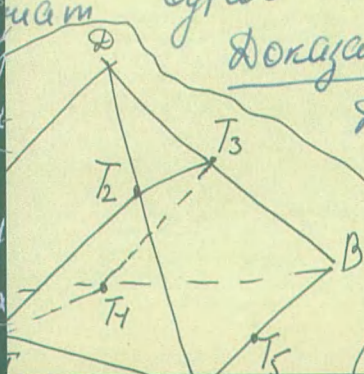


ТРИУМФ ШКІЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

І. Кушнір



Доказательство

Действительно, T_1, T_2, T_3, T_4 являются вершинами параллелограмма.

Отсюда, соединяя

этот параллелограмм

рис.

входящих рёбер тетраэдра,

I. Кушнір

Т Р І У М Ф Ш К І Л Ь Н О Ї
Г Е О М Е Т Р І Ї

Навчальний посібник для 7–11 класів

Київ
«Наш час»
2007

УДК 514
ББК 22.151я721
К 96

Кушнір І. А.

К 96 Тріумф шкільної геометрії: Навч. посібник для 7–11 кл. / Пер. з рос. — К.: Наш час, 2007. — 432 с. — Бібліогр.: С. 429.

ISBN 978-966-8174-65-0

Книга відомого автора, Заслуженого вчителя України, присвячена поверненню до школи геометрії — науки, яку можна вивчати і якою можна захоплюватися все життя. У кожній главі емоційно і на високому естетичному рівні розглянуто гостросюжетний математичний матеріал, який переважно вперше публікується.

Для учнів 7–11 класів та вчителів загально-освітніх шкіл, ліцеїв, гімназій, зокрема й математичного профілю, а також для студентів і викладачів вищих навчальних закладів, можна використати при підготовці абітурієнтів, учасників математичних олімпіад різного рівня.

ББК 22.151я721

ISBN 978-966-8174-65-0

© Кушнір І. А., 2007

© Дизайн, макет «Наш час», 2007

Шановний Ісаак Аркадійович!

...Судячи з Ваших публікацій («Квант», «Математика в школі»), у нас з Вами одна і та ж геометрична ідеологія, яку, не без допомоги видатних математиків, було витіснено зі школи і яка, як на мене, не без тріумфа повертається. Хочеться вірити, що в цьому є і частка вашої з Вами «провини». Я міг би довго і хотів би красномовно розповідати про роль Геометрії у вихованні й освіті Людини, але тут це недоречно, оскільки Ви й так одностудець...

Бажаю лише успіхів.

З повагою І. Шаригін



ПЕРЕДМОВА

Чому в шкільній геометрії має бути триумф? Тому що доля її досі не схожа на долі інших дисциплін, що вивчаються в школі. Досі явно чи неявно геометрія «у вигнанні». Досі дискримінується один із основних математичних предметів. Якщо до шкільної алгебри залучалися найрізноматніші відомості аж до елементів вищої математики, то з програми з геометрії було вилучено навіть формулу Герона. А пряма Ейлера, формула Ейлера, теорема Птолемея — дуже часто цілковита новина навіть для вчителя. Тоді як у алгебру вводиться багата на задачі тема «Параметри», з геометрії вилучаються творчі задачі. А використання формул, які не входять до шкільних підручників, зведено до нуля.

Отже, сотні тисяч учнів позбавлені не лише естетичного задоволення (на що така багата геометрія), а й не отримують «інтелектуальної сировини» для розвитку і вдосконалення... мозку. А геометрія, як ніяка інша наука, сприяє такому розвитку. Найперше, вона навчає чітко і послідовно міркувати, привчає мислити впорядковано і логічно.

Життя засвідчило, що без Геометрії з великої літери немає Високої, тобто якісної і цікавої шкільної математики. Як би не намагалися люди, далекі від школи, посунути цей предмет, геометрія вертається молодістю і ще прекраснішою. За це боролися вчені-педагоги, вчителі й учні.

Пропонована книга названа «Триумф шкільної геометрії». Триумф — це торжество, видатна перемога над кимось або над чимось. У цій книзі — триумф нових фактів, думок і узагальнень.

Для тих, хто вступає до вищих навчальних закладів, книга — прекрасна школа підготовки з геометрії, тригонометрії й алгебри. Учасники математичних олімпіад знайдуть у ній оригінальні задачі й нові методи розв'язання. Вчителі — матеріал для підготовки до уроків і для позакласної роботи. Батькам учнів 7–11 класів також буде цікаво ознайомитися з педагогічно вивіреном матеріалом цієї книги.

Більшість глав обговорювалися на авторському семінарі в Київському міському педагогічному університеті ім. Б. Д. Грінченка, учасникам якого висловлюю щирю подяку.

Автор

ПЛАНІМЕТРІЯ

Глава 1

НАЗУСТРІЧ ЛЮБОВІ

- Люблю геометрію!
- Не люблю геометрію!

Слова, слова, слова... Зараз ви прочитаєте геометричний етюд, який ніколи і ніде вам не зустрічався. І тоді можна буде продовжити дискусію про любов до геометрії, хоча, сподіваюся, у цьому вже не буде необхідності.

Якось старшокласникам запропонували задачу:

Через спільну точку S двох кіл, що перетинаються, провести пряму так, щоб вони «висікали» відрізок MN заданої довжини (рис. 1.1).

Достатньо швидко справилися із задачею учні, які міркували так (рис. 1.2).

● Нехай MN — відрізок заданої довжини. Оскільки кола теж задані, то задана хорда AS (A — друга точка перетину кіл), а відповідно, задані кути

$$\angle SNA = \frac{1}{2} \cup SLA \text{ і } \angle SMA = \frac{1}{2} \cup StA.$$

Так, трикутник MNA — базисний, тобто такий, який можна побудувати за стороною MN (вона задана в умові) й двома прилеглими кутами SNA і SMA ●.

Віддавши належне їхньому правильному розв'язанню, я запропонував інше.

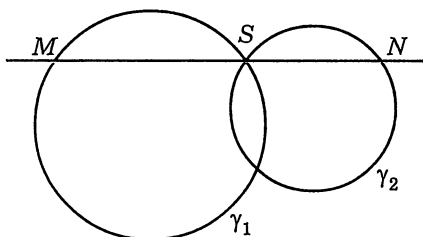


Рис. 1.1

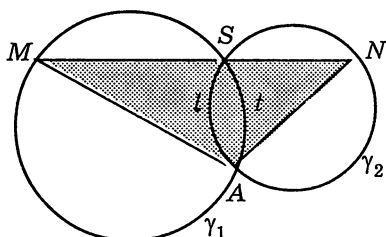


Рис. 1.2

● Нехай O_1 і O_2 — центри кіл γ_1 і γ_2 (рис. 1.3).

Проаналізуємо побудову. Нехай E і D — середини хорд MS і SN . Проведемо $PO_2 \parallel MN$. Нескладно довести, що

$$PO_2 = \frac{1}{2} MN.$$

Дійсно,

$$PO_2 = ES + SD = \frac{1}{2} MS + \frac{1}{2} SN = \frac{1}{2} (MS + SN) = \frac{1}{2} MN.$$

Трикутник PO_1O_2 — базисний, оскільки його можна побудувати за гіпотенузою O_1O_2 і катетом $PO_2 = \frac{1}{2} MN$. Тепер через точку S проведемо пряму, паралельну PO_2 . Вона перетинатиме кола γ_1 і γ_2 в шуканих точках M і N ●

Марно було шукати захват на обличчях учнів, швидше іронічні посмішки: «Наш спосіб кращий!»

«В бой идут одни старики», — подумав я і запропонував ще одну задачу.

У заданій конфігурації двох кіл, що перетинаються, провести пряму через точку S так, щоб відрізок MN був найбільшим.

«Опонентам» довелося скористатися конфігурацією (рис. 1.3). Очевидно, що це буде, коли $MN \parallel O_1O_2$ (катет PO_2 «збігається» з гіпотенузою O_1O_2 в прямокутному трикутнику PO_1O_2)¹.

Посилію «атаку» (рис. 1.4):

У заданій конфігурації двох кіл, що перетинаються, провести пряму через точку S так, щоб $MS = SN$.

Знову допомагає побудована конфігурація. Поділимо відрізок O_1O_2 навпіл і отримаємо точку K , з'єднаємо точки K і S , проведемо MN перпендикулярно до KS . Тоді $MS = SN$.

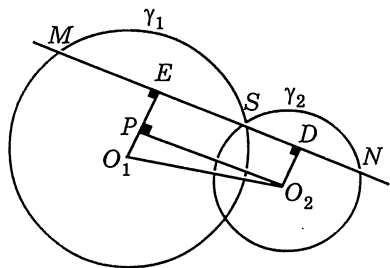


Рис. 1.3

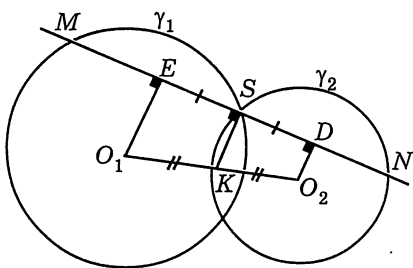


Рис. 1.4

¹ Розгляньте другий випадок, коли O_1O_2 менше за радіус більшого кола.

Задачу можна узагальнити:
 провести пряму через точку S так,
 щоб $MS : SN = m : n$.

● Розв'язання очевидне: на відріжку O_1O_2 побудувати точку F , щоб $O_1F : FO_2 = m : n$. Далі за аналогією до попереднього ●.

І раптом — вверх здіймається рука: «А можна інакше? Красніше!».

Сміливо. Подивимось!

● Побудуємо коло γ_2' , симетричне до кола γ_2 відносно точки S , яке перетне коло γ_1 в точці M (рис. 1.5). Через точки M і S проведемо пряму, яка перетне коло γ_2 в точці N :

Тоді $MS = SN$! ●

— Прекрасно! — погодився я. Клас радісно гудів: а якщо застосувати гомотетію з центром в точці S і коефіцієнтом $k = \frac{m}{n}$,

то отримаємо $MS : SN = m : n$. Ура!

— Ще не «Ура!». Останній залп:

У даний трикутник ABC вписати даний трикутник PMN !!! (рис. 1.6)

...І тиша...

Спантеличене запитання: «А до чого тут кола γ_1 і γ_2 ???». По-спішаю на допомогу (рис. 1.7).

● Аналіз свідчить, що поскільки задано відрізок MN і кут A , то можна побудувати на MN сегмент, який містить даний кут BAC , і доповнити його до кола γ_1 . Аналогічно можна побудувати коло γ_2 і... використати конфігурацію основної задачі! ●

Аплодисменти.

Як можна не любити геометрію?

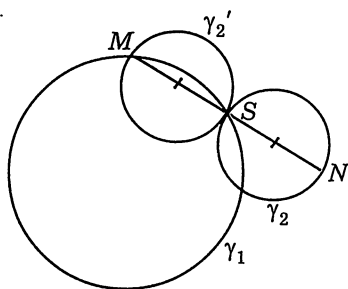


Рис. 1.5

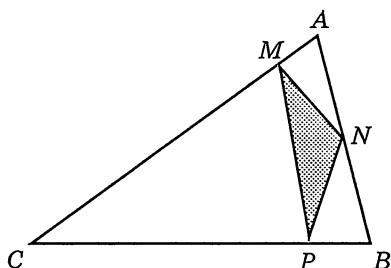


Рис. 1.6

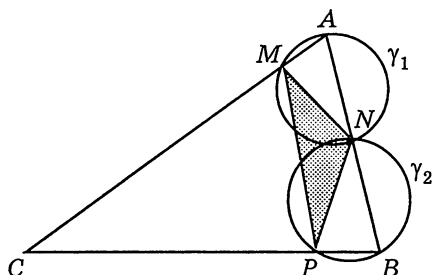


Рис. 1.7

БЛИСКАВКИ У РІВНОБЕДРЕНОМУ ТРИКУТНИКУ (СЕМИКЛАСНИКАМ ТА ЇХНІМ БАТЬКАМ ПРИСВЯЧУЄТЬСЯ)

1. До історії питання: бідолашні семикласники...

*Сьогодні всі пишуть,
і ніхто не читає*

Із «Литературной газеты»

Прийшли нарешті такі довгоочікувані часи: можна писати й публікувати... за свій кошт, що захочеш... у короткі терміни... будь-яким накладом... навіть найменшим. І продавати. Своїм підлеглим. А якщо в школі — то дітям.

Саме так в одній з київських шкіл була видана брошура з задачами, які діти та їхні батьки мали розв'язувати... для успішного написання контрольної з математики. І там була одна «божевільна» задача:

«У трикутнику ABC $AB = BC$, $\angle B = 20^\circ$. На стороні AB взяли таку точку M , що $BM = AC$. Найдіть $\angle MCA$ ».

Розв'язати її можна. Автору задачі... (Цитую за виданням: Лоповок Л. М. Збірник вправ з геометрії для 6–8 класів. — К.: Рад. шк., 1977).

«Вказівка. Якщо взяти точку E на $[AB]$ і точку K на $[BC]$ так, щоб $|AC| = |CE| = |EK| = |KM|$, то в результаті підрахунку кутів виявиться, що $|MK| = |KC|$ ».

Як боротьба з «організованою злочинністю» і народилася ця глава.

2. Як народжуються блискавки

Найпростіша блискавка — це три рівних відрізки, що мають спільні точки (рис. 2.1).

(Згадайте, будь-яка блискавка — природне явище — зазвичай зображається як зигзаг.)

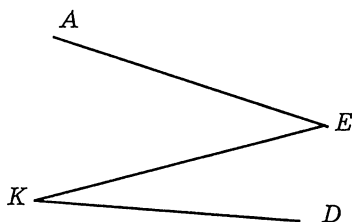


Рис. 2.1

Такі рівні відрізки назовемо **ланками блискавки**. У блискавки на рис. 2.1. три ланки: AE , EK , KD , які задовольняють рівність

$$AE = EK = KD.$$

Ланок може бути більше. Кожний із випадків називатимемо по-своєму: «Z-блискавка» (три ланки), чотири ланки — Σ («сігма»), п'ять ланок — «гірська дорога —

серпантин». Розміщені блискавки всередині рівнобедреного трикутника, але з обов'язковою умовою: перша і остання ланка на боковій стороні й основі відповідно (рис. 2.2). Кінець і початок зигзага збігається з вершиною трикутника і вершиною основи.

Основне спостереження: варто блискавці «влаштуватися» в рівнобедреному трикутнику, він залежно від кількості ланок n починає змінювати свої властивості, хоча деякі з них постійні. Наприклад, кут при вершині рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) залежить від кількості ланок n :

$$\angle BAC = \frac{180^\circ}{2n - 1}.$$

Перейдемо до розгляду різних конфігурацій блискавки.

Z-блискавка (три ланки)

Розглянемо блискавку з трьома ланками, яку назовемо «Z-конфігурація» (рис. 2.2).

Задача 1. Якщо три ланки Z-блискавки рівні, то $\angle A$ трикутника ABC ($AB = AC$) дорівнює 36° .

● **Доведення.** Нехай $AE = EC = BC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Із трикутника AEC ($AE = EC$), $\angle ACE = \alpha$, $\angle BEC = 2\alpha$ (зовнішній кут). Оскільки $\angle EBC = \angle CEB$ ($\triangle EBC$), то $\angle EBC = 2\alpha$, а $\angle ECB = 2\alpha - \angle ACE = \alpha$. Із трикутника EBC $2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ$, $\alpha = 36^\circ$. Твердження доведено. ●

Задача 2. Довести, що в Z-блискавці ланка EC — бісектриса.

● Так і є, оскільки $\angle ACE = \angle ECB$ (див. попередню задачу) ●.

Задача 3. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) бісектриса CE дорівнює одній з ланок Z-блискавки $AECB$. Довести, що вона дорівнює і другій ланці.

● **Доведення.** 1) Нехай $CE = AE$ (рис. 2.2). Доведемо, що $CE = BC$. Дійсно, оскільки $\angle CAE = \angle ACE = \alpha$, то $\angle BEC = 2\alpha = \angle ABC$, значить, $CE = BC$.

2) Нехай $CE = BC$. Доведемо, що $CE = AE$. Доведення аналогічне. ●

Задача 4. У Z-блискавці ланки AE і BC рівні. Довести, що бісектриса CE дорівнює кожній з них.

● **Доведення.** На цій задачі можна «спіткнутися». Проведемо $DE \parallel BC$ (рис. 2.3).

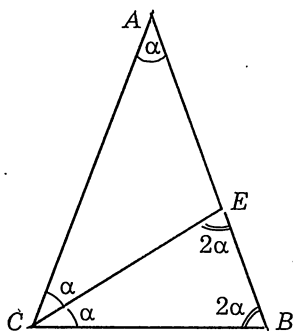


Рис. 2.2

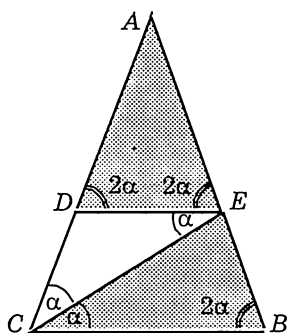


Рис. 2.3

Тоді $DC = EB = DE$ (оскільки трикутник CDE — рівнобедрений).

Оскільки $EB = DE$, $BC = AE$, і $\angle CBE = \angle ADE$, то трикутники ADE і CBE — рівні, й $EC = AE$, що і потрібно було довести. ●

Задача 5. (див. Квант. — 2002. — № 1). Умову запишемо відповідно до прийнятої термінології.

У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) в блискавці $AECB$ $AE = BC$, а ланка EC — бісектриса кута ACB . Знайти кути трикутника ABC .

● За попередньою задачею $CE = AE = BC$, а значить, $\angle A = 36^\circ$. ●

Задача 6. Довести, що трикутник ABC рівнобедрений, якщо ланки двох Z -блискавок, побудованих з вершини A , рівні.

● Доведення. Нехай $AE = EC = CB = AE_1 = E_1B$ (рис. 2.4). Позначимо $\angle EAE_1 = \alpha$. Тоді $\angle ABE_1 = \angle A = \alpha$. Далі $\angle BEC = \angle BE_1C = 2\alpha = \angle EBC = \angle E_1CB$ (можна розглянути рівність трикутників ABE_1 і ACE). ●

Задача 7. Знайти рівнобедрений трикутник, у якому можна побудувати нескінченну кількість Z -конфігурацій.

● Цим трикутником буде рівнобедрений трикутник з кутом 36° при вершині (рис. 2.5). Алгоритм побудови простий: будемо першу блискавку, для цього проведемо бісектрису кута 72° . Отримаємо трикутник ECB , кути якого $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$. У ньому знову поділимо кут 72° навпіл бісектрисою EE_1 . CE_1EB — Z -конфігурація. Процес повторюється до нескінченності. ●

Σ -блискавка (чотири ланки)

Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$) із блискавкою $AE = ED = DC = BC = a$ (рис. 2.6).

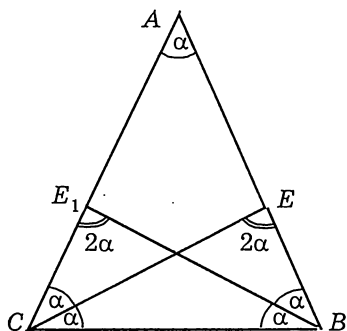


Рис. 2.4

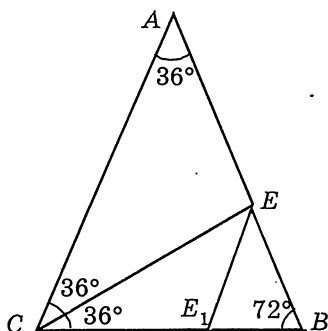


Рис. 2.5

Задача 8. Знайти кути рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) з Σ -блискавкою: $AE = ED = DC = BC$.

● Нехай $\angle A = x$ (рис. 2.6). Оскільки $AE = ED$, то $\angle EAD = \angle ADE = x$, а $\angle CED = 2x$. Оскільки $ED = CD$, то $\angle ECD = 2x$, а $\angle CDB = 3x$

($\triangle CDA$) та $3x = 90^\circ - \frac{x}{2}$, $x = \frac{180^\circ}{7}$. ●

Задача 9. Знайти, в якій пропорції ланка DC ділить кут ACB .

● Очевидно, що $2 : 1$ (2α и α). ●

Задача 10. Якщо в Σ -блискавці рівнобедреного трикутника

ABC ($AB = AC$ і $\angle A = \frac{180^\circ}{7}$) $AE = ED = DC$, то $DC = CB$. Довести.

● Доведення. Оскільки $\angle CDB = 3x$ і $\angle ABC = \angle ACB = 3x$, то $BC = DC$, а значить, твердження задачі доведено. ●

Задача 11. Якщо в трикутнику ABC $AC = AB$, $\angle A = \frac{\pi}{7}$ і

$BC = CD = DE$, то $AE = ED$.

● Доведення. Нехай $\angle CBD = 3x$ (рис. 2.7), тоді $\angle CDB$ також дорівнює $3x$, а $\angle BCD = x$. Маємо

$$\angle ECD = \angle ECB - \angle DCB = 3x - x = 2x.$$

Оскільки $\triangle EDC$ — рівнобедрений, то $\angle CED = 2x$. За умовою

$$\angle EAD = \frac{\pi}{7} = x. \text{ Тоді}$$

$$\angle ADE = \angle CED - \angle EAD = 2x - x,$$

значить, трикутник AED — рівнобедрений, $AE = ED$. ●

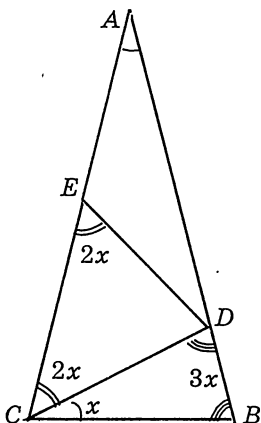


Рис. 2.6

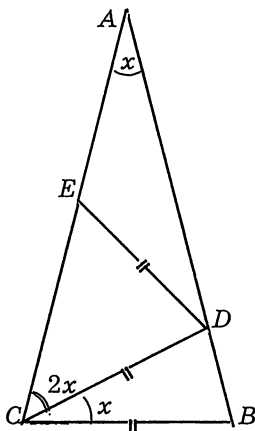


Рис. 2.7

Задача 12 (!). Якщо в Σ -блискавці рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$, $\angle A = \frac{180^\circ}{7}$) $AE = DC = CB$, то $AE = ED$.

Довести самостійно.

Задача 13 (!). Якщо в Σ -блискавці рівнобедреного трикутника ($AB = AC$, $\angle A = \frac{180^\circ}{7}$) $AE = ED = BC = a$, то $DC = a$.

Довести.

● **Доведення.** Проведемо ланку KD , що дорівнює a (рис. 2.8) і KP , паралельну до основи ($KP \parallel BC$). Тоді за задачею 10 $AE = ED = KD = KP$. Але тоді $KP = BC$. Значить, точки K і C збігаються. Твердження задачі доведено. ●

Задача 14. Довести, що трикутник ABC рівнобедрений, якщо ланки Σ -блискавки, проведені з вершини A , рівні.

● **Доведення.** Нехай $\angle BAC = \alpha$ (рис. 2.9). Із рівнобедрених трикутників AED і AE_1D_1 маємо $\angle ADE = \angle AD_1E_1 = \alpha$. Як зовнішні кути трикутників ADE і AD_1E_1 $\angle CED$ і $\angle BE_1D_1$ дорівнюють 2α .

Оскільки трикутники CDE і BD_1E_1 — рівнобедрені, то $\angle ECD = 2\alpha$ і $\angle E_1BD_1 = 2\alpha$.

Із трикутника AD_1B кут CD_1B дорівнює 3α . Аналогічно $\angle CDB$ дорівнює 3α . Оскільки $D_1B = CB$, то $\angle D_1CB = \angle BD_1C = 3\alpha = \angle CDB = \angle DBC$, а значить, $AB = AC$. ●

Блискавка-серпантин (п'ять ланок)

Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$) із блискавою-серпантином $AE = ED = DK = KB = BC$.

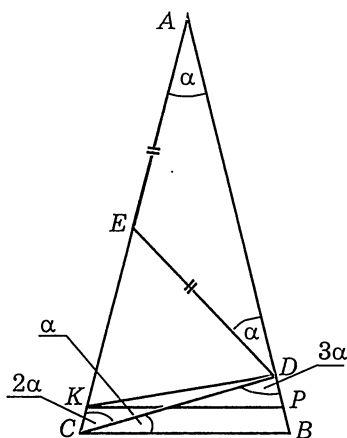


Рис. 2.8

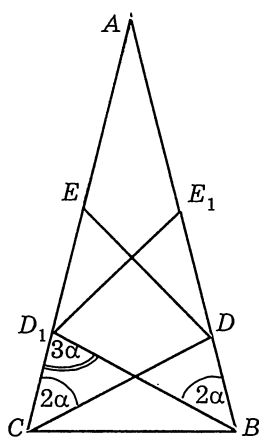


Рис. 2.9

Задача 14. Знайти кути рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) із серпантином ($AE = ED = DK = KB = BC$).

● Нехай $\angle EAD = x$ (рис. 2.10). Аналогічно до попередньої задачі маємо: $\angle KED = 2x$; $\angle KDB = \angle DBK = 3x$ (трикутники AKD і KDB). Із $\triangle KDB$ кут $\angle KDB$ дорівнює $3x$. Оскільки $\angle KCB = \angle KCB = 4x$, то $\angle KBC$ дорівнює x і з трикутника BKC :

$$4x + 4x + x = 180^\circ, x = 20^\circ. \bullet$$

Задача 15. У рівнобедреному трикутнику $\angle A = 20^\circ$. Якщо $BC = BK = KD = ED = a$, то $AE = a$. Довести.

● Доведення. Безпосередньо можна визначити $\angle ABC = \angle ACB = 80^\circ$, $\angle KBC = 20^\circ$, $\angle KBD = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$. Із трикутника AKD $\angle AKD = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$. У рівнобедреному трикутнику KDE кут $\angle DEK$ дорівнює куту $\angle EKD = 40^\circ$, значить, $\angle ADE = 20^\circ$ (із $\triangle ADE$), відповідно, $AE = ED = a$. ●

Задача 16. Довести, що дві ланки серпантину утворюють зі стороною трикутника ABC ($AB = AC$, $\angle A = 20^\circ$) рівносторонній трикутник.

● Дійсно, це трикутник BKD . ●

Задача 17 (І). У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) $\angle A = 20^\circ$. Від вершини A відкладемо відрізок AE , рівний BC . Знайти $\angle EBC$.

● Побудуємо блискавку-серпантин $AE = ED = DK = KB = BC$ (рис. 2.11). Оскільки трикутник KDB рівносторонній, то $ED = DB$ і $\angle EDB = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$, значить,

$$\angle DBE = (180^\circ - 160^\circ) : 2 = 10^\circ \text{ і } \angle EBC = 80^\circ - 10^\circ = 70^\circ. \bullet$$

Задача 18 (автор І. В. Федак). На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC , в якому $\angle B = 20^\circ$, вибрали відповідно точки D і E так, що $AD = BE = AC$. Знайдіть величину кута BDE .

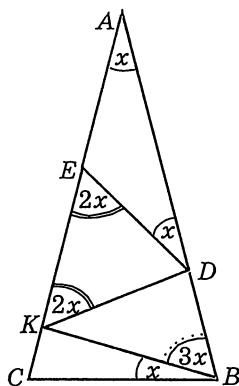


Рис. 2.10

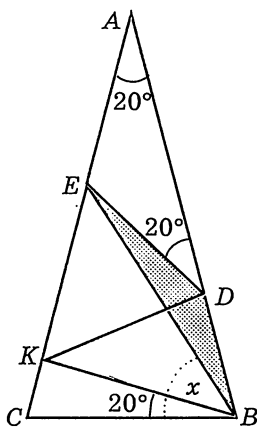


Рис. 2.11

● *Перший спосіб.* Побудуємо на відрізку BC точку K таку, що $\angle KAC = 20^\circ$. За умовою маємо $\angle ACK = 80^\circ$, тоді

$$\angle AKC = 180^\circ - \angle KAC - \angle ACK = 80^\circ.$$

Значить, $\angle AKC = \angle ACK$. Звідси маємо, що $\triangle AKC$ — рівнобедрений, тобто $AK = AC$. За умовою $AD = AC$, тому $AD = AK$.¹

Із цієї рівності й рівності

$$\angle DAK = \angle DAC - \angle KAC = 60^\circ$$

виходить, що трикутник ADK рівносторонній. Тому $DK = BE$ і $\angle BDK = 180^\circ - \angle ADK = 120^\circ$. На відрізку BK побудуємо точку E_1 таку, що $\angle BDE_1 = 20^\circ$. Тоді $\triangle BDE_1$ — рівнобедрений і $DE_1 = BE_1$. Покажемо, що $\triangle KDE_1$ також рівнобедрений. Дійсно, $\angle DE_1K = \angle DBE_1 + \angle BDE_1 = 40^\circ$ і $\angle DKE_1 = 180^\circ - \angle AKC - \angle AKD = 40^\circ$. Тому $DE_1 = DK$. Значить, $BE_1 = DE_1 = DK = BE$. Звідси виходить, що точки E і E_1 збігаються. Тому $\angle BDE = \angle BDE_1 = 20^\circ$.

Відповідь: $\angle BDE_1 = 20^\circ$.

Другий спосіб. Побудуємо $DF \parallel BC$ ($F \in AC$) (рис. 2.13). У трикутнику ADF : $\angle A = 80^\circ$, $\angle ADF = \angle B = 20^\circ$, відповідно, $\angle DFA = 80^\circ = \angle A$, значить, $AD = DF = BE$ і $BDFE$ — паралелограм. Позначимо $AC = AD = DF = BE = x$; $BD = FE = y$; $AB = x + y$; $AC = x$.

$$\text{У } \triangle ABC \quad \frac{AC}{2AB} = \sin \frac{B}{2}; \quad \frac{x}{2(x+y)} = \sin 10^\circ; \quad \frac{x+y}{x} = \frac{1}{2 \sin 10^\circ};$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1 - 2 \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ}. \quad (1)$$

У $\triangle DBE$ позначимо $\angle BDE$ як φ . За теоремою синусів:

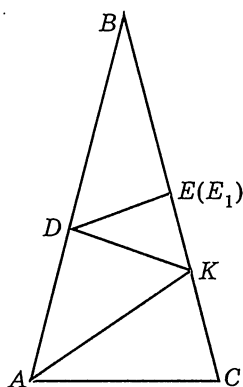


Рис. 2.12

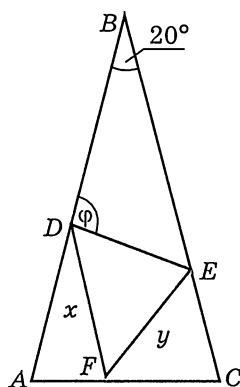


Рис. 2.13

¹ Математика в школі. — 2004. — № 4.

$$\frac{x}{\sin \varphi} = \frac{y}{\sin(180^\circ - 20^\circ - \varphi)}; \quad \frac{x}{\sin \varphi} = \frac{y}{\sin(20^\circ + \varphi)}; \quad \frac{y}{x} = \frac{\sin(20^\circ + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Підставимо останній вираз в (1):

$$\frac{1 - 2 \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \cos \varphi + \cos 20^\circ \sin \varphi}{\sin \varphi} = \cos 20^\circ + \operatorname{ctg} \varphi \sin 20^\circ.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \varphi &= \frac{1 - 2 \sin 10^\circ - 2 \sin 10^\circ \cos 20^\circ}{2 \sin 10^\circ \sin 20^\circ} = \frac{1 - 2 \sin 10^\circ (1 + \cos 20^\circ)}{2 \sin 10^\circ \sin 20^\circ} = \\ &= \frac{1 - 4 \sin 10^\circ \cos^2 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \sin 20^\circ} = \frac{1 - 2 \sin 20^\circ \cos 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \sin 20^\circ} = \frac{\sin(10^\circ + 20^\circ) - \sin 20^\circ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ \sin 20^\circ} = \\ &= \frac{\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \cos 10^\circ \sin 20^\circ - \sin 20^\circ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ \sin 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \sin 20^\circ} = \operatorname{ctg} 20^\circ. \end{aligned}$$

Значить, $\varphi = 20^\circ$. ●

Глава 3

МАТЕМАТИК — ЦЕ ТОЙ...

«Математик — це той, хто вміє знаходити аналогії серед тверджень; кращий математик — той, хто встановлює аналогії доведень; сильніший математик — той, хто помічає аналогії теорій; але можна уявити собі й таку людину, що серед аналогій бачить аналогії».

Стефан Банах

Про аналогії написано чимало статей і навіть книг. Її ефективність як форми умовиводу дивовижна. Кожного разу, коли трапляється можливість, — не проходите повз неї. Зупиніться, оберніться. Аналогія віддячить вам не просто розв'язанням, а часто — найкращим розв'язанням.

У книзі І. Ф. Шаригіна «Геометрия. Задачник 9–11 кл.» (М.: Дрофа, 1997) мені трапилася задача (№ 194):

У вписаному чотирикутнику $ABCD$, в якому $AB = BC$, K — точка перетину діагоналей. Знайти AB , якщо $BK = b$, $KD = d$.

Автор задачі пропонував таке рішення (перепишемо умову задачі відповідно до майбутнього розв'язання):

В коло вписано трикутник ABC . W_1 — точка перетину бісектриси l_a кута BAC з описаним колом, L_1 — точка перетину цієї бісектриси зі стороною BC . Знайти відрізок W_1C , якщо дано $AL_1 = l_a$ і $W_1L_1 = t$.

● Нехай M_1 — середина сторони BC (рис. 3.1). Маємо:

$$CW_1^2 = CM_1^2 + M_1W_1^2, M_1W_1^2 = W_1L_1^2 - M_1L_1^2.$$

Значить,

$$\begin{aligned} CW_1^2 &= CM_1^2 + W_1L_1^2 - M_1L_1^2 = W_1L_1^2 + CM_1^2 - M_1L_1^2 = \\ &= t^2 + (CM_1 - M_1L_1)(CM_1 + M_1L_1) = t^2 + (M_1B - M_1L_1) \cdot CL_1 = \\ &= t^2 + BL_1 \cdot CL_1 = t^2 + tl_a = t(t + l_a). \end{aligned}$$

Ніде правди діти, ця формула наштовхнула на аналогію. Дійсно, вираз $CW_1^2 = t(t + l_a)$ можна записати так:

$$CW_1^2 = AW_1 \cdot W_1L_1. \quad (1)$$

А значить, його можна порівняти з формулою прямокутного трикутника (рис. 3.2):

$$CA^2 = AB \cdot AH_3 \quad (CH_3 \perp AB). \quad (2)$$

(Катет є середнім геометричним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу). Формули (1) і (2) — аналогічні! ●

Ефектно? Не лише! Ефективно! Застосовуючи аналогію, згадаємо, як доводиться формула (2):

$$\triangle ACH_3 \sim \triangle ABC; \frac{AC}{AB} = \frac{AH_3}{AC}; AC^2 = AB \cdot AH_3.$$

Проведемо доведення формули (1), аналогічне до доведення формули (2).

● Оскільки $\angle L_1CW_1 = \angle W_1AB = \angle W_1AC$, то

$$\frac{CW_1}{AW_1} = \frac{W_1L_1}{CW_1}.$$

Значить,

$$CW_1^2 = AW_1 \cdot W_1L_1,$$

що й потрібно було довести. ●

Зауваження. Згадуючи теорему «трилисника» ($IW_1 = BW_1 = CW_1$) варто мати на увазі, що існує формула для «листа» трилисника, та й для відрізка L_1W_1 :

$$CW_1^2 = AW_1 \cdot L_1W_1. \quad (1)$$

Задача 1. Дано відрізки AW_1, IW_1 , знайти бісектрису l_a .

● За формулою (1):

$$L_1W_1 = \frac{CW_1^2}{AW_1} = \frac{IW_1^2}{AW_1}.$$

Значить,

$$l_a = AW_1 - \frac{IW_1^2}{AW_1} = \frac{1}{AW_1} (AW_1^2 - IW_1^2). \quad \bullet$$

Задача 2. Побудувати трикутник за AI, IW_1, h_a (h_a — висота трикутника ABC , опущена на сторону BC).

Вказівка. Застосувати формулу (1) і теорему «трилисника».

