є те, що вони не враховують неоднорідність досліджуваного середовища.

В [3] запропонована модель, що призначена для прогнозування термомеханічного відгуку трансверсально-ізотропної термопружної тонкої прямокутної пластини при гармонійному зосередженому навантаженні з плином часу. Ця математична модель розроблена із застосуванням теорії пластини Кірхгофа для нелокальної узагальненої термопружності та теорією термопружності Гріна-Нагді. Для знаходження виразів для бічного відхилення, теплового моменту та розподілу температури для тонкої прямокутної пластини з простими опорами у трансформованій області було використано метод подвійного скінченного перетворення Фур'є. Досліджено та показано графічно зміну бічного відхилення, теплового моменту та розподілу температури з нелокальною узагальненою термопружністю та класичною теорією термопружності з різними номерами мод.

Для моделювання процесів, що протікають в неметалевих гетерогенних структурах були розроблені теорії континууму вищого порядку, такі як нелокальна теорія термопружності, теорія модифікованого парного напруження та градієнта деформації. Для вирішення проблем мікро/наноструктури Ерінгеном була розроблена теорія нелокальної механіки континууму [4-7]. В теорії нелокального континууму напружений стан в точці розглядають як функцію станів деформації всіх точок у середовищі. На відміну від цього в класичній механіці суцільного середовища напружений стан в певній точці однозначно залежить від стану деформації в цій самій точці». Лу та ін. [8] запропонували модель нелокальної пластини на основі теорії Ерінгена з використанням нелокальних теорій пластин Кірхгофа та Міндліна. Ця теорія базується на теорії пучка Ейлера–Бернуллі з такими кінематичними міркуваннями:

- товщина плити має відносно малі бічні розміри і не змінюється при деформації;
- немає деформації в середній площині пластини;
- компоненти зміщення середини поверхні є малими порівняно з товщиною пластини;
- можна знехтувати поперечною деформацією зсуву, поперечним нормальним напруженням і деформацією.

Залежно від моделі нелокальної теорії Ерінгена, Лазар і Агіасофіту [9] отримали нові результати для компонентів напружень гвинтових переміщень в анізотропних матеріалах. Зенкур [10] використав теорію нелокальної пружності для дослідження одношарового графенового листа (SLGS), закріпленого у в'язкопружному середовищі, за допомогою вібраційного аналізу. Шаат [11] обговорював залежні від розміру нанопластини Кірхгофа з модифікованими парними напруженнями. Тріпаті та ін. [12] досліджували тонку круглу пластину за допомогою квазістатичної теорії незв'язаної термопружності з використанням дробового рівняння теплопровідності. Марін [13] обговорював проблему коливань термопружності диполярних тіл. В роботі [14] досліджували теорію термопружності Гріна-Нагді для диполярного тіла, щоб довести стабільність типу Гельдера за допомогою змішаного початкового BVP. Крім того, деякі дослідники, такі, як Шарма [15], Марін та ін. [16 - 18], Жанг та Фу [19], Аббас та Мартін [20], Каур [21], Зенкор та Абулегар [22], Кумар та Деві [23], Предхан та Фадікан [24, 25], Бхаті [26], Лата [27, 28], Махакалкар та ін. [29, 30], Гайквад і Дешмуд [31], Шен [32], Нгуен та ін. [33-38], Вентзел [39] працювали над мікро/нано технологіями, використовуючи різноманітні теорії термоеластичності. З аналізу видно, що нелокальна теорія термопружності має значний вплив на всі параметри.

Методика досліджень. Більшість розглянутих робіт розв'язувалися в такій постановці, коли фізико-механічні характеристики матеріалу вважалися такими, що не залежать від температури. Проте, для всебічного аналізу характеристик міцності необхідно враховувати зв'язаність термопружних полів, тобто необхідно одночасно визначати поля температури та деформації.

Розглянемо трансверсально-ізотропний простір, всередині якого на довільній кусочно-безперервній поверхні Ω розташовані дефекти структури будь-якої природи (типу тріщин, відшарувань або сторонніх включень).

Згідно із [40] такий простір можна представити як призму, що складається із решітки із трьох взаємно перпендикулярних стрижнів, розташованих вздовж координатних осей *x*, *y* та *z*, причому взаємно перпендикулярна сітка у двох напрямках має однакові розміри (рис. 1).

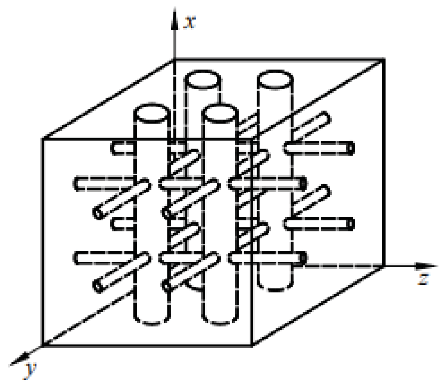

Рис.1. Трансверсально-ізотропний матеріал

Таке уявлення трансверсально-ізотропного тіла, звичайно, умовне і служить лише зручною формою наочного представлення континууму, яке має, як бачимо з рисунку 1 ізотропність властивостей по координатам *y* та *z*.

Компоненти напружень та переміщень в цьому випадку будуть [41]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{\sigma_k\left(x,y,z\right)\right\}_{k=1}^{6} = \left\{\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{xz}\right\},$$
$$\mathbf{u} = \left\{u_k\left(x,y,z\right)\right\}_{k=1}^{3} = \left\{u,v,w\right\}, \tag{1}$$

При $\left(x,y,z\right)\notin\Omega$ задовольняють рівнянням Дюамеля-Неймана:

$$\partial_k u_k = \sum_{j=1}^{3} s_{jk}\sigma_j + \alpha_k T, k=1,2,3, \quad \partial_3 u_2 + \partial_2 u_3 = s_{44}\sigma_4,$$
$$\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1 = s_{44}\sigma_5, \quad \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 = s_{66}\sigma_6, \tag{2}$$

умовам рівноваги:

$$\partial_1\sigma_1 + \partial_2\sigma_6 + \partial_3\sigma_5 + F_1 = \rho\partial_t^2 u_1$$
$$\partial_1\sigma_6 + \partial_2\sigma_2 + \partial_3\sigma_4 + F_2 = \rho\partial_t^2 u_2 \tag{3}$$
$$\partial_1\sigma_5 + \partial_2\sigma_4 + \partial_3\sigma_3 + F_3 = \rho\partial_t^2 u_3$$

та рівнянню теплопровідності:

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j \partial_j^2 T - c_\varepsilon \partial_t T - T \partial_t \sum_{j=1}^{3} \beta_j \partial_j u_j = 0. \qquad (4)$$

де $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}, k = 1,2,3,\ \partial_t^k = \dfrac{\partial^2}{\partial t^k}, k = 1,2,\ F_k, k = \overline{1,3} -$ складові об'ємних сил;

$s_{kj} -$ коефіцієнти узагальненого закону Гука трансверсально-ізотропного середовища;

$\lambda_i -$ коефіцієнти теплопровідності;

$\alpha_k -$ коефіцієнт теплового розширення;

$c_\varepsilon -$ питома теплоємність.

$$-\beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + c_{13}\alpha_3,$$
$$-\beta_2 = c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + c_{23}\alpha_3,$$
$$-\beta_3 = c_{13}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + c_{33}\alpha_3,$$

На відміну від класичного рівняння теплопровідності, рівняння (4) містить складову, яка пов'язує приріст температури із швидкістю змінення об'єму тіла, що деформується під впливом механічного гармонійного навантаження.

Для запису умов на поверхні Ω, де можливі розриви всіх компонент векторів $\boldsymbol{\sigma}$ та $\mathbf{u}$, введемо в кожній точці поверхні Ω локальну систему координат (N, M, S) (рис. 2).

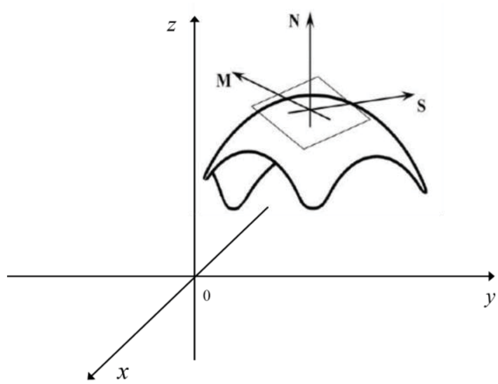

Рис. 2. Локальна система координат (N, M, S) в кожній точці поверхні **Ω**

Для цього, в кожній точці поверхні проведемо дотичну площину P та нормальний вектор $\mathbf{n}$ до неї. Напрямок осі N співпадає з напрямком вектору $\mathbf{n}$. Дві інші осі M, S оберемо взаємно перпендикулярно в площині P таким чином, щоб після обертання осей, направлення осей (N, M, S) співпадали з направленням відповідних осей (Z, X, Y). Тоді в новій системі координат напруження та переміщення позначимо так:

$$\boldsymbol{\sigma}_N = \left\{\tilde{\sigma}_k(x, y, z)\right\}_{k=1}^{6} = \left\{\sigma_N, \sigma_S, \sigma_Z, \tau_{SZ}, \tau_{ZN}, \tau_{NS}\right\},$$
$$\mathbf{u}_N = \left\{\tilde{u}_k\right\}_{k=1}^{3} = \left\{u_M, v_S, w_N\right\}$$