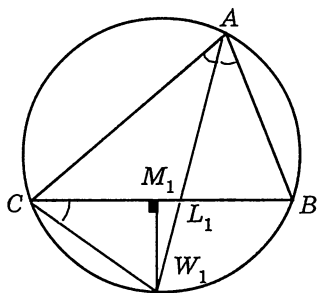


Рис. 3.1

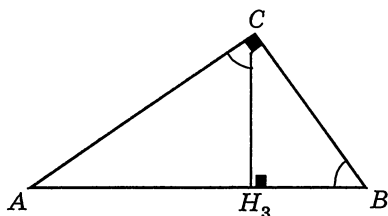


Рис. 3.2

Задача 3. В колі проведено хорду BC . Інше коло дотикається до хорди BC і першого кола в точці A . Із середини W дуги BC , яка не містить точки A , проведена дотична WK до другого кола. Доведіть, що $WK = WB$.

● **Доведення.** Доведемо таку лему.

Нехай L — точка дотику меншого кола і хорди BC (рис. 3.3). Доведемо, що точки A, L, W належать одній прямій (або, що те ж саме, AL — бісектриса кута BAC). Дійсно, проведемо дотичну AT в точці A . Тоді

$$\angle TAB = \angle ACB, \angle TAL = \angle TLA.$$

Оскільки $\angle LAT = \angle BAT + \angle BAL$, то $\angle BAL = \angle CAL$. Лема доведена.

Значить, за формулою (1):

$$BW^2 = AW \cdot LW,$$

але $WK^2 = AW \cdot LW$ як квадрат дотичної, тобто $WK = WB$. ●

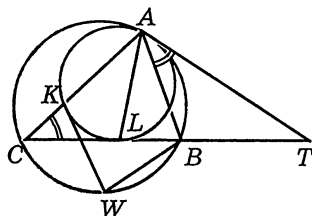


Рис. 3.3

Глава 4

«ЗОЛОТА СЕРЕДИНА» — В ГЕОМЕТРІЇ

Людство з давніх-давен вживає термін «золота середина». Гадаємо, що епітета «золота» заслуговує середина відрізка, середина дуги кола (серединний перпендикуляр, середня лінія, середина діагоналі паралелограма тощо).

У цій главі ми зупинимося на властивості середини відрізка і дуги. Покажемо, як ця чудова точка є *допоміжною*. Що ми маємо на увазі під терміном «допоміжна точка»? Точку, про яку в умові задачі нічого не сказано, але яка використовується для

розв'язання, назовемо «допоміжною». Її введення є додатковою побудовою, а вивчення таких точок робить хід розв'язання більш обдуманим.

Задача 1. Довести, що сума квадратів відрізків двох взаємоперпендикулярних хорд, які перетинаються в крузі, величина постійна для цього круга.

● **Доведення.** Нехай AB і CD — дві перпендикулярні хорди, E — точка їх перетину, O — центр круга. Нехай F і H — середини цих хорд (рис. 4.1). З'єднаємо F і H з центром круга. Очевидно, що $OF \perp AB$ і $OH \perp CD$. Позначимо $EF = x$; $EH = y$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 &= (AF - x)^2 + (AF + x)^2 + (CH - y)^2 + \\ &+ (CH + y)^2 = 2AF^2 + 2CH^2 + 2x^2 + 2y^2 = 2(AF^2 + y^2) + \\ &+ 2(CH^2 + x^2) = 2R^2 + 2R^2 = 4R^2. \bullet \end{aligned}$$

Задача 2. Одна з діагоналей вписаного в коло чотирикутника є діаметром цього кола. Довести, що проєкції протилежних сторін чотирикутника на другу діагональ рівні між собою.

● **Доведення.** Нехай діагональ AC (рис. 4.2) чотирикутника $ABCD$ буде діаметром кола.

Позначимо P і L — проєкції точок A і C на діагональ BD . Із середини O відрізка AC проведемо пряму, паралельну відрізку LC . Ця пряма перетинає відрізок AL в точці K — його середині (теорема Фалеса). А оскільки $KO \parallel AP$, то відрізок KO перетне сторону LP трикутника ALP в точці E , яка є серединою LP . Отже, $LE = EP$ і $DL = BP$, що і потрібно було довести. ●

Задача 3. Виразувати кути рівнобедреного трикутника, висота якого вдвічі менша за бісектрису кута при основі.

● Нехай в трикутнику ABC (рис. 4.3) $AB = AC$, AD — висота, CL — бісектриса. Нехай E — середина відрізка LB . Тоді

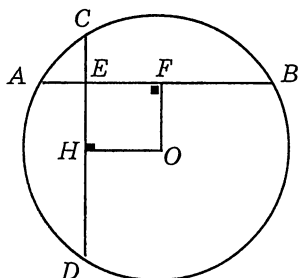


Рис. 4.1

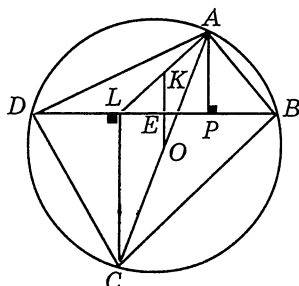


Рис. 4.2

$$DE = \frac{1}{2} CL = AD.$$

Отже, $\angle DAE = \angle AED$. Позначимо $\angle ACB = x$. Відповідно,

$$\angle EDB = \frac{1}{2} x; \angle EBC = x; \angle AED = \frac{3x}{2}; \angle BAC = 3x.$$

Отримаємо рівняння: $x + x + 3x = 180^\circ$; $x = 36^\circ$. ●

Задача 4. У нерівнобедреному трикутнику ABC маємо M — точку перетину медіан, I — інцентр. Довести, що якщо відрізок MI перпендикулярний до сторони BC , то

$$a = \frac{b+c}{3}.$$

● **Доведення.** Опишемо навколо трикутника ABC коло і позначимо W_1 — середину дуги BC (рис. 4.4). Трикутники ABW_1 і AL_1C подібні (L_1 — перетин прямих AI і BC):

$$\frac{BW_1}{AW_1} = \frac{CL_1}{AC}.$$

Але $BW_1 = IW$ («трилисник»), тому

$$\frac{IW_1}{AW_1} = \frac{CL_1}{b}. \quad (1)$$

Оскільки $MI \parallel M_1W_1$ (M_1 — середина відрізка BC), то

$$\frac{IW_1}{AW_1} = \frac{M_1M}{AM_1} = \frac{1}{3}$$

і, враховуючи співвідношення (1), отримуємо $CL_1 = \frac{b}{3}$. Ана-

логічно доводиться, що $BL_1 = \frac{c}{3}$. Значить, $a = \frac{b+c}{3}$. ●

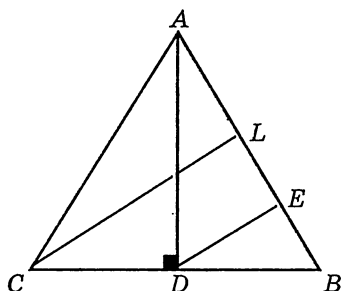


Рис. 4.3

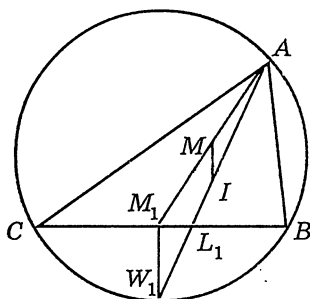


Рис. 4.4

Задача 5 (!). Довести, що площу S чотирикутника можна виразити через його сторони a, b, c, d і діагоналі e і f за формулою $16S^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$.

● **Доведення.** Нехай B_1, C_1, D_1 — середини сторін BC, CD, AD чотирикутника $ABCD$ (рис. 4.5). Тоді за формулою медіани маємо:

$$BD_1^2 = \frac{2(a^2 + e^2) - d^2}{4}; \quad CD_1^2 = \frac{2(c^2 + f^2) - d^2}{4};$$

$$B_1D_1^2 = \frac{2(BD_1^2 + CD_1^2) - BC^2}{4}.$$

Звідки

$$4 \cdot B_1D_1^2 = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 + f^2. \quad (1)$$

Позначимо $\angle B_1C_1D_1 = \varphi$. Тоді з трикутника $B_1C_1D_1$:

$$4B_1D_1^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos\varphi. \quad (2)$$

Із співвідношень (1) і (2):

$$\sin^2 \varphi = 1 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}{4e^2f^2}.$$

Але $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$, чи $4S^2 = e^2f^2 \sin^2 \varphi$, маємо:

$$16S^2 = 4e^2f^2 \left(1 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}{4e^2f^2} \right).$$

Звідки $16S^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$. ●

Задача 6 (!). Діагоналі опуклого чотирикутника взаємно перпендикулярні. Через середини сторін AB і AD проведені прямі, перпендикулярні до протилежних сторін CD і CB відповідно. Доведіть, що ці прямі й пряма AC мають спільну точку.

● **Доведення.** Введемо допоміжну точку O — середину відрізка AC і з'єднаємо її з серединами K і M сторін AB і AD (рис. 4.6). Як середні лінії трикутників $ABD, ABC, ADC, KM \parallel BD, KO \parallel BC$ і $MO \parallel DC$, а значить, KT, MF, AO належать висотам трикутника KMO , тобто перетинаються в одній точці. ●

Задача 7. У чотирикутнику діагоналі утворюють рівні кути з середньою лінією. Довести, що діагоналі рівні.

● **Доведення.** Нехай T_1T_2 — середня лінія чотирикутника $ABCD$ (рис. 4.7). Діагональ AC утворює з T_1T_2 кут T_1EA , а діагональ BD утворює з T_1T_2 кут T_2FD . На стороні BC візьмемо

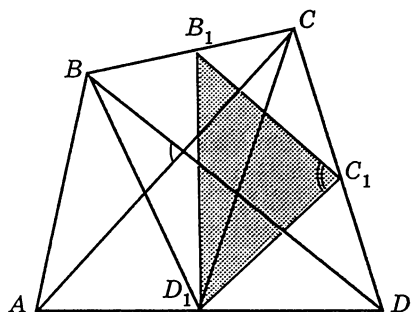


Рис. 4.5

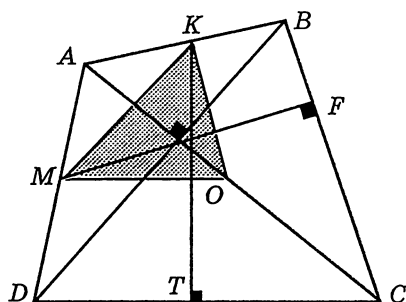


Рис. 4.6

середину T_3 . Оскільки $T_1T_3 \parallel AC$, а $T_2T_3 \parallel BD$, то

$$\angle T_3T_1E_1 = \angle T_1EA = \angle DFT_2 = \angle FT_2T_3,$$

значить, $T_1T_3 = T_2T_3$, відповідно, $AC = BD$, що й потрібно було довести. ●

Задача 8. Довести, що сума квадратів відстаней від середини сторони трикутника до ортоцентра H і до центра O описаного кола не залежить від вибору сторони трикутника.

● **Доведення.** Скористаємося допоміжною точкою E_1 — точкою Ейлера (рис. 4.8) — серединою відрізка AH (H — ортоцентр). Оскільки

$$OM_1 = \frac{1}{2}AH = AE_1,$$

то OAE_1M_1 і OM_1HE_1 — паралелограми, а значить,

$$M_1H^2 + M_1O^2 = \frac{1}{2}(HO^2 + M_1E_1^2) = \frac{1}{2}(HO^2 + AO^2) = \frac{1}{2}(HO^2 + R^2). \quad \bullet$$

Задача 9. Якщо в чотирикутнику третя середня лінія¹ дорівнює піврізниці протилежних сторін, то цей чотирикутник — трапеція.

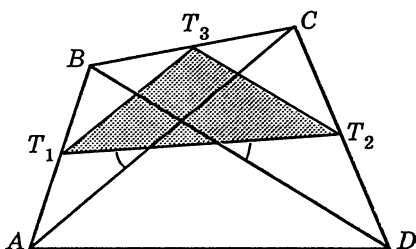


Рис. 4.7

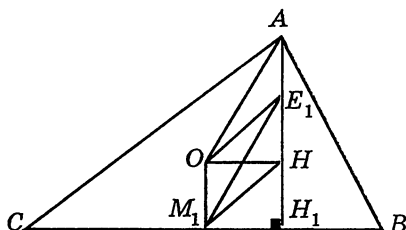


Рис. 4.8

¹ Відрізок, що з'єднує середини діагоналей чотирикутника.

● **Доведення.** Позначимо (рис. 4.9) $AD = a$, $CB = b$. Нехай E_1 і E_2 — середини діагоналей. Тоді

$$E_1E_2 = \frac{a-b}{2}.$$

Введемо допоміжні точки T_1 і T_2 — середини сторін CD і AB . Покажемо, що точка E_2 належить відрізку T_1E_1 .

Дійсно,

$$T_1E_2 + E_2E_1 = \frac{b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} = T_1E_1.$$

Аналогічно доводиться, що точка E_1 належить відрізку E_2T_2 . Звідси:

$$T_1T_2 = T_1E_1 + E_1T_2 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

значить, $ABCD$ — трапеція. ●

Задача 10. Три медіани трикутника перетинаються в одній точці.

● **Доведення.** Нехай медіани AM_1 і CM_3 перетинаються в точці M (рис. 4.10). Скористаємося серединами відрізків AM і CM . Позначимо їх K і P .

Оскільки

$$KP = \frac{1}{2} AC \text{ і } M_1M_3 = \frac{1}{2} AC,$$

то чотирикутник KM_3M_1P — паралелограм. А це значить, що точка M ділить кожну медіану в співвідношенні 2 : 1, починаючи з вершини. Оскільки така точка єдина, то твердження задачі доведено. ●

Задача 11. У трикутнику ABC проведено медіану AM_1 . Через вершину C і середину E цієї медіани проведено пряму. В якому відношенні вона ділить сторону AB ?

● Скористаємося точкою M_2 (рис. 4.11) — серединою сторони AC . Позначимо F — точку перетину відрізків M_1M_2 і CX

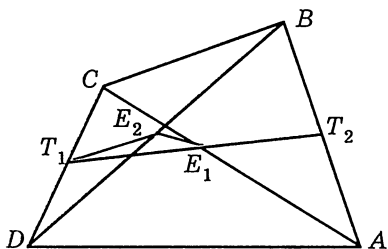


Рис. 4.9

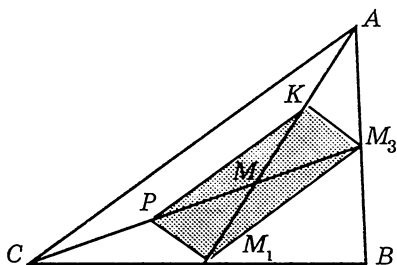


Рис. 4.10

(X — точка перетину прямої CE і сторони AB). Оскільки $M_1M_2 \parallel AB$ і $AE = EM_1$, то трикутники AHE і M_1FE рівні, а значить, $FM_1 = AX$. З іншого боку, відрізок FM_1 — середня лінія трикутника BCX , звідси $XB = 2FM_1$.

Значить, $XB = 2AX$.

Отже, пряма CE ділить сторону AB у відношенні $1 : 2$, починаючи від точки A . ●

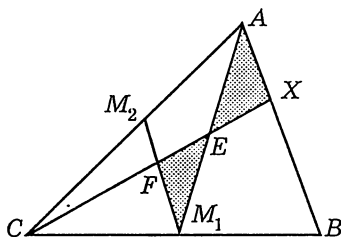


Рис. 4.11

Глава 5

ЯК КУЛЮ ПЕРЕТВОРИТИ НА СНАРЯД

Розглянемо задачу, яка порівняно недавно з'явилася на олімпіаді.

На сторонах AB і CD прямокутника $ABCD$ позначено точки K і E так, що $BK = CE$. Із точки K проведено перпендикуляр KP на AC . Знайти кут BPE .

Вона справляє враження кулі. А її можна перетворити на снаряд! Переконайтеся самі.

● Оскільки $BK = EC$ і $BK \parallel EC$ (рис. 5.1), то навколо чотирикутника $KECB$ можна описати коло, діаметрами якого є KC і EB . Це коло перетне діагональ AC в точці F , а оскільки $KF \perp AC$, то точка P збігається з точкою F , і кут BPE дорівнює 90° . ●

У одному з задачників (Лоповок Л. М. Факультативні завдання з геометрії для 7–11 класів. — К.: Рад. шк., 1990) скромно причаїлася задача:

$ABCD$ — квадрат. На сторонах AB і BC відкладено рівні відрізки BK і BM ; BT — перпендикуляр, опущений на KC . Знайти $\angle MTD$.

Не поспішайте читати розв'язання. Спробуйте зробити задачу самостійно, тим більше, що вона аналогічна до попередньої!

Обманлива аналогія! Здавалося, що зі «зручнішою» геометричною фігурою, якою і є квадрат порівняно з прямокутником, і розв'язання мало би бути простішим. Аж ніяк! Хоча — дивіться самі!

● Продовжимо відрізок BT до перетину з AD в точці P (рис. 5.2). Оскільки $\angle KBP = \angle BCK$, то трикутник ABP дорівнює трикутнику BCK . Тоді $AP = BM$, а значить, $MC = PD$ і чотирикутник $PMCD$ — прямокутник, навколо якого можна описати

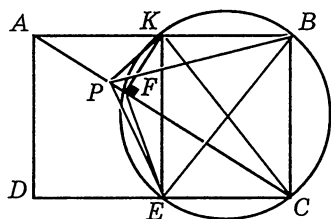


Рис. 5.1

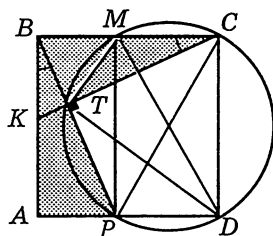


Рис. 5.2

коло з діаметрами PC і MD . За умовою $\angle PTC = 90^\circ$, значить, цьому колу належить точка T , і $\angle MTD = 90^\circ$. Ось і снаряд! ●

Глава 6

ОТ І ВСЕ! НАЙЕМОЦІЙНІША ТЕОРЕМА ГЕОМЕТРІЇ ТРИКУТНИКА

Мова піде про теорему «трилисника»: $WB = WC = WI$ (рис. 6.1) (W — середина дуги BC).

Гадаю, що цій залежності стільки ж років, скільки й власне геометрії.

Але до 1971 року її як самостійну теорему ніхто не пропонував. І того ж року, в журналі «Математика в школі», № 3, в статті «Про деякі властивості трикутника та їх використання для розв'язання задач» для доведення формули Леонарда Ейлера ($OI^2 = R^2 - 2Rr$) «відомій» геометричній залежності надано було статус теореми. Слово «відома» я написав у лапках не тому, що

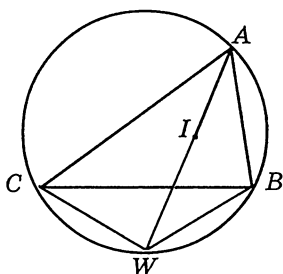


Рис. 6.1

досвідченому вчителю математики вона була невідома (про таке не хочеться навіть думати!), а тому, що її принагідно щоразу доводили, замість того, аби раз і назавжди... узаконити! Після багатьох публікацій і виступів теорема ставала дедалі популярнішою, навіть настільки, що в одній із книг¹ їй присвятили цілий параграф: §5 «Теорема про „Тризуб“». Назвати її «най-най», звісно ж, право автора, чим я і скористався. А чому б і ні? Ми розглянемо задачі, побудовані

¹ Лейфура В. М., Мітельман І. М., Раденко В. М., Ясінський В. А. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язання. — Львів, 1999.

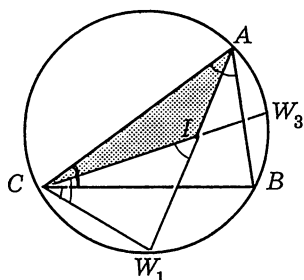


Рис. 6.2

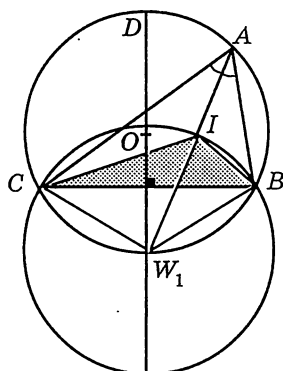


Рис. 6.3

на «незнанні» (!) теореми «трилисника», і складність розв'язання такої задачі полягає не лише в здатності здогадатися про існування такої залежності, а й можливості її довести (під час розв'язання). Тепер у цьому не буде потреби. От і все!

Емоційність починається вже із самого доведення теореми «трилисника». Чотири самодостатніх способи промовисті самі по собі.

● *Перший спосіб* (традиційний). Доведемо, що

$$\angle CIW_1 = \angle ICW_1 \quad (I — \text{інцентр}).$$

Дійсно, $\angle CIW_1 = \angle CAI + \angle ICA$. Але $\angle CAI = \angle W_1AB = \angle BCW_1$, а $\angle ICA = \angle ICB$ (рис. 6.2).

Другий спосіб. Розглянемо кут W_1IC як кут з вершиною всередині круга: $\angle W_1IC = \frac{\cup AW_3 + \cup CW_1}{2} = \frac{\angle C + \angle A}{2}$.

$$\text{Далі: } \angle ICW_1 = \frac{\cup W_3B + \cup W_1B}{2} = \frac{\angle C + \angle A}{2}, \text{ значить,}$$

$$\angle CIW_1 = \angle ICW_1.$$

Третій спосіб. Навколо трикутника BIC опишемо коло (рис. 6.3). Точка W_1 буде центром цього кола, оскільки вона належить серединному перпендикуляру W_1O , і $\angle BW_1C = 180^\circ - A$. Значить, $W_1B = W_1C = W_1I$ як радіуси цього кола.

Четвертий спосіб (найемоційніший, публікується вперше). Нехай бісектриса кута ABC (рис. 6.4) перетинає коло в точці W_2 . Тоді $\Delta W_1IW_2 = \Delta W_1CW_2$, значить, $W_1I = W_1C$ — от і все! ●

Задача 1 (Київська олімпіада, 1962 р.). Дано коло, точка A , що лежить на ній, і точка P , яка лежить всередині кола. Знайти на колі такі точки B і C , щоб точка P була центром кола, вписаного в трикутник ABC .

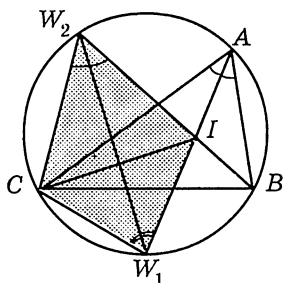


Рис. 6.4

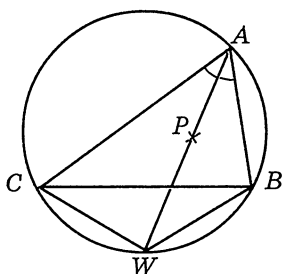


Рис. 6.5

● З'єднаємо точки A і P (рис. 6.5). Пряма AP перетинає дане коло в точці W . Проведемо дуги, що дорівнюють відрізку WP , вони перетинають дане коло в точках B і C . От і все! ●

Задача 2 (Київська олімпіада, 1976 р.). Побудувати трикутник ABC , якщо відомі дві його вершини A і B , а також пряма l , на якій лежать бісектриси внутрішнього кута C .

● Проведемо через середину відрізка AB точку M_3 (рис. 6.6), серединний перпендикуляр t . Він перетинає пряму l , якій належить бісектриса l_c в точці W_3 .

Оскільки $AW_3 = W_3B = W_3I$, то можна отримати інцентр I , а значить, побудувати трикутник ABC . От і все! ●

Задача 3. Побудувати трикутник за R ; r ; a (чи R ; r ; A).

Вказівка. Побудувати точку W_1 .

Задача 4. Довести, що $AI \cdot IW_1 = 2Rr$.

Вказівка. Трикутник CW_1M_1 подібний до трикутника AIK_3 .

Задача 5. Довести, що якщо $IW_1 = IW_2$, то трикутник ABC рівнобедрений.

Задача 6. Довести, що інцентр I є ортоцентром трикутника $W_1W_2W_3$.

Задача 7. Довести, що $I_aW_1 = W_1I$ (I_a — центр зовнішнього кола).

Вказівка. Розглянути прямокутний трикутник BI_aI .

Задача 8. Довести, що в різницево-му² трикутнику $AI = IW_1$.

Задача 9. Довести, що

$$\frac{IW_1 \cdot IW_3}{IB} = R.$$

Вказівка. Застосувати формулу

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

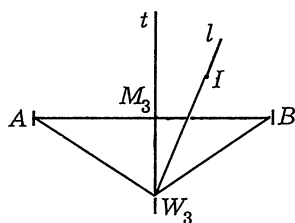


Рис. 6.6

² Різницевий трикутник — трикутник, сторони якого складають арифметичну прогресію.

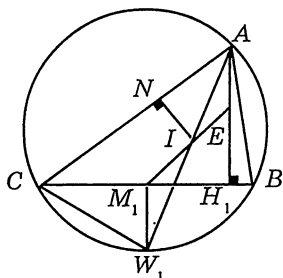


Рис. 6.7

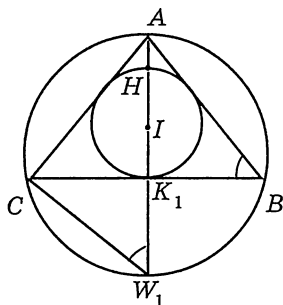


Рис. 6.8

Задача 10 (Австралійська олімпіада, 1982 р.). Довести:

$$AW_1 + BW_2 + CW_3 > 2p.$$

Задача 11 (Всесоюзна олімпіада, Англійська олімпіада).

У трикутнику ABC через середину M_1 сторони BC й інцентр I проведено пряму, яка перетинає висоту AH_1 в точці E . Довести, що $AE = r$.

● Доведення. Трикутники IAE і IW_1M_1 (рис. 6.7) подібні, звідки

$$\frac{AE}{M_1W_1} = \frac{AI}{IW_1}. \quad (1)$$

Нехай N — точка дотику вписаного кола зі стороною AC . Тоді прямокутні трикутники ANI і CM_1W_1 подібні (оскільки $\angle W_1CM_1 = \angle W_1AB = \angle W_1AN$):

$$\frac{IN}{M_1W_1} = \frac{AI}{CW_1}. \quad (2)$$

Порівнюючи рівності (1) і (2) й враховуючи, що $IW_1 = CW_1$, маємо $AE = IN = r$. ●

А тепер... найбільша... емоція!

Задача 12. Знайти кут рівнобедреного трикутника, якщо ортоцентр H належить вписаному колу.

● Розв'язання публікується вперше! Точка, симетрична ортоцентру H відносно BC , буде точкою W_1 , значить, $CW_1 = 3r$ (рис. 6.8),

$$\cos B = \cos \angle CW_1A = \frac{2r}{3r} = \frac{2}{3}. \quad \bullet$$

От і все! Ні, не все! У точки W_1 є ще одна маловідома властивість: коло, описане навколо трикутника BIC , витинає на прямій AC відрізок AB (рис. 6.9).

● Доведення. Оскільки W_1 — центр цього кола, то

$$W_1B = W_1C, \text{ а } W_1K_1 = W_1K_2$$

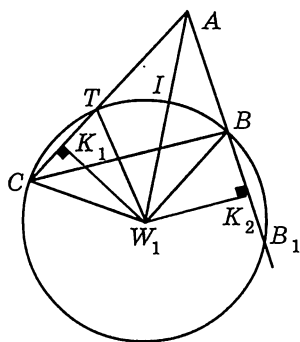


Рис. 6.9

(перпендикуляри, опущені з точки W_1 на прямі AB і AC) (рис. 6.9).

Оскільки

$$\Delta W_1BK_2 = \Delta W_1TK_1,$$

а

$$\Delta W_1K_2A = \Delta W_1K_1A,$$

то

$$AT = AB,$$

що і потрібно було довести! Тепер все?

Ні, ще й $AK_1 = \frac{b+c}{2}$. А тепер все? ●

Глава 7

МАТИ ЧИ МАЧУХА КОЛА?

Наша теорема є наріжним каменем усього вчення про коло, істинним визначенням кола¹.

Ганс Радемахер, Отто Тепліц

Перше видання книги знаних німецьких вчених Г. Радемахера і О. Тепліца «Числа і фігури» побачило світ у 1930 році, а потім у 1936 і 1938 роках. У 1962 році книгу перевидали російською мовою. Саме в ній я і знайшов міркування про коло, якими хочу поділитися з вами.

Дивно, що досі жодна з книг зі шкільної математики не популяризувала роздуми згаданих авторів.

Беруся за це із задоволенням. І з коментарями.

Той, хто навіть дуже приблизно знайомий із задачами на побудову, знає багато точок, із яких даний відрізок видно під даним кутом: так званий «сегмент, який містить даний кут».

Розглянемо пряму й обернену теорему:

Всі вписані кути, які опираються на одну й ту ж хорду, рівні.

Доведення — загальновідоме, для нас же суттєва обернена теорема:

Множиною всіх точок, із яких даний відрізок AB видно під даним кутом α , якщо точки перебувають «над відрізком AB », або ж кутом $180^\circ - \alpha$, якщо «під відрізком», є коло.

Зазначимо, що введення поняття орієнтованого кута спростить формулювання оберненої теореми:

Множина всіх точок, із яких даний відрізок AB видно під одним і тим самим кутом, є колом.

¹ Виділено автором.

Отже, в даному випадку існування прямої й оберненої теореми свідчить про те, що вказана властивість вписаних кутів є характеристичною для даного кола, а відповідно, вона підходить і для визначення цієї кривої.

Трохи емоцій... Для визначення кола? Навіщо? Тисячоліттями коло визначалося як «геометричне місце точок, рівновіддалених від деякої даної точки — її центра».

Однак найважливіші, найцікавіші теореми кола аж ніяк не пов'язані з цим визначенням, і довести їх можна тільки після теореми про вписані кути, і лише виходячи з неї, а не з класичного визначення кола. У цьому плані теорема про вписані кути є наріжним каменем усього вчення про коло, істинним визначенням кола. Яке воно, це визначення, образно кажучи, — мати кола чи мачуха?

Увага, читачу! Далі буде!

Подивися на рис. 7.1.

Не обов'язково бути естетом, щоб захопитися рівністю «кутів», яку б хорду ми не провели. А зрештою, чому «кути» в лапках? Шкільна геометрія привчила нас під «кутом» розуміти нахил двох прямих ліній. Проте кут між двома кривими іноді енергійно вривається в умову задачі: дивися, наприклад, задачу із «Збірника задач» за ред. М. І. Сканаві № 10.216 «Два кола перетинаються під прямим кутом...».

Відомо, що кут між кривими в спільній точці S визначається як кут, утворений дотичними до кожної з цих кривих у вершині S (рис. 7.2).

А тепер повернемося до рис 7.1. Неважко показати, що будь-яка хорда кола утворює з нею пару рівних криволінійних кутів. Проте значно цікавіше з'ясувати, чи є крива, яка з будь-якою своєю хордою утворює криволінійні кути, колом? Якщо це так, то наявність прямої та оберненої теореми є *характеристичною властивістю кола*.

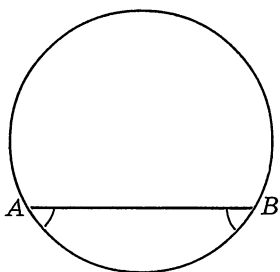


Рис. 7.1

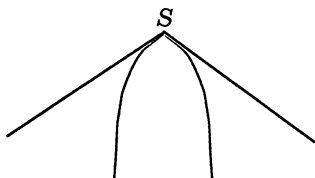


Рис. 7.2

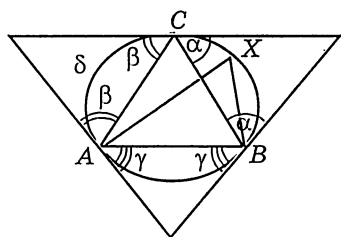


Рис. 7.3

Нехай δ — деяка крива, яка утворює рівні кути з будь-якою хордою, що з'єднує дві довільні точки кривою. Розглянемо хорди AB, AC, BC (рис. 7.3), $\angle A, \angle B, \angle C$ — кути між хордами; α, β, γ — кути між кривою і хордою.

Проведемо через точки A, B, C дотичні до кривої. За умовою теореми кожна хорда утворює з кривою

пару рівних кутів. Три кути з вершиною A в сумі дають 180° , як і кути з вершинами B і C . Маємо:

$$\angle A + \beta + \gamma = \pi; \quad (1)$$

$$\alpha + \angle B + \gamma = \pi; \quad \alpha + \beta + \angle C = \pi.$$

Додамо їх і отримаємо:

$$\angle A + \angle B + \angle C + 2(\alpha + \beta + \gamma) = 3\pi.$$

Оскільки $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$, то $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Якщо відняти цю рівність від рівності (1), то отримаємо, що $\angle A = \alpha$.

Аналогічно, $\angle B = \beta, \angle C = \gamma$.

Отже, хорду AB видно з точки C кривої під кутом γ . Звернемо увагу саме на цей факт.

Перейдемо безпосередньо до доведення: нехай точка X — будь-яка точка кривої δ . Розглянемо трикутник ABX . Аналогічно до трикутника ABC можна зробити висновок, що, оскільки дотичні в точках A і B залишилися прямими, то залишився таким, як був, і кут γ . Відповідно, кут BXA також дорівнює γ , і значить, $\angle X = \angle C$, а звідси — хорду AB видно із точки X під тим самим кутом, що й із точки C . На основі попередньої теореми про вписані кути крива δ — коло.

Глава 8

ЗДИВУВАННЯ ТРИВІАЛЬНІСТЮ

Кут і сторона трикутника... Звичне поєднання. Наявність в умові задачі цих основних (!) елементів трикутника може налаштувати на очікування тривіального розв'язання. Проте будьте обачними! Хоча «сполучень» сторона — кут у трикутнику лише два (сторона і протилежний кут, сторона і прилеглий

кут), але, хоч і схожі за смыслом, вони не можуть порівнюватися за можливостями, та й зрештою за імпровізацією. Дійсно, одна з них — сторона і прилеглий кут — у більшості випадків таки приводять до тривіального розв'язання задачі. Проте інша — a і A — не просто ускладнює задачу, а й робить її інтелектуальнішою, а значить і багатшою! Простежимо в порівнянні! Знаком «●» ми позначимо місце для майбутнього елемента:

$$a, A, \bullet, \quad (1)$$

$$a, B, \bullet. \quad (2)$$

Спочатку замінимо знак основним елементом — стороною c трикутника ABC : в поєднанні (2) отримаємо першу ознаку рівності трикутників ($a; B; c$), а в поєднанні (1) — IV ознаку ($a; A; c$). Далі.

Підставимо замість знака висоту h_a :

$$a, A; h_a, \quad (1)$$

$$a, B; h_a. \quad (2)$$

Ані для побудови, ані для доведення рівності трикутників ситуація (2) не викликає ускладнень, на відміну від (1). Саме сполучення $a, A; h_a$ приводить до популярного і мало вивченого в школі ГМТ — сегмента, який містить даний кут. У жодному задачнику мені так і не довелося побачити умову задачі: довести, що трикутники рівні за стороною, протилежним кутом і висотою, проведеною до заданої сторони. А подібність трикутників по відношенню до сторін і протилежного кута?!

Але підємо далі. Поставимо замість знака «●» медіану. Спочатку m_a . Маємо $a; A; m_a$. Побудова досить тривіальна (якщо знати про геометричне місце точок, із якого даний відрізок видно під даним кутом). Але задача з такою умовою просто знахідка для визначення площі трикутника. Проте вона може бути «знахідкою» не лише у цьому. Саме вона є прародичкою двох популярних задач: перша — знайти площу паралелограма за двома його сторонами і кутом між діагоналями. І друга: знайти площу паралелограма за двома діагоналями і кутом між його сторонами. Для порівняння: знайдіть площу трикутника за $a; B; m_a$. Розв'язання очевидне: елементи трикутника ABM_1 ми знайдемо легко. А тепер знайдіть площу трикутника за a, A, m_b . Зазначимо, що ця задача на побудову мала честь «побувати» на Українській математичній олімпіаді.

Замість знака «●» можемо підставити і бісектрису l_a — і ми отримаємо задачу Паппа. Рекомендуємо простежити за елементами r, r_a, r_b, r_c . А тепер поговоримо про найцікавіше співвідношення:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

(відношення сторони трикутника до синуса протилежного кута). Наведемо приклади використання цього відношення, коли не дано кола. Відбувається «зв'язка» метода допоміжного елемента і допоміжного кола.

Задача 1. У трикутнику ABC проведено висоту AH_1 . Точка H_1 ортогонально проектується на сторону AC (точка M) і на

сторону AB (точка N). Довести, що $MN = \frac{S}{R}$.

● **Доведення.** Оскільки $\angle AMH_1 = \angle ANH_1 = 90^\circ$ (рис. 8.1), то навколо чотирикутника ANH_1M можна описати коло з діаметром AH_1 . Тоді

$$MN = AH_1 \sin A = h_a \sin A = \frac{2Sa}{a2R} = \frac{S}{R}. \quad \bullet$$

Задача 2. Точка X належить площині трикутника ABC , X_1 , X_2 , X_3 — проєкції цієї точки на сторони BC , AC , AB . Знайти площу трикутника $X_1X_2X_3$, якщо $XX_1 = d_1$, $XX_2 = d_2$, $XX_3 = d_3$ і якщо дано сторони a , b , c трикутника ABC .

● Позначимо S_1 , S_2 , S_3 площі трикутників XX_1X_2 , XX_2X_3 , XX_1X_3 (рис. 8.2). Тоді

$$S_1 = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \angle X_2 X X_1.$$

Але $\sin \angle X_2 X X_1 = \sin C$. Оскільки

$$\sin C = \frac{c}{2R} = \frac{c}{2 \frac{abc}{4S}}, \text{ то } S_1 = \frac{S d_1 d_2}{ab}.$$

$$\text{Аналогічно } S_2 = \frac{S d_2 d_3}{bc}, \quad S_3 = \frac{S d_1 d_3}{ac}.$$

Маємо:

$$S_{x_1 x_2 x_3} = S \left(\frac{d_1 d_2}{ab} + \frac{d_2 d_3}{bc} + \frac{d_1 d_3}{ac} \right). \quad \bullet$$

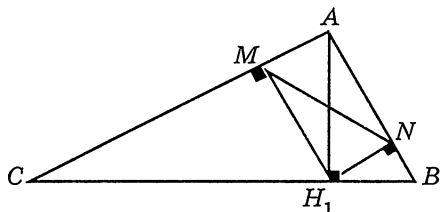


Рис. 8.1

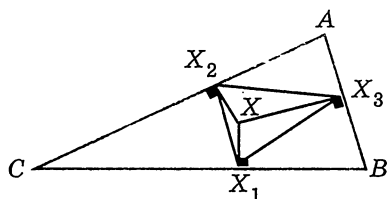


Рис. 8.2

Задача 3. Вписане в трикутник ABC коло дотикається до сторін BC, AC, AB в точках K_1, K_2, K_3 . Довести, що:

$$1) S^2 = \frac{1}{4} (ab(K_1K_2)^2 + bc(K_2K_3)^2 + ac(K_1K_3)^2);$$

$$2) S = \frac{1}{2} \left(\frac{(K_1K_2)^2}{\sin C} + \frac{(K_2K_3)^2}{\sin A} + \frac{(K_1K_3)^2}{\sin B} \right);$$

$$3) \frac{(K_1K_2)^2}{h_a h_b} + \frac{(K_2K_3)^2}{h_b h_c} + \frac{(K_1K_3)^2}{h_a h_c} = 1.$$

• Доведення. Всі три рівності доводяться за допомогою рівностей:

$$K_2K_3 = AI \sin A; K_1K_3 = BI \sin B; K_1K_2 = CI \sin C$$

і рівності

$$AI^2 \sin A + BI^2 \sin B + CI^2 \sin C = 2S.$$

Доведемо її.

Маємо (рис. 8.3): $2S_{AK_2IK_3} = AI \cdot K_2K_3 = AI \cdot AI \sin A = AI^2 \sin A$.

Аналогічно

$$2S_{BK_3IK_1} = BI^2 \sin B; 2S_{K_2IK_1C} = CI^2 \sin C.$$

Після додавання отримаємо рівність, яку доводимо. Тепер доведемо, наприклад, рівність 1.

$$\frac{1}{4} (ab(K_1K_2)^2 + bc(K_2K_3)^2 + ac(K_1K_3)^2) = S^2.$$

Маємо

$$ab = \frac{2S}{\sin C}; \quad bc = \frac{2S}{\sin A}; \quad ac = \frac{2S}{\sin B}.$$

Значить,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (ab(K_1K_2)^2 + bc(K_2K_3)^2 + ac(K_1K_3)^2) = \\ & = \frac{1}{4} 2S (CI^2 \sin C + AI^2 \sin A + BI^2 \sin B) = \frac{1}{4} \cdot 2S \cdot 2S = S^2. \quad \odot \end{aligned}$$

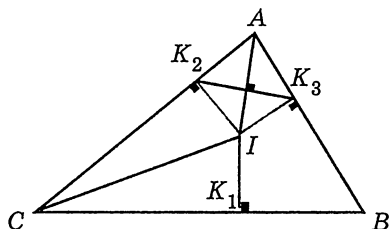


Рис. 8.3

— ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ? — АНТИВЕРТИКАЛЬНІ

Назва цих кутів, як ви, читачу, здогадалися, виникла із асоціації з антипаралельними прямими. І хоча чіткого визначення цим кутам ми не дамо, та ви матимете нагоду переконатися, що вони справді варті того, аби мати своє ім'я: антивертикальні.

Це рівні кути, такі самі, як на рисунку 9.1.

Теорема 1. Якщо кути AXM і BXN антивертикальні, а пари точок A і A_1 , B і B_1 симетричні відносно прямої MN ,¹ то:

1) точки A_1 , X , B , як і точки B_1 , X , A , належать одній прямій (рис. 9.2);

2) якщо точка X_1 належить прямій MN , то

$$AX + XB < AX_1 + X_1B.$$

● Доведення виходить із властивостей симетрії. ●

Рекомендація. Для розв'язання задач з антивертикальними кутами чи для пошуку мінімальної суми відрізків потрібно побудувати точку (точки), симетричну заданим.

Задача 1. Дано пряму MN і точки A й B , які належать одній з утворених півплощин. На цій прямій знайти таку точку X , щоб ламана AXB була найменшою; кути AXM і BXN були антивертикальними.

● Розв'язок загальновідомий. ●

Задача 2. По одну сторону від прямої XU дано дві точки A і B . Розташувати на цій прямій відрізок MN заданої довжини так, щоб ламана $AMNB$ була найменшої довжини.

● Проведемо пряму AF , паралельну до XU . Відкладемо відрізок AC , що дорівнює даному відрізку MN (рис. 9.3). Побудуємо точку B_1 , симетричну точці B . З'єднаємо точки B_1 і C . Отримаємо шукану точку N , значить, і шукану ламану $AMNB$. ●

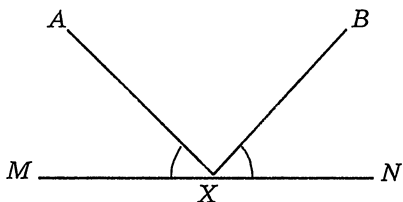


Рис. 9.1

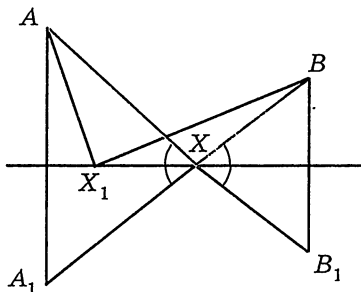


Рис. 9.2

¹ Прямую MN називатимемо головною.

● Побудуємо точку B_1 , симетричну B відносно діаметра MN (рис. 9.7). Оскільки $XB = XB_1$, то

$$\angle AB_1B = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

(із рівнобедреного трикутника XBB_1).

Із трикутника ABB_1 за теоремою синусів:

$$AB = 2R \sin 30^\circ = R. \bullet$$

Задача 7. На стороні BC трикутника ABC взято довільну точку X . Точки H_2 і H_3 — основи висот, проведених із вершин B і C . Кути H_2XC і H_3XB — антивертикальні. Довести, що точка X збігається з основою висоти AN_1 .

● **Доведення.** Побудуємо точку H_3^1 , симетричну точці H_3 відносно BC (рис. 9.8). Оскільки за умовою кути антивертикальні, то точка X належить відрізку $H_2H_3^1$, а це значить, що точки X і H_1 збігаються (пряма у єдиному випадку перетинає BC в точці H_1). ●

Задача 8. Розглянемо трикутники зі спільною стороною F_1F_2 і з третьою вершиною, яка належить діаметру півкола, що дотикається до сторін AC і AB в точках F_1 і F_2 (діаметр D_1D_2 належить стороні BC). Довести, що серед таких трикутників трикутник $H_1F_1F_2$ має найменший периметр.

● **Доведення.** Нехай Q — центр півкола. Доведемо, що кути F_1H_1C і F_2H_1B антивертикальні. Для цього доведемо, що $\angle F_1H_1A = \angle AN_1F_2$ (рис. 9.9) Для цього опишемо коло навколо чотирикутника AF_1QF_2 . Точка H_1 також належить цьому колу, оскільки $\angle QH_1A = 90^\circ$. QA — діаметр описаного навколо чотирикутника кола.

Оскільки $AF_1 = AF_2$, то $\angle F_1H_1A = \angle F_2H_1A$, а значить, $\angle F_1H_1C = \angle F_2H_1B$, відповідно, трикутник $H_1F_1F_2$ має найменший периметр. ●

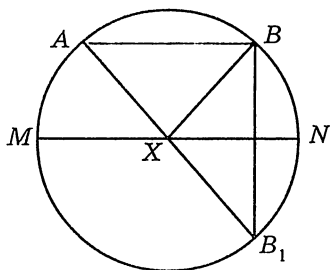


Рис. 9.7

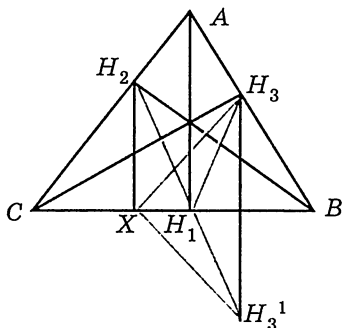


Рис. 9.8

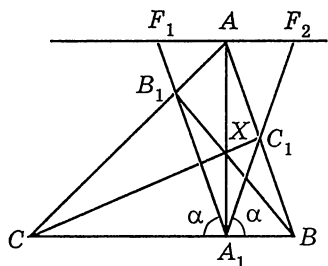


Рис. 9.13

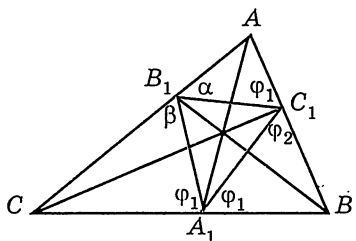


Рис. 9.14

Умову цієї задачі можна сформулювати інакше: довести, що кути B_1H_1C і C_1H_1B — антивертикальні (рис. 9.13).

● Доведення. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — медіани і $\angle B_1A_1C$ і $\angle C_1A_1B$ — антивертикальні. Доведемо, що $AA_1 \perp BC$ (рис. 9.13). Проведемо $F_2F_1 \parallel BC$. Оскільки $\angle F_1A_1C = \angle A_1F_1A$, $\angle F_2A_1B = \angle AF_2A_1$, то $\angle F_1 = \angle F_2$. Окрім того, $F_1A = AF_2$ (доводиться за допомогою теореми Чеві), значить, $AA_1 \perp F_1F_2$, чи $AA_1 \perp BC$. ●

Задача 14. У трикутнику ABC відрізки AA_1, BB_1, CC_1 — медіани. Довести, що якщо кути B_1A_1C, C_1A_1B і AC_1B_1, BC_1A_1 — антивертикальні, то кути AB_1C_1 і CB_1A_1 — також антивертикальні.

● Доведення. Позначимо (рис. 9.14). Доведемо, що $\alpha = \beta$.

Із $\triangle AB_1C_1$: $\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi_2}$. Із $\triangle BA_1C_1$: $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1}$. Із $\triangle CB_1A_1$:

$\frac{CB_1}{CA_1} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \beta}$. Перемножимо ці рівні і застосуємо теорему Чеві:

$$\frac{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1}{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1} = \frac{\sin \alpha \sin \varphi_2 \sin \varphi_1}{\sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \sin \beta} = 1.$$

Звідси $\sin \alpha = \sin \beta$; $\alpha = \beta$. ●

«Во-первых — это красиво!» (з анекдоту)

Історія створення нової задачі
(антивертикальні кути і арбелон Архімеда)

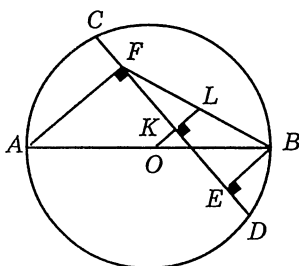


Рис. 9.15

Задача 15. (Задача Архімеда). В крузі проведено діаметр AB і хорда CD . Із кінців діаметра опущено перпендикуляри AF і BE на цю хорду. Довести, що $CF = DE$.

● Доведення. Опустимо з точки O , центра круга, на CD перпендикуляр OK (рис. 9.15). З'єднаємо точки L і O . Тоді $FK = KE$ і $CF = ED$. ●

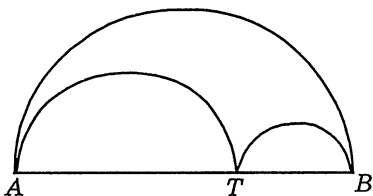


Рис. 9.16

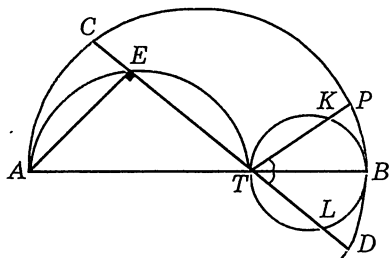


Рис. 9.17

Тепер розглянемо задачу — взірць дотепності й естетики (автор — Юрій Білецький)!

Арбелон — це конфігурація, яку розглянув Архімед і, відповідно, назвав її (рис. 9.16).

Задача 16. Доведіть, що відрізки, які висікає арбелон на прямих, проведених із точки T під однаковими кутами до AB , рівні між собою.

● **Доведення.** Оскільки кути, про які йдеться, антивертикальні (рис. 9.17), то здійснимо симетрію відносно діаметра AB . Отримаємо $EC = LD$ (за попередньою задачею). $KP = LD$ (виходить із симетрії). А значить, $KP = CE$, що і потрібно було довести. ●

Задача 17. (Київська міська математична Олімпіада 1997 р.). У трикутнику ABC проведено пряму BD (точка D належить стороні AC) під кутом $\angle A + \angle C$ до сторони BC . Нехай AL — бісектриса кута A . Довести, що DL — бісектриса кута CDB .

● **Доведення.** Розглянемо трикутник ADB (рис. 9.18). Оскільки $\angle ABM = 180^\circ - \angle B = \angle DBL$, то LB — зовнішня бісектриса кута B , AL — бісектриса кута A , а значить, LD — зовнішня бісектриса при вершині D , чи DL — бісектриса кута CDB . ●

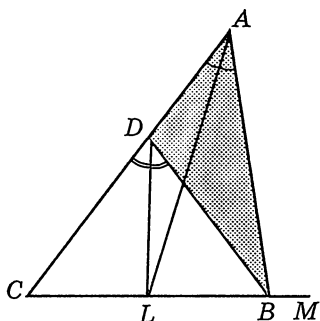


Рис. 9.18

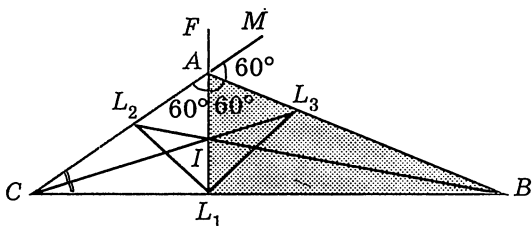


Рис. 9.19

Задача 18. У трикутнику ABC проведено бісектриси AL_1, BL_2, CL_3 . Довести, що якщо $\angle BAC = 120^\circ$, то $\angle L_2L_1L_3 = 90^\circ$.

• Доведення. Для трикутника AL_1B кути $\angle AL_1B$ і $\angle MAB$ — антивертикальні (рис. 9.19), значить (за теоремою 2), MA — бісектриса зовнішнього кута BAF , BL_2 — бісектриса, і точка L_2 — центр описаного кола в $\triangle AL_1B$, значить, L_1L_2 — бісектриса кута CL_1A . Аналогічно L_1L_3 — бісектриса $\angle AL_1B$. Значить, $L_2L_1 \perp L_3L_1$. •

Глава 10

МЕДІАННІ КУТИ. ІГРИ З ФОРМУЛАМИ (ВИКОНУЄТЬСЯ ВПЕРШЕ!)

Кути між елементами трикутника цікаві в першу чергу для розв'язування задач. Кут між висотами, кут між висотою і бісектрисою, кут між двома бісектрисами. Куту, пов'язаному з медіанами, в цьому, можна сказати, не пощастило. Мабуть, тому, що медіана — елемент, швидше, скажімо, метричний, ніж кутовий. У цій главі хотілось би порушити встановлену традицію «незручності» кутів, пов'язаних із медіаною.

Перша, тригонометрична... Мова піде про формулу

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{2} |\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B|, \quad (\blacktriangle)$$

де φ — кут AM_1H_1 (рис. 10.1). Доведемо її.

• *Перший спосіб.* Маємо:

$$CH_1 - BH_1 = (CM_1 + M_1H_1) - (BM_1 - M_1H_1) = 2M_1H_1.$$

Значить,

$$CH_1 - BH_1 = 2M_1H_1. \quad (1)$$

Але $CH_1 = h_a \operatorname{ctg} C$; $BH_1 = h_a \operatorname{ctg} B$; $M_1H_1 = h_a \operatorname{ctg} \varphi$.

Підставимо в (1): $h_a \operatorname{ctg} C - h_a \operatorname{ctg} B = 2h_a \operatorname{ctg} \varphi$, звідки

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{2} |\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B|. \quad \bullet$$

• *Другий спосіб.* Із трикутника AM_1C і AM_1B :

$$\frac{CM_1}{AM_1} = \frac{\sin(\varphi - C)}{\sin C}, \quad \frac{BM_1}{AM_1} = \frac{\sin(\varphi + B)}{\sin B}.$$

Оскільки $CM_1 = BM_1$, маємо $\frac{\sin(\varphi - C)}{\sin C} = \frac{\sin(\varphi + B)}{\sin B}$, чи

$$\frac{\sin \varphi \cos C - \cos \varphi \sin C}{\sin C} = \frac{\sin \varphi \cos B + \cos \varphi \sin B}{\sin B},$$

$$\begin{aligned}\sin\varphi \operatorname{ctg} C - \cos\varphi &= \sin\varphi \operatorname{ctg} B + \cos\varphi, \\ 2\cos\varphi &= \sin\varphi(\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B), \\ 2\operatorname{ctg}\varphi &= \operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B, \\ \operatorname{ctg}\varphi &= \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B). \bullet\end{aligned}$$

● *Третій спосіб.* Площа трикутника AM_1B (позначимо її S) дорівнює:

$$S = \frac{1}{2} m_a \frac{a}{2} \sin\varphi; \quad S_{AM_1C} = S = \frac{1}{2} m_a b \sin(\varphi - C).$$

Враховуючи, що $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$, отримуємо $\frac{\sin(\varphi - C)}{\sin\varphi} = \frac{\sin A}{2\sin B}$, чи

$$\frac{\sin\varphi \cos C - \cos\varphi \sin C}{\sin\varphi} = \frac{\sin(B+C)}{2\sin B},$$

$$\cos C - \operatorname{ctg}\varphi \sin C = \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{2\sin B},$$

$$\cos C - \operatorname{ctg}\varphi \sin C = \frac{1}{2} \cos C + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} B \sin C,$$

$$\operatorname{ctg}\varphi \sin C = \frac{1}{2} \cos C - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} B \sin C,$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} C - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} B,$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B). \clubsuit$$

Головна формула

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4S}{|b^2 - c^2|}, \quad (*)$$

де φ — кут AM_1B .

Шляхетне походження

Формула (*) пов'язана із задачею:

Дано: a ; A ; m_a . Знайти S (S — площа $\triangle ABC$).

● Маємо:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A. \quad (1)$$

За теоремою косинусів:

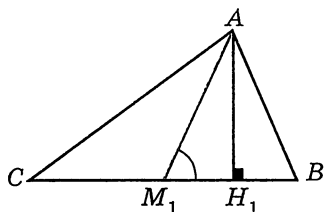


Рис. 10.1

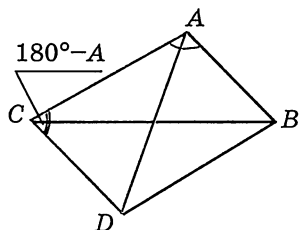


Рис. 10.2

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad (2)$$

«Подвоїмо» медіану m_a — отримаємо паралелограм $ABDC$ (рис. 10.2).
Із трикутника ACD :

$$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A. \quad (3)$$

Віднімемо від виразу (3) вираз (2).
Отримаємо:

$$4m_a^2 - a^2 = 4bc \cos A,$$

звідки

$$bc = \frac{4m_a^2 - a^2}{4 \cos A}. \quad (4)$$

Підставимо формулу (4) в формулу (1). Отримаємо:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{4m_a^2 - a^2}{4} \cdot \frac{\sin A}{\cos A},$$

$$S = \frac{4m_a^2 - a^2}{8} \operatorname{tg} A. \quad (1^0)$$

Застосуємо формулу (1^0) для доведення формули (*).

У трикутнику ABM_1 проведемо медіану M_1E (рис. 10.3).

За формулою (1^0)

$$S_{AM_1B} = \frac{1}{2} S = \frac{|b^2 - c^2|}{8} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\text{звідки } \operatorname{tg} \varphi = \frac{4S}{|b^2 - c^2|}.$$

Доведемо формулу (*) незалежно від формули (1^0).

Маємо:

$$\sin \varphi = \frac{h_a}{m_a}; \quad \sin^2 \varphi = \frac{h_a^2}{m_a^2}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{m_a^2}{h_a^2},$$

$$\text{звідки } \operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{m_a^2}{h_a^2} - 1.$$

$$\text{Доведемо, що } \frac{m_a^2}{h_a^2} - 1 = \left(\frac{b^2 - c^2}{4S} \right)^2, \text{ або } \frac{a^2 m_a^2}{4S^2} - 1 = \frac{(b^2 - c^2)^2}{16S^2},$$

або

$$m_a^2 a^2 - 4S^2 = \frac{(b^2 - c^2)^2}{4}.$$

Щоб довести це відношення, застосуємо формулу Герона і формулу медіани:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2},$$

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

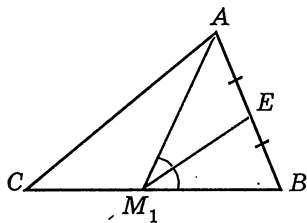


Рис. 10.3

Маємо:

$$\begin{aligned} m_a^2 \cdot a^2 - 4S^2 &= a^2 \left(\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \right) - \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4} = \\ &= \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2}{4} = \\ &= \frac{b^4 + c^4 - 2b^2c^2}{4} = \frac{(b^2 - c^2)^2}{4}, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести. ●

Ідентичність формул (*) і (▲)

Доведемо ідентичність формул

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{b^2 - c^2}{4S} \quad \text{і} \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B).$$

● Доведення. *Перший спосіб.* Доведемо, що

$$\frac{b^2 - c^2}{2S} = \operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C)}{2 \cdot \frac{1}{2} 2R \sin B 2R \sin C \cdot \sin A} &= \frac{1 - \cos 2B - 1 + \cos 2C}{2 \sin B \sin C \sin A} = \frac{\cos 2C - \cos 2B}{2 \sin A \sin B \sin C} = \\ &= \frac{-2 \sin(B + C) \sin(C - B)}{2 \sin A \sin B \sin C} = \frac{-\sin(C - B)}{\sin B \sin C} = \frac{-\sin C \cos B + \cos C \sin B}{\sin B \sin C} = \\ &= -(\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C) = \operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B. \end{aligned}$$

Другий спосіб. Доведемо, що

$$\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B = \frac{b^2 - c^2}{2S}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} 2S(\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B) &= 2 \cdot \frac{1}{2} bc \sin A \cdot \frac{\sin(B-C)}{\sin B \sin C} = \frac{4R^2 \sin B \sin C \sin A \sin(B-C)}{\sin B \sin C} = \\ &= 4R^2 \sin A \sin(B-C) = 2R^2(\cos(A+C) - B) - \cos((A+B) - C) = \\ &= 2R^2(\cos(180^\circ - 2B) - \cos(180^\circ - 2C)) = 2R^2(\cos 2C - \cos 2B) = \\ &= 2R^2(1 - 2\sin^2 C - 1 + 2\sin^2 B) = 4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C) = b^2 - c^2. \end{aligned}$$

Третій спосіб. Як наслідок із теореми косинусів:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} A.$$

Маємо: $b^2 = a^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} B$, $c^2 = b^2 + a^2 - 4S \operatorname{ctg} C$, звідки

$$b^2 - c^2 = c^2 - b^2 - 4S \operatorname{ctg} B + 4S \operatorname{ctg} C,$$

або $2(b^2 - c^2) = 4S(\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B)$, або

$$\frac{b^2 - c^2}{2S} = \operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B. \bullet$$

Ще одна формула:

$$\operatorname{tg} \varphi_A = |\operatorname{tg} \varphi_B \pm \operatorname{tg} \varphi_C|$$

$$(\varphi_A = \angle M_1 A H_1, \varphi_B = \angle M_2 B H_2, \varphi_C = \angle M_3 C H_3).$$

● Доведення виходить безпосередньо із формули (*). ●

Четвертий спосіб.

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{CH_1 - BH_1}{h_a} \right).$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{a \cdot CH_1 - a BH_1}{2S} \right) = \frac{1}{4S} \cdot \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right) = \frac{b^2 - c^2}{4S}.$$

Ще одна формула:

$$\sin A = \frac{b^2 - c^2}{2bc} \operatorname{tg} \varphi.$$

(■)

Дійсно, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4S}{b^2 - c^2} = \frac{2bc \sin A}{b^2 - c^2}$; звідки

$$\sin A = \frac{b^2 - c^2}{2bc} \operatorname{tg} \varphi. \bullet$$

Задача (!). Довести, що трикутник ABC подібний до трикутника $A_1 B_1 C_1$, якщо $\angle A = \angle A_1$, $\varphi = \varphi_1$.

● Доведення. Із формули (■) і відповідно до умови маємо:

$$\frac{b^2 - c^2}{bc} = \frac{b_1^2 - c_1^2}{b_1 c_1},$$

значить, $(b^2 - c^2)b_1 c_1 = (b_1^2 - c_1^2)bc$,

або

$$\begin{aligned}b^2b_1c_1 - c^2b_1c_1 &= bb_1^2c - bcc_1^2, \\b^2b_1c_1 + bcc_1^2 &= bb_1^2c + c^2b_1c_1, \\bc_1(bb_1 + cc_1) &= cb_1(bb_1 + cc_1),\end{aligned}$$

звідки $bc_1 = cb_1$, або $\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, а це означає, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.[•]

Кут між медіанами

Мова піде про формулу¹

$$\operatorname{ctg} \angle CMB = \frac{\operatorname{ctg}^2 A - 2\operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - 2}{3(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)}.$$

• Доведення аналогічне до доведення формули (5).

Нехай M — центроїд трикутника ABC (рис. 10.4). Проведемо пряму CM і з точки B опустимо на неї перпендикуляр BX (точка X належить прямій CM). Маємо:

$$CM = CX - XM, MM_3 = XM - M_3X, CX - XM = 2(XM - M_3X).$$

$$\text{Звідки } 3XM = 2M_3X + CX,$$

$$XM = \frac{2M_3X + CX}{3}. \quad (1)$$

Поділимо відношення (1) на BX :

$$\frac{XM}{BX} = \frac{1}{3} \left(\frac{2M_3X}{BX} + \frac{CX}{BX} \right),$$

або

$$\operatorname{ctg} \angle XMB = \frac{1}{3} (2\operatorname{ctg} \angle XM_3B + \operatorname{ctg} \angle XCB),$$

або

$$-\operatorname{ctg} \angle CMB = \frac{1}{3} (-2\operatorname{ctg} \angle CM_3B + \operatorname{ctg} \angle M_3CB). \quad (1^0)$$

Далі за формулою (5) маємо: $\operatorname{ctg} \angle CM_3B = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B)$.

Окрім того,

$$\angle M_3CB = 180^\circ - \angle B - \angle CM_3B.$$

Значить,

$$\operatorname{ctg} \angle M_3CB = -\operatorname{ctg} (B + \angle CM_3B) = -\frac{\operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} \angle CM_3B - 1}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} \angle CM_3B} =$$

¹ Публікується вперше. Доведення належить В. Думе.

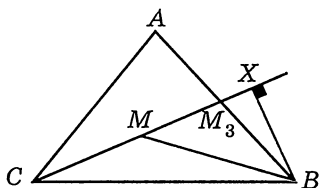


Рис. 10.4

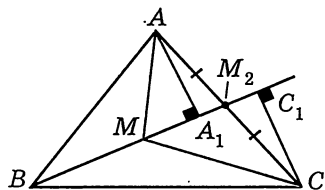


Рис. 10.5

$$= \frac{1 - \operatorname{ctg} B \cdot \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B)}{\operatorname{ctg} B + \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B)} = \frac{1 - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 B}{\frac{1}{2} (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)}.$$

Підставимо в формулу (1⁰). Отримаємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \angle CMB &= \frac{1}{3} \left((\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B) - \frac{1 - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 B}{\frac{1}{2} (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)} \right) = \\ &= \frac{\frac{1}{2} (\operatorname{ctg}^2 A - \operatorname{ctg}^2 B) - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 B}{\frac{1}{2} (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 A - \operatorname{ctg}^2 B + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B - 1}{\frac{1}{2} (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)}. \end{aligned}$$

Отже, $\operatorname{ctg} \angle CMB = \frac{\operatorname{ctg}^2 A - 2 \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B - 2}{3 (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)}.$ ●

Задача 2. Довести, що $\frac{AM}{\sin \angle BMC} = \frac{BM}{\sin \angle AMC} = \frac{CM}{\sin \angle AMB}.$

● **Доведення.** Оскільки медіана рівновіддалена від двох вершин, то довжини перпендикулярів AA_1 і CC_1 рівні (рис. 10.5). Маємо ($AA_1 = CC_1 = h$):

$$\sin \angle BMC = \sin \angle CMC_1 = \frac{h}{CM}, \quad \sin \angle AMB = \sin \angle AMC_1 = \frac{h}{AM}.$$

Поділимо ці дві рівності й отримаємо:

$$\frac{AM}{CM} = \frac{\sin \angle BMC}{\sin \angle AMB}, \quad \text{або} \quad \frac{AM}{\sin \angle BMC} = \frac{CM}{\sin \angle AMB}.$$

Аналогічно $\frac{AM}{\sin \angle BMC} = \frac{BM}{\sin \angle AMC}.$ ●

ДАЛІ БУЛО. ДАЛІ БУДЕ...

Із геометричною конфігурацією розглянутої нижче задачі ми детально ознайомилися в книзі «Повернення втраченої геометрії». Проте сила її, вочевидь, така, що дослідження продовжуються, викликаючи не лише здивування, а й захват. Прослідкуйте за способами розв'язання. Не так просто знайти задачу, яка подарує стільки несподіваного.

Задача А. Сторони трикутника ABC дорівнюють a, b, c . Через точку K , яка належить площині трикутника, проведено прямі, паралельні до сторін трикутника, в результаті чого отримали рівні відрізки $DE \parallel BC, FG \parallel AC$ і $NT \parallel AB$. Знайти їх довжину.

Задача вперше як авторська була опублікована в журналі «Квант», і авторське розв'язання було таким (рис. 11.1).

● Позначимо відрізки CF, FT, TB як a_1, a_2, a_3, x — довжина рівних відрізків. Із подібності трикутників FGB і CAB :

$$\frac{x}{b} = \frac{a_2 + a_3}{a}. \quad (1)$$

Із подібності трикутників NTC і CAB :

$$\frac{x}{c} = \frac{a_1 + a_2}{a}. \quad (2)$$

$$\text{Додамо рівності (1) і (2): } \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_2}{a} = 1 + \frac{a_2}{a}.$$

Але $a_2 = a - x$, оскільки $a_1 + a_3 = x$. Маємо

$$\frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 1 + \frac{a - x}{a}, \text{ звідси } x = \frac{2abc}{ab + bc + ac}. \quad \bullet$$

Задачу помітили, і вона стала з'являтися в різних збірниках задач у такому вигляді:

Задача Б. У трикутнику ABC сторони дорівнюють b і c . Через точку K , яка належить площині трикутника, проведено прямі, паралельні до сторін трикутника $DE \parallel BC, FG \parallel AC$ і $NT \parallel AB$. Нехай $DE = m; FG = n; NT = l$. Довести, що

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{l}{c} = 2.$$

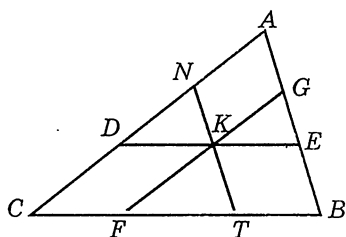


Рис. 11.1

● Викликає захват влучне введення трьох (!) допоміжних відрізків: a_1, a_2, a_3 (рис. 11.1).

Оскільки трикутники BFG і BAC подібні, то

$$\frac{n}{b} = \frac{a_2 + a_3}{a}.$$

Аналогічно $\frac{l}{c} = \frac{a_1 + a_2}{a}$ і $\frac{m}{a} = \frac{a_1 + a_3}{a}$. Значить,

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{l}{c} = \frac{a_1 + a_3 + a_1 + a_2 + a_2 + a_3}{a} = \frac{2(a_1 + a_2 + a_3)}{a} = 2. \quad \bullet$$

Зазначимо! Задача А — наслідок задачі Б, якщо $m = n = l = x$.

Цікавість до цієї задачі посилюється можливістю застосування паралельного проектування: у цьому випадку доведення зводиться до арифметичного підрахунку довжин відрізків DE , FG , NT через сторони маленьких трикутників.

● Отже, спроектуємо трикутник ABC у рівносторонній трикутник. Тоді «маленькі» трикутники перетворяться також у рівносторонній

$$DE = a_1 + a_2; FG = a_2 + a_3; NT = a_1 + a_2.$$

Значить,

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{a} + \frac{l}{a} = \frac{2(a_1 + a_2 + a_3)}{a} = 2.$$

І, зрештою, зовсім несподіваним стане застосування теореми Жергона. Проведемо через точку K (рис. 11.2) прямі (на рисунку достатньо провести AA_1). За теоремою Жергона

$$\frac{AK}{AA_1} + \frac{BK}{BB_1} + \frac{CK}{CC_1} = 2.$$

Але $\frac{AK}{AA_1} = \frac{m}{a}$. Аналогічно $\frac{BK}{BB_1} = \frac{n}{b}$; $\frac{CK}{CC_1} = \frac{l}{c}$, значить,

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{l}{c} = \frac{AK}{AA_1} + \frac{BK}{BB_1} + \frac{CK}{CC_1} = 2. \quad \bullet$$

Дослідження цікавої конфігурації продовжується!

Задача. Точка K належить колу, вписаному в рівносторонній трикутник ABC . Через точку K проведено прямі, паралельні до сторін трикутника. Площі утворених трикутників S_1, S_2, S_3 , а S — площа трикутника ABC . Довести, що

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{S}{2}.$$

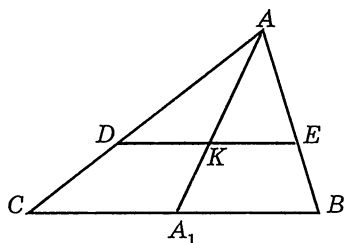


Рис. 11.2

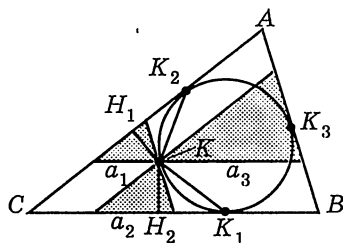


Рис. 11.3

● Доведення. Позначимо a_1, a_2, a_3 — відповідно сторони заштрихованих трикутників (рис. 11.3). Позначимо K_1, K_2, K_3 — точки дотику кола зі сторонами BC, AC, AB ; $\angle KK_1C = \alpha$; $\angle KK_2C = \beta$. Тоді

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} \angle K_2KK_1 = 60^\circ.$$

Проведемо висоти KH_1 і KH_2 .