В залежності від контактної взаємодії з простором на поверхні Ω можуть бути відомі шість із наступних величин:

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{\pm}=\left\{\tilde{\chi}_k^{\pm}\right\}_{k=1}^{6},\tilde{\chi}_k^{\pm}=\tilde{\zeta}_k^{+}\left(x_1,x_2,x_3\right)\pm\tilde{\zeta}_k^{-}\left(x_1,x_2,x_3\right),\left(x_1,x_2,x_3\right)\in\Omega$$

$$\left\{\tilde{\zeta}_k^{\pm}\right\}_{k=1}^{6}=\{\sigma_3^{\pm}\left(x_1,x_2,x_3\right),\sigma_5^{\pm}\left(x_1,x_2,x_3\right),\sigma_6^{\pm}\left(x_1,x_2,x_3\right),u_1^{\pm}\left(x_1,x_2,x_3\right),u_2^{\pm}\left(x_1,x_2,x_3\right),u_3^{\pm}\left(x_1,x_2,x_3\right),$$

$$q_1^{\pm}\left(x_1,x_2,x_3\right),q_2^{\pm}\left(x_1,x_2,x_3\right),q_3^{\pm}\left(x_1,x_2,x_3\right),T\left(x_1,x_2,x_3\right)\},$$

$$\left(\sigma_k^{\pm},u_k^{\pm},q_k^{\pm},T^{\pm}\right)=\lim_{x_i^{\pm}\to x_i}\left(\sigma_k^{\pm}\left(x_1^{\pm},x_2^{\pm},x_3^{\pm}\right),u_k^{\pm}\left(x_1^{\pm},x_2^{\pm},x_3^{\pm}\right),q_k^{\pm}\left(x_1^{\pm},x_2^{\pm},x_3^{\pm}\right),T^{\pm}\left(x_1^{\pm},x_2^{\pm},x_3^{\pm}\right)\right);i=\overline{1,3}$$

Точка $\left(x^{+},y^{+},z^{+}\right)$ знаходиться збоку нормалі $\mathbf{n}$, а точка $\left(x^{-},y^{-},z^{-}\right)$ - з протилежного боку. Для усунення невизначеності, на поверхні $\boldsymbol{\Omega}$ будемо вважати відомими наступні стрибки:

$$\tilde{\chi}_k^{-}=\tilde{\zeta}_k^{+}(x,y,z)-\tilde{\zeta}_k^{-}(x,y,z),\ \ k=\overline{1,10},\ \ (x,y,z)\in\Omega\ . \tag{5}$$

Розв'язання крайової задачі (1 – 3), (4) та (5) необхідно шукати в класі $C_{0,5}^{1}(\Re^{3})\cap L_1(\Re^{3})$, де $C_{0,s}^{1}-$ простір функцій, що є безперервними за всіма похідними до m – го порядку за виключенням поверхні $\boldsymbol{\Omega}$;

$L_1(\Re^{3})$ – простір функцій, що інтегровані в $\Re^{3}$.

Температурні умови на дефекті виражають собою умови неідеального контакту між поверхнями особливості структури, а фізично – опір, який здійснює зазначений артефакт на розповсюдження тепла. Ці умови для площини тріщини лежать в площині XOY та мають вигляд [42, 43]:

$$\begin{aligned}&\lambda^{*}\Delta\left(\zeta_4^{+}+\zeta_4^{-}\right)+2\lambda_3\left[\partial_3\zeta_4^{+}\Big|_{x_3=h+0}-\partial_3\zeta_4^{-}\right]=0,\\&\left(\lambda^{*}\Delta-12h^{*}\right)\left(\zeta_4^{+}-\zeta_4^{-}\right)+6\lambda_3\left[\partial_3\zeta_4^{+}+\partial_3\zeta_4^{-}\right]=0\end{aligned}\ , \tag{6}$$

де λ^{*} та $h^{*}-$ коефіцієнти, що характеризують теплопроникність дефекту в повздовжньому та поперечному напрямках.

Дефекти, на поверхні яких температура задовольняє вищенаведеним умовам, називають теплопровідними. Якщо $\lambda^{*}=0,h^{*}\neq 0$, то особливості структури називаються теплопроникними. А у випадку, коли $\lambda^{*}=h^{*}=0$, то – теплоізольованими.

Розв'язання задач (1 – 4) з урахуванням умов (5) та (6) дозволяє отримати розподіл температур та механічних напружень поблизу дефекту. Використовуючи методику, що наведена в роботі [44], можна звести проблему до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь та отримати розподіл температурних полів поблизу особливостей структури неметалевого гетерогенного матеріалу будь-якої природи (типу тріщин, відшарувань або сторонніх включень).