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{H_2K_1}{KH_2}.$$

$$\text{Але } KH_2 = \frac{a_2\sqrt{3}}{2}, \quad H_2K_1 = \frac{a_2}{2} + a_3 - K_1B \text{ або } K_1H_2 = \frac{1}{2}(2a_3 + a_2 - a),$$

$$(a = BC), \text{ звідки } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{H_2K_1}{KH_2}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2a_3 + a_2 - a}{a_2\sqrt{3}}. \text{ Аналогічно}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{2a_3 + a_1 - a}{a_1\sqrt{3}}. \text{ Враховуючи формулу } \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta},$$

$$\text{отримаємо } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(2a_3 + a_2 - a)(2a_3 + a_1 - a) - 3a_1a_2}{a_1(2a_3 + a_2 - a) + a_2(2a_3 + a_1 - a)}, \text{ або}$$

$$4a_3^2 - 4aa_3 - 4a_1a_2 + a^2 = 0 \text{ (але } a = a_1 + a_2 + a_3).$$

$$\text{Значить, } 4a_3^2 - 4(a_1 + a_2 + a_3)a_3 - 4a_1a_2 + a^2 = 0.$$

$$\text{Остаточно, } a^2 = 4a_1a_2 + 4a_1a_3 + 4a_2a_3 =$$

$$= 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3) - 2a_1^2 - 2a_2^2 - 2a_3^2 =$$

$$= 2(a_1 + a_2 + a_3)^2 - 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 2a^2 - 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2),$$

$$\text{або } a^2 = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Оскільки заштриховані трикутники подібні до трикутника

$$ABC, \text{ то } S_1 + S_2 + S_3 = \frac{S}{2} \text{ (автор розв'язку — Д. Іваненко).} \bullet$$

Далі було. Як того і варто було очікувати...

ПОЛЮВАННЯ НА РІВНЯННЯ

Ця глава присвячена складанню задач, а точніше — складанню рівнянь. Але не лінійних чи квадратних, а рівнянь не нижче кубічних (ми складемо рівняння навіть тринадцятого (!) ступеню). Окрім цього, ми запропонуємо спосіб перевірки правильності складання будь-якого алгебраїчного «монстра» із «новонароджених».

Відбувається це так: задається трикутник особливого виду (вони називаються Т-1, або ж Т-2, або ж Т-3), один із кутів якого позначається α . За допомогою цього трикутника, геометричних теорем і тригонометричних формул потрібно скласти тригонометричне рівняння з невідомим α .

Покажемо на прикладі.

Маємо рівнобедрений трикутник з кутом 4α при вершині й 3α при основі (рис. 12.1). Потрібно скласти рівняння третього ступеню.

Оскільки $4\alpha + 6\alpha = 180^\circ$; $\alpha = 18^\circ$; $2\alpha = 36^\circ$; $3\alpha = 54^\circ$, тобто $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$. Маємо

$$2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

або

$$2\sin\alpha = 4(1 - \sin^2\alpha)$$

— отримали *квадратне* рівняння — мети не досягнули.

Підемо, як кажуть, «іншим шляхом». Значення кутів у трикутнику дає можливість скласти друге рівняння:

$$\sin 3\alpha = \cos 2\alpha.$$

Маємо:

$$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

або

$$4\sin^3\alpha - 2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha + 1 = 0.$$

Нехай $\sin\alpha = y$, отримаємо $4y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = 0$ — кубічне рівняння (відносно $\sin\alpha$). Нескладно перевірити, що воно складено правильно. ●

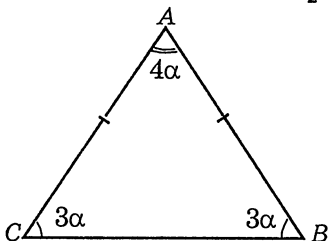


Рис. 12.1

Для перевірки складніших рівнянь пропонуємо таблицю многочленів *для перевірки*, одними із коренів яких є синуси і косинуси кутів 18° і 36° (перший стовпчик таблиці, і їх значення — у другому стовпчику).

Отримані рівняння мають ділитися без остачі на один із поданих в таблиці многочленів. Який із них вибрати, залежить від типу

$\sin 18^\circ$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$4x^2+2x-1$
$2\cos 72^\circ$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	x^2+x-1
$\cos 36^\circ$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$4x^2-2x-1$
$2\cos 36^\circ$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	x^2-x-1
$\sin^2 18^\circ$	$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$	$16x^2-12x+1$

вибраного для складання рівняння трикутника. Назвемо їх: $4x^2+2x-1$; x^2+x-1 (див. третій стовпчик таблиці). Кульмінація — ділення многочлена на многочлен: чи отримаємо в остачі 0?

Пройдіть цей шлях — і гарантовано отримаєте задоволення!

1. Трикутник Т-1.

Це рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$) з кутами: $\angle A = \alpha$; $\angle B = \angle C = 2\alpha$ ($\alpha = 36^\circ$) (рис. 12.2).

2. Трикутник Т-2.

Якщо в трикутнику Т-1 провести бісектрису кута при основі, то отриману конфігурацію назвемо трикутником Т-2 (рис. 12.3). Звернемо увагу на «зигзаг» $BC = CL_3 = AL_3 = a$, а також на кут $\angle AL_3C = 3\alpha$.

3. Трикутник Т-3.

Назвемо Т-3 рівнобедрений трикутник з кутом при вершині 108° ($AB = AC$) (рис. 12.4). Якщо позначити $\alpha = 18^\circ$, то кути цього трикутника будуть 2α , 2α , 6α (рис. 12.5).

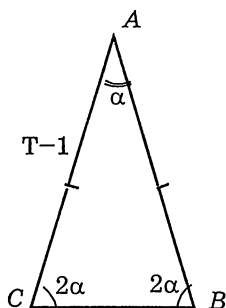


Рис. 12.2

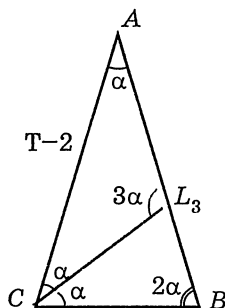


Рис. 12.3

Звернемо увагу, що $\angle CIH_1 = 4\alpha$, і констатуємо вартій уваги факт, що точки I й O симетричні відносно відрізка BC (рис. 12.6).

4. Трикутник Т-4 (рис. 12.7).

Трикутник Т-4 з кутом 72° при вершині. Якщо позначити кут $\alpha = 18^\circ$, то кути цього трикутника будуть 3α , 3α , 4α (рис. 12.8).

5. Трикутник Т-5.

Трикутник Т-5 з кутами 18° , 18° , 144° (α , α , 8α) (рис. 12.9).

Кубічні рівняння

Задача 1. За допомогою трикутника Т-3 і трикутника CIH_1 складіть кубічне рівняння.

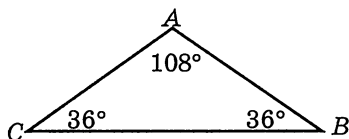


Рис. 12.4

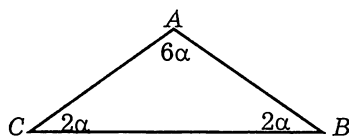


Рис. 12.5

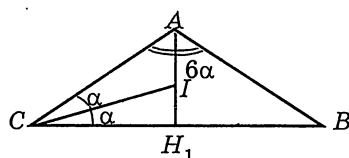


Рис. 12.6

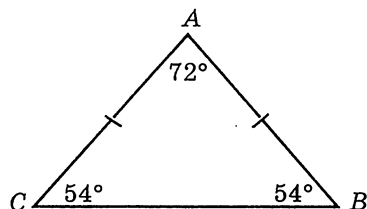


Рис. 12.7

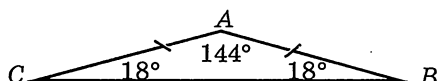


Рис. 12.9

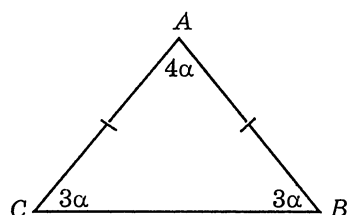


Рис. 12.8

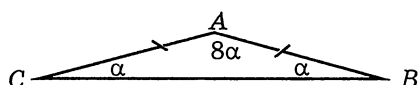


Рис. 12.10

- Із трикутника CIH_1 (рис. 12.6) виходить, що $\sin \angle CIH_1 = \cos \angle H_1CI$, або ж $\sin 4\alpha = \cos \alpha$.

Перетворимо це рівняння:

$$2\sin 2\alpha \cos 2\alpha = \cos \alpha, \quad 2 \cdot 2\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \cos \alpha,$$

або

$$4\sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) = 1.$$

Позначимо $\sin \alpha = y$ ($\alpha = 18^\circ$).

Тоді $4y(1 - 2y^2) = 1$, або $8y^3 - 4y + 1 = 0$. Замінімо $2y = x$.
Маємо остаточне рівняння

$$x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Перевіримо його:

$$x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1).$$

Оскільки із геометричних міркувань $x \neq 1$, то

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

що відповідає кореню $2\sin 18^\circ$. Значить, рівняння знайдено правильно. ●

Задача 2. За допомогою трикутника Т-3 і рівності $IH_1 = OH_1$ скласти кубічне рівняння.

● Оскільки $CI = CO = R$, то

$$R = \frac{r}{\sin \alpha}, (\alpha = 18^\circ).$$

$$a = 2r \operatorname{ctg} \alpha; CI = \frac{r}{\sin \alpha}; CO = \frac{a}{2 \sin \angle CAB}, \angle CAB = 180^\circ - 4\alpha,$$

значить,

$$CO = \frac{2r \operatorname{ctg} \alpha}{2 \sin (180^\circ - 4\alpha)} = \frac{r \operatorname{ctg} \alpha}{\sin 4\alpha}.$$

Оскільки $CI = CO$, то

$$\frac{r \operatorname{ctg} \alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{\sin \alpha},$$

або $\cos \alpha = \sin 4\alpha$, звідки $\cos \alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha$ ($\cos \alpha = 0$)

$$1 = 4\cos 2\alpha \sin \alpha; 1 = 4(1 - 2\sin^2 \alpha)\sin \alpha.$$

Позначимо $\sin \alpha = y$; $1 = 4(1 - 2y^2)y$; $8y^3 - 4y + 1 = 0$. Кубічне рівняння отримали. Розв'яжемо його.

Позначимо $2y = x$. Тоді $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$. Корінь $x = 1$ — сторонній. Розв'язуючи рівняння $x^2 + x - 1 = 0$, маємо

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ Оскільки } \sin \alpha = y = \frac{x}{2}, \text{ то } \sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}. \text{ Відомо, що}$$

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \text{ отже, } \alpha = 18^\circ, \text{ що відповідає геометричному}$$

смыслу задачі. ●

Задача 3. У трикутнику Т-2 знайти залежність між кутами у формі кубічного рівняння.

(Підказка: $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$).

● У рівнобедреному трикутнику BCL_3 (рис. 12.3) проведемо висоту CH_3 .

Оскільки $\angle L_3CB = \alpha$, то $\angle H_3CB = \frac{\alpha}{2}$. Оскільки в трикутнику CH_3B : $\sin B = \cos \angle H_3CB$, то

$$\sin 2\alpha = \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (*)$$

Зазначимо, що

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}; \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Позначимо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = x$. Тоді

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2x}{1 - x^2}; \quad \sin 2\alpha = \left(\frac{4x}{1 - x^2} \right) : \left(1 + \left(\frac{2x}{1 - x^2} \right)^2 \right).$$

Підставимо вираз із x в формулу (*):

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\frac{4x}{1 - x^2}}{1 + \left(\frac{2x}{1 - x^2} \right)^2},$$

або

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{4x}{(1 - x^2) \frac{(1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2)}{(1 - x^2)^2}} = \frac{4x}{1 - x^2} \cdot \frac{(1 - x^2)^2}{1 + 2x^2 + x^4} = \frac{4x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Отже, $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{4x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$. Піднесемо до квадрату:

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{16x^2(1 - x^2)^2}{(1 + x^2)^4}; \quad (1 + x^2)^3 = 16x^2(1 - x^2)^2.$$

Нехай $x^2 = y$. Тоді $(1 + y)^3 = 16y(1 - y)^2$, або
 $1 + 3y + 3y^2 + y^3 = 16y - 32y^2 + 16y^3.$

Остаточнo $15y^3 - 35y^2 + 13y - 1 = 0$.

На щастя, це кубічне рівняння можна розкласти на множники так:

$$\begin{aligned} 15y^3 - 35y^2 + 13y - 1 &= 15y^3 - 30y^2 + 3y - 5y^2 + 10y - 1 = \\ &= 3y(5y^2 - 10y + 1) - (5y^2 - 10y + 1) = (3y - 1)(5y^2 - 10y + 1). \end{aligned}$$

Якщо розв'язати рівняння $5y^2 - 10y + 1 = 0$, то $y_{1,2} = \frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5}$.

Оскільки $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}^2 18^\circ = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}$, то складене рівняння правильне. ●

Рівняння четвертого ступеню

Задача 1. За допомогою трикутника Т-3 і трикутника CIH_1 отримати рівняння четвертого ступеню.

● Оскільки $\angle CIH_1 + \angle ICH_1 = 90^\circ$, то $\cos 4\alpha = \sin \alpha$. Маємо:

$$2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1 = \sin \alpha.$$

Нехай $\sin \alpha = x$ ($\alpha = 18^\circ$). Отримаємо $2(1 - 2x^2)^2 - 1 - x = 0$, або

$$\begin{array}{r|l} 8x^4 - 8x^2 - x + 1 & 4x^2 + 2x - 1 \\ 8x^4 + 4x^3 - 2x^2 & 2x^2 - x - 1 \\ \hline -4x^3 - 6x^2 - x & \\ -4x^3 - 2x^2 + x & \\ \hline -4x^2 - 2x + 1 & \\ -4x^2 - 2x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Поділимо многочлен $8x^4 - 8x^2 - x + 1$ на $4x^2 + 2x - 1$.

Рівняння складено правильно. ●

Задача 2. За допомогою трикутника Т-2, $\angle ACL_3$ і кута 3α скласти рівняння четвертого ступеню (рис. 12.11).

● За теоремою косинусів із трикутника ABC :

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos \alpha = 2b^2(1 - \cos \alpha). \quad (1)$$

Із трикутника ACL_3 за теоремою косинусів:

$$b^2 = 2a^2(1 - \cos 3\alpha). \quad (2)$$

¹ Покажемо, що $\operatorname{tg}^2 18^\circ = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}$. Дійсно,

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}; \quad \sin^2 18^\circ = \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8};$$

$$\cos^2 18^\circ = 1 - \sin^2 18^\circ = 1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16} = \frac{16 - 5 + 2\sqrt{5} - 1}{16} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8};$$

$$\operatorname{tg}^2 18^\circ = \frac{\sin^2 18^\circ}{\cos^2 18^\circ} = \frac{(3 - \sqrt{5})8}{8(5 + \sqrt{5})} = \frac{(3 - \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{20} = \frac{20 - 8\sqrt{5}}{20} = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}.$$

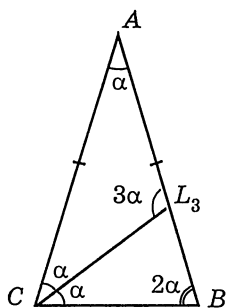


Рис. 12.11

Підставимо значення (2) в (1):

$$a^2 = 4a^2(1 - \cos\alpha)(1 - \cos 3\alpha),$$

або

$$1 = 4(1 - \cos\alpha)(1 - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha);$$

$$1 = 4(1 - \cos\alpha + 4\cos^4\alpha - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha - 3\cos^2\alpha).$$

Отже,

$$16\cos^4\alpha - 16\cos^3\alpha - 12\cos^2\alpha + 8\cos\alpha + 3 = 0.$$

Заміна $x = 2\cos\alpha$. Многочлен для перевірки

$$x^2 - x - 1. \text{ Маємо}$$

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 3 = 0.$$

Легко перевірити, що рівняння складено

правильно. ●

Задача 3. За допомогою трикутника $T-2$ і трикутника AL_3C скласти рівняння четвертого ступеню для $\cos\alpha$. Перевірити.

● Із $\triangle ACL_3$ за теоремою косинусів (рис. 12.11):

$$b^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 3\alpha, \quad b^2 = 2a^2 - 2a^2\cos 3\alpha. \quad (1)$$

Із $\triangle ACL_3$ за теоремою синусів:

$$b = \frac{a \sin 3\alpha}{\sin \alpha}. \quad (2)$$

Порівняємо вирази (1) і (2), після піднесення (2) до квадрату:

$$2a^2 - 2a^2 \cos 3\alpha = \frac{a^2 \sin^2 3\alpha}{\sin^2 \alpha} \quad \text{або} \quad \frac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2 \alpha} = 2 - 2\cos 3\alpha.$$

Оскільки $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, то $(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)^2 = 2\sin^2\alpha(1 - \cos 3\alpha)$, або

$$(3 - 4(1 - \cos^2\alpha))^2 = 2(1 - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha),$$

$$\text{або } (4\cos^2\alpha - 1)^2 = 2 - 8\cos^3\alpha + 6\cos\alpha.$$

Зробимо заміну $\cos\alpha = t$, отримаємо рівняння:

$$16t^4 + 8t^3 - 8t^2 - 6t - 1 = 0.$$

Зробимо ще одну заміну $2t = x$, отримаємо остаточно:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1 = 0. \quad (*)$$

Перевіримо останнє рівняння. Оскільки під час заміни $x = 2t$, то застосуємо для перевірки многочлен для $2\cos 36^\circ$; $x^2 - x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1 & x^2 - x - 1 \\ x^4 - x^3 - x^2 & x^2 + 2x + 1 \\ \hline 2x^3 - x^2 - 3x & \\ 2x^3 - 2x^2 - 2x & \\ \hline x^2 - x - 1 & \\ x^2 - x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Рівняння складено правильно. ●

Задача 4. За допомогою трикутника Т-2, трикутника L_3CB , відрізка L_3B отримати рівняння четвертого ступеня. Перевірити.

● Оскільки $\angle CL_3B = 180^\circ - 3\alpha$ (рис. 12.11), то за теоремою косинусів із трикутника CL_3B маємо:

$$BC^2 = CL_3^2 + L_3B^2 - 2CL_3 \cdot L_3B \cdot \cos(180^\circ - 3\alpha),$$

або

$$a^2 = a^2 + (b - a)^2 - 2a(b - a)\cos(180^\circ - 3\alpha). \quad (1)$$

Із рівнобедреного трикутника L_3CA :

$$b^2 = 4a^2 \cos^2 a. \quad (2)$$

Підставимо вираз (2) в (1):

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2 + (2a\cos\alpha - a)^2 + 2a(2a\cos\alpha - a)\cos 3\alpha = \\ &= a^2 + a^2(4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1) + 2a^2(2\cos\alpha - 1)\cos 3\alpha = \\ &= (1 + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 + 4\cos\alpha\cos 3\alpha - 2\cos 3\alpha) \cdot a^2; \\ 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 4\cos\alpha(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) - 2(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) + 1 &= \\ &= 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 16\cos^4\alpha - 12\cos^2\alpha - 8\cos^3\alpha + 6\cos\alpha + 1 = 0, \\ \text{звідки } 16\cos^4\alpha - 8\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Заміна: $2\cos\alpha = x$, отримаємо: $x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$.

Перевіримо діленням на тричлен $x^2 - x - 1$ (див. попередню задачу). Рівняння складено правильно. ●

Задача 5. За допомогою трикутника Т-2, трикутника CAL_3 , формули бісектриси CL_3 отримати рівняння четвертого ступеню для $\cos 2\alpha$. Перевірити.

- Із трикутника ACL_3 за теоремою косинусів (рис. 12.12) маємо:
 $AL_3^2 = AC^2 + CL_3^2 - 2AC \cdot CL_3 \cos \alpha$, $a^2 = b^2 + l_c^2 - 2l_c \cdot b \cos \alpha$.

Враховуючи, що $l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \alpha$ і $a = 2b \cos 2\alpha$, отримуємо:

$$4 \cos^2 2\alpha = 1 + 16 \frac{\cos^2 2\alpha \cos^2 \alpha}{(1 + 2 \cos 2\alpha)^2} - 8 \frac{\cos 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha}.$$

Нехай $\cos 2\alpha = t$. Отримаємо

$$4t^2 = 1 + 8 \frac{t^2(1+t)}{(1+2t)^2} - 4 \frac{t(1+t)}{1+2t},$$

або

$$16t^4 + 16t^3 + 4t^2 - 1 = 0.$$

Нехай $2t = x$. Отримаємо

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 = 0.$$

Перевіримо правильність отриманого рівняння.

Оскільки $\cos 2 \cdot 36^\circ = t$, а $x = 2t$, то

$$x = 2\cos 72^\circ = 2\sin 18^\circ,$$

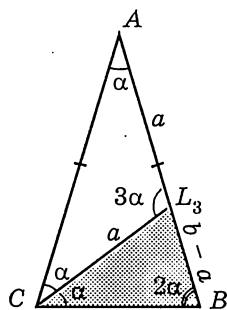


Рис. 12.12

а $2 \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ — корінь рівняння $x^2 - x + 1 = 0$.

Можна поділити многочлен на $x^2 + x - 1$. Але ми спробуємо інакше:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 = x^2(x+1)^2 - 1 = 0,$$

або

$$(x(x+1)-1)(x(x+1)+1) = 0,$$

отримали тричлен $x^2 + x - 1$, значить, рівняння складено правильно. ●

Задача 6. За допомогою трикутника Т-2 скласти рівняння четвертого ступеню відносно $\sin \frac{\alpha}{2}$ ($\alpha = 36^\circ$).

● У трикутнику L_3CB (рис. 12.13) проведемо висоту CN . Тоді

$$\angle NCB = \frac{\alpha}{2} \text{ і, оскільки } \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1, \text{ то}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2(90^\circ - 2\alpha) = 1, \text{ або } \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 2\alpha = 1.$$

Далі:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1; \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \cdot 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1.$$

Заміна: $\sin \frac{\alpha}{2} = y$ ($\alpha = 36^\circ$). Маємо:

$$y^2 + (16y^2 - 16y^4)(1 - 4y^2 + 4y^4) = 1,$$

або

$$y^2 + 16y^2 - 64y^4 + 64y^6 - 16y^4 + 64y^6 - 64y^8 = 1,$$

або

$$64y^8 - 128y^6 + 80y^4 - 17y^2 + 1 = 0.$$

Заміна $y^2 = x$. Маємо $64x^4 - 128x^3 + 80x^2 - 17x + 1 = 0$.

Застосуємо для перевірки многочлен для $\sin^2 18^\circ$: $16x^2 - 12x + 1$.

Маємо:

$$\begin{array}{r|l} 64x^4 - 128x^3 + 80x^2 - 17x + 1 & 16x^2 - 12x + 1 \\ 64x^4 - 48x^3 + 4x^2 & 4x^2 - 5x + 1 \\ \hline -80x^3 + 76x^2 - 17x & \\ -80x^3 + 60x^2 - 5x & \\ \hline 16x^2 - 12x + 1 & \\ 16x^2 - 12x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Рівняння складено правильно. ●

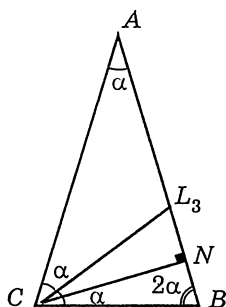


Рис. 12.13

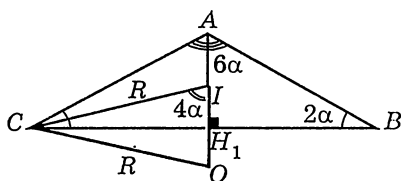


Рис. 12.14

Задача 7. За допомогою трикутника Т-3, рівності $IC = OC$ скласти рівняння четвертого ступеню ($x = \cos 2\alpha$). Перевірити.

● Із трикутника ICH_1 , враховуючи, що $IC = OC = R$ (рис. 12.14) за теоремою Піфагора:

$$IC^2 = H_1C^2 + IH_1^2,$$

або

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + r^2. \quad (1)$$

Оскільки $a = 2R \sin 4\alpha$ та $R = \frac{r}{\sin \alpha}$, то $a = 2 \cdot \frac{r}{\sin \alpha} \sin 4\alpha$.

Тепер вираз (1) стане таким:

$$\frac{r^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{r^2}{\sin^2 \alpha} \sin^2 4\alpha + r^2, \text{ або } \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 4\alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

звідки $\sin^2 4\alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Перетворимо отриману рівність. Маємо:

$$4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha + \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = 1,$$

або

$$8(1 - \cos^2 2\alpha) \cos^2 2\alpha + 1 - \cos 2\alpha = 2.$$

$\cos 2\alpha = y$ ($2\alpha = 36^\circ$). Тоді $8(1 - y^2)y^2 - y - 1 = 0$, звідки

$$8y^4 - 8y^2 + y + 1 = 0. \quad (*)$$

Розкладемо ліву частину рівняння (*) на множники:

$$8y^2(y^2 - 1) + (y + 1) = 0; (y + 1)(8y^3 - 8y^2 + 1) = 0.$$

Оскільки $y \neq -1$, то тільки $8y^3 - 8y^2 + 1 = 0$. Нехай $2y = x$. Тоді $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$, або $x^2 - x - 1 = 0$, а з рівнянням $x^2 - x - 1 = 0$ ми зустрічалися. Отже, відповідь:

$$8y^4 - 8y^2 + y + 1 = 0. \bullet$$

Задача 8. За допомогою трикутника Т-1 і трикутника $АОМ_2$ отримати рівняння **четвертого ступеню**.

● Ясно, що $R = \frac{b}{2 \sin 2\alpha}$ (рис. 12.15). Із $\triangle ОМ_2А$: $R = \frac{b}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$.

Значить, $\sin 2\alpha = \cos \frac{\alpha}{2}$, або $\sin^2 2\alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, або

$$1 - \cos^2 2\alpha = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

або

$$2 - 2\cos^2 2\alpha = 1 + \cos \alpha,$$

або

$$2\cos^2 2\alpha + \cos \alpha - 1 = 0, \quad 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 + \cos \alpha - 1 = 0,$$

$$8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + \cos \alpha + 1 = 0$$

або

$$8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0.$$

З цим рівнянням ми зустрічалися (див. попередню задачу). ●

Задача 9. За допомогою трикутника Т-2, кута $\frac{\alpha}{2}$ і трикутника CL_3B скласти рівняння **четвертого ступеню**.

● За теоремою косинусів із трикутника (рис. 12.16):

$$a^2 = a^2 + L_3B^2 - 2a \cdot L_3B \cos 2\alpha.$$

Оскільки $L_3B = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$, маємо:

$$4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2a \cdot 2a \sin \frac{\alpha}{2} \cos 2\alpha = 0,$$

або

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos 2\alpha = 0,$$

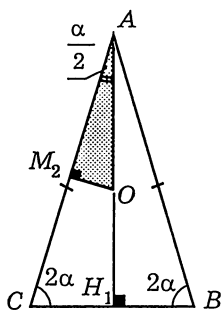


Рис. 12.15

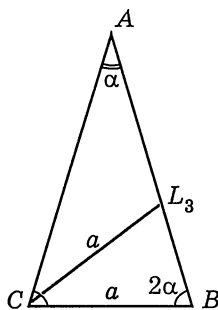


Рис. 12.16

або

$$\sin \frac{\alpha}{2} - \cos 2\alpha = 0, \quad \sin \frac{\alpha}{2} - (1 - 2\sin^2 \alpha) = 0,$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} - 1 + 8\sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8\sin^4 \frac{\alpha}{2} = 0; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = y \quad (y = 36^\circ).$$

Остаточно маємо многочлен $8y^4 - 8y^2 - y + 1 = 0$, який легко можна перевірити многочленом $4y^2 + 2y - 1$.

$$\begin{array}{r|l} 8y^4 - 8y^2 - 18y + 1 & 4y^2 + 2y - 1 \\ 8y^4 + 4y^3 - 2y^2 & 2y^2 - y - 1 \\ \hline -4y^3 - 6y^2 - y & \\ 4y^3 - 2y^2 + y & \\ \hline -4y^2 + 2y + 1 & \\ -4y^2 + 2y + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Рівняння складено правильно. ●

Задача 10(!). За допомогою трикутника Т-3 і формули Ейлера скласти рівняння четвертого ступеню.

● За формулою Ейлера (рис. 12.17):

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Оскільки $IH_1 = H_1O = r$, то $4r^2 = R^2 - 2Rr$. Оскільки $\angle ICH_1 = \alpha$ ($\alpha = 18^\circ$), то

$$r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha \quad \text{і} \quad 4 \cdot \frac{a^2}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha = R^2 - 2Rr.$$

Значить,

$$a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{a^2}{4 \sin^2 4\alpha} - 2 \cdot \frac{a \cdot a \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin 4\alpha \cdot 2},$$

звідки

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{4 \sin^2 4\alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2 \sin 4\alpha}.$$

$$\text{Маємо} \quad \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin 4\alpha}{4 \sin^2 4\alpha},$$

$$4 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 4\alpha = \cos^2 \alpha - 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin 4\alpha,$$

$$4 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 4\alpha = \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \sin 4\alpha,$$

$$16 \sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha = \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha,$$

$$64 \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha \sin 2\alpha \cos 2\alpha,$$

$64\sin^4\alpha\cos^2\alpha \cdot \cos^2 2\alpha = \cos^2\alpha - 8\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$,
Скоротимо на $\cos^2\alpha \neq 0$. Отримаємо

$$64\sin^4\alpha\cos^2 2\alpha = 1 - 8\sin^2\alpha\cos 2\alpha. \quad (1^0)$$

$$64\left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right)^2 \cos^2 2\alpha = 1 - 8\left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right) \cos 2\alpha,$$

заміна: $\cos 2\alpha = y$.

$$16(1 - y)^2 \cdot y^2 = 1 - 4(1 - y)y,$$

$$16(1 - 2y + y^2)y^2 = 1 - 4(y - y^2),$$

$$16y^2 - 32y^3 + 16y^4 - 1 + 4y - 4y^2 = 0,$$

або

$$16y^4 - 32y^3 + 12y^2 + 4y - 1 = 0,$$

або (заміна $2y = x$):

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Перевіримо отримане рівняння.

Оскільки $y = \cos 2\alpha = \cos 36^\circ$, а $x = 2y = 2\cos 36^\circ$ і

$$2\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

тобто доречним для перевірки є многочлен: $x^2 - x - 1 = 0$.

Поділимо:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 & x^2 - x - 1 \\ x^4 - x^3 - x^2 & x^2 - 3x + 1 \\ \hline -3x^3 + 4x^2 + 2x & \\ -3x^3 + 3x^2 + 3x & \\ \hline x^2 - x - 1 & \\ x^2 - x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Рівняння складено правильно.

Відповідь: $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Можливі варіації.

Повернемося, як і обіцяли, до виразу (1^0) , перетворимо його, скажімо, «на користь $\sin\alpha$ ». Отримаємо:

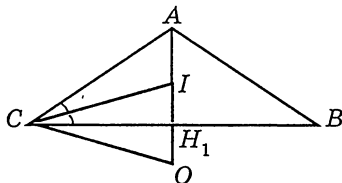


Рис. 12.17

¹ З цим виразом ми зустрінемося дещо в іншому варіанті.

$$64\sin^4\alpha(1 - 2\sin^2\alpha)^2 = 1 - 8\sin^2\alpha(1 - 2\sin^2\alpha),$$

зробимо заміну $\sin^2\alpha = y$. Тоді

$$64y^2(1 - 2y)^2 = 1 - 8y(1 - 2y),$$

$$64y^2(1 - 4y + 4y^2) = 1 - 8(y - 2y^2).$$

або

$$64y^2 - 256y^3 + 256y^4 + 8y - 16y^2 - 1 = 0,$$

або

$$256y^4 - 256y^3 + 48y^2 + 8y - 1 = 0.$$

Знову зробимо заміну: $x = 4y$. Отримаємо:

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Знову отримали «наше» рівняння!●

Рівняння 5-го ступеню

Задача 1. За допомогою трикутника Т-3, відрізка $AH_1 = R - r$ скласти рівняння п'ятого ступеню.

● Оскільки точки O і I симетричні відносно BC (рис. 12.16), то $OH_1 = r$, а $OA = R$, значить, $AH_1 = R - r$.

$$\text{Із трикутника } AH_1C: (R - r)^2 + \frac{a^2}{4} = b^2; \quad b = \frac{R - r}{\sin 2\alpha},$$

значить,

$$(R - r)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 2\alpha} - 1 \right) = \frac{a^2}{4}.$$

Але

$$R = \frac{r}{\sin \alpha}; \quad \frac{a}{2} = r \operatorname{ctg} \alpha.$$

Тому

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 1 \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 2\alpha} - 1 \right),$$

$$\text{або } (1 - \sin \alpha)^2 \cos^2 2\alpha = \cos^2 \alpha \sin^2 2\alpha,$$

або

$$\cos^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos^2 2\alpha = \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha.$$

Заміна $\cos 2\alpha = y$ ($\alpha = 18^\circ$). Маємо:

$$y^2 + \frac{y^2(1 - y)}{2} - \sqrt{2(1 - y)} \cdot y^2 = \frac{1 + y}{2} \cdot (1 - y^2),$$

або

$$4y^2 - y - 1 = 2\sqrt{2(1 - y)} \cdot y^2,$$

або

$$8y^5 + 8y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 = 0.$$

Помножимо обидві частини рівняння на 4 і зробимо заміну $2y = x$. Отримаємо: $x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 0$. Враховуючи, що $y = \cos 36^\circ$, поділимо для перевірки отримане рівняння на $x^2 - x - 1$; маємо

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 4x + 4 & x^2 - x - 1 \\
 x^5 - x^4 - x^3 & x^3 + 3x^2 - 4 \\
 \hline
 3x^4 - 3x^3 - 7x^2 & \\
 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 & \\
 \hline
 -4x^2 + 4x + 1 & \\
 -4x^2 + 4x + 1 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Рівняння складено правильно. ●

Задача 2. За допомогою трикутника Т-2, трикутника ACL_3 і формули бісектриси l_c отримати рівняння п'ятого ступеню.

● Із трикутника ACL_3 за теоремою косинусів (рис. 12.16):

$$AC^2 = AL_3^2 + CL_3^2 - 2AL_3CL_3\cos\angle AL_3C,$$

або $b^2 = a^2 + l_c^2 - 2a \cdot l_c \cos 3\alpha$. Оскільки $l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \alpha$, то

$$\begin{aligned}
 b^2 &= a^2 + \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \cos^2 \alpha - \frac{2a \cdot 2ab \cos \alpha}{a+b} \cos 3\alpha = \\
 &= a^2 + \frac{4a^2b}{a+b} \cos \alpha \left(\frac{b \cos \alpha}{a+b} - \cos 3\alpha \right).
 \end{aligned}$$

Але $a = 2b \cos 2\alpha$ (із $\triangle AH_1C$) (рис. 12.15). Тому

$$b^2 = 4b^2 \cos^2 2\alpha + \frac{16b^2 \cos^2 2\alpha \cdot b}{2b \cos 2\alpha + b} \cos \alpha \cdot \left(\frac{b \cos \alpha}{2b \cos 2\alpha + b} - \cos 3\alpha \right).$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned}
 \cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = \cos(4\cos^2 \alpha - 3) = \\
 &= \cos \alpha \left(4 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - 3 \right) = \cos \alpha (2 \cos 2\alpha - 1),
 \end{aligned}$$

маємо

$$1 = 4 \cos^2 2\alpha \left(1 + \frac{4 \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha} \left(\frac{1}{1 + 2 \cos 2\alpha} - 2 \cos 2\alpha + 1 \right) \right).$$

Заміна $\cos 2\alpha = t$. Тоді

$$1 = 4t^2 \left(1 + \frac{2(1+t)(2-4t^2)}{(1+2t)^2} \right),$$

або

$$1 = \frac{((1+2t)^2 + 2(1+t)(2-4t^2))}{(1+2t)^2} \cdot 4t^2,$$

$$(1+2t)^2 = 4t^2(1+4t+4t^2+2(2-4t^2+2t-4t^3)),$$

$$1+4t+4t^2 = 4t^2(1+4t+4t^2+4-8t^2+4t-8t^3);$$

$$1+4t+4t^2 = 4t^2(5+8t-4t^2-8t^3);$$

$$1+4t+4t^2 = 20t^2+32t^3-16t^4-32t^5,$$

$$32t^5+16t^4-32t^3-16t^2+4t+1=0,$$

$$2t = z.$$

Остаточню:

$$z^5 + z^4 - 4z^3 - 4z^2 + 2z + 1 = 0.$$

Оскільки заміна $2t = z$ відповідає $\alpha = 36^\circ$, $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ$, для нашого випадку ($2t = z$) $z = 2\sin 18^\circ$ відповідає тричлен: $z^2 + z - 1$. Поділимо:

$$\begin{array}{r|l} z^5 + z^4 - 4z^3 - 4z^2 + 2z + 1 & z^2 + z - 1 \\ z^5 + z^4 - z^3 & z^3 - 3z - 1 \\ \hline -3z^3 - 4z^2 + 2z & \\ -3z^3 - 3z^2 + 3z & \\ \hline z^2 - z + 1 & \\ z^2 - z + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Рівняння складено правильно. ●

Задача 3. За допомогою трикутника Т-2, формули квадрата бісектриси CL_3 скласти рівняння п'ятого ступеня відносно

$$\sin \frac{\alpha}{2}.$$

● За формулою бісектриси:

$$CL_3^2 = BC \cdot AC - BL_3 \cdot AL_3. \quad (1)$$

Проведемо висоту CN у трикутнику CL_3B (рис. 12.18). Оскільки він рівнобедрений,

$$NB = NL_3 = a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Маємо $a = 2b \cos 2\alpha$ ($\triangle CAH_1$).

$$BC = CL_3 = a = 2b \cos 2\alpha;$$

$$AC = b; \quad BL_3 = 2NB = 2a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Відповідно,

$$BL_3 = 2 \cdot 2b \cos 2\alpha \sin \frac{\alpha}{2} = 4b \cos 2\alpha \sin \frac{\alpha}{2};$$

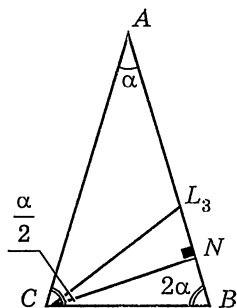


Рис. 12.18

$$AL_3 = a = 2b \cos 2\alpha.$$

Тепер формула (1) буде такою:

$$4b^2 \cos^2 2\alpha = 2b \cos 2\alpha \cdot b - 4b \cos 2\alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2b \cos 2\alpha.$$

Враховуючи, що

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 8\sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 8\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 8\sin^4 \frac{\alpha}{2},$$

маємо

$$2 - 16\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 16\sin^4 \frac{\alpha}{2} = 1 - \left(4\sin \frac{\alpha}{2} - 32\sin^3 \frac{\alpha}{2} + 32\sin^5 \frac{5\alpha}{2}\right).$$

Заміна: $\sin \frac{\alpha}{2} = y$. Отримаємо:

$$32y^5 + 16y^4 - 32y^3 - 16y^2 + 4y + 1 = 0,$$

або $2y = x$, остаточно $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0$.

Отримали рівняння попередньої задачі. Оскільки

$$x = 2\sin \frac{\alpha}{2} 2\sin 18^\circ,$$

многочлен для перевірки той же: $x^2 + x - 1$. ●

Задача 4. У трикутнику Т-2 за допомогою бісектриси CL_3 , вираженої двома способами, отримати рівняння п'ятого ступеню.

● Оскільки $\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha$, то $\angle BAC = 180^\circ - 4\alpha$ (рис. 12.18). Із трикутника ACL_3 за теоремою косинусів:

$$l_c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos(180^\circ - 4\alpha).$$

Оскільки $a = 2b \cos 2\alpha$, то

$$l_c^2 = b^2 + 4b^2 \cos^2 2\alpha + 2b \cdot 2b \cos 2\alpha \cos 4\alpha. \quad (1)$$

З іншого боку $l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \alpha$, або

$$l_c = \frac{2b \cdot 2b \cos 2\alpha}{b + 2b \cos 2\alpha} \cos \alpha = \frac{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha} \cdot 4b. \quad (2)$$

Порівняємо (1) і (2):

$$16b^2 \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha = (1 + 2 \cos 2\alpha)^2 (b^2 + 4b^2 \cos^2 2\alpha + 2b \cdot 2b \cos 2\alpha \cos 4\alpha),$$

або

$$16 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha = (1 + 2 \cos 2\alpha)^2 (1 + 4 \cos^2 2\alpha + 4 \cos 2\alpha \cos 4\alpha),$$

$$8(1 + \cos 2\alpha) \cos^2 2\alpha = (1 + 2 \cos 2\alpha)^2 \cdot (1 + 4 \cos^2 2\alpha + 4 \cos 2\alpha (2 \cos^2 2\alpha - 1)),$$

$$\cos 2\alpha = y \quad (\alpha = 36^\circ),$$

$$8(1 + y)y^2 = (1 + 2y)^2 (1 + 4y^2 + 4y(2y^2 - 1)),$$

або

$$8y^2 + 8y^3 = (1 + 4y + 4y^2)(1 + 4y^2 + 8y^3 - 4y);$$

$$8y^2 + 8y^3 = 1 + 4y^2 + 8y^3 - 4y + 4y + 16y^3 +$$

$$+ 32y^4 - 16y^2 + 4y^2 + 16y^4 + 32y^5 - 16y^3,$$

або

$$32y^5 + 48y^4 - 16y^2 + 1 = 0.$$

Знову заміна $2y = x$ (а значить, многочлен для перевірки $x^2 + x - 1$). Маємо

$$x^5 + 3x^4 - 4x^2 + 1 = 0.$$

Ділимо на $x^2 + x - 1$:

$$x^5 + 3x^4 - 4x^2 + 1 = (x^2 + x - 1)(x^3 + 2x^2 - x - 1).$$

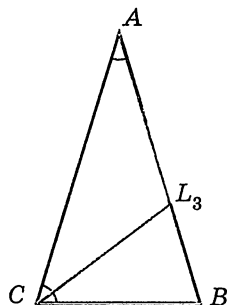


Рис. 12.19

$$\begin{array}{r} x^5 + 3x^4 - 4x^2 + 1 \quad | \quad x^2 + x - 1 \\ x^5 + x^4 - x^3 \quad | \quad x^3 + 2x^2 - x - 1 \\ \hline 2x^4 + x^3 - 4x^2 \\ 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 \\ \hline -x^3 - 2x^2 + 1 \\ -x^3 - x^2 + x \\ \hline -x^2 - x + 1 \\ -x^2 - x + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Рівняння складено правильно. ●

Задача 5. За допомогою трикутника Т-2, трикутника CL_3B , відрізка $b - a$, формули бісектриси l_c отримати рівняння п'ятого ступеня.

● Оскільки $AL_3 = a$, то $BL_3 = b - a$. Із трикутника CL_3B (рис. 12.20):

$$a^2 = a^2 + (b - a)^2 - 2a(b - a)\cos(180^\circ - 3\alpha),$$

або

$$(b - a)^2 + 2a(b - a)\cos 3\alpha = 0. \quad (1)$$

За формулою бісектриси: $l_c = a = \frac{2ab}{a + b} \cos \alpha$, звідки

$$b = \frac{a}{2 \cos \alpha - 1}.$$

Тепер формула (1) буде такою:

$$\left(\frac{a}{2 \cos \alpha - 1} - a \right)^2 + 2a \left(\frac{a}{2 \cos \alpha - 1} - a \right) \cos 3\alpha = 0,$$

$$\text{або } \left(\frac{2 - 2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha - 1} \right)^2 + 2 \left(\frac{2 - 2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha - 1} \right) (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) = 0.$$

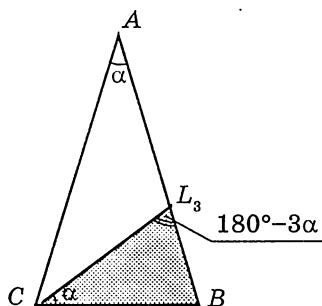


Рис. 12.20

Заміна $\cos \alpha = y$ ($\alpha = 36^\circ$). Маємо:

$$\left(\frac{2-2y}{2y-1}\right)^2 + 2\left(\frac{2-2y}{2y-1}\right)(4y^3 - 3y) = 0,$$

або

$$(2-2y)^2 + 2(2y-1)(2-2y)(4y^3 - 3y) = 0,$$

або

$$\begin{aligned} 4 - 8y + 4y^2 + (4y^3 - 3y)(-8y^2 + 12y - 4) = \\ = 4 - 8y + 4y^2 - 32y^5 + 48y^4 + 8y^3 - \\ - 36y^2 + 12y = -32y^5 + 48y^4 + 8y^3 - \\ - 32y^2 + 4y + 4 = 0; \end{aligned}$$

значить,

$$32y^5 - 48y^4 - 8y^3 + 32y^2 - 4y - 4 = 0.$$

Заміна: $2x = y$. Отримаємо $x^5 - 3x^4 - x^3 + 8x^2 - 2x - 4 = 0$.

Многочлен для перевірки $x^2 - x - 1$.

Поділимо:

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 3x^4 - x^3 + 8x^2 - 2x - 4 & x^2 - x - 1 \\ x^5 - x^4 - x^3 & \hline -2x^4 + 8x^2 - 2x & \\ -2x^4 + 2x^3 + 2x^2 & \hline -2x^3 + 6x^2 - 2x & \\ -2x^3 + 2x^2 + 2x & \hline -4x^2 - 4x - 4 & \\ -4x^2 - 4x - 4 & \hline 0 & \end{array}$$

Рівняння складено правильно. ●

Задача 6. За допомогою трикутника Т-2, відрізка $b - a$ і теореми косинусів скласти рівняння п'ятого ступеню.

● Із трикутника $\triangle CL_3B$ за теоремою косинусів (рис. 12.20):

$$(b - a)^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \alpha,$$

або

$$b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \alpha,$$

або

$$b^2 - 2ab = a^2(1 - 2\cos \alpha).$$

Оскільки $a = 2b \cos 2\alpha$, то

$$b^2 - 4b^2 \cos 2\alpha = 4b^2 \cos^2 2\alpha (1 - 2\cos \alpha),$$

значить,

$$1 - 4(2\cos^2 \alpha - 1) = 4(2\cos^2 \alpha - 1)^2 \cdot (1 - 2\cos \alpha);$$

далі

$$1 - 8\cos^2 \alpha + 4 = 4(4\cos^4 \alpha - 4\cos^2 \alpha + 1 - 8\cos^5 \alpha + 8\cos^3 \alpha - 2\cos \alpha);$$

$$1 - 8\cos^2 \alpha + 4 = 16\cos^4 \alpha - 16\cos^2 \alpha + 4 - 32\cos^5 \alpha + 32\cos^3 \alpha - 8\cos \alpha,$$

$$\text{звідки } 32\cos^5\alpha - 16\cos^4\alpha - 32\cos^3\alpha + 8\cos^2\alpha + 8\cos\alpha + 1 = 0.$$

$$2\cos\alpha = x \quad (\alpha = 36^\circ).$$

Многочлен для перевірки $x^2 - x - 1$. Отримали рівняння

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Перевірка свідчить, що рівняння складено правильно.

Зазначимо, що цей шлях складання рівняння може дати друге рівняння п'ятого ступеню:

$$1 - 4\cos 2\alpha = (4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1) - 8(2\cos^2\alpha - 1)^2\cos\alpha,$$

але

$$\begin{aligned} 8(2\cos^2\alpha - 1)^2\cos\alpha &= 8\cos\alpha(4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1) = \\ &= 32\cos^5\alpha - 32\cos^3\alpha + 8\cos\alpha. \end{aligned}$$

Тому

$$1 - 8\cos^2\alpha + 4 = 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 - 32\cos^5\alpha + 32\cos^3\alpha - 8\cos\alpha,$$

звідки

$$32\cos^5\alpha - 32\cos^3\alpha - 12\cos^2\alpha + 12\cos\alpha + 4 = 0,$$

або

$$(2\cos\alpha = x) \quad x^5 - 4x^3 - 3x^2 + 6x + 4 = 0.$$

Перевірити можна многочленом $x^2 - x - 1$. ●

Задача 7. За допомогою трикутника Т-2, трикутника ACL_3 і формули бісектриси скласти рівняння п'ятого ступеню.

● За теоремою косинусів із трикутника ACL_3 (рис. 12.20):

$$b^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 3\alpha,$$

або

$$b^2 = 2a^2(1 - \cos 3\alpha). \quad (1)$$

За формулою бісектриси

$$CL_3 = \frac{2ab}{a+b}\cos\alpha \quad \text{або} \quad a = \frac{2ab}{a+b}\cos\alpha,$$

звідки

$$a = 2b\cos\alpha - b = b(2\cos\alpha - 1).$$

Підставимо в рівність (1):

$$b^2 = 2b^2(2\cos\alpha - 1)^2(1 - \cos 3\alpha),$$

або

$$2(2\cos\alpha - 1)^2(1 - \cos 3\alpha) - 1 = 0,$$

або

$$\begin{aligned} 2(2\cos\alpha - 1)^2(1 - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha) - 1 &= 0; \\ (2\cos\alpha - 1)^2(2 - 8\cos^3\alpha + 6\cos\alpha) - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Нехай $x = 2\cos\alpha$. Тоді

$$\begin{aligned} (x-1)^2(2-x^3+3x) - 1 &= 0; \quad (x^2-2x+1)(2-x^3+3x) - 1 = 0; \\ 2x^2 - x^5 + 3x^3 - 4x + 2x^4 - 6x^2 + 2 - x^3 + 3x - 1 &= 0; \\ -x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

або

$$x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 1 = 0.$$

Многочлен для перевірки: $x^2 - x - 1$.

$$x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 1 = (x^2 - x - 1)(x^3 - x^2 - 2x + 1).$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 1 \\
 \hline
 x^5 - x^4 - x^3 \\
 \hline
 -x^4 - x^3 + 4x^2 \\
 -x^4 + x^3 + x^2 \\
 \hline
 -2x^3 + 3x^2 + x \\
 -2x^3 + 2x^2 + 2x \\
 \hline
 x^2 - x - 1 \\
 x^2 - x - 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r}
 x^2 - x - 1 \\
 \hline
 x^3 - x^2 - 2x + 1
 \end{array} \right.$$

Рівняння складено правильно. ●

Рівняння 6-го ступеню

Задача 1. За допомогою трикутника Т-2, відрізка BL_3 і формули бісектриси й теореми косинусів, отримати рівняння шостого ступеню.

● Із трикутника BL_3C (рис. 12.20):

$$BL_3^2 = l_c^2 + a^2 - 2l_c \cdot a \cdot \cos \alpha, \quad (1)$$

$$BL_3 = b - a = b - l_c, \quad (2)$$

$$l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \alpha, \quad (3)$$

$$a = 2b \cos 2\alpha. \quad (4)$$

Перетворимо формулу (3)

$$l_c = \frac{2b \cdot 2b \cos 2\alpha \cos \alpha}{b + 2b \cos 2\alpha} = \frac{4b \cos \alpha \cos 2\alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha}. \quad (5)$$

Тепер формула (2) стане такою:

$$BL_3 = b - a = b - l_c = b - \frac{4b \cos 2\alpha \cos \alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha} = \frac{b(1 + 2 \cos 2\alpha - 4 \cos \alpha \cos 2\alpha)}{1 + 2 \cos 2\alpha}.$$

Піднесемо останній вираз до квадрату (квадрат суми трьох чисел):

$$BL_3^2 = \frac{b^2}{(1 + 2 \cos 2\alpha)^2} \cdot \left(1 + 4 \cos^2 2\alpha + 16 \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha + 4 \cos 2\alpha - \right. \\ \left. - 8 \cos \alpha \cos 2\alpha - 16 \cos^2 2\alpha \cos \alpha \right). \quad (1^0)$$

Далі. Підставимо формули (4) і (5) в (1):

$$BL_3^2 = 4b^2 \cos^2 2\alpha + \frac{16b^2 \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha}{(1 + 2 \cos 2\alpha)^2} - 16b^2 \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha}.$$

Відніmemo третій доданок від другого. Отримаємо:

$$\frac{16b^2 \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha (1 - 1 - 2 \cos 2\alpha)}{(1 + 2 \cos 2\alpha)^2} = - \frac{32b^2 \cos^2 \alpha \cos^3 2\alpha}{(1 + 2 \cos 2\alpha)^2}.$$

Отже,

$$BL_3^2 = 4b^2 \cos^2 2\alpha - \frac{32b^2 \cos^2 \alpha \cos^3 2\alpha}{(1 + 2 \cos 2\alpha)^2}. \quad (2^0)$$

Порівнюємо (1^0) і (2^0) . Отримаємо:

$$1 + 4\cos^2 2\alpha + 16\cos^2 2\alpha \cos^2 \alpha + 4\cos 2\alpha - 8\cos \alpha \cos 2\alpha - 16\cos^2 2\alpha \cos \alpha = \\ = 4\cos^2 2\alpha + 16\cos^3 2\alpha + 16\cos^4 2\alpha - 32\cos^2 \alpha \cos^3 2\alpha.$$

Позначимо $\cos 2\alpha = t$. Маємо:

$$8t^3 + 8t^2 + 4t - 8t \cdot \sqrt{\frac{t+1}{2}}(2t+1) + 1 = 0,$$

або

$$8t \cdot \sqrt{\frac{t+1}{2}} \cdot (2t+1) = 8t^3 + 8t^2 + 4t + 1,$$

або

$$32t^2(t+1)(4t^2+4t+1) = 64t^6 + 64t^4 + 16t^2 + 1 + \\ + 128t^4 + 16t^3 + 64t^3 + 16t^2 + 8t.$$

або

$$128t^5 + 256t^4 + 160t^3 + 32t^2 = 64t^6 + 128t^5 + \\ + 128t^4 + 80t^3 + 32t^2 + 8t + 1,$$

або

$$64t^6 - 128t^4 - 80t^3 + 8t + 1 = 0.$$

Заміна: $2t = x$. Маємо $x^6 - 8x^4 - 10x^3 + 4x + 1 = 0$. (Многочлен для перевірки $x = 2\cos 2\alpha = 2\cos 72^\circ = 2\sin 18^\circ$: $x^2 + x - 1$).

$$x^6 - 8x^4 - 10x^3 + 4x + 1 = (x^2 + x - 1)(x^4 - x^3 - 6x^2 - 5x - 1).$$

Рівняння складено правильно. ●

$$\begin{array}{r|l} x^6 - 8x^4 - 10x^3 + 4x + 1 & x^2 + x - 1 \\ - x^6 + x^5 - x^4 & \hline - x^5 - 7x^4 - 10x^3 & \\ - x^5 - x^4 + x^3 & \hline - 6x^4 - 11x^3 & \\ - 6x^4 - 6x^3 + 6x^2 & \hline - 5x^3 + 6x^2 + 4x & \\ - 5x^3 - 5x^2 + 5x & \hline - x^2 - x + 1 & \\ - x^2 - x + 1 & \hline 0 & \end{array}$$

Задача 2. За допомогою трикутника Т-2, формули бісектриси й трикутника BL_3C скласти рівняння шостого ступеню.

● За теоремою косинусів із трикутника BL_3C (рис. 12.20), враховуючи, що $\angle CL_3B = 180^\circ - 3\alpha$, маємо:

$$a^2 = l_c^2 + (b - a)^2 + 2l_c(b - a)\cos 3\alpha. \quad (1)$$

Подамо компоненти рівності (1) через b :

$$a = 2b\cos 2\alpha, \quad (2)$$

$$b - a = b - 2b\cos 2\alpha = b(1 - 2\cos 2\alpha), \quad (3)$$

$$l_c = \frac{2ab\cos \alpha}{a + b}.$$

Оскільки $l_c = a$, то $a = \frac{2ab\cos \alpha}{a + b}$, або

$$a + b = 2b\cos \alpha,$$

звідки

$$a = l_c = -b + 2b\cos \alpha. \quad (4)$$

Підставимо (2), (3), (4) в (1):

$$4b^2\cos^2 2\alpha = (2b\cos \alpha - b)^2 + b^2(1 - 2\cos 2\alpha)^2 + 2b(2b\cos \alpha - b)(1 - 2\cos 2\alpha)\cos 3\alpha.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} 4(2\cos^2 \alpha - 1)^2 &= 4\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha + 1 + (1 - 2(2\cos^2 \alpha - 1))^2 + \\ &+ 2(2\cos \alpha - 1) \cdot (1 - 2(2\cos^2 \alpha - 1))(4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha); \\ 4(4\cos^4 \alpha - 4\cos^2 \alpha + 1) &= 4\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha + 1 + (3 - 4\cos^2 \alpha)^2 + \\ &+ (4\cos \alpha - 2) \cdot (3 - 4\cos^2 \alpha)(4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha). \end{aligned}$$

Заміна $\cos \alpha = t$ ($\alpha = 36^\circ$).

$$16t^4 - 16t^2 + 4 = 4t^2 - 4t + 1 + 9 - 24t^2 + 16t^4 + (12t - 6 - 16t^3 + 8t^2) \cdot (4t^3 - 3t);$$

$$16t^2 - 4 + 4t^2 - 4t + 1 + 9 - 24t^2 + 48t^4 - 24t^3 - 64t^6 + 32t^5 - 36t^2 + 18t + 48t^4 - 24t^3 = 0.$$

значить, $64t^6 - 32t^5 - 96t^4 + 48t^3 + 40t^2 - 14t - 6 = 0$.

Заміна: $2t = x$. Остаточного маємо

$$x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 7x - 6 = 0.$$

Перевіримо, поділивши многочлен на $x^2 - x - 1$.

$x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 7x - 6$	$x^2 - x - 1$
$x^6 - x^5 - x^4$	$x^4 - 5x^2 + x + 6$
$- 5x^4 + 6x^3 + 10x^2$	
$- 5x^4 + 5x^3 + 5x^2$	
$x^3 + 5x^2 - 7x$	
$x^3 - x^2 - x$	
$6x^2 - 6x - 6$	
$6x^2 - 6x - 6$	
0	

Рівняння складено правильно. ●

Рівняння 7-го ступеню

Задача 1. За допомогою трикутника Т-3, трикутника ACI (I — інцентр), враховуючи, що $AI = R - 2r$, отримати рівняння сьомого ступеню.

● Оскільки (рис. 12.21) $R = \frac{a}{2 \sin 4\alpha}$ (із $\triangle CH_1$), $r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$,

то

$$AI = R - 2r = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\sin 4\alpha} - 2 \operatorname{tg} \alpha \right); \quad CI = R = \frac{a}{2 \sin 4\alpha}; \quad AC = \frac{a}{2 \cos 2\alpha}.$$

За теоремою косинусів $AI^2 = AC^2 + CI^2 - 2AC \cdot CI \cos \alpha$.

Маємо

$$\frac{a^2}{4} \left(\frac{1}{\sin 4\alpha} - 2 \operatorname{tg} \alpha \right)^2 = \frac{a^2}{4 \cos^2 2\alpha} + \frac{a^2}{4 \sin^2 4\alpha} - 2 \frac{a^2 \cos \alpha}{4 \sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha},$$

звідки

$$\left(\frac{1}{\sin 4\alpha} - 2 \operatorname{tg} \alpha \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + \frac{1}{\sin^2 4\alpha} - \frac{2 \cos \alpha}{\sin 4\alpha \cos 2\alpha}.$$

Помножимо обидві частини рівності на $\sin^2 4\alpha$.

Отримаємо

$$(1 - 8 \sin^2 \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha))^2 = 16 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + 1 - 8(1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha.$$

Заміна $y = \sin \alpha$ ($\alpha = 18^\circ$).

Отримаємо

$$(1 - 8y^2(1 - 2y^2))^2 = 16y^2(1 - y^2) + 1 - 8(1 - y^2)y,$$

або

$$(16y^4 - 8y^2 + 1)^2 = 16y^2 - 16y^4 + 1 - 8y + 8y^3.$$

Заміна: $2y = x$ (многочлен для перевірки $x^2 + x - 1$):

$$(x^4 - 2x^2 + 1)^2 = 4x^2 - x^4 + 1 - 4x + x^3,$$

або

$$x^8 + 4x^4 + 1 - 4x^6 + 2x^4 - 4x^2 = 4x^2 - x^4 + 1 - 4x + x^3,$$

або

$$x^8 - 4x^6 + 7x^4 - x^3 - 8x^2 + 4x = 0,$$

звідки остаточно

$$x^7 - 4x^5 + 7x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0.$$

Перевіримо отриману рівність:

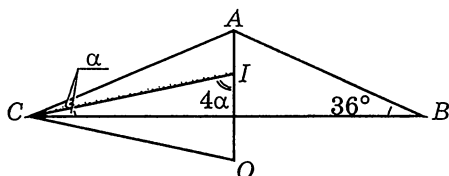


Рис. 12.21

$$\begin{array}{r}
x^7 - 4x^5 + 7x^3 - x^2 - 8x + 4 \quad | \quad x^2 + x - 1 \\
x^7 + x^6 - x^5 \\
\hline
- x^6 - 3x^5 \\
- x^6 - x^5 + x^4 \\
\hline
- 2x^5 - x^4 + 7x^3 \\
- 2x^5 - 2x^4 + 2x^3 \\
\hline
x^4 + 5x^3 - x^2 \\
x^4 + x^3 - x^2 \\
\hline
4x^3 - 8x \\
4x^3 + 4x^2 - 4x \\
\hline
- 4x^2 - 4x + 4 \\
- 4x^2 - 4x + 4 \\
\hline
0
\end{array}$$

Рівняння складено правильно. ●

Задача 2. За допомогою трикутника Т-2 і трикутника ACL_3 скласти рівняння сьомого ступеня.

● Оскільки $\angle CL_3A = 3\alpha$ (рис. 12.20), то за теоремою косинусів:
 $b^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 3\alpha$, або

$$b^2 = 2a^2(1 - \cos 3\alpha). \quad (1)$$

Враховуючи, що $a = 2b \cos 2\alpha$, співвідношення (1) запишеться так: $b^2 = 2 \cdot 4b^2 \cos^2 2\alpha (1 - 4\cos^3 \alpha + 3\cos \alpha)$, або $1 = 8(2\cos^2 \alpha - 1)^2 (1 - 4\cos^3 \alpha + 3\cos \alpha)$. Далі: $1 = 8(4\cos^4 \alpha - 4\cos^2 \alpha + 1)(1 - 4\cos^3 \alpha + 3\cos \alpha)$, або

$$1 = 32\cos^4 \alpha - 128\cos^7 \alpha + 96\cos^5 \alpha - 32\cos^2 \alpha + 128\cos^5 \alpha - 96\cos^3 \alpha + 8 - 32\cos^3 \alpha + 24\cos \alpha.$$

Заміна: $2\cos \alpha = x$. Маємо: $x^7 - 7x^5 - 2x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 12x - 7 = 0$. Многочлен для перевірки: $x^2 - x - 1$.

$$\begin{array}{r}
x^7 - 7x^5 - 2x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 12x - 7 \quad | \quad x^2 - x - 1 \\
x^7 - x^6 - x^5 \\
\hline
x^6 - 6x^5 - 2x^4 \\
x^6 - x^5 - x^4 \\
\hline
- 5x^5 - x^4 + 16x^3 \\
- 5x^5 + 5x^4 + 5x^3 \\
\hline
- 6x^4 + 11x^3 + 8x^2 \\
- 6x^4 + 6x^3 + 6x^2 \\
\hline
5x^3 + 2x^2 - 12x \\
5x^3 - 5x^2 - 5x \\
\hline
7x^2 - 7x - 7 \\
7x^2 - 7x - 7 \\
\hline
0
\end{array}$$

Рівняння складено правильно. ●

Задача 3. За допомогою трикутника $T-2$ і трикутника L_3CB , відрізка $b - a$ отримати рівняння сьомого ступеня (рис. 12.20).

● Із трикутника L_3CB :

$$a^2 = a^2 + (b - a)^2 - 2a(b - a)\cos(180^\circ - 3\alpha). \quad (1)$$

Оскільки $b = \frac{a}{2\cos 2\alpha}$, то $b - a = \frac{a(1 - 2\cos \alpha)}{2\cos 2\alpha}$.

Формулу (1) запишемо так:

$$a^2 = a^2 + \frac{a^2}{4\cos^2 2\alpha} - 2a \cdot \frac{a}{2\cos 2\alpha} + a^2 + 2a \cdot \frac{a(1 - 2\cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha} \cos 3\alpha,$$

або

$$\frac{1}{4(2\cos^2 \alpha - 1)^2} - \frac{1}{2\cos^2 \alpha - 1} + 1 + \left(\frac{1 - 2(2\cos^2 \alpha - 1)}{2\cos^2 \alpha - 1} \right) (4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha) = 0.$$

Заміна $\cos \alpha = x$. Маємо

$$\frac{1}{4(2x^2 - 1)^2} + \frac{(1 - 2(2x^2 - 1)) \cdot (4x^3 - 3x) - 1}{2x^2 - 1} + 1 = 0;$$

$$\frac{1}{4(2x^2 - 1)^2} + \frac{4x^3 - 3x - 2(2x^2 - 1)(4x^3 - 3x) - 1}{2x^2 - 1} + 1 = 0;$$

$$\frac{1}{4(2x^2 - 1)^2} + \frac{4x^3 - 3x - 1 - (16x^5 - 12x^3 - 8x^3 + 6x)}{2x^2 - 1} + 1 = 0;$$

$$\frac{1}{4(2x^2 - 1)^2} + \frac{4x^3 - 3x - 1 - 16x^5 + 12x^3 + 8x^3 - 6x}{2x^2 - 1} + 1 = 0;$$

$$\frac{1}{4(2x^2 - 1)^2} + \frac{24x^3 - 9x - 1 - 16x^5}{2x^2 - 1} + 1 = 0;$$

$$1 + 4(24x^3 - 9x - 1 - 16x^5)(2x^2 - 1) + 4(2x^2 - 1)^2 = 0;$$

$$1 + 4(48x^5 - 18x^3 - 2x^2 - 24x^3 + 9x + 1 + 16x^5) + 4(4x^4 + 1 - 4x^2) = 0;$$

$$1 + 256x^5 - 128x^7 - 168x^3 - 8x^2 + 36x + 4 + 16x^4 + 4 - 16x^2 = 0;$$

$$128x^7 - 256x^5 - 16x^4 + 168x^3 + 24x^2 - 36x - 9 = 0.$$

Заміна: $2x = y$. Остаточо,

$$y^7 - 8y^5 - y^4 + 21y^3 + 6y^2 - 18y - 9 = 0.$$

Перевіримо складене рівняння (многочлен для перевірки $y^2 - y - 1$): $y^7 - 8y^5 - y^4 + 21y^3 + 6y^2 - 18y - 9 =$
 $= (y^2 - y - 1) \cdot (y^5 + y^4 - 6y^3 - 6y^2 + 9y + 9).$ ●

Рівняння 10-го ступеню

Десятий ступінь — із однієї формули!

Задача 1. Скориставшись трикутниками $T-2$ і ACL_3 , формулою бісектриси скласти рівняння десятого ступеня.

● Маємо

$$l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \alpha,$$

оскільки $l_c = a$, то

$$a + b = 2b \cos \alpha. \quad (1)$$

Із трикутника AL_3C (рис. 12.21):

$$b = a\sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)}.$$

Тепер співвідношення (1) можна записати так:

$$a\sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)} + a = 2a\sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)} \cdot \cos \alpha.$$

● Перетворимо останній вираз:

$$\left(\sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)} + 1\right)^2 = \left(2\sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)} \cdot \cos \alpha\right)^2,$$

$$2(1 - \cos 3\alpha) + 1 + 2\sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)} = 4 \cos^2 \alpha (2 - 2 \cos 3\alpha).$$

Розглянемо вираз:

$$2 - 8 \cos^3 \alpha + 6 \cos \alpha + 1 + 2\sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)} = 8 \cos^2 \alpha - 8 \cos^2 \alpha \cos 3\alpha, \quad (2)$$

$$8 \cos^2 \alpha - 8 \cos^2 \alpha (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) = 8 \cos^2 \alpha - 32 \cos^5 \alpha + 24 \cos^3 \alpha. \quad (3)$$

Підставимо вираз (3) в (2) і відокремимо вираз із коренем:

$$2\sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)} = 8 \cos^2 \alpha - 32 \cos^5 \alpha + 24 \cos^3 \alpha - 3 + 8 \cos^3 \alpha - 6 \cos \alpha,$$

або

$$\left(2\sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)}\right)^2 = (-32 \cos^5 \alpha + 32 \cos^3 \alpha + 8 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha - 3)^2,$$

або

$$8 - 32 \cos^3 \alpha + 24 \cos \alpha = (32 \cos^5 \alpha - 32 \cos^3 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 6 \cos \alpha + 3)^2.$$

Права частина рівності виглядатиме так:

$$\begin{aligned} & 1024 \cos^{10} \alpha - 1024 \cos^8 \alpha - 256 \cos^7 \alpha + 192 \cos^6 \alpha + 96 \cos^5 \alpha - \\ & - 1024 \cos^8 \alpha + 1024 \cos^6 \alpha + 256 \cos^5 \alpha - 192 \cos^4 \alpha - 96 \cos^3 \alpha - \\ & - 256 \cos^7 \alpha + 256 \cos^5 \alpha + 64 \cos^4 \alpha - 48 \cos^3 \alpha - 24 \cos^2 \alpha + 192 \cos^6 \alpha - \\ & - 192 \cos^4 \alpha - 48 \cos^3 \alpha + 36 \cos^2 \alpha + 18 \cos \alpha + 96 \cos^5 \alpha - 96 \cos^3 \alpha - \\ & - 24 \cos^2 \alpha + 18 \cos \alpha + 9. \end{aligned}$$

Зведемо подібні в обох частинах рівності й отримаємо

$$\begin{aligned} & 1024 \cos^{10} \alpha - 2048 \cos^8 \alpha - 512 \cos^7 \alpha + 1408 \cos^6 \alpha + 704 \cos^5 \alpha - \\ & - 320 \cos^4 \alpha - 256 \cos^3 \alpha - 12 \cos^2 \alpha + 12 \cos \alpha + 1 = 0. \end{aligned}$$

Нехай $x = 2 \cos \alpha$. Остаточнo,

$$x^{10} - 8x^8 - 4x^7 + 22x^6 + 22x^5 - 20x^4 - 32x^3 - 3x^2 + 6x + 1 = 0.$$

Многочлен для перевірки $x^2 - x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 x^{10} - 8x^8 - 4x^7 + 22x^6 + 22x^5 - 20x^4 - 32x^3 - 3x^2 + 6x + 1 \quad | \quad x^2 - x - 1 \\
 x^{10} - x^9 - x^8 \quad | \quad A, \\
 \hline
 x^9 - 7x^8 - 4x^7 \\
 x^9 - x^8 - x^7 \\
 \hline
 -6x^8 - 3x^7 + 22x^6 \\
 -6x^8 + 6x^7 + 6x^6 \\
 \hline
 -9x^7 + 16x^6 + 22x^5 \\
 -9x^7 + 9x^6 + 9x^5 \\
 \hline
 7x^6 + 13x^5 - 20x^4 \\
 7x^6 - 7x^5 - 7x^4 \\
 \hline
 20x^5 - 13x^4 - 32x^3 \\
 20x^5 - 20x^4 - 20x^3 \\
 \hline
 7x^4 - 12x^3 - 3x^2 \\
 7x^4 - 7x^3 - 7x^2 \\
 \hline
 -5x^3 + 4x^2 + 6x \\
 -5x^3 + 5x^2 + 5x \\
 \hline
 -x^2 + x + 1 \\
 -x^2 + x + 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

де $A = x^8 + x^7 - 6x^6 - 9x^5 + 7x^4 + 20x^3 + 7x^2 - 5x + 1$.

Рівняння складено правильно. ●

Основний «монстр» — рівняння 13-го ступеню

Задача 1. За допомогою трикутника Т-2, порівнюючи вираз для висоти h_c , скласти рівняння тринадцятого ступеню.