Введемо позначення:

$$\mathbf{v}=\{\upsilon_k(x,y,z)\}_{k=1,\ldots,9}=\{\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{xz},\tau_{xy},u,v,w\} \tag{7}$$

$$\mathbf{D}=\begin{Vmatrix}\mathbf{D}_0 & \mathbf{O}_{3\times3}\\ -\mathbf{S} & \mathbf{D}_0^{\bullet}\end{Vmatrix},\mathbf{F}^{T}=\mathbf{F}_0^{T}+\mathbf{F}_*^{T};$$

$$\mathbf{F}_0^{T}=\left\{F_{0j}\right\}^{9}=-\delta_0\left\|P_1,P_2,P_3,\mathbf{O}_{1\times6}\right\|;\mathbf{F}_*^{T}=\left\{F_{*j}\right\}^{9}=\left\|\mathbf{O}_{1\times3},\beta_1T,\beta_2T,\beta_3T,\mathbf{O}_{1\times3}\right\|;$$

$$\mathbf{S}=\begin{Vmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{O}_{3\times3}\\ \mathbf{O}_{3\times3} & \mathbf{S}_2\end{Vmatrix},\qquad \mathbf{D}_0=\begin{Vmatrix}\partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2\\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1\\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0\end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{11} & s_{13} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{S}_2 = \begin{Vmatrix} s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{Vmatrix},$$

$\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$,

$s_{kj} = \theta(z) s_{kj}^{+} + \theta(-z) s_{kj}^{-}$,

$\delta_0 = \delta(x - x_0, x - x_0, x - x_0)$ – дельта функція Дірака;

s_{kj} – коефіцієнти узагальненого закону Гука;

$\mathbf{O}_{k \times l}$ – нульова матриця розмірності $k \times l$.

Тоді рівняння (1), (2) представимо так:

$$\mathbf{D}[z, \partial_1, \partial_2, \partial_3]\mathbf{v} = F, \qquad \mathbf{v}, \mathbf{F} \in \Im(\Re^3) \tag{8}$$

Відповідно до роботи [41], подання розв’язків системи (3.8) через стрибки (3.6), будемо називати розривним розв’язком для кусково-однорідного анізотропного простору в класі диференційованих функцій.

Продовжимо матричне рівняння (3.8) на весь простір. Для цього, скориставшись властивостями узагальнених функцій повільного зростання $\Im(\Re^3)$, розшукувані функції продовжимо в простір $\Im(\Re^3)$, носієм сингулярності яких є поверхня Ω.

Формули зв’язку між звичайними і узагальненими похідними [44], урахувавши умови (7) представимо так:

$$\partial_k \upsilon_j = \tilde{\partial}_k \upsilon_j - v_j(x, y, z)\kappa_k \delta(\Omega)$$

$$\kappa_1 = \cos(N, X), \kappa_1 = \cos(N, Y), \kappa_1 = \cos(N, Z), \tag{9}$$

де $v_j(x, y, z) = \langle \upsilon_j \rangle_{\Omega}^{-}$, $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера, $\delta(\Omega)$ – функція Дірака, яка зосереджена на поверхні Ω.

Врахувавши формули (9) крайову задачу (8), (9) зведемо до наступної крайової задачі у просторі $\Im(\mathrm{R}^3)$.

$$\mathbf{D}[z, \tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2, \tilde{\partial}_3]\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{f}}, \tag{10}$$

де

$$\tilde{\mathbf{f}} = \{\tilde{f}_j\}^9, \tilde{f}_1 = (v_1^- \kappa_1 + v_6^- \kappa_2 + v_5^- \kappa_3)\delta(\Omega) - P_1, \tilde{f}_2 = (v_5^- \kappa_1 + v_2^- \kappa_2 + v_4^- \kappa_3)\delta(\Omega) - P_2$$

$$\tilde{f}_3 = (v_5^- \kappa_1 + v_4^- \kappa_2 + v_3^- \kappa_3)\delta(\Omega) - P_3, \tilde{f}_4 = v_7^- \kappa_1 \delta(\Omega), \tilde{f}_5 = v_8^- \kappa_2 \delta(\Omega), \tilde{f}_6 = v_9^- \kappa_3 \delta(\Omega),$$

$$\tilde{f}_8 = (v_7^- \kappa_3 + v_9^- \kappa_1)\delta(\Omega), \tilde{f}_9 = (v_7^- \kappa_2 + v_8^- \kappa_1)\delta(\Omega),$$

$$\tilde{f}_{10} = \lambda_1 v_7^- \kappa_1 \delta(\Omega), \tilde{f}_{11} = \lambda_2 v_7^- \kappa_2 \delta(\Omega), \tilde{f}_{12} = \lambda_3 v_7^- \kappa_3 \delta(\Omega),$$

$$\tilde{f}_{13} = v_{11}^- \kappa_1 \delta(\Omega) + v_{12}^- \kappa_2 \delta(\Omega) + v_{13}^- \kappa_3 \delta(\Omega),$$