● Проведемо висоту CH_3 (рис. 12.23). Із $\triangle AH_3C$:

$$h_c = b \cos \frac{3}{2} \alpha. \quad (1)$$

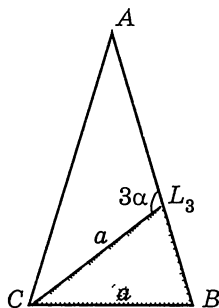


Рис. 12.22

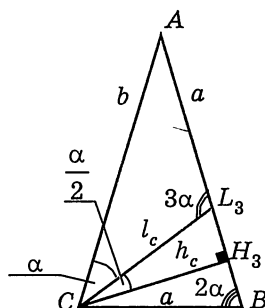


Рис. 12.23

Із ΔCL_3H_3 :

$$h_c = l_c \sin 3\alpha. \quad (2)$$

Із ACL_3 : $\frac{l_c}{\sin 4\alpha} = \frac{a}{\sin \alpha},$

або

$$l_c = \frac{a \sin 4\alpha}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

Підставимо (3) в (2):

$$h_c = \frac{a \sin 4\alpha \cdot \sin 3\alpha}{\sin \alpha}. \quad (4)$$

Порівняємо (1) і (4), отримаємо (враховуючи, що $b = \frac{a}{2 \cos 2\alpha}$):

$$\frac{a \cos \frac{3\alpha}{2}}{2 \cos 2\alpha} = \frac{a \sin 4\alpha}{\sin \alpha} \sin 3\alpha,$$

або

$$\sin \alpha = 4 \sin 4\alpha \sin \frac{3\alpha}{2} \cos 2\alpha. \quad (*)$$

Заміна: $\frac{3\alpha}{2} = 6\beta$. Тоді вираз (*) буде таким:

$$\sin 4\beta = 4 \sin 16\beta \sin 6\beta \cos 8\beta.$$

Перетворимо його так:

$$\sin 4\beta = 8 \sin 8\beta \cos 8\beta \sin 6\beta \cos 8\beta,$$

або

$$1 = 16 \cos 4\beta \sin 6\beta \cos^2 8\beta,$$

або

$$1 = 16(1 - 2\sin^2 2\beta)(3\sin 2\beta - 4\sin^3 2\beta) \cdot (1 - 8\sin^2 2\beta(1 - \sin^2 2\beta))^2.$$

Заміна $\sin 2\beta = y$.

$$16(1 - 2y^2)(3y - 4y^3)(1 - 8y^2(1 - y^2))^2 = 1;$$

$$16(3y - 4y^3 - 6y^3 + 8y^5)(1 - 8y^2 + 8y^4)^2 = 1;$$

$$16(8y^5 - 10y^3 + 3y)(1 - 8y^2 + 8y^4)^2 = 1;$$

$$y \cdot 16(8y^4 - 10y^2 + 3)(1 + 64y^4 + 64y^8 - 16y^2 + 16y^4 - 128y^6) = 1;$$

$$16y(8y^4 - 10y^2 + 3)(64y^8 - 128y^6 + 80y^4 - 16y^2 + 1) = 1;$$

$$16y(512y^{12} - 1024y^{10} + 640y^8 - 128y^6 + 8y^4 - 640y^{10} + 1280y^8 - 800y^6 + 160y^4 - 10y^2 + 192y^8 - 384y^6 + 240y^4 - 48y^2 + 3) = 1;$$

$$16y(512y^{12} - 1664y^{10} + 2112y^8 - 1312y^6 + 408y^4 - 58y^2 + 3) = 1;$$

$$8192y^{13} - 26624y^{11} + 33792y^9 - 20992y^7 + 6528y^5 - 928y^3 + 48y - 1 = 0.$$

$$2y = x (2^{13} = 8192).$$

$$x^{13} - 13x^{11} + 66x^9 - 164x^7 + 204x^5 - 116x^3 + 24x - 1 = 0.$$

Многочлен для перевірки: $\alpha = 36^\circ$, звідси

$$2\beta = \frac{\alpha}{2} = 18^\circ,$$

звідси $y = \sin 18^\circ$, звідси

$$x = 2\sin 18^\circ,$$

відповідно $x^2 + x - 1$ — многочлен для перевірки.

$$x^{13} - 13x^{11} + 66x^9 - 164x^7 + 204x^5 - 116x^3 + 24x - 1 = (x^2 + x - 1) \cdot (x^{11} - x^{10} - 11x^9 + 10x^8 + 45x^7 - 35x^6 - 84x^5 + 49x^4 + 71x^3 - 22x^2 - 23x + 1).$$

$x^{13} - 13x^{11} + 66x^9 - 164x^7 + 204x^5 - 116x^3 + 24x - 1$	$x^2 + x - 1$
$x^{13} + x^{12} - x^{11}$	A
$-x^{12} - 12x^{11}$	
$-x^{12} - x^{11} + x^{10}$	
$-x^{11} - x^{10} + 66x^9$	
$-11x^{11} - 11x^{10} + 11x^9$	
$10x^{10} + 55x^9$	
$10x^{10} + 10x^9 - 10x^8$	
$45x^9 + 10x^8 - 164x^7$	
$45x^9 + 45x^8 - 45x^7$	
$-35x^8 - 11x^7$	
$-35x^8 - 35x^7 + 35x^6$	
$-84x^7 - 35x^6 + 204x^5$	
$-84x^7 - 84x^6 + 84x^5$	
$49x^6 + 120x^5$	
$49x^6 + 49x^5 - 49x^4$	
$71x^5 + 49x^4 - 116x^3$	
$71x^5 + 71x^4 - 71x^3$	
$-22x^4 - 45x^3$	
$-22x^4 - 22x^3 + 22x^2$	
$-23x^3 - 22x^2 + 24x$	
$-23x^3 - 22x^2 + 23x$	
$x^2 + x - 1$	
$x^2 + x - 1$	
	0

де:

$$A = x^{11} - x^{10} - 11x^9 + 10x^8 + 45x^7 - 35x^6 - 84x^5 + 49x^4 + 71x^3 - 22x^2 - 23x + 1.$$

Рівняння складено правильно. ●

ОМОЛОДЖУВАННЯ ТЕОРЕМИ НЬЮТОНА

Теорема Ньютона не була особливо популярною. Про те, що центр кола, вписаного в чотирикутник, розташований на відрізку, який з'єднує середини діагоналей, згадують, як правило, тоді, коли хочуть проілюструвати застосування метода допоміжного елемента (в даному випадку площі). Та все ж було б несправедливо не згадати про обернену задачу (із серії «Несподіванки обернених задач»), яка добре відома любителям геометрії і яку важко розв'язати без застосування теореми Ньютона:

Якщо в описаному чотирикутнику одна із діагоналей ділить другу навпіл, то цей чотирикутник — дельтоїд.

● Доведення. Нехай діагональ AC ділить навпіл діагональ BD описаного чотирикутника $ABCD$ (рис. 13.1). Оскільки за теоремою Ньютона центр O вписаного кола належить діагоналі AC , то $\angle DAC = \angle BAC$, а це значить, що діагональ AC — бісектриса кута BAD , і чотирикутник, який ми розглядаємо — дельтоїд. ●

Цікавість до теореми Ньютона може зрости, якщо чотирикутник «вироджується у трикутник». Її зручно сформулювати (і довести) у вигляді таких теорем.

Теорема 1. Коло, вписане в трикутник ABC , дотикається до сторони BC в точці K_1 . Довести, що пряма, яка з'єднує середину E сторони BC з центром вписаного кола, ділить відрізок AK_1 навпіл.

Теорема 2 (ідентична теоремі 1). У трикутнику ABC через середину M_1 сторони BC і центр I вписаного кола проведено пряму, яка перетинає висоту AH_1 в точці E . Довести, що відрізок AE дорівнює радіусу r вписаного кола.

Доведення виходить безпосередньо з теореми 1.

Зробимо важливе зауваження:

Досі не зазначалося, що теорема Ньютона поширюється:

1) на випадок, якщо замість середини M_1 буде середина дуги BC кола, описаного навколо трикутника ABC (точка W);

2) якщо вписане в трикутник ABC коло з центром I і точкою K_1 (точка дотику до його сторони BC) замінити зовнішнім колом з центром I_a і точкою T_1 (точка дотику до сторони BC).

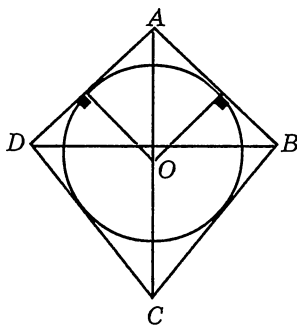


Рис. 13.1

Теорема 3 (для точки W). Навколо трикутника ABC описано коло, яке бісектриса кута BAC перетинає в точці W_1 . Довести, що пряма W_1K_1 перетинає висоту AH_1 в точці D так, що $DH_1 = r$.

● Доведення. Нехай пряма M_1I перетинає висоту AH_1 в точці E (рис. 13.2). Трикутник $K_1W_1M_1$ подібний до трикутника K_1DH_1 , тому

$$\frac{DH_1}{M_1W_1} = \frac{K_1H_1}{M_1K_1}. \quad (1)$$

Трикутник W_1M_1I подібний до трикутника AEI , а трикутник M_1IK_1 подібний до трикутника M_1EH_1 :

$$\frac{AE}{M_1W_1} = \frac{IE}{M_1I} = \frac{K_1H_1}{M_1K_1}, \text{ тобто } \frac{AE}{M_1W_1} = \frac{K_1H_1}{M_1K_1}. \quad (2)$$

Порівнюючи вирази (1) і (2), отримаємо $AE = DH_1$. Але за теоремою 2: $AE = r$, значить, $DH_1 = r$. ●

Переходимо до завнівписаного кола.

Теорема 4 (теорема Ньютона для кола). Пряма M_1I висікає на відрізку I_aT_1 відрізок QT_1 , який дорівнює r , а відрізок QI ділиться точкою M_1 навпіл.

● Доведення (рис. 13.3). Оскільки $IW_1 = W_1I_a$ (див. «Трикутник в задачах»), то M_1W_1 — середня лінія в трикутнику II_aQ , а значить, $IM_1 = M_1Q$.

Але $\Delta T_1QM_1 = \Delta K_1IM_1$, відповідно, $T_1Q = IK_1 = r$. ●

Теорема 5 (теорема Ньютона для завнівписаного кола). Пряма I_aM_1 перетинає пряму AH_1 в точці U . Доведіть, що:

1) $UA = r_a$; 2) $T_1D = DA$ (точка D — перетин прямої T_1A і UI_a).

● Доведення (рис. 13.4).

1) Трикутник $I_aW_1M_1$ подібний до трикутника I_aUA :

$$\frac{M_1W_1}{UA} = \frac{I_aW_1}{I_aA}. \quad (1)$$

2) Трикутник CM_1W_1 подібний до трикутника AI_aT_2 (T_2 — точка дотику зовнівписаного кола і прямої AC):

$$\frac{M_1W_1}{T_2I_a} = \frac{CW_1}{AI_a}. \quad (2)$$

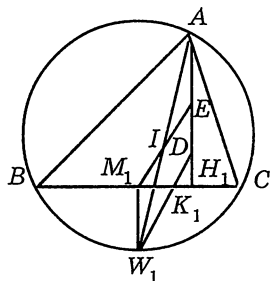


Рис. 13.2

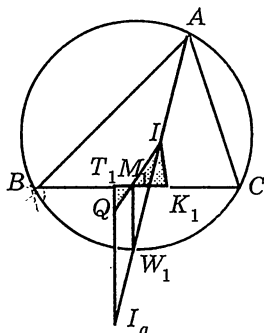


Рис. 13.3

Порівняємо вирази (1) і (2) і, враховуючи, що

$$I_a W_1 = W_1 I = C W_1,$$

отримаємо $UA = T_2 I_a = r_a$. ●

Теорема 6 (точка W_1 і записане коло). Пряма $T_1 W_1$ перетинає пряму AH_1 в точці U_1 так, що $H_1 U_1 = r_a$ (аналогія з теоремою 3).

● Доведення (рис. 13.5).

1) Трикутник $T_1 W_1 M_1$ подібний до трикутника $T_1 U_1 H_1$:

$$\frac{U_1 H_1}{M_1 W_1} = \frac{T_1 H_1}{M_1 T_1}. \quad (1^0)$$

2) Трикутник $W_1 M_1 I_a$ подібний до трикутника $U A I_a$. Маємо:

$$\frac{AU}{M_1 W_1} = \frac{I_a U}{I_a M_1} = \frac{I_a M_1 + M_1 U}{I_a M_1} = 1 + \frac{M_1 U}{I_a M_1}. \quad (1')$$

Із подібності трикутників $I_a T_1 M_1$ і $U M_1 H_1$:

$$\frac{M_1 U}{I_a M_1} = \frac{M_1 H_1}{T_1 M_1}. \quad (2')$$

Підставимо (2') в (1'):

$$\frac{AU}{M_1 W_1} = 1 + \frac{M_1 H_1}{T_1 M_1} = \frac{T_1 H_1}{M_1 T_1}. \quad (3')$$

Порівнюючи (1') і (3'), отримаємо:

$$U_1 H_1 = UA = r_a$$

(за попередньою теоремою). ●

Переходимо до задачі.

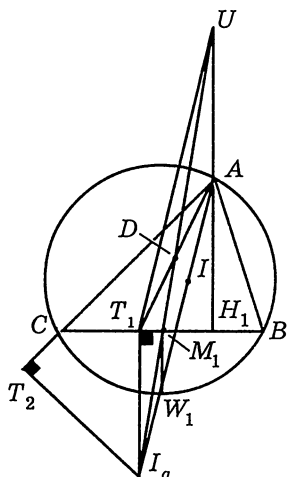


Рис. 13.4

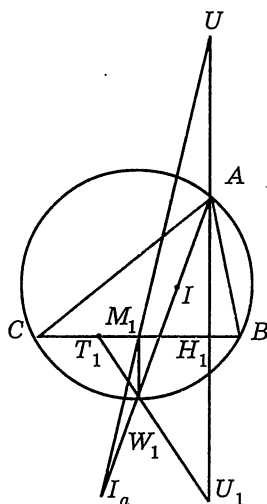


Рис. 13.5

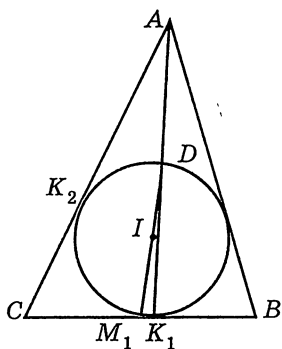


Рис. 13.6

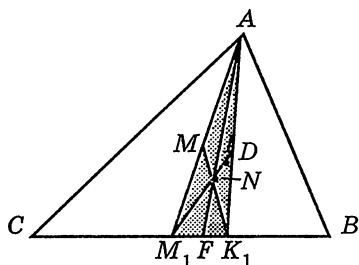


Рис. 13.7

Задача 1. У трикутнику ABC пряма AK_1 перетинає вписане коло в точці D так, що інцентр I належить відрізку MD . Знайти периметр трикутника, якщо $BC = a$, $AD = t$.

● За теоремою Ньютона $AD = DK_1 = t$ (рис. 13.6). Оскільки $AK_1 \cdot AD = AK_2^2$ (K_2 — точка дотику кола і сторони AC), то

$$t \cdot 2t = (p - a)^2, \text{ або } p - a = \sqrt{2t}; \quad p = \sqrt{2t} + a. \quad \bullet$$

Відповідь: $\sqrt{2t} + a$.

Задача 2. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) катети дорівнюють a і b . Пряма M_2I перетинає катет BC в точці D . Знайти BD .

● Оскільки в прямокутному трикутнику катети є висотами, то за теоремою Ньютона $BD = r$. ●

Задача 3 (трикутник постійних відношень). Трикутник ΔM_1K_1 (рис. 13.7).

● Постійні: перетин прямих M_1I і K_1M дають точку N . Тоді:

$$1) M_1N = ND (1 : 1);$$

$$2) MN : NK_1 = 1 : 3;$$

$$3) M_1F : FK_1 = 2 : 1;$$

$$4) AN : NF = 3 : 1.$$

Оскільки за теоремою Ньютона $AD = DK_1$, то задача зводиться до знаходження відношень відрізків чевіан. ●

Задача 4. Побудувати трикутник ABC за точками M_1, H_1, I .

Задача 5. Побудувати трикутник за $h_a; b - c; r$.

Задача 6. Побудувати трикутник за $M_1, I_a; H_1$.

Вказівка: застосувати теорему Ньютона для зовнішнього кола.

Задача 1. Довести, що якщо в $\triangle ABC$ $a + b + 2R = \frac{p \cdot c}{R}$, то

$$\angle C = 90^\circ. \text{ Примітка: } 1 = \frac{c}{2R}.$$

● Доведення. Перший спосіб. Маємо:

$$a + b + \frac{c}{\sin C} = 2p \sin C,$$

або

$$(a + b)\sin C + c = (a + b + c)\sin^2 C,$$

або

$$(a + b)\sin C + c = (a + b)\sin^2 C + c\sin^2 C, \quad (1)$$

оскільки

$$(a + b)\sin C \geq (a + b)\sin^2 C, \text{ а } c \geq c\sin^2 C,$$

то після додавання цих нерівностей отримаємо:

$$(a + b)\sin C + c \geq (a + b)\sin^2 C + c\sin^2 C. \quad (2)$$

Порівнюючи співвідношення (1) і (2), зробимо висновок, що рівність можлива лише при $\sin C = 1$. Значить, $\angle C = 90^\circ$.

Другий спосіб. Рівність, яку ми доводимо, запишемо так:

$$\begin{aligned} 0 &= (a + b)\sin C + c - (a + b)\sin^2 C - c\sin^2 C = \\ &= (a + b)(\sin C - \sin^2 C) + c(1 - \sin^2 C) = \\ &= (a + b)\sin C(1 - \sin C) + c(1 - \sin C)(1 + \sin C) = \\ &= (1 - \sin C)((a + b)\sin C + c(1 + \sin C)). \end{aligned}$$

Оскільки у других дужках усі доданки невід'ємні, то

$$1 - \sin C = 0; \sin C = 1; \angle C = 90^\circ. \bullet$$

Задача 2. Довести, що якщо $a + b + 2R = \frac{2pc \cdot h_c}{ab}$ (p —

півпериметр), то $\angle C = 90^\circ$. Примітка: $1 = \frac{ch_c}{ab}$.

● Доведення. Оскільки $\frac{h_c}{a} = \sin B$, то маємо:

$$a + b + \frac{c}{\sin C} = \frac{c(a + b + c)\sin B}{b}.$$

Враховуючи, що $\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}$, отримаємо: $a + b + \frac{c}{\sin C} = (a + b + c)\sin C$,

або

$$(a + b)\sin C + c = (a + b)\sin^2 C + c\sin^2 C,$$

або

$$(a + b)\sin C(1 - \sin C) = c\sin^2 C - c,$$

звідки $\sin C = 1; \angle C = 90^\circ. \bullet$

Задача 3. Довести, що якщо $a + b + 2R = \frac{2p(p-c)}{r}$, то $\angle C = 90^\circ$.

Примітка: $1 = \frac{p-c}{r}$.

● **Доведення.** Маємо

$$a + b + 2R = \frac{2p}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}, \text{ або } a + b + \frac{c \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \right)}{2 \operatorname{tg} \frac{C}{2}} = \frac{2p}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}},$$

$$\text{або } 2(a+b) \operatorname{tg} \frac{C}{2} + c + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \cdot c = 2(a+b) + 2c,$$

або

$$2(a+b) \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} - 1 \right) + c \left(\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} - 1 \right) = 0,$$

звідки

$$\left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} - 1 \right) \left(2(a+b) + c \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} + 1 \right) \right) = 0,$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} - 1 = 0; \angle C = 90^\circ. \bullet$$

Задача 4. Довести, що якщо $a + b + 2R = \frac{4pm_c}{c}$, то $\angle C = 90^\circ$.
Довести самостійно.

Задача 5. Якщо $a + R = p$, $\angle A = \angle B$, то $\angle C = 90^\circ$. Довести.

● **Доведення.** Рівність $a + R = p$ можна записати так:
 $2R = b + c - a$. Оскільки $\angle A = \angle B$, то $a = b$, звідки $2R = c$. Тоді
 $\angle C = 90^\circ$. ●

Задача 6 (!!). Якщо в трикутнику $2R + r = p$, то він прямокутний. Довести.

● **Доведення.** *Перший спосіб.* Маємо: $\frac{a}{\sin A} + r = p$.

Враховуючи, що $r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, отримаємо: $\frac{a}{\sin A} + (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = p$,

звідки

$$\frac{a \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \right)}{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}} + (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} - p = 0,$$

або

$$(2p-a)\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}-2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot p+a=0;$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)_{1,2}=\frac{2p\pm\sqrt{4p^2-4a(2p-a)}}{2(2p-a)}=\frac{p\pm(p-a)}{2p-a};$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)_1=\frac{p+p-a}{2p-a}=1, \quad \angle A=90^\circ.$$

Далі

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)_2=\frac{p-p+a}{2p-a}=\frac{a}{2p-a}=\frac{a}{b+c}.$$

Доведемо, що в цьому випадку $\angle B=90^\circ$. Маємо:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2R\sin A}{2R(\sin B+\sin C)}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}};$$

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}}; \quad \cos\frac{A}{2}=\cos\frac{B-C}{2};$$

$$A=B-C, \text{ або } 180^\circ-B-C=B-C, \angle B=90^\circ.$$

Другий спосіб. Застосуємо формулу

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Маємо:

$$2R+4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=R(\sin A+\sin B+\sin C).$$

Враховуючи, що

$$2+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin A+\sin B+\sin C,$$

маємо

$$\cos A+\cos B+\cos C+1=\sin A+\sin B+\sin C.$$

Враховуючи, що $\cos A-\sin A=\sqrt{2}\sin(45^\circ-A)$, маємо:

$$2\sin\left(45^\circ-\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-A}{2}\right)+2\sin\left(45^\circ-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{C}{2}=0,$$

$$\sin\left(45^\circ-\frac{C}{2}\right)\left(2\sin\frac{A-B+C}{4}\cdot\sin\frac{A-B-C}{4}\right)=0.$$

$$1) \frac{\angle C}{2} = 45^\circ, C = 90^\circ;$$

$$2) A - B + C = 0, A = B - C, 180^\circ - (B + C) = B - C, B = 90^\circ;$$

$$3) A - B - C = 0, A = B + C, A = 90^\circ. \bullet$$

Задача 7(!!) (автор — Д. Басов). Довести, що якщо

$$a + b + 2R = 2p \frac{AH_3 \cdot BH_3}{h_c^2}, \text{ то } \angle C = 90^\circ. \text{ Примітка: } 1 = \frac{AH_3 \cdot BH_3}{h_c^2}.$$

• **Доведення.** Запишемо дану в задачі умову так:

$$2R \sin A + 2R \sin B + 2R = 2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C) \cdot \frac{h_c \operatorname{ctg} Ah_c \operatorname{ctg} B}{h_c^2}.$$

Після скорочення маємо

$$\sin A + \sin B + 1 = (\sin A + \sin B + \sin C) \frac{\cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}. \quad (1)$$

Скористаємося співвідношенням для трикутника:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{4}. \quad (2)$$

$$\text{Підставимо (2) в (1): } \sin A + \sin B + 1 = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B},$$

$$\text{або } \sin A + \sin B + 1 = \frac{\cos \frac{A}{2} \cos A \cos B}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}, \text{ або}$$

$$\left(2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) = \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{2} (\cos(A-B) + \cos(A+B)), \quad (*)$$

або

$$\left(2 \cos \frac{C}{2} \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) + 1 \right) \left(\cos \left(\frac{A-B}{2} \right) - \sin \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2} (\cos(A-B) - \cos C).$$

Маємо

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{C}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2} + \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) - 2 \cos \frac{C}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2} = \\ = \cos \frac{C}{2} \cos(A-B) - \cos \frac{C}{2} \cos C, \end{aligned}$$

$$\text{або } \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} + \left(\frac{A-B}{2} \right) (1 - \sin C) = -\cos \frac{C}{2} \cos C,$$

$$\begin{aligned} \text{або } & \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) \left(1 + \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) \right) = \\ & = \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) \left(-\cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Тоді $\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} = 0$ (значить, $\angle C = 90^\circ$) або

$$1 + \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) = -\cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \right). \quad (3)$$

Можна довести, що рівність (3) не виконується.

Глава 15

ЕСТЕТИКА СМАКУ І СМАК ДО ЕСТЕТИКИ

Спочатку мова піде про три задачі на побудову трикутника. Позбавлені «пишною» умови, вони губляться, залишаються непомітними, хоча не лише геометрична їхня цінність, а й естетична, величезна. Тут є все, чого міг би зажадати гурман від геометрії: світська історія, пов'язана з кожною з них, достатньо складне розв'язання, несподіваність додаткових побудов і тонкий зв'язок з іншими раніше розв'язаними задачами. І, звісно ж, скромність умови! Таке собі ганчір'я, за яким прихована справжнісінька королева.

Почнемо із задачі:

Побудувати трикутник ABC за кутом A , медіаною m_a , бісектрисою l_a .

Її поява на математичній Олімпіаді в Києві в вісімдесятих роках минулого століття наробила багато галасу — задачі на побудову «олімпіадники», та й просто учні математичних класів не розв'язували. Судячи з усього, задача була запропонована для виявлення формальних навичок — очікували розв'язання за допомогою алгебри й тригонометрії. Однак умова насторожувала: варто прийняти кут A за 90° і задача перетворюється... у задачу Паппа:

$$\angle C = 90^\circ, l_c \text{ і } m_c = \frac{1}{2}c.$$

Дивно, але саме ця задача і стала ключем до розв'язання! Отож, переходимо до розв'язання.

• У трикутнику ABC подвоїмо сторону AC , отримаємо точку D (рис. 15.1). Зрозуміло, що $BD = 2m_a$. Проведемо бісектрису

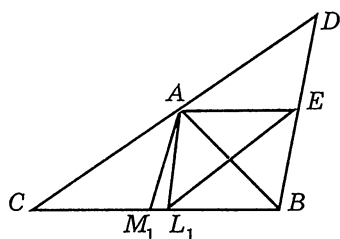


Рис. 15.1

AE кута BAD . Нехай L_1 — точка перетину бісектриси кута BAC з прямою BC .

Доведемо, що $\angle AL_1E = \frac{1}{2} A$. Для

цього покажемо, що $L_1E \parallel DC$.

Дійсно,

$$CL_1 : L_1B = AC : AB,$$

$$AD : AB = DE : EB. \quad (1)$$

Але $AD = AC$, тому вираз (1) запишемо так:

$$AC : AB = DE : EB = CL_1 : L_1B.$$

Значить, $L_1E \parallel DC$ і $\angle CAL_1 = \angle AL_1E = \frac{1}{2} A$.

Трикутник AL_1E — прямокутний (бісектриса AL_1 перпендикулярна до бісектриси AE). Цей трикутник можна побудувати за гострим кутом і катетом. Отримаємо відрізок AE ! ●

Розглянемо ще один трикутник DAB . Його можна побудувати за стороною $BD = 2m_a$, протилежним кутом $BAD = 180^\circ - A$ і бісектрисою AE цього кута (задача Паппа).

Після побудови трикутника маємо елементи для побудови трикутника ABC . Перейдемо до другої задачі. Яка «безневинна», на перший погляд, умова!

Побудувати трикутник за a, h_a, l_a !

Дотримуючись принципа — шукай базисний трикутник, ми легко його знайдемо — це трикутник AH_1L_1 (рис. 15.2).

● «Спец» із розв'язування задач одразу оцінить, що кут $\varphi = \frac{|B - C|}{2}$

($\angle L_1AH_1$), що приводить до осової симетрії (рис. 15.3). Проведемо через точку M_1 вісь симетрії t й побудуємо точку A_1 , симетричну до точки A відносно осі t .

Розглянемо трикутник AA_1C : його висота, проведена до сторони AA_1 , дорівнює заданій висоті h_a . Оскільки $AA_1 \parallel BC$, то вісь t перетинатиме відрізок AA_1 в точці D так, що $AD = DA_1$, тобто

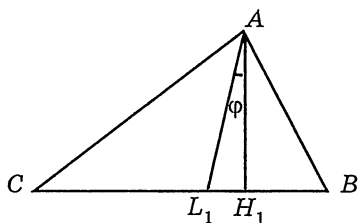


Рис. 15.2

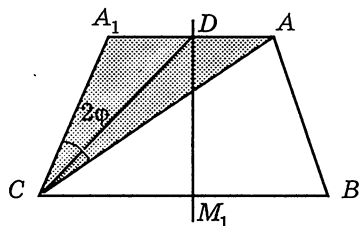


Рис. 15.3

відрізок CD — медіана трикутника AA_1C , а

$$\angle A_1CA = \angle A_1CB - \angle ACB,$$

тобто він дорівнює різниці $|B - C|$ або 2φ . Залишається побудувати трикутник A_1AC за висотою, медіаною, проведеною із тієї ж вершини, що і висота, і кутом з цієї вершини (аналог задачі $A; h_a; m_a$). Для цього (рис. 15.4) подвоїмо медіану AM_1 .

У паралелограмі $ABDC$ ($AD = 2m_a$) $\angle ACD = 180^\circ - A$. Тому на відрізку AD побудуємо сегмент, який містить кут $180^\circ - A$, потім трикутник AH_1M_1 і пряму M_1H_1 «пронижемо» сегмент в точці C (рис. 15.4). ●

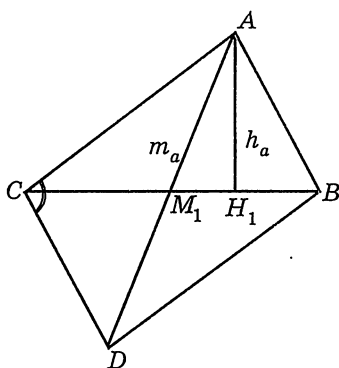


Рис. 15.4

Задача, яку ми розглянули, з'явилася, мабуть, понад дві тисячі років тому, але привернула увагу любителів задач на побудову після виходу у світ книги Александрова «Збірник геометричних задач на побудову», «завоювавши призначальність широких математических кругов всего мира» (із анотації). Задача в подальшому стала дуже поширеною, щоправда, в дещо іншому вигляді: побудувати трикутник за $a; h_a; B - C$. Розв'яжемо її другим способом.

● Побудуємо точку F , симетричну точці B відносно прямої MN , проведеної через вершину A , паралельно до BC (рис. 15.5). Побудуємо базисний трикутник AH_1L_1 і позначимо $\angle H_1AL_1 = \varphi$. Виразуємо кут

$$\begin{aligned} \angle FAC &= 360^\circ - 2B - A = 2(A + B + C) - 2B - A = \\ &= 180^\circ - (B - C) = 180^\circ - 2\varphi \quad (\varphi = \angle H_1AL_1). \end{aligned}$$

Трикутник CFB за катетом $BF = 2h_a$ і катетом $BC = a$ можна побудувати. На гіпотенузі FC побудуємо сегмент, який містить кут $180^\circ - 2\varphi$ і «пронижемо» його прямою MN , проведеною паралельно на відстані h_a від прямої BC . ●

Третя задача. Умова її над міру віроломна:

Побудувати трапецію за двома кутами і двома діагоналями.

А як вона нагадує шкільні задачки: побудувати трапецію за двома основами і двома діагоналями, побудувати трапецію за чотирма сторонами... Спробуйте спочатку розв'язати її самостійно. Тільки не питаєте: «За якими двома кутами?».

● Проаналізуємо задачу (рис. 15.6). Якщо в трапеції $ABCD$ здійснити паралельний перенос в точку C сторони AB і діагоналі BD , то матимемо два допоміжних трикутники CFD і ACE .

Розглянемо трикутник CFD . Медіана CM цього трикутника буде медіаною трикутника ACE , оскільки $AF = BC = DE$.

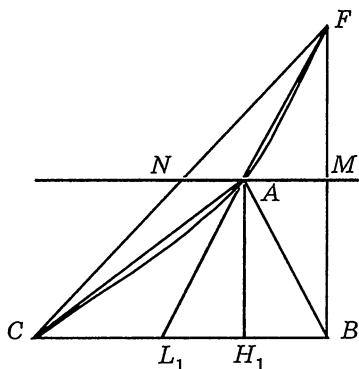


Рис. 15.5

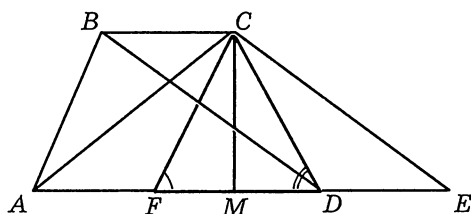


Рис. 15.6

Трикутник CFD не базисний, але його можна побудувати з точністю до подібності, а значить, знайти кут $CMD = \varphi$.

Тепер можна побудувати трикутник ACE за сторонами AC , CE і кутом φ між медіаною CM і стороною AE . Далі очевидно. ●

Років п'ятнадцять тому на уроці одна з найкращих учениць її розв'язала (у неї пішло на це хвилин 30–40).

І, зрештою, задача... про паралелограм. Таких задач серед скарбів геометрії не так вже й багато. І знову — віроломна у своїй простоті умова:

Побудувати паралелограм $ABCD$ за серединами висот BB_1 , BB_2 і серединою M сторони AD .

● Нехай K і L — середини висот BB_1 і BB_2 (рис. 15.7). Побудуємо відрізок ML . Оскільки $AM = MD$ і $BL = LB_2$, то $ML \parallel CD$ і $ML \perp BB_2$.

Отже, проведемо до відрізка ML перпендикуляр в точці L і отримаємо пряму l , якій належить вершина B . Проведемо пряму KM і відкладемо $KP = KM$. Оскільки B_1PBM — паралелограм ($BK = KB_1$ і $KM = PK$), то $\angle PBK = 90^\circ$, а це означає, що вершина B належить колу γ , побудованому на відрізку PK як на діаметрі. Перетин цього кола з прямою l дає шукану точку B . Далі побудова очевидна. ●

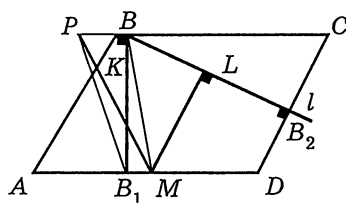


Рис. 15.7

НЕПОСТУПЛИВІСТЬ І АРИСТОКРАТИЗМ БІСЕКТРИСИ КУТА ТРИКУТНИКА

Тільки не подумайте, шановний читачу, що автор полюбляє претензійні заголовки. З дивовижною точністю цей заголовок розкриває суто «людські» риси елементів трикутника, зокрема, властивості бісектриси внутрішнього (та, власне, й зовнішнього) кута трикутника. Ці елементи, як і люди, живуть своїм життям, своїми симпатіями і розбіжностями. Вони дружать, а може, люблять один одного, сердяться і... страждають. Тяжка доля випала саме бісектрисі внутрішнього кута трикутника. У рейтингу елементів (див.: Побудова трикутника. — К.: Либідь, 1994. — С. 3) вона не відстає від висоти й медіани. Але варто в умові задачі на побудову замінити висоту, наприклад h_a , або медіану, наприклад m_a , на бісектрису, наприклад l_a , то із задачею відбувається «прикра» метаморфоза: вона або не має розв'язку $a; b; l_a$ чи a, A, l_b — або ж розв'язати її значно важче, аніж у випадку з висотою і медіаною в умові. Простежте за умовою:

$a, b, \begin{cases} h_c \\ m_c \\ l_c \end{cases}$. Маємо на увазі: побудувати трикутник за a, b, h_c .

Або $(a; b; m_c); (a; b; l_c)$.

А якщо в умові задачі на побудову задано дві бісектриси, то вона зовсім не матиме розв'язку: $(a; l_b; l_c); (A; l_a; l_b); (A; l_b; l_c)$ ¹.

В задачах на обчислення і доведення за трьома сторонами висоту трикутника і медіану знайти можна досить просто — що не скажеш про бісектрису. А знайти площу трикутника? Згадайте задачу Штейнера–Лемуса? Скільки століть ніхто не звертав уваги на непередбачувану «поведінку» двох бісектрис?

І все-таки! Не будемо сердитися! Згадаймо, які задачі-перлини нам подарувала саме бісектриса. Жоден з елементів трикутника не любить коло (необхідність якого не зовсім очевидна — формула $l_a^2 = bc - b_1c_1$) так, як бісектриса! Перетин бісектриси з описаним колом дає нам дивовижну точку W , теорему

¹Замініть бісектриси висотами або медіанами — і розв'язання стане можливим.

«трилисника», формулу $AI \cdot IW = 2Rr$, формулу Ейлера, врешті-решт! Основи L_1, L_2, L_3 дали бісектральний трикутник (див.: Трикутник і тетраедр в задачах. — К.: Рад. шк., 1992). Саме три бісектриси відрізняються від трьох висот, трьох медіан неможливістю побудови за цими елементами трикутника. Зупинимося на цьому питанні детальніше.

За трьома бісектрисами трикутник побудувати не можна.

Чому це важливо або неважливо? Про побудову циркулем і лінійкою говорили ще з часів давніх задач: трисекції кута, подвоєння куба, квадратури круга. Вивчення цього питання дало одне з перших доведень неможливості в математиці. Геометрична задача врешті-решт була зведена до алгебраїчної: поняття про можливість побудови циркулем і лінійкою прирівнюється до питання про розв'язання рівнянь в квадратних радикалах (

).

За допомогою алгебри геометрична задача на побудову зводиться до рівняння.

Якщо корені отриманого рівняння виражені радикалами ступеню третього, п'ятого і т. д., то задача не може бути розв'язана циркулем і лінійкою.

Так, наприклад, дослідник цього питання московський математик В. Б. Фурсенко для дослідження задачі на можливість побудови за $A; m_b; r$ в тридцятих роках минулого століття дослідив рівняння

$$t^3 - 838t^2 + 379100t - 3611159296 = 0$$

і довів, що воно не має раціональних коренів. Три бісектриси дозволяють на досить простому прикладі безпосередньо вивчити це питання. Стверджуємо:

Задача побудови трикутника за трьома бісектрисами внутрішніх кутів не розв'язується з допомогою циркуля і лінійки.

● Задачу будемо розв'язувати для часткових значень довжин бісектрис. Зручно вважати, що дві з них рівні й будувати рівнобедрений трикутник (от і знадобилася задача Штейнера-Лемуса). У цьому випадку задача зводиться до дослідження кубічного многочлена.