Розв’язки поставленої задачі можна подати так:

$$\upsilon_k(x, y, z) = \sum_{j=1}^{13} w_{kj} * \tilde{f}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{13} \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^3} w_{kj}(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t - t_0) \tilde{f}_j(x_0, y_0, z_0, t_0) dx_0, dy_0, dz_0 dt, \tag{11}$$

де функції $w_{kj}(x,y,z)\in\Im(\Re^3)$ – компоненти системи фундаментальних розв'язків $\mathbf{w}_j=\{w_{kj}\}_{k=1,\ldots,13}$ задачі (2) – (3), тобто $\mathbf{w}_j$ є розв'язками системи крайових задач:

$$\mathbf{D}[z,\widetilde{\partial}_1,\widetilde{\partial}_2,\widetilde{\partial}_3]\mathbf{w}_j=\mathrm{f}^0,\qquad \mathbf{w}_\mathrm{j},\mathrm{f}^0\in\Im(\Re^3) \tag{12}$$

$$w_{kj}(x,y,x)\big|_{(x,y,z)\to\infty}=0,\qquad k=1,\ldots,13, \tag{13}$$

де $\mathbf{f}^0=\{f_{kj}^0\}^{13}\{\delta_{kj}\}_{k=1}^{13}\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0,t-t_0)\}$,

Застосуємо до (12) перетворення Лапласа за часом $\overline{\upsilon}_k(x,y,z,p)=L[\upsilon_k]$ та тривимірне перетворення Фур'є по x, y і z з параметрами $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ відповідно $\overline{\mathrm{W}}_{k,j}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p)=\mathrm{F}_3[\overline{\upsilon}_k]$,отримаємо матричну крайову задачу у просторі $\Im(\Re^3)$.

$$\mathbf{M}[-i\alpha_1,-i\alpha_2,-i\alpha_3,p]\mathbf{W}_j=\mathbf{f}_j^*,\ j=\overline{1,13} \tag{14}$$

де $\mathbf{W}_j=\{\mathrm{W}_{kj}\}^{13},\mathbf{f}_j^*=\{\delta_{kj}\}^{13}e_0^*,e_0^*=e^{i\alpha_1x_0+i\alpha_2y_0+i\alpha_3z_0}e^{-t_0p}$

Безпосередньо із рівняння дістанемо трансформанти фундаментального розривного розв'язку

$$\mathbf{W}_j=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_j^*,\ j=\overline{1,13} \tag{15}$$

Тут

$$\mathbf{M}=\left\|\begin{matrix}
(-i\alpha_1) & 0 & 0 & 0 & (-i\alpha_3) & (-i\alpha_2) & \rho p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & (-i\alpha_2) & 0 & (-i\alpha_3) & 0 & (-i\alpha_1) & 0 & \rho p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & (-i\alpha_3) & (-i\alpha_2) & (-i\alpha_1) & 0 & 0 & 0 & \rho p^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & (-i\alpha_1) & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_1 & 0 & 0 & 0\\
s_{21} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & (-i\alpha_2) & 0 & \tilde{\alpha}_2 & 0 & 0 & 0\\
s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-i\alpha_3) & \tilde{\alpha}_3 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 & 0 & (-i\alpha_3) & (-i\alpha_2) & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & (-i\alpha_3) & 0 & (-i\alpha_1) & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} & (-i\alpha_2) & (-i\alpha_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_0p & 0 & 0 & \lambda_1(-i\alpha_1) & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_0p & 0 & \lambda_2(-i\alpha_2) & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_0p & \lambda_3(-i\alpha_3) & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_\varepsilon p & (-i\alpha_1) & (-i\alpha_2) & (-i\alpha_3)
\end{matrix}\right\|$$

Застосуємо до (15) обернене перетворення Лапласа та Фур'є подання для системи фундаментальних розв'язків $\mathbf{w}_j=\{w_{kj}\}_{k=1\ldots13}$, які підставляємо у (11).

Склад вимірювального сигналу розпишемо так (рис.3.3):

$$h(t)=a_0h_c(t)+b_0h_d(t), \tag{16}$$

де $h_c(t)$ – когерентна складова;

$h_c(t)$ – дифузійна складова;

a_0, b_0 – коефіцієнти рівняння.