Якщо не робити такого припущення, то потрібно було б розглянути рівняння шістнадцятого ступеню.

Отже, побудуємо рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$), в якого $l_b = l_c = l$ (рис. 16.1). Позначимо $\angle ACL_3 = x$, тоді $\angle AL_3C = 3x$; $\angle CAL_3 = 180^\circ - 4x$. Із $\triangle ACH_1$

$$AC = \frac{h_a}{\sin 2x}. \quad (1)$$

За теоремою синусів ($\triangle ACL_3$)

$$\frac{AC}{\sin 3x} = \frac{l}{\sin 4x}, \quad AC = \frac{l \sin 3x}{\sin 4x}. \quad (2)$$

Порівнюючи (1) і (2), отримаємо:

$$\frac{h_a}{\sin 2x} = \frac{l \sin 3x}{\sin 4x}, \quad \text{звідки } h_a = \frac{l \sin 3x}{2 \cos 2x}.$$

Нехай $l = 4h_a$, знайдемо

$$1 - 2\sin^2 x = 2(3\sin x - 4\sin^3 x),$$

або

$$8\sin^3 x - 2\sin^2 x - 6\sin x + 1 = 0,$$

або

$$(4\sin x = y) \quad y^3 - y^2 - 12y + 8 = 0$$

— рівняння раціональних коренів не має, отже, задача не має розв'язку! Три бісектриси не перестають дивувати!

Теорема. Якщо три бісектриси одного трикутника відповідно дорівнюють трьом бісектрисам другого, то такі трикутники рівні².

● Доведення. Доведення ідентичне доведенню задачі Штейнера–Лемуса (див.: Трикутник і тетраedr в задачах. — К.: Рад. шк., 1992. — С. 24).

Припустимо, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ не рівні. Можливі два варіанти нерівності відповідних сторін:

1) три сторони одного трикутника більші за три сторони другого;

2) без обмеження узагальненості можна вважати, що сторони трикутника ABC (a, b, c) і $A_1B_1C_1$ (a_1, b_1, c_1) перебувають в такій залежності:

$$a < a_1, b \geq b_1, c \geq c_1. \quad (1^0)$$

Розглянемо перший випадок. Нехай сторони трикутника ABC будуть більшими, ніж сторони трикутника $A_1B_1C_1$. Тоді в трикутнику ABC знайдеться кут α , менший відповідно за кут α_1 у трикутнику $A_1B_1C_1$. Нехай кут α утворений сторонами t і f , а кут α_1 — сторонами t_1 і f_1 . Тоді довжини бісектриси цих кутів (l і l_1) будуть виражатися формулами:

$$l = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{t} + \frac{1}{f}} \quad \text{і} \quad l_1 = \frac{2 \cos \frac{\alpha_1}{2}}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{f_1}}.$$

Оскільки $\alpha < \alpha_1, t \geq t_1, f \geq f_1$, то $l > l_1$, і отримали протиріччя.

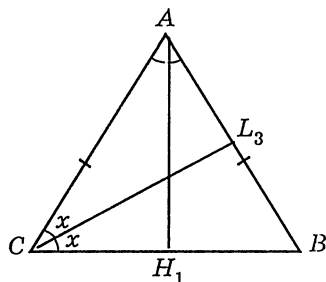


Рис. 16.1

² За статтю А. Жукова, І. Акуліна «Однозначно ли определяется треугольник?» / Квант. — № 1. — 2003.

Значить, сторони одного трикутника не можуть бути одночасно більшими за відповідні сторони другого трикутника.

Розглянемо випадок 2). Скористаємося формулою:

$$l_a^2 = bc \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right) \text{ і } l_{a_1}^2 = b_1 c_1 \left(1 - \frac{a_1^2}{(b_1+c_1)^2} \right).$$

Враховуючи нерівність (1⁰), робимо висновок, що $l_a^2 > l_{a_1}^2$. ●
Знову протиріччя. Теорему доведено!

Глава 17

ТРИ БОГАТИРІ ТРИКУТНИКА

Слова «три богатири» миттєво викликають в пам'яті картину Васнецова. І як би вона за багато десятиліть (а може, за століття) нам не обридла, цей образ міцний і непохитний. Точно так само висота, бісектриса й медіана, проведені з однієї вершини, невідступно супроводжують шкільний, а швидше — поглиблений курс планіметрії. Скільки разів на шкільних, районих, а може, й на міських олімпіадах фігурувала задача:

Побудувати трикутник за h_a, l_a, m_a — блискуче застосування допоміжного кола.

Розглянемо декілька метричних задач з компонентами h_a, l_a, m_a , маловідомих в популярній літературі.

Задача 1. Дано: h_a, l_a, m_a . Знайти R .

● Опишемо навколо трикутника ABC коло й продовжимо бісектрису до перетину з колом в точці W_1 (рис. 17.1): $R = \frac{AW_1}{2 \cos \alpha}$, де α — кут $M_1 W_1 A$. Маємо:

$$AW_1 = l_a + L_1 W_1, \quad L_1 W_1 = \frac{M_1 L_1}{\sin \alpha};$$

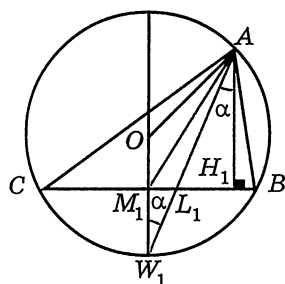


Рис. 17.1

$$M_1 L_1 = M_1 H_1 - L_1 H_1 = \sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{l_a^2 - h_a^2}.$$

Значить,

$$L_1 W_1 = \frac{\left(\sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{l_a^2 - h_a^2} \right) \cdot l_a}{\sqrt{l_a^2 - h_a^2}}.$$

Отже,

$$AW_1 = l_a \left(1 + \frac{\sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{l_a^2 - h_a^2}}{\sqrt{l_a^2 - h_a^2}} \right) = l_a \frac{\sqrt{m_a^2 - h_a^2}}{\sqrt{l_a^2 - h_a^2}},$$

відповідно,

$$R = \frac{l_a^2}{2h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}}. \bullet$$

Задача 2. Дано: h_a, l_a, m_a . Знайти площу гострокутного трикутника ABC .

• Застосуємо результат попередньої задачі. Скористаємося формулою

$$R = \frac{l_a^2}{2h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}}.$$

Оскільки трикутник $M_1W_1L_1$ подібний до трикутника H_1AL_1 , то

$$\frac{M_1W_1}{M_1L_1} = \frac{AH_1}{H_1L_1}.$$

$$\text{Маємо } AH_1 = h_a; H_1L_1 = \sqrt{l_a^2 - h_a^2}; M_1H_1 = \sqrt{m_a^2 - h_a^2};$$

$$M_1L_1 = M_1H_1 + L_1H_1; M_1L_1 = \sqrt{m_a^2 - h_a^2} + \sqrt{l_a^2 - h_a^2}.$$

Оскільки

$$M_1W_1 = \frac{M_1L_1 \cdot AH_1}{H_1L_1},$$

то

$$M_1W_1 = \frac{\left(\sqrt{m_a^2 - h_a^2} + \sqrt{l_a^2 - h_a^2} \right) \cdot h_a}{\sqrt{l_a^2 - h_a^2}} = \left(\sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} + 1 \right) h_a.$$

Далі:

$$OM_1 = R - M_1W_1 =$$

$$= \frac{l_a^2}{2h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} - h_a \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} + h_a = \frac{l_a^2 - 2h_a^2}{2h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} + h_a;$$

$$\frac{a}{2} = \sqrt{R^2 - OM_1^2} = \sqrt{(R - OM_1)(R + OM_1)}.$$

Значить,

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= \sqrt{\left(\frac{l_a^2}{2h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} - \frac{l_a^2}{2h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} + h_a \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} - h_a \right) \times} \\ &\times \sqrt{\frac{l_a^2}{2h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} + \frac{l_a^2}{2h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} - h_a \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} + h_a} = \\ &= \sqrt{h_a \left(\sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} - 1 \right) \left(\frac{l_a^2}{h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} - h_a \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} + h_a \right)}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} S &= h_a \sqrt{h_a \cdot \frac{2R \cdot h_a - l_a^2}{l_a^2} \cdot \left(2R - h_a \frac{2Rh_a - l_a^2}{l_a^2} + h_a \right)} = \\ &= \frac{h_a}{l_a^2} \sqrt{h_a (2R \cdot h_a - l_a^2) (2R \cdot l_a^2 - h_a (2Rh_a - l_a^2 + h_a l_a^2))}, \end{aligned}$$

де $R = \frac{l_a^2}{2h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}}.$ ●

Задача 3. У трикутнику ABC проведено висоту AH_1 , довжина якої h , медіану AM_1 , довжина якої l , бісектрису AN . Точка N — середина відрізка M_1H_1 . Знайдіть відстань від вершини A до точки перетину висот трикутника ABC (рис. 17.2).

● Із рівності трикутників ANH_1 і W_1M_1N виходить, що $AN = NW_1$. Значить, у рівнобедреному трикутнику AOW_1ON — висота, медіана і бісектриса. Із прямокутного трикутника ONW_1 висота M_1N : $M_1N^2 = OM_1 \cdot M_1W_1 = OM_1 \cdot h$.

Але $M_1N^2 = NH_1^2 = \frac{l^2 - h^2}{4}$, значить, $OM_1 = \frac{l^2 - h^2}{4h}$, звідки

$$AH = \frac{l^2 - h^2}{2h}. \quad \bullet$$

Задача 4. У гострокутному трикутнику ABC дано: $AH_1 = h$; $AH = t$ (H — ортоцентр); $M_1L_1 = L_1H_1$. Знайти AL_1 (рис. 17.3).

● Маємо $M_1W_1 = AH_1 = h$. Позначимо $W_1L_1 = x$; $L_1H_1 = y$.

Тоді

$$x^2 = h^2 + y^2. \quad (1)$$

Нехай $BC = a$. За теоремою про добуток відрізків хорд:

$$\left(\frac{a}{2} + y \right) \left(\frac{a}{2} - y \right) = x^2.$$

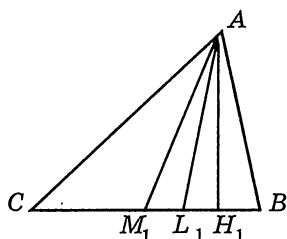


Рис. 17.2

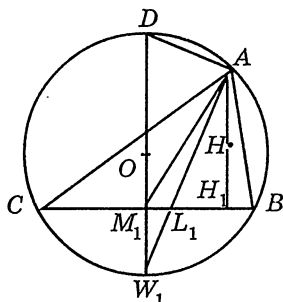


Рис. 17.3

Звідси

$$y^2 = \frac{a^2}{4} - x^2. \quad (2)$$

За формулою $AH^2 = 4R^2 - a^2$, маємо $t^2 = 4R^2 - a^2$. Із подібності трикутників $M_1W_1L_1$ і AW_1D (W_1D — діаметр описаного кола):

$$R = \frac{x^2}{h}, \text{ отже, } t^2 = \left(\frac{x^2}{h}\right)^2 \cdot 4 - a^2, \text{ звідки}$$

$$a^2 = \frac{4x^4}{h^2} - t^2. \quad (3)$$

Підставимо вираз (3) в формулу (2):

$$y^2 = \frac{x^4}{h^2} - \frac{t^2}{4} - x^2.$$

І, нарешті, підставимо в формулу (1):

$$x^2 = h^2 + \frac{x^4}{h^2} - \frac{t^2}{4} - x^2.$$

Отримаємо

$$x^4 - 2x^2h^2 + h^4 - \frac{t^2h^2}{4} = 0.$$

Нехай $x^2 = z$.

$$z^2 - 2zh^2 + \frac{4h^4 - t^2h^2}{4} = 0. \quad z_{1,2} = h^2 \pm \sqrt{h^4 - \frac{4h^4 - t^2h^2}{4}} = h^2 \pm \frac{th}{2}.$$

Отже, $x = \sqrt{h^2 \pm \frac{th}{2}}$, оскільки $x = AL_1 > h$, то $x = \sqrt{h^2 + \frac{th}{2}}$.

Зазначимо, що, наприклад, $h = 150$; $t = 132$; $x = 180$. ●

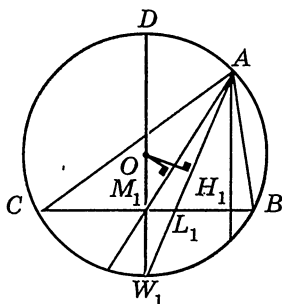


Рис. 17.4

Задача 5. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоту AH_1 , бісектрису AL_1 , медіану AM_1 . Знайти кут BAC , якщо $\angle L_1AH_1 = \alpha$; $\angle M_1AH_1 = \beta$.

● Позначимо (рис. 17.4).

$\angle L_1AB = \angle L_1AC = x$. Маємо:

$$BC = BH_1 + CH_1 = h \cdot \operatorname{tg}(x - \alpha) + h \cdot \operatorname{tg}(x + \alpha),$$

$$BM_1 = \frac{h \cdot \operatorname{tg}(x - \alpha) + h \cdot \operatorname{tg}(x + \alpha)}{2},$$

$$M_1H_1 = h \cdot \operatorname{tg}\beta = M_1B - H_1B =$$

$$= \frac{h \cdot \operatorname{tg}(x - \alpha) + h \cdot \operatorname{tg}(x + \alpha)}{2} - h \cdot \operatorname{tg}(x - \alpha);$$

$$2\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(x + \alpha) - \operatorname{tg}(x - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 x;$$

$$\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}\beta)} = \frac{\operatorname{tg}(\beta - \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad x = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\beta - \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha}}. \quad \bullet$$

Задача 6. У гострокутному трикутнику висота h_a , бісектриса l_a , медіана m_a продовжені до перетину з описаним колом. Яка з трьох отриманих хорд найбільша?

● Проведемо діаметр W_1D (AW_1 — бісектриса). Три хорди з однієї «сторони» від центра O . Із них найближчою до центру є хорда AK . Значить, із трьох — вона найбільша. ●

Глава 18

НАЙКРАЩА АВТОРСЬКА ЗАДАЧА, АБО Ж 20 РОКІВ ПОТОМУ

У 1987 році на XXVIII Міжнародній математичній олімпіаді від Радянського Союзу була запропонована і прийнята журі:

Бісектриса кута A гострокутного трикутника ABC перетинає сторону BC в точці L , а описане коло трикутника в точці N (відмінної від A); K і M — основи перпендикулярів, опущених із L на сторони AB і AC . Доведіть, що чотирикутник $AKNM$ рівновеликий з трикутником ABC .

Для її розв'язання стала необхідною дивовижна формула:

$$S = \frac{1}{2} AW_1 \cdot MN, \quad (5)$$

де W_1 — точка перетину бісектриси кута BAC з описаним колом, M і N — проекції точки L_1 (основи бісектриси AL_1) на сторони AC і AB .

За минулі роки задачу неодноразово аналізували. Формула (5) доводилася різними способами і «призвела» до відкриття нових залежностей. Але спочатку про історію створення цієї дивовижної формули.

«Відпрацьовуючи» вписане півколо, я звернув увагу на відрізок F_1F_2 , де F_1 і F_2 — точки дотику півкола до сторін трикутника ABC (рис. 18.1). Очевидно, що

$$F_1F_2 = 2R_a \cos \frac{A}{2},$$

де R_a — радіус півкола з центром L_1 . Захотілося «зв'язати» відрізок F_1F_2 з елементами трикутника ABC .

Оскільки $R_a = AL_1 \cdot \sin \frac{A}{2}$, то

$$F_1F_2 = 2l_a \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = l_a \sin A \quad (1)$$

(l_a — бісектриса кута BAC , L_1 — точка перетину бісектриси кута BAC і сторони BC).

Співвідношення (1) можна було б отримати відразу, якщо описати коло навколо чотирикутника $AF_1L_1F_2$ і застосувати співвідношення $a = 2R \sin A$, але, можливо, тоді не було б і формули (5). Вважатимемо отриманий вираз проміжним і отри-

маємо відому формулу $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$.

Тоді

$$F_1F_2 = \frac{2bc \sin A}{b+c} \cos \frac{A}{2} = \frac{S}{R \cos \frac{B-C}{2}}.$$

Вийшов «негарний» вираз

$$S = \frac{1}{2} F_1F_2 \cdot 2R \cos \frac{B-C}{2}.$$

Але $\frac{|B-C|}{2}$ — величина кута між висотою AH_1 і бісектрисою AL_1 .

Середина дуги BC — точка W_1 , W_1D — діаметр (рис. 18.2).

Оскільки $\angle OW_1A = \angle W_1AH_1$, то

$$2R \cos \frac{B-C}{2} = AW_1$$

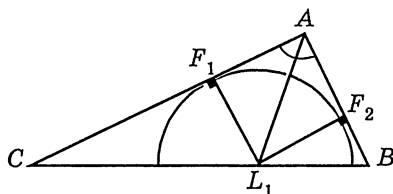


Рис. 18.1

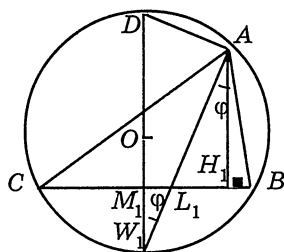


Рис. 18.2

(із прямокутного трикутника ADW_1). Отже, отримали формулу

$$S = \frac{1}{2} F_1 F_2 A W_1.$$

Далі формула набуде вигляду:

$$S = \frac{1}{2} M N \cdot A W_1,$$

де M і N — проекції точки L_1 на сторони AC і AB .

Вирішив «обкатати» формулу на своїх учнях. Вони довели її за допомогою теореми Птолемея: застосуємо цю теорему до чотирикутника ABW_1C (рис. 18.3). Отримаємо

$$b \cdot B W_1 + c \cdot C W_1 = a \cdot A W_1. \quad (1^0)$$

Трикутники BW_1C і $F_2L_1F_1$ подібні (вони рівнобедрені й $\angle BW_1C = \angle F_2L_1F_1$):

$$\frac{B W_1}{F_1 L_1} = \frac{a}{F_1 F_2}, \text{ або } B W_1 = \frac{a \cdot F_1 L_1}{F_1 F_2}.$$

Але $F_1 L_1 = \frac{2S}{b+c}$ (доведіть!), тому

$$B W_1 = \frac{a \cdot 2S}{(b+c) F_1 F_2}. \quad (2^0)$$

Підставимо вираз (2^0) у (1^0) . Маємо:

$$\frac{a \cdot 2S}{(b+c) F_1 F_2} \cdot (b+c) = a \cdot A W_1,$$

звідки $S = \frac{1}{2} F_1 F_2 \cdot A W_1$.

Створена задача була надіслана в журнал «Квант», «зашифрувавши» її так:

Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане коло в точці W_1 , а сторону BC — в точці L_1 .

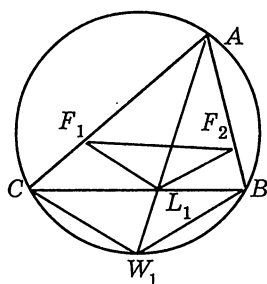


Рис. 18.3

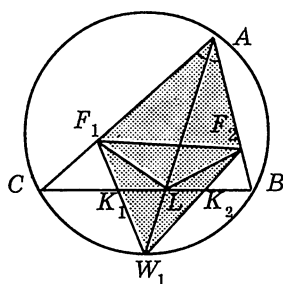


Рис. 18.4

Точки F_1, F_2 — проєкції точки L_1 на сторони AB і AC , K_1 і K_2 — точки перетину відрізків F_1W_1, F_2W_1 зі стороною BC . Довести, що $S_{F_1CK_1} + S_{F_2K_2B} = S_{K_1K_2W_1}$.

● Доведення (рис. 18.4). Покажемо, що трикутник ABC і чотирикутник $AF_1W_1F_2$ рівновеликі. Дійсно,

$$S_{AF_2W_1F_1} = \frac{1}{2} F_1F_2 \cdot AW_1 \text{ і } S = \frac{1}{2} F_1F_2 \cdot AW_1.$$

Якщо врахувати, що площа п'ятикутника $AF_1K_1K_2F_2$ — спільна, то твердження задачі доведено. ●

Було дивно, як задача потрапила на Міжнародну олімпіаду, як «Квант» вирішив її надіслати, як журі 42 країн вибрало саме її, але істинна моя любов до неї прийшла значно пізніше. Роки показали глибину і різноманіття задачі як формули

$$S = \frac{1}{2} AW_1 \cdot MN,$$

так і задачі про рівновеликості.

З. А. Скопец якось обмовився, що гарна задача — це задача з багатьма способами розв'язання.

Покажемо декілька з них.

● Перший спосіб (зліва-направо) (рис. 18.5).

Потрібно довести

$$S = \frac{1}{2} MN \cdot AW_1,$$

або

$$bc \sin A = MN \cdot AW_1. \quad (1)$$

Опишемо навколо чотирикутника $AMLN$ коло (рис. 18.5). Оскільки AL — діаметр, то

$$\sin A = \frac{MN}{AL}$$

і вираз (1) набуде вигляду

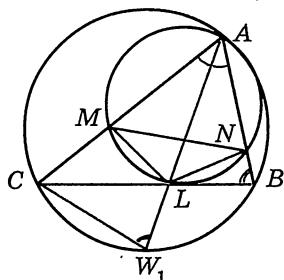


Рис. 18.5

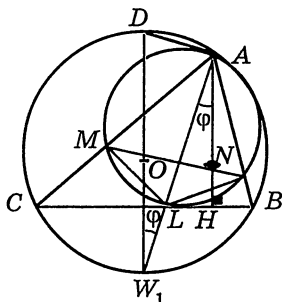


Рис. 18.6

$$bc \cdot \frac{MN}{AL} = MN \cdot AW_1,$$

або $bc = AW_1 \cdot AL$, а це виходить із подібності трикутників («Дивовижна подібність») AW_1C і ABL . ●

● Другий спосіб (справа-наліво).

Оскільки $MN = l_a \cdot \sin A$ і $\angle LAH_1 = \varphi$ (рис. 18.6), то

$$\begin{aligned} AW_1 \cdot MN &= l_a \cdot \sin A \cdot AW_1 = l_a \sin A \cdot 2R \cos \varphi = \\ &= \underbrace{l_a \cos \varphi}_{h_a} \cdot \underbrace{2R \sin A}_a = h_a \cdot a = 2S. \end{aligned} \quad \bullet$$

● Третій спосіб (формули «на марші»).

$$\text{Маємо } MN = l_a \sin A; \quad AW_1 = 2R \cos \frac{B-C}{2}, \quad l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}.$$

Потрібно довести, що $\frac{1}{2} l_a \sin A \cdot 2R \cos \frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} bc \sin A$, або

$$\frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \cdot 2R \cos \frac{B-C}{2} = bc.$$

Отже, потрібно довести, що $4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} = b+c$, а це

очевидно, оскільки $b+c = 2R(\sin B + \sin C) = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}$. ●

● Четвертий спосіб. Потрібно довести:

$$bc \sin A = AW_1 \cdot l_a \sin A, \text{ або } AW_1 = \frac{bc}{l_a}.$$

Маємо

$$\frac{bc}{l_a} = \frac{bc(b+c)}{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}} = \frac{b+c}{2 \cos \frac{A}{2}}.$$

Отже, потрібно довести, що $AW_1 = \frac{b+c}{2 \cos \frac{A}{2}}$, або, що теж саме,

$$AT = \frac{b+c}{2}. \quad (1^0)$$

(T — проекція точки W_1 на AC (або AB). Доведення формули (1^0) див. у розділі «Формули-близнюки»).

«Суто геометричне (!)» доведення

Зауважимо, що у «Кванті» (1988. — №4. — С. 30) було опубліковано розв'язання задачі (див. «Перший спосіб»).

Про існування ще одного способу, у якому немає жодної тригонометричної формули, повідомив журнал «Математика в школі» (1988. — №1).

Під час обговорення задач Міжнародної олімпіади публікувалося інше розв'язання задачі (можливо, із матеріалів журі). Це «суто геометричне» розв'язання, в основі якого за допомогою допоміжного кола утворюються дві трапеції.

Отже, чотирикутник AMW_1N і трикутник ABC мають спільну частину — п'ятикутник $AMEFN$ (рис. 18.7). Залишається довести, що

$$S_{FNB} + S_{MEC} = S_{EW_1F}.$$

Опишемо навколо чотирикутника $AMLN$ коло. Воно перетинатиме сторону BC і в другій точці (перша — точка L) — точці P . $\angle NPL$ опирається на дугу NL , а значить,

$$\angle NPL = 180^\circ - \frac{A}{2}, \text{ звідси } \angle NPB = \frac{A}{2}.$$

Розглянемо кут CBW_1 . Він опирається на дугу CW_1 , а значить, також дорівнює

$$\frac{1}{2} \cup CW = \frac{A}{2}.$$

Отже, $\angle NPB = \angle PBW_1$, відповідно, $PN \parallel W_1B$, і чотирикутник W_1PNB — трапеція. Аналогічно доводиться, що чотирикутник MPW_1C — трапеція, а значить,

$$S_{PFW_1} = S_{BFN} \text{ і } S_{PW_1E} = S_{MEC}$$

що доводить твердження задачі.

Заради куража! Ще один спосіб!

Згадаємо «Етюд про вписаний півкруг».

У трикутник ABC вписано півкруг так, що його діаметр належить стороні BC , M і N — точки дотику півкола зі сторонами AC і AB трикутника (рис. 18.8). Довести, що висота AH_1 належить бісектрисі кута MH_1N .

$$S = \frac{1}{2} AW_1 \cdot MN.$$

Оскільки

$$AW_1 \leq 2R, MN = l_a \sin A \leq l_a,$$

то $S \leq R \cdot l_a$. ●

Можна показати, що $S \leq R \cdot h_a$. Доведіть!

На цьому «історія» задачі не закінчується — читайте «Формули-близнюки».

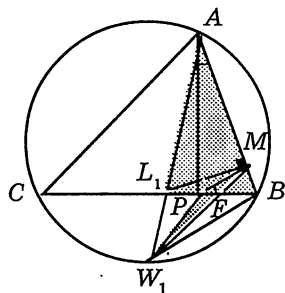


Рис. 18.9

Глава 19

ФОРМУЛИ-БЛИЗНЮКИ

Покажемо і дослідимо нові формули, аналогічні до формули

$$S = \frac{1}{2} AW_1 \cdot MN. \quad (5)$$

Ці формули я назвав «формулами-близнюками». Вони схожі не лише «зовні» (це необхідна умова). Як і у формули (5), у них є і аналітичне, і «суто геометричне» доведення, вони доводяться різними способами, до того ж «породжують» чотирикутник, рівновеликий з трикутником ABC .

Звісно, як формула (5) вони не потраплять на Міжнародну олімпіаду, хоча... хто зна...

Отже, перша формула-близнюк.

$$S = \frac{1}{2} AL_1 \cdot U_1 U_2, \quad (1)$$

де $AL_1 = l_a$, U_1 і U_2 — проєкції точки W_1 на прямі AC і AB (рис. 19.1).

Оскільки в чотирикутнику ABW_1C сума кутів ABW_1 і ACW_1 дорівнює 180° , то один із перпендикулярів (W_1U_1 і W_1U_2) як висота тупокутного трикутника буде обов'язково поза трикутником ABC . Розглянемо допоміжну теорему.

Теорема. У трикутнику ABC $U_1A = \frac{b+c}{2}$.

● Доведення. *Перший спосіб.* Із $\triangle AU_1W_1$ (рис. 19.2):

$$AU_1 = AW_1 \cdot \cos \frac{A}{2}.$$

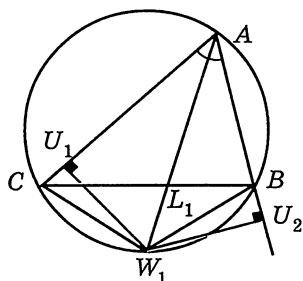


Рис. 19.1

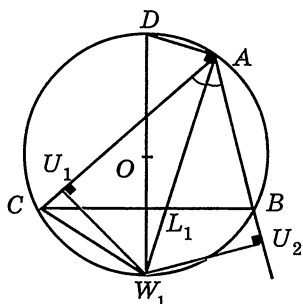


Рис. 19.2

Нехай DW_1 — діаметр описаного навколо $\triangle ABC$ кола. Із $\triangle DAW_1$:

$$AW_1 = 2R \sin\left(\frac{2C + A}{2}\right);$$

$$AU_1 = 2R \sin\left(C + \frac{A}{2}\right) \cos \frac{A}{2} = R(\sin(C + A) + \sin C) = \frac{b + c}{2}. \bullet$$

● Другий спосіб (без застосування тригонометрії).

Позначимо $AU_1 = x$, $CW_1 = W_1B = y$ (рис. 19.3). За теоремою Птолемея, застосованої до чотирикутника ABW_1C :

$$yb + yc = a \cdot AW_1.$$

Звідси

$$y = \frac{a \cdot AW_1}{b + c}.$$

Оскільки трикутник AU_1W_1 подібний до трикутника CW_1M_1 , то

$$\frac{y}{AW_1} = \frac{a}{2x}. \quad x = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot AW_1}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot AW_1(b + c)}{a \cdot AW_1} = \frac{b + c}{2}. \bullet$$

Перейдемо до доведення формули (1).

Перша формула-близнюк:

$$S = \frac{1}{2} l_a U_1 U_2.$$

Формула і її доведення нагадує формулу (5).

● Перший спосіб. «Дивовижна подібність»: трикутник AL_1C (рис. 19.4) подібний до трикутника ABW_1 :

$$\frac{AB}{AW_1} = \frac{AL_1}{AC},$$

$$\text{або } b \cdot c = l_a \cdot AW_1.$$

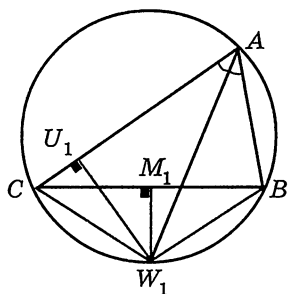


Рис. 19.3

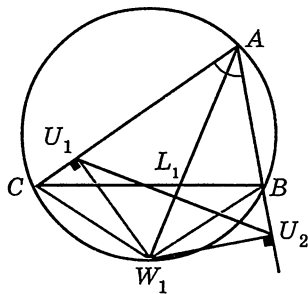


Рис. 19.4

Домножимо обидві частини рівності на $\frac{1}{2} \sin A$:

$$\frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} l_a \cdot AW_1 \cdot \sin A.$$

Оскільки

$$AW_1 \cdot \sin A = U_1 U_2, \text{ то } S = \frac{1}{2} l_a U_1 U_2. \bullet$$

● *Другий спосіб.* В основі доведення лежить формула (5):

$$S = \frac{1}{2} AW_1 \cdot MN = \frac{1}{2} AW_1 \cdot l_a \cdot \sin A = \frac{1}{2} \underbrace{AW_1 \sin A}_{U_1 U_2} \cdot l_a = \frac{1}{2} U_1 U_2 \cdot l_a. \bullet$$

● *Третій спосіб.* В основі доведення лежить співвідношення:

$$AU_1 = \frac{b+c}{2}.$$

$$\text{Маємо } U_1 U_2 = AW_1 \cdot \sin A = \frac{AU_1}{\cos \frac{A}{2}} \cdot \sin A = \frac{(b+c) \sin A}{2 \cos \frac{A}{2}}.$$

Оскільки $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$, то

$$\frac{1}{2} U_1 U_2 \cdot l_a = \frac{1}{2} \frac{(b+c) \sin A}{2 \cos \frac{A}{2}} \cdot \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} = S. \bullet$$

● *Четвертий спосіб.* В основі доведення лежить формула

$$R = \frac{abc}{4S}. \text{ Оскільки } AW_1 = 2R \cos \frac{B-C}{2}, \text{ а } U_1 U_2 = AW_1 \sin A, \text{ то}$$

$$U_1 U_2 = 2R \cos \frac{B-C}{2} \sin A.$$

Маємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} l_a U_1 U_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} \cdot 2R \cos \frac{B-C}{2} \sin A = \\ &= \frac{abc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \frac{4RS}{b+c} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}.\end{aligned}$$

Оскільки

$$b+c = 2R(\sin B + \sin C) = 4R \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2},$$

то

$$\frac{1}{2} l_a U_1 U_2 = S. \bullet$$

П'ятий (геометричний) спосіб.

Задача 1 (друга рівновеликість)¹. Довести, що чотирикутник $AU_1 L_1 U_2$ рівновеликий з трикутником ABC .

• Доведення (рис. 19.5). У чотирикутника $AU_1 L_1 U_2$ і трикутника ABC спільна частина — чотирикутник $ABL_1 U_1$.

Доведемо рівновеликість трикутників $L_1 B U_2$ і $L_1 U_1 C$. Висоти, проведені з вершини L_1 на прямі AB і AC , рівні. Залишається довести, що $U_2 B = U_1 C$. Але трикутники $W_1 B U_2$ і $W_1 C U_1$ рівні, оскільки $W_1 B = W_1 C$ і $W_1 U_1 = W_1 U_2$. Значить, $U_2 B = U_1 C$, і трикутники $L_1 B U_2$ і $L_1 U_1 C$ рівновеликі, твердження задачі доведено. •

Задача 2. Дано: A ; l_a ; AW_1 . Знайти S_{ABC} .

• $S = \frac{1}{2} l_a \cdot U_1 U_2$; $U_1 U_2 = AW_1 \cdot \sin A$. Значить, $S = \frac{1}{2} l_a \cdot AW_1 \cdot \sin A$. •

Задача 3. Трикутник ABC вписано в коло. На дузі BC , протилежній до вершини A , знайти точку X , щоб AX була діагоналлю чотирикутника $AU_1 L_1 U_2$, рівновеликого з трикутником ABC .

• Це буде чотирикутник $AU_1 W_1 U_2$. •

Задача 4. На дузі BC (див. попередню задачу) знайти точку X , щоб чотирикутник з діагоналлю AX був рівновеликим з трикутником ABC і в цей чотирикутник можна було вписати коло.

Відповідь: чотирикутник $AU_1 W_1 U_2$.

Друга формула-близнюк:

$$S = E_1 E_2 \cdot R. \quad (II)$$

$E_1 E_2$ — проекції точки H_1 на сторони AC і AB трикутника ABC (рис. 19.6).

¹ Перша рівновеликість: $S_{ABC} = S_{AMW_1 N}$.

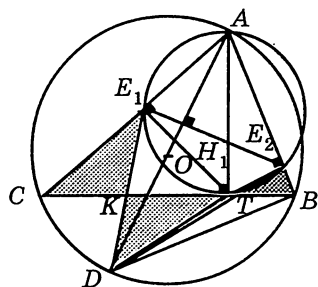


Рис. 19.7

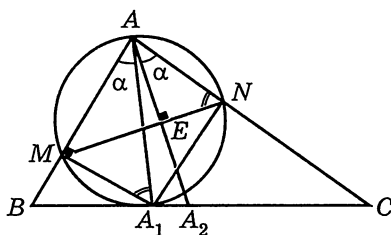


Рис. 19.8

Має місце обернена теорема.

Третя формула-близнюк:

$$S = \frac{1}{2} MN \cdot AD, \quad (\text{III})$$

де M і N — проєкції довільної точки X , яка належить стороні BC , на сторони AB і AC , а AD — перетин прямої, ізогональної до відрізка AX з описаним навколо трикутника ABC колом.

● Доведення (рис. 19.9). Оскільки трикутники CAX і DAB подібні, то $\frac{AX}{AB} = \frac{AC}{AD}$, або $AD \cdot AX = AB \cdot AC$, чи

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AX \cdot \sin A \cdot AD.$$

Оскільки $AX \cdot \sin A = MN$, то $S = \frac{1}{2} MN \cdot AD$. ●

Четверта формула-близнюк:

$$S = \frac{1}{2} T_1 T_2 \cdot AD, \quad (\text{IV})$$

де T_1 і T_2 — проєкції довільної точки X , що належить стороні BC трикутника ABC , на сторони AB і AC , AD — хорда кола, описаного навколо трикутника ABC , при цьому відрізки $T_1 T_2$ і AD — взаємно перпендикулярні.