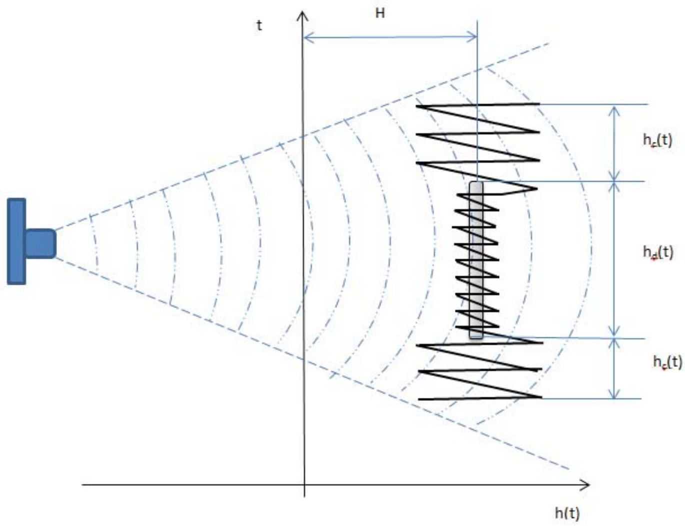

Рис. 3. Когерентні та дифузійні складові вимірювального сигналу

Висновки. Таким чином, при вирішенні проблеми розробки методів вимірювання параметрів процесів, що відбуваються в гетерогенних матеріалах, необхідно спиратися на глибоке розуміння спеціальних розділів математики. Для комплексного аналізу характеристик міцності необхідно враховувати зв’язок термопружних полів, тобто необхідно одночасно визначати температурне та деформаційне поля.

Неметалевий гетерогенний матеріал представлено у вигляді трансверсально-ізотропного простору, всередині якого на довільній кусково-суцільній поверхні розташовані дефекти довільного характеру (такі як тріщини, відшаровані та невідшаровані включення). Для запису умов на поверхні Ω, за яких можливі розриви всіх компонент векторів, введена локальна система координат у кожній точці поверхні Ω. Записані температурні умови для плоскої тріщини, які виражають умови неідеального теплового контакту між поверхнями дефекту, а фізично – опір, який дефект надає поширенню тепла.

Розроблена математична модель термомеханічних процесів, що протікають в неметалевих гетерогенних матеріалах при їх контролі акустичним інфрачервоним термометричним методом, яка відрізняється тим, що приймає до уваги зв’язність механічних та температурних полів з урахуванням неоднорідності структури матеріалу.

Список літератури

1. New developments in thermoelastic stresses. Analysis by infrared thermography. *IV Conferencia Panamericana de END Buenos Aires*. 2007. P. 34-38.
2. Vavilov V.I., Nesteruk D., Khorev VL. Ultrasonic and inductive IR Thermographic Procedures as Newly - Emerged Technigues in Thermal NDT. *Annual Journal of Electronics.* 2012. V. 6. №2. P. 102-109.
3. Kaur I., Lata P., Singh K. Forced Flexural Vibrations in a Thin Nonlocal Rectangular Plate with Kirchhoff’s Thin Plate Theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. doi: 10.1142/S0219455420501072
4. A.C. Eringen, Theory of nonlocal thermoelasticity, Int. J. Eng. Sci. 12 (1974) 1063–1077. https://doi.org/10.1016/0020-7225(74)90033-0
5. A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, J. Appl. Phys. 54 (1983) 4703–4710. https://doi.org/10.1063/1.332803
6. Eringen A.C., Vistas of nonlocal continuum physics, *Int. J. Eng. Sci. 30.* 1992. P.1551–1565. URL: https://doi.org/10.1016/0020-7225(92)90165-D
7. Cemal Eringen A., Nonlocal Continuum Field Theories. New York, NY: Springer, 2004. URL: https://doi.org/10.1007/b97697.

8. Lu P., Zhang P., Lee H., Wang C., Reddy J. Non-local elastic plate theories. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2007. V.463 P.3225–3240. URL: https://doi.org/10.1098/rspa.2007.1903
9. Lazar M., Agiasofitou E. Screw dislocation in nonlocal anisotropic elasticity. *Int. J. Eng. Sci.* 2011. V.49 P. 1404–1414. URL: https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.02.011.
10. Zenkour A.M.. Vibration analysis of a single-layered graphene sheet embedded in visco-Pasternak's medium using nonlocal elasticity theory. *J. Vibroengineering*. 2016. V.18. P.2319–2330. URL: https://doi.org/10.21595/jve.2016.16585
11. Tripathi J.J., Warbhe S.D., Deshmukh K.C., Verma J. Fractional Order Thermoelastic Deflection in a Thin Circular Plate. *Int. J. Applications and Applied Mathematics*. 2017. No. 12. P.898–909.
12. Marin M. Some Estimates on Vibrations in Thermoelasticity of Dipolar Bodies. *J. Vib. Control.* No. 16. P. 33–47. URL: https://doi.org/10.1177/1077546309103419
13. Marin M., Öchsner A. The effect of a dipolar structure on the Hölder stability in Green–Naghdi thermoelasticity. *Contin. Mech. Thermodyn*. 2017. No. 29. P.1365–1374. URL: https://doi.org/10.1007/s00161-017-0585-7
14. Sharma J.N. Thermoelastic Damping and Frequency Shift in Micro/Nanoscale Anisotropic Beams. *J. Therm. Stress.* 2011. V.34. 650–666. URL: https://doi.org/10.1080/01495739.2010.550824
15. Marin M., Vlase S., Ellahi R.,. Bhatti M.M. On the Partition of Energies for the Backward in Time. *Problem of Thermoelastic Materials with a Dipolar Structure, Symmetry*. 2019. No.11. P. 863. URL: https://doi.org/10.3390/sym11070863
16. Zhang J., Fu Y. Pull-in analysis of electrically actuated viscoelastic microbeams based on a modified couple stress theory. *Meccanica*. 2012. V.47. P. 1649–1658. URL: https://doi.org/10.1007/s11012-012-9545-2.
17. Abbas I.A., Marin M. Analytical solution of thermoelastic interaction in a half-space by pulsed laser heating. *Phys. E Low-Dimensional Syst. Nanostructures*. 2017, V.87. P. 254–260. URL: https://doi.org/10.1016/j.physe.2016.10.048
18. Sharma J.N., Kaur R., Transverse Vibrations in Thermoelastic-Diffusive Thin MicroBeam Resonators. *J. Therm. Stress*. 2014. V.37. P. 1265–1285. URL: https://doi.org/10.1080/01495739.2014.936252.
19. Zenkour A.M., Abouelregal A.E. Thermoelastic Vibration of an Axially Moving Microbeam Subjected to Sinusoidal Pulse Heating. *Int. J. Struct. Stab. Dyn*. 2015. V.15. P. 1450081. URL: https://doi.org/10.1142/S0219455414500813.
20. Kumar R., Devi S. Interactions of Thermoelastic Beam in Modified Couple Stress Theory. *Int. J. Appl. Math.* 2017. No.12. P. 910–923.
21. Pradhan S.C., Phadikar J.K. Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates, *J. Sound Vib.* 2009. V. 325. P. 206–223. URL: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.03.007
22. Bhatti M.M., Ellahi R., Zeeshan A., Marin M., Ijaz N. Numerical study of heat transfer and Hall current impact on peristaltic propulsion of particle-fluid suspension with compliant wall properties. *Mod. Phys. Lett.. B.* 2019. V.33 P. 1950439. URL: https://doi.org/10.1142/S0217984919504396.
23. Pradhan S.C., Kumar A. Vibration analysis of orthotropic graphene sheets using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method. *Compos. Struct.* 2011. V.93. P. 774–779. URL: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.08.004.
24. Pradhan S.C., Kumar A. Vibration analysis of orthotropic graphene sheets embedded in Pasternak elastic medium using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method. *Comput. Mater. Sci.* 2010. V. 50. P.239–245. URL: https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.08.009.
25. Marin M. Lagrange identity method for microstretch thermoelastic materials. J. *Math. Anal. Appl.* 2010. V.363.. P. 275–286. URL: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.08.045.

26. Marin M. The Lagrange identity method in thermoelasticity of bodies with microstructure. *Int. J. Eng. Sci.* 1994, V.32. P.1229–1240. URL: https://doi.org/10.1016/0020- 7225(94)90034-5.
27. Lata P., Kaur I. Thermomechanical interactions in transversely isotropic magnetothermoelastic medium with fractional order generalized heat transfer and hall current, *Arab J. Basic Appl. Sci*. 2020. V. 27. P. 13–26. URL: https://doi.org/10.1080/25765299.2019.1703494.
28. Lata P., Kaur I. Effect of time harmonic sources on transversely isotropic thermoelastic thin circular plate. *Geomech. Eng*. 2019. No.19. P. 29–36. URL: https://doi.org/10.12989/gae.2019.19.1.029.
29. Kaur I., Lata P. Transversely isotropic thermoelastic thin circular plate with constant and periodically varying load and heat source. *Int. J. Mech. Mater. Eng*. 2019. URL: https://doi.org/10.1186/s40712-019-0107-4.
30. Lata P., Kaur I. Study Transversely Isotropic Thick Circ. Plate Due to Ring Load with Two Temp. Green Nagdhi Theory Type-I, II III. *Proc. Int. Conf. Sustain. Comput. Sci*. 2019, P. 1753–1767. URL: https://doi.org/http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3356884
31. Lata P., Kaur I. Transversely isotropic thick plate with two temperature & GN type-III in frequency domain, *Coupled Syst. Mech.* 2019. No. 8. P. 55–70. URL: https://doi.org/10.12989/csm.2019.8.1.055.
32. Mahakalkarr A., Varghese V., Dhakate T. Thermoelastic Bending Vibrations of a Simply Supported Rectangular Plate with Internal Heat Generation// Evol. Qual. Paradig. Innov. Sustain. Dev. Manag. Inf. Technol., Indore, India, 2019. P. 183–193.
33. Gaikwad M.N., Deshmukh K.C. Thermal deflection of an inverse thermoelastic problem in a thin isotropic circular plate. *Appl. Math. Model*. 2005. URL: https://doi.org/10.1016/j.apm.2004.10.012.
34. Shen Z.B., Tang H.L., Li D.K., Tang G.J. Vibration of single-layered graphene sheet-based nanomechanical sensor via nonlocal Kirchhoff plate theory. *Comput. Mater. Sci.* 2012. V.61. P. 200–205. URL: https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2012.04.003.
35. Nguyen N.T. Hui D. Lee J. Nguyen-Xuan H. An efficient computational approach for size-dependent analysis of functionally graded nanoplates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*. 2015. V.297. P. 191–218. URL: https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.021
36. Nguyen T.N., Ngo T.D., Nguyen-Xuan H. A novel three-variable shear deformation plate formulation: Theory and Isogeometric implementation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2017. V.326. P.376–401. URL: https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.07.024.
37. T.N. Nguyen, C.H. Thai, H. Nguyen-Xuan, On the general framework of high order shear deformation theories for laminated composite plate structures: A novel unified approach, Int. J. Mech. Sci. 110 (2016) 242–255. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.01.012.
38. Ventsel E., Krauthammer T., Carrera E.. Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications. *Appl. Mech. Rev*. 2002. V.55. P. B72–B73. URL: https://doi.org/10.1115/1.1483356
39. Синюк О.М. Математична модель анізотропних властивостей полімерних матеріалів. *Herald of Khmelnytskyi National University*. 2015. No. 1. P.221.
40. Kryvyi O. F., Morozov Yu. O. Solution of the problem of heat conduction for the transversely isotropic piecewise homogeneous space with two circular inclusions. *J.Math. Sci.*. 2019. V. 243. No.1. P. 162–182. URL: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04533-1.
41. Тонконогий В.М., Голофєєва М.О. Морозов Ю.О. Моделювання внутрішніх процесів в неметалевих гетерогенних матеріалах при акустичному інфрачервоному термометричному методі контролю // Важке машинобудування. Проблеми та перспективи розвитку. *Матеріали XXII Міжнародної науково-технічної конференції*. Краматорськ-Тернопіль: ДДМА, 2024. С. 193-195.

42. Kryvyi O.F., Yu.O. Morozov. Fundamental solutions for a piecewise-homogeneous transversely isotropic elastic space. J. Math. Sci. 2019. V.270. No. 1. P. 143–156. URL: https://doi.org/10.1007/s10958-023-06337-w
43. Kryvyi O., Morozov Yu. The influence of mixed conditions on the stress concentration in the neighborhood of interfacial inclusions in an inhomogeneous transversely isotropic space. *Int. Conf. on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics (Structural Integrity, 16).* 2020. P. 204–209. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_38

SIMULATION OF INTERNAL PROCESSES IN NON-METALLIC HETEROGENEOUS MATERIALS USING THE ACOUSTIC INFRARED THERMOMETRICAL CONTROL METHOD

V.M. Tonkonogyi[1], M.O. Golofeyeva[2], Yu.O. Morozov[3], R.V. Gorbatiuk[4]

National Odesa Polytechnic University
1, Shevchenko Ave., Odesa, 65044, Ukraine
Emails: vmt47@ukr.net[1]; mgolofeyeva@gmail.com[2];
morozov@op.edu.ua[3]; ruslan.gorbatiuk@stud.op.edu.ua[4]

One of the trends in the development of industry is the replacement of traditional structural materials with non-metallic heterogeneous structures. This makes it possible to obtain materials with planned properties. At the same time, it is necessary to study the mechanisms of organizing the structure of such materials at each scale level. Non-destructive control methods play a significant role here. Methods of active thermal control are promising for products made of heterogeneous materials. Of interest are the processes in materials of this class when they are controlled by the acoustic infrared thermometric method. It can be noted that the specifics of the application of the nondestructive testing method, as well as the physical phenomena that occur in non-metallic heterogeneous materials during the vibration effect on them, have not been fully studied for its practical application. The heterogeneity of the structure, on the one hand, makes it possible to create materials with a wide range of properties, and on the other hand, it makes it difficult to describe the processes that cause the manifestation of these properties. The article is devoted to the mathematical modeling of these processes. For a comprehensive analysis of the strength characteristics, it is necessary to obtain the relationship of thermoelastic fields, that is, it is necessary to simultaneously determine the temperature and deformation fields. A transversally isotropic space is considered, which can be represented as a prism, which consists of a grid of three mutually perpendicular rods located along the coordinate axes x, y, and z, and the mutually perpendicular grid in two directions has the same dimensions. Inside this space, structural defects of any nature are located on an arbitrary piecewise continuous surface.