● Доведення. Доведемо, що відрізки AX і AD — ізогональні (рис. 19.10). Дійсно, якщо навколо чотирикутника $AT_1 X T_2$ описати коло, то очевидно, що

$$\angle T_1 A X = \angle T_1 T_2 X, \quad \angle T_1 T_2 X = \angle D A B$$

як кути із взаємно перпендикулярними сторонами. Так формули

$$S = \frac{1}{2} MN \cdot AD \quad \text{і} \quad S = \frac{1}{2} T_1 T_2 \cdot AD$$

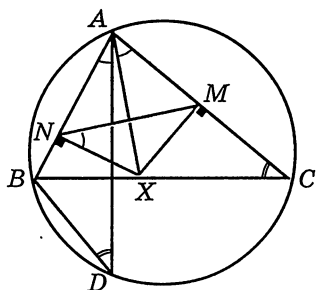


Рис. 19.9

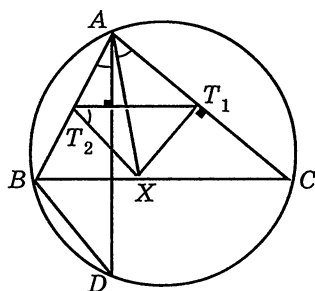


Рис. 19.10

— є однією й тією ж формулою, тому для них існує одна рівновеликість трикутника ABC і чотирикутника $ANDM$ (або AT_2DT_1). ●

Четверта рівновеликість.

Задача 6. Довести, що чотирикутник AT_1DT_2 рівновеликий з трикутником ABC .

● Доведення (рис. 19.11). *Перший спосіб.* Оскільки $AD \perp T_1T_2$, а $XT_2 \perp AB$, то $\angle T_1T_2X = \angle DAT_2$ (кути із взаємно перпендикулярними сторонами).

Навколо чотирикутника AT_1XT_2 опишемо коло: $\angle T_1T_2X = \angle T_1AX$. А значить, $\angle T_1AX = \angle DAT_2$, відповідно прямі AX і DA — ізогональні, значить $S = \frac{1}{2} T_1T_2 \cdot AD$. Але в чотири-

кутнику AT_1DT_2 $\frac{1}{2} T_1T_2 \cdot AD = S_{AT_1DT_2}$, оскільки за умовою $AD \perp T_1T_2$. ●

● *Другий спосіб.* Чотирикутник AT_1DT_2 і трикутник ABC мають спільну частину — п'ятикутник AT_1QUT_2 .

Доведемо, що $S_{QDU} = S_{QT_1C} + S_{UT_2B}$.

Проведемо висоту AH_1 . Розглянемо чотирикутник CT_1H_1D . Доведемо, що $T_1H_1 \parallel CD$. Дійсно, $\angle T_1H_1X = \angle XAT_1 = \angle DAB = \angle BCD$.

Значить, чотирикутник CT_1H_1D — трапеція, і $S_{CT_1Q} = S_{DH_1Q}$.

Аналогічно доводиться, що $S_{DH_1U} = S_{UT_2B}$. ●

Намісто рівновеликості

$$S_{ABC} = S_{AMW_1N} = S_{AU_1L_1U_2} = S_{AT_1DT_2}$$

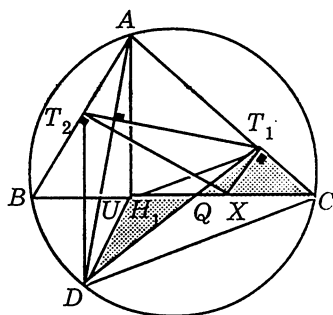


Рис. 19.11

ПОШУК ПОДІБНИХ ТРАПЕЦІЙ

Випадково «надибав» на розв'язок відомої задачі:

Через точку перетину діагоналей трапеції паралельно до основ проведено пряму, яка перетинає бочні сторони в точці M і N . Довести, що

$$MN = \frac{2ab}{a+b},$$

де a і b — довжини основ (рис. 20.1).

Задачу розмістили в задачнику за редакцією М. І. Сканаві (№ 10.275), а доведення в розв'язнику мені було незнайоме!

● Провівши середню лінію TP (рис. 20.1), автор розглядає дві подібні (!) трапеції $MBCN$ і $ATPD$, звідки

$$\frac{BC}{MN} = \frac{TP}{AD}, \text{ або } \frac{a}{MN} = \frac{a+b}{2b}, \text{ відповідно } MN = \frac{2ab}{a+b}! \bullet$$

Розв'язок з подібними трапеціями «шокував» своєю лаконічністю, але... чому трапеції $MBCN$ і $ATPD$ подібні?

Кути, у них, звісно, рівні, але пропорційність сторін не очевидна! Навіть більше: щоб це довести, потрібно... вирахувати відрізок MN ! Коло замкнулося.

«Негативний результат — теж результат!» — так постало питання про пошук подібних трапецій. Тим більше, що ілюзія подібності трапецій, вершини яких «ковзають» по сторонам кута, існує.

Як же знайти подібні трапеції?

1. Трапеції зі спільними основами

Нехай в трапеції $ABCD$ проведено пряму EF , паралельну до основ.

Теорема. Якщо трапеції зі спільними основами подібні, то їхня спільна основа є середнім геометричним двох інших основ (рис. 20.2):

$$EF = \sqrt{ab}.$$

● Дійсно, нехай $EF \parallel BC \parallel AD$ і $EF = x$. Тоді

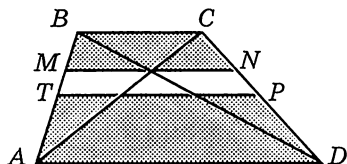


Рис. 20.1

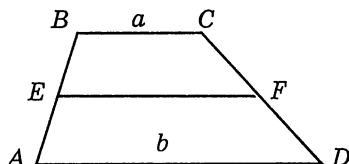


Рис. 20.2

$$\frac{BC}{EF} = \frac{EF}{AD}, \text{ або } \frac{a}{x} = \frac{x}{b}, \text{ звідки } x = \sqrt{ab}. \bullet$$

Теорема (обернена). Якщо $EF = \sqrt{ab}$, то трапеції подібні. Дійсно, із умови виходить пропорційність основ. Як буде доведено, цього достатньо.

2. Основи трапецій НЕ збігаються (рис. 20.3).

Теорема. Дві або більше трапецій, вершини яких належать сторонам кута, будуть подібні, якщо відношення основ однакові (коефіцієнт подібності).

● Доведення. Нехай у трапеціях $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, вписаних у кут K (см. рис. 20.3)

$$\frac{BC}{AD} = \frac{B_1C_1}{A_1D_1}.$$

Доведемо, що ці трапеції подібні. Отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{CE}{AE} &= \frac{CE \cdot ED}{ED \cdot AE} = \frac{CE \cdot (AD - BC)}{ED \cdot BC} = \frac{CE}{ED} \left(\frac{AD}{BC} - 1 \right) = \frac{C_1E_1}{E_1D_1} \left(\frac{A_1D_1}{B_1C_1} - 1 \right) = \\ &= \frac{C_1E_1}{E_1D_1} \cdot \frac{A_1D_1 - B_1C_1}{B_1C_1} = \frac{C_1E_1}{E_1D_1} \cdot \frac{E_1D_1}{A_1E_1} = \frac{C_1E_1}{A_1E_1}. \end{aligned}$$

Тому трикутники AEC і $A_1E_1C_1$ подібні, й, значить, паралелограми $ABCE$ і $A_1B_1C_1E_1$ подібні, відповідно, подібні й трапеції. ●

Задача 1. Розділити трапецію прямою, паралельною до її основ, на дві подібних (рис. 20.2).

● Позначимо FE — шуканий відрізок. Нехай $BC = a$; $AD = b$.

Тоді за першою теоремою: $EF = \sqrt{ab}$.

Коефіцієнт подібності

$$k = a : \sqrt{ab} = \sqrt{a} : \sqrt{b} \text{ (теорема 2).}$$

Щоб знайти точку F , треба розділити відрізок AB у відношенні

$$\sqrt{a} : \sqrt{b}. \bullet$$

Задача 2. У трапеції $ABCD$ з рівними основами a і b проведено середню лінію T_1T_2 , паралельний до неї відрізок MN через точку перетину діагоналей, і паралельний до основ відрізок $EF = \sqrt{ab}$ (рис. 20.4). Довести, що трапеції T_1EFT_2 і $EMNF$ подібні.

● Доведення. Доведемо, що $EF = \sqrt{MN \cdot T_1T_2}$.

Дійсно (рис. 20.4),

$$\sqrt{MN \cdot T_1T_2} = \sqrt{\frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2}} = \sqrt{ab},$$

що доводить твердження задачі. ●

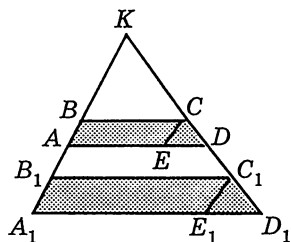


Рис. 20.3

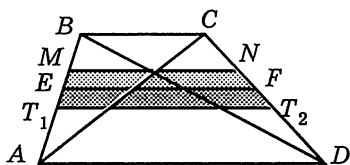


Рис. 20.4

Теорема (!). У трапеції проведено пряму, паралельну до основ. Якщо в утворені трапеції можна вписати кола, то трапеції подібні (рис. 20.5).

● Доведення. Нехай EF — відрізок прямої, паралельної до основ трапеції $ABCD$. Продовжимо бокові сторони трапеції $ABCD$ до перетину в точці S . Трикутники SAB , SEF , SDC подібні. Позначимо радіуси кіл, вписаних в трапеції $ABFE$ і $FEDC$, як r і R . Для трикутників SAB і SEF вони будуть зовнішписаними.

Побозначимо $AB = a$, $DC = b$, $EF = x$. Із подібності трикутників SAB і SEF :

$$\frac{a}{x} = \frac{r}{R}. \quad (1)$$

Із подібності трикутників SEF і SDC (для трикутників SEF і SDC r і R — радіуси вписаних кіл):

$$\frac{x}{b} = \frac{r}{R}. \quad (2)$$

Поділимо почленно рівності (1) і (2):

$$\frac{a \cdot b}{x \cdot x} = \frac{r \cdot R}{R \cdot r}; \quad x^2 = ab, \quad x = \sqrt{ab}.$$

Отже, $EF = \sqrt{ab}$, а це означає, що твердження теореми доведено. ●

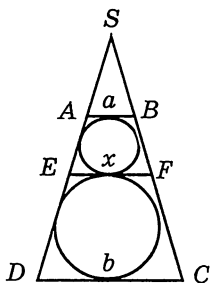


Рис. 20.5

Задача 3. Дві прямі, паралельні до основ трапеції $ABCD$, ділять її на три трапеції, в кожен з яких вписано коло. Знайдіть радіус кола, вписаного в середню трапецію, якщо радіуси двох інших кіл R і r (рис. 20.6).

● Оскільки всі три трапеції подібні, то відповідні їхні лінійні елементи пропорційні. Позначимо (рис. 20.6) $EK = t_1$, $LM = t_2$, радіус другого кола — x , $BC = a$.

Маємо (із подібності верхньої й середньої трапеції):

$$\frac{r}{x} = \frac{a}{t_1}. \quad (1)$$

Із подібності середньої й нижньої трапеції:

$$\frac{x}{R} = \frac{t_1}{t_2}. \quad (2)$$

Поділимо (1) на (2):

$$\frac{r \cdot R}{x \cdot x} = \frac{at_2}{t_1 \cdot t_1}, \text{ або } \frac{r \cdot R}{x^2} = \frac{at_2}{t_1^2}. \text{ Але } t_1^2 = t_2 \cdot a.$$

Значить,

$$\frac{r \cdot R}{x^2} = \frac{at_2}{t_2 \cdot a} = 1; \quad x = \sqrt{Rr}. \quad \bullet$$

Діагональна трапеція

Відрізок EF , проведений паралельно до основ трапеції так, що дві нових трапеції подібні, має ще одну властивість: чотирикутник $AECF$ — трапеція!

● Доведемо це (рис. 20.7). Оскільки

$$\frac{BC}{EF} = \frac{EB}{EA} \text{ і } \angle EBC = \angle AEF,$$

то трикутники EBC і AEF — подібні. Значить, $\angle ECB = \angle AFE = \angle CEF$, а відповідно, $CE \parallel AF$. ●

І обернено... (ознака подібності)

Якщо виявилось, що $CE \parallel AF$, то трапеції $EBCF$ і $AEFD$ — подібні ($EF = \sqrt{ab}$).

● Дійсно, трикутник EBC подібний до трикутника AEF , і трикутник CEF подібний до трикутника FAD — а це значить, що трапеції подібні. ●

Задача 4(!). У трапеції $ABCD$ проведено пряму EF , паралельну до основ, причому $EC \parallel AF$. Знайти відношення площі трапеції $ABCD$ до площі трапеції $AECF$, якщо $BC = a$; $AD = b$ (рис. 20.8).

● Оскільки трапеції $AEFD$ і $EBCF$ подібні, то $EF = \sqrt{ab}$. Позначимо площу $AECF$ як S_1 . Маємо

$$S_1 = \frac{1}{2} EF \cdot AC \cdot \sin \varphi$$

(φ — кут між діагоналями). Але $AC \cdot \sin \varphi = CH$ — висота трапеції $ABCD$. Значить,

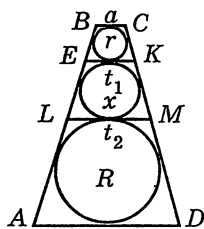


Рис. 20.6

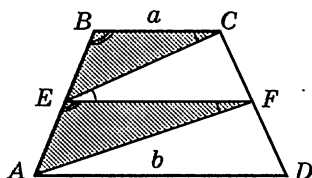


Рис. 20.7

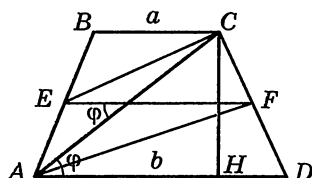


Рис. 20.8

$$S_1 = \frac{1}{2} EF \cdot CH = \frac{1}{2} \sqrt{ab} \cdot \frac{2S}{a+b},$$

звідки

$$\frac{S}{S_1} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \cdot \bullet$$

Глава 21

ПОПУЛЯРНІСТЬ... ЗАДАЧІ

Уявіть собі, що задача може бути так само відома, як музичний твір, афоризм, картина чи фільм. Просто коло її популярності менше, аніж твору мистецтва, та й шанувальники такої задачі — зазвичай спеціалісти. Але чим більше людина знайомиться із видатними витворами людських рук і генію, тим глибший її духовний світ. Коли ж йдеться про геометрію, то банальністю таке знайомство не назвеш.

Зараз ми познайомимось із задачею елементарної геометрії, яка з'явилася наприкінці 1940–1950-х років у журналі «Математика в школі» — автор Шебаршин (на жаль, не знаю ім'я й по-батькові). Задача стала настільки популярна, що була потім включена до багатьох задачників, а я — свідок того, як один із негідників у приймальній комісії на екзаменах у ВНЗ «різав» нею неугодовних. Отже,

Задача. Довести, що якщо $\angle BAC = 120^\circ$, то $\angle L_2 L_1 L_3 = 90^\circ$.

Можлива і обернена теорема. Нагадаємо, що L_1, L_2, L_3 точки перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника з протилежними сторонами.

За довгі роки знайомства з цією задачею мені вдалося зібрати різні методи її розв'язання. Гадаю, що читач із задоволенням ознайомиться з ними.

Перший спосіб (рис. 21.1). Оскільки $\angle A = 120^\circ$, то бісектриса

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} = \frac{bc}{b+c}. \quad \text{Очевидно, що відрізок } L_1 B = \frac{ac}{b+c},$$

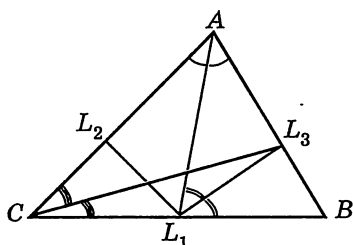


Рис. 21.1

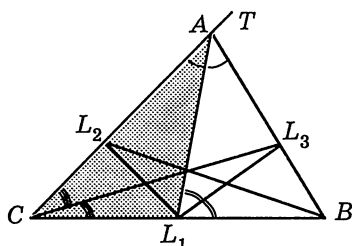


Рис. 21.2

значить,

$$\frac{L_1B}{AL_1} = \frac{ac(b+c)}{(b+c) \cdot bc} = \frac{a}{b}.$$

Оскільки $\frac{L_3B}{L_3A} = \frac{a}{b}$, то L_1L_3 — бісектриса кута AL_1B .

Аналогічно доводиться, що L_1L_2 — бісектриса кута AL_1C , а це значить, що кут між цими бісектрисами дорівнює 90° , тобто $\angle L_2L_1L_3 = 90^\circ$. ●

● *Другий спосіб* (рис. 21.2). Нехай T — точка на продовженні сторони AC . Оскільки $\angle CAL_1 = \angle L_1AB = \angle TAB$ (кожний із них дорівнює 60°), то AB — бісектриса зовнішнього кута L_1AT трикутника ACL_1 , а значить,

$$\frac{b}{l_a} = \frac{m+n}{n} \quad (CL_1 = m; L_1B = n).$$

Або $bn = l_a(m+n)$, звідки $\frac{l_a}{n} = \frac{b}{m+n}$, або $\frac{l_a}{L_1B} = \frac{b}{a}$.

Оскільки

$$\frac{b}{a} = \frac{AL_3}{L_3B}, \text{ то } \frac{AL_1}{L_1B} = \frac{AL_3}{L_3B},$$

а це означає, що L_1L_3 — бісектриса кута AL_1B . Аналогічно доводиться, що L_1L_2 — бісектриса кута AL_1C . ●

● *Третій спосіб* (див. рис. 21.2). У трикутнику ACL_1 точка L_3 — центр зовнішнього кола, яке дотикається до сторони AL_1 (перетин бісектриси кутів L_1AT і ACL_1). Значить, L_1L_3 — бісектриса кута AL_1B . Аналогічно доводиться, що L_1L_2 — бісектриса кута AL_1C . ●

● *Четвертий спосіб* (авторство належить І. Ф. Шаригіну). Із точки L_3 опустимо перпендикуляри L_3E , L_3F , L_3K на прямі BC , AC , AL_1 (рис. 21.3). Оскільки $\angle CAL_1 = \angle L_1AB = \angle BAF$ (кожний із них дорівнює 60°), то відрізок AB належить бісектрисі кута

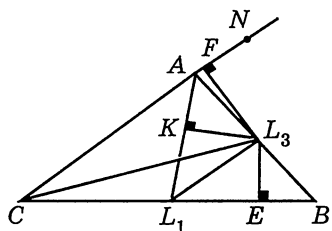


Рис. 21.3

L_1AN (AN — продовження сторони AC). Оскільки CL_3 — бісектриса кута ACB , то $L_3F = L_3E$. Окрім того, оскільки відрізок AB належить бісектрисі кута NAL_1 , то $L_3F = L_3K$. Значить, $L_3E = L_3K$, отже L_1L_3 — бісектриса кута AL_1B . Аналогічно доводиться, що L_1L_2 — бісектриса кута CL_1A . Значить, $\angle L_2L_1L_3 = 90^\circ$. ●

● *П'ятий спосіб* (за допомогою

антивертикальних кутів) (задача 18, с. 37). ●

● *Шостий спосіб*. У бісектральному трикутнику

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2(\sin C + \sin B)}{1 + 2 \cos A},$$

де $\varphi = \angle L_2L_1L_3$, (див. Трикутник у задачах. — К.: Либідь, 1994. — С. 63). Формула доводить пряму й обернену теорему. Очевидно, що якщо $1 + 2\cos 120^\circ = 0$, то $\varphi = 90^\circ$. ●

● *Сьомий спосіб* ви можете прочитати в книзі З. А. Скопця і В. А. Жарова «Задачи и теоремы по геометрии» (М., 1962. — С. 23). Розв'язування базується на властивостях гармонічної четвірки прямих L_3L_1 , L_3L_2 й L_3C , L_3A і варте уваги тим, що доводить пряму й обернену теорему. ●

Глава 22

ЧАРІВНА ПІДСТУПНІСТЬ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

За деякими трьома елементами трикутника його можна побудувати. Площу трикутника можна знайти за двома: наприклад a ; h_a . Мабуть, багато хто з читачів думає, що якщо за трьома елементами трикутник можна побудувати, то знайти його площу в такому випадку можна завжди. Звісно, так воно і є; питаннями змінимо так: наскільки складно це зробити? Проте не втрачайте пильність, шановний читачу, — найпростіша побудова трикутника — за трьома сторонами. Але знайти площу значно складніше: потрібно знати тригонометрію або формулу Герона. У методичній літературі питання обчислення площі за трьома елементами, здавалося, з'ясовано. «Найкрутіші» задачі — це: знайти площу S трикутника за трьома медіанами, за трьома висотами.

А підступність полягає у тому, що й справді є умови із трьох елементів, коли знайти площу трикутника легко. Але це не завжди так. За рівнем складності такі умови дуже різноманітні. Особливо виділяється задача (хто би подумав?!), з умовою A ; h_a ; m_b (!)

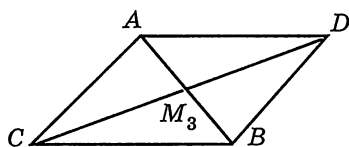


Рис. 22.1

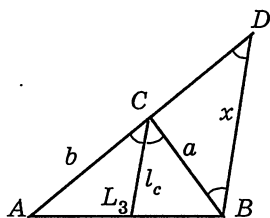


Рис. 22.2

Пошук таких задач — неймовірно приваблива справа. Робота над ними триває, а поки що — вибране.

Форма запису: у всіх задачах цього розділу записуємо лише умову, а мета одна — знайти S , площу трикутника ABC .

Задача 1. a, b, m_c (рис. 22.1).

● «Подвоїмо» медіану CM_3 . У трикутнику ADC ($DC = 2m_c$) відомі три сторони, а значить, можна знайти його площу за формулою Герона. А трикутник ACD рівновеликий з трикутником ABC . ●

Задача 2. $a; b; l_c$.

● **Перший спосіб.** Застосуємо формулу $l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{C}{2}$. Знайдемо

кут C і використаємо формулу $S = \frac{1}{2}ab \sin C$. ●

● **Другий спосіб.** Через точку B (рис. 22.2) проведемо пряму, паралельну до бісектриси CL_3 , яка перетинатиме пряму AC в точці D . Позначимо x — відрізок BD . Оскільки $\angle CBD = \angle L_3CB = \angle ACL_3 = \angle D$, то $BC = CD = a$. Маємо

$$\frac{l_c}{x} = \frac{b}{a+b}, \quad x = \frac{l_c(a+b)}{b}.$$

Знайшли x , із трикутника DBC знаходимо кут CBD , а значить, і кут C . Застосуємо формулу

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C. \quad \bullet$$

Задача 3. $a; A; m_b$.

Перший спосіб. Маємо три формули:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA; \quad (1)$$

$$4m_a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2; \quad (2)$$

$$2bccosA = 4SctgA. \quad (3)$$

Із виразу (2):

$$b^2 = 2a^2 + 2c^2 - 4m_b^2. \quad (4)$$

Підставимо (4) і (3) у (1): $a^2 = 2a^2 + 2c^2 - 4m_b^2 + c^2 - 4SctgA$, знайдемо

$$c^2 = \frac{1}{3} (4m_b^2 - a^2 + 4S \operatorname{ctg} A). \quad (5)$$

Підставимо вираз (5) у (4):

$$b^2 = 2a^2 + \frac{2}{3} (4m_b^2 - a^2 + 4S \operatorname{ctg} A) - 4m_b^2;$$

$$b^2 = \frac{4}{3} a^2 - \frac{4}{3} m_b^2 + \frac{8}{3} S \operatorname{ctg} A. \quad (6)$$

Помножимо вираз (5) на вираз (6), запишемо:

$$b^2 c^2 = \frac{4S^2}{\sin^2 A} = \frac{1}{3} (4m_b^2 - a^2 + 4S \operatorname{ctg} A) \cdot \frac{4}{3} (a^2 - m_b^2 + 2S \operatorname{ctg} A).$$

Отримали квадратне рівняння відносно S .

● Другий спосіб (допоміжна точка Q). Проведемо середню лінію $M_1 M_2$ (рис. 22.3). У трикутнику $CM_2 M_1$ точка Q — центр кола, описаного навколо цього трикутника. Радіус цього кола

$$R_1 = \frac{a}{4 \sin \angle CM_2 M_1} = \frac{a}{4 \sin A} = QM_2 = QM_1.$$

Із трикутника QTM_1 за теоремою Піфагора знайдемо відрізок QT (T — середина відрізка CM_1):

$$QT = \sqrt{R_1^2 - TM_1^2} = \sqrt{R_1^2 - \frac{1}{16} a^2}.$$

Знаючи QT , можемо знайти $\angle QBT$ із прямокутного трикутника QBT :

$$\operatorname{tg} \angle QBT = \operatorname{tg} \alpha = \frac{QT}{TB}; \quad \alpha = \arctg \frac{QT}{TB}.$$

Трикутник $QM_2 B$ визначений: $QM_2 = R_1$, $M_2 B = m_b$, $QB = \frac{TB}{\cos \alpha}$.

Значить, можна знайти кут $M_2 BQ$ (назвемо його β).

Отже, $\angle M_2 BC = \alpha + \beta$,

$$S_{M_2 BC} = \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} M_2 B \cdot BC \cdot \sin(\alpha + \beta), \quad m_b \cdot a \sin(\alpha + \beta) = S. \quad \bullet$$

Задача 4. a ; A ; l_a .

● Формула $S = \frac{1}{2} MN \cdot AW_1$, де $MN = l_a \cdot \sin A$, тобто

$$S = \frac{1}{2} l_a \cdot \sin A \cdot AW_1. \quad (1)$$

Знайдемо AW_1 (рис. 22.4).

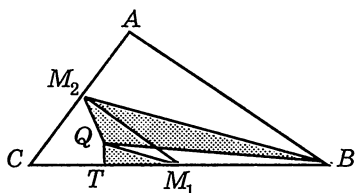


Рис. 22.3

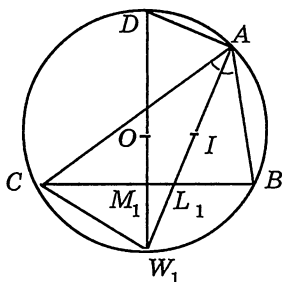


Рис. 22.4

$$AW_1 = AL_1 + L_1W_1. \quad (2)$$

Позначимо $L_1W_1 = x$. Проведемо діаметр W_1D (рис. 22.4). Оскільки трикутник $M_1L_1W_1$ подібний до трикутника ADW_1 , то

$$\frac{a \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{2(l_a + x)} = \frac{x}{2R},$$

звідки

$$l_a \cdot x + x^2 = a \cdot R \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Отримали квадратне рівняння відносно x . За допомогою відношення (2) знайдемо AW_1 і за допомогою формули (1) знайдемо площу S .

Задача 5. $A; B; m_a$.

● *Перший спосіб.* Позначимо кут AM_1B як φ (рис. 22.5). Із $\triangle AM_1C$ за теоремою синусів маємо

$$\frac{m_a}{\sin C} = \frac{b}{\sin \varphi}, \quad \frac{m_a}{\sin B} = \frac{c}{\sin \varphi} \quad (\text{із } \triangle AM_1B).$$

Перемножимо

$$\frac{m_a^2}{\sin B \sin C} = \frac{bc}{\sin^2 \varphi}, \quad \text{або} \quad \frac{m_a^2 \sin A}{2 \sin B \sin C} = S \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi).$$

Оскільки $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B)$, то

$$S = \frac{2m_a^2 \sin A \sin B \sin C}{4 \sin^2 B \sin^2 C + \sin^2(B - C)}. \quad (1^0)$$

● *Другий спосіб.* Оскільки

$$\begin{aligned} 4m_a^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 8R^2 \sin^2 B + 8R^2 \sin^2 C - 4R^2 \sin^2 A = \\ &= 4R^2(2\sin^2 B + 2\sin^2(A + B) - \sin^2 A), \end{aligned}$$

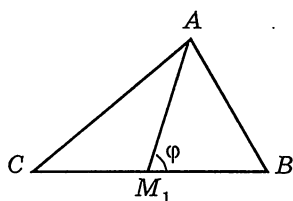


Рис. 22.5

то

$$R^2 = \frac{m_a^2}{2\sin^2 B + 2\sin^2(A+B) - \sin^2 A},$$

і оскільки $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, то

$$S = \frac{2m_a^2 \sin A \sin B \sin C}{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}. \quad (2^0)$$

Доведемо ідентичність формул (1⁰) і (2⁰).

Фактично маємо довести таке:

$$4\sin^2 B \sin^2 C + \sin^2(B-C) = 2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2(B+C),$$

або

$$2\sin^2 B + 2\sin^2 C - 4\sin^2 B \sin^2 C = \sin^2(B+C) + \sin^2(B-C),$$

або

$$\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin^2 B \sin^2 C = \frac{1}{2}(\sin^2(B+C) + \sin^2(B-C)).$$

Перетворимо ліву частину останньої рівності:

$$\begin{aligned} & \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 B \sin^2 C - \sin^2 B \sin^2 C = \\ & = \sin^2 B(1 - \sin^2 C) + \sin^2 C(1 - \sin^2 B) = \sin^2 B \cos^2 C + \sin^2 C \cos^2 B. \end{aligned}$$

У правій частині, після піднесення в квадрат $\sin(B+C)$ і $\sin(B-C)$ і зведення подібних членів, отримаємо ліву частину рівності. ●

Задача 6. $A; B; l_a$.

● Оскільки $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$, то $\frac{1}{4} l_a \cdot \sin A = \frac{\frac{1}{2} bc \sin A}{b+c} \cdot \cos \frac{A}{2}$, або

$$S = \frac{l_a \cdot \sin A \cdot (b+c)}{4 \cos \frac{A}{2}} = \frac{1}{2} l_a \sin \frac{A}{2} 2R(\sin B + \sin C). \quad (1)$$

Оскільки $l_a = \frac{2 \cdot 2R \sin B \sin C}{\sin B + \sin C} \cos \frac{A}{2}$, то

$$R = \frac{l_a(\sin B + \sin C)}{4 \sin B \cdot \sin C \cdot \cos \frac{A}{2}}.$$

Далі очевидно:

$$S = \frac{1}{2} l_a^2 \frac{\sin^2\left(B + \frac{A}{2}\right) \sin A}{\sin B \sin(A+B)}. \quad \bullet$$

| Задача 7. $A; B; r$.

● Оскільки $p = \frac{a+b+c}{2} = r \left(\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right)$, то

$$S = rp = r^2 \left(\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right) = r^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}. \bullet$$

| Задача 8. $A; h_a; m_a$.

● *Перший спосіб.* Маємо:

$$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A, \quad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad h_a = \frac{2S}{a} = \frac{bc \sin A}{a},$$

або

$$h_a = \frac{bc \sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}}. \quad (2)$$

Отримали систему рівнянь (1) і (2) з двома невідомими b і c . ●

● *Другий спосіб.* «Подвоїмо» медіану m_a , отримаємо паралелограм $ABDC$ (рис. 22.6). У трикутнику AH_1M_1 кут $\angle AM_1H_1$ дорівнює α і

$$\sin \alpha = \frac{h_a}{m_a}.$$

Нехай Q (допоміжна точка) — центр кола, описаного навколо трикутника ADC , R_1 — радіус цього кола. Тоді

$$\frac{2m_a}{\sin(180^\circ - A)} = 2R_1, \quad \text{або} \quad R_1 = \frac{m_a}{\sin A}.$$

Відрізок QM_1 можна вирахувати за теоремою Піфагора (із трикутника QM_1A):

$$QM_1 = \sqrt{R_1^2 - m_a^2}.$$

Оскільки $\angle CM_1Q = 90^\circ - \alpha$, то за допомогою теореми косинусів із трикутника CQM_1 знайдемо від-

різок $CM_1 = \frac{a}{2}$, а значить, і площу

трикутника ABC . ●

| Задача 9: $A; h_a; m_b$ (!)

● Подвоїмо медіану m_b , отримаємо паралелограм $ABCD$ (рис. 22.7). Введемо допоміжну точку Q — центр кола, описаного навколо

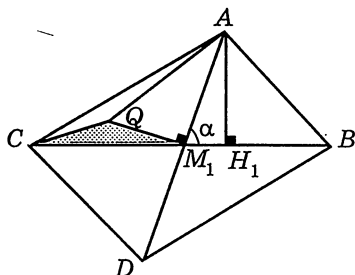


Рис. 22.6

трикутника M_2DC . Радіус цього кола R_1 можна вирахувати:

$$R_1 = \frac{m_b}{2 \sin A}.$$

Позначимо E середину відрізка M_2D . Із $\triangle EQM_2$:

$$QE = \frac{m_b}{2} \operatorname{ctg} A.$$

Далі позначимо: T — основа перпендикуляра, опущеного із точки Q на пряму BC ; $\angle M_2BQ = \varphi_1$; $\angle QBT = \varphi_2$; $\angle DBC = \alpha$,

причому $\sin \alpha = \frac{h_a}{2m_b}$; $QT = BQ \sin \varphi_2$ (із $\triangle BQT$);

$$BQ = \sqrt{BE^2 + QE^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} m_b\right)^2 + \left(\frac{m_b}{2} \operatorname{ctg} A\right)^2} = q \text{ (із } \triangle BQE \text{ і } \triangle M_2QE).$$

$$\text{Із } \triangle CQT: CT = \sqrt{CQ^2 - QT^2} = \sqrt{R_1^2 - QT^2}; BT - CT = a.$$

Оскільки знайдено кут φ_1 (знайдено відрізки BQ і QE в прямокутному трикутнику BQE), і знайдено кут $\varphi_2 = \alpha - \varphi_1$, то, якщо виразити відрізки BT і CT через R_1 і φ_2 (відрізок QT також знайдено), отримаємо сторону трикутника $BC = a$. А значить, задану задачу можна звести до вже розв'язаної: a, A, m_b . ●

Задача 10: $A; m_a; l_a$ (!!!)

● **Перший спосіб.** Подвоїмо медіану: $AD = 2m_a$ (рис. 22.8).

У трикутнику CAD :

$$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bccosA. \quad (1)$$

За формулою бісектриси:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}. \quad (2)$$

Із формули (1) маємо:

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 4m_a^2 - 2bccosA + 2bc.$$

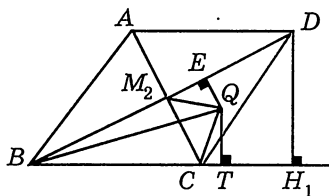


Рис. 22.7

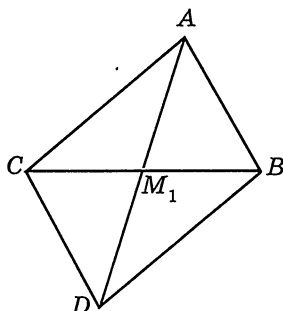


Рис. 22.8

Із формули (2):

$$(b+c)^2 = \frac{4b^2c^2}{l_a^2} \cos^2 \frac{A}{2}.$$

Прирівнюючи праві частини двох останніх формул, маємо:

$$4m_a^2 - 2bc \cos A + 2bc = \frac{4b^2c^2}{l_a^2} \cos^2 \frac{A}{2}.$$

Тоді

$$4b^2c^2 \cos^2 \frac{A}{2} - bc(2 - 2 \cos A)l_a^2 - 4m_a^2l_a^2 = 0.$$

Враховуючи, що

$$2 - 2 \cos A = 2(1 - \cos A) = 4 \sin^2 \frac{A}{2},$$

після скорочення на 4 маємо:

$$b^2c^2 \cos^2 \frac{A}{2} - bc \cdot l_a^2 \sin^2 \frac{A}{2} - m_a^2l_a^2 = 0. \quad (*)$$

Отримаємо квадратне рівняння відносно bc . Дискримінант D :

$$D = l_a^4 \sin^4 \frac{A}{2} + 4m_a^2l_a^2 \cos^2 \frac{A}{2}.$$

$$(bc)_1 = \frac{l_a^2 \sin^2 \frac{A}{2} - \sqrt{l_a^4 \sin^4 \frac{A}{2} + 4m_a^2l_a^2 \cos^2 \frac{A}{2}}}{2 \cos^2 \frac{A}{2}} < 0.$$

$$(bc)_2 = \frac{l_a^2 \sin^2 \frac{A}{2} + l_a \sqrt{l_a^2 \sin^4 \frac{A}{2} + 4m_a^2 \cos^2 \frac{A}{2}}}{2 \cos^2 \frac{A}{2}}.$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{l_a^2 \sin^2 \frac{A}{2} + l_a \sqrt{l_a^2 \sin^4 \frac{A}{2} + 4m_a^2 \cos^2 \frac{A}{2}}}{4 \cos^2 \frac{A}{2}} \cdot \sin A. \quad \bullet$$

● *Другий спосіб.* «Подвоїмо» сторону AC , отримаємо точку D : $CD = 2b$ (рис. 22.9). Тоді $BD = 2m_a$ (теорема про середню лінію трикутника). Проведемо бісектрису AF кута BAD . Ясно, що $AF \perp AL_1$. Покажемо, що $L_1F \parallel DC$. За властивістю бісектриси AL_1 :

$$L_1B : CL_1 = AB : AC.$$

За властивістю бісектриси AF :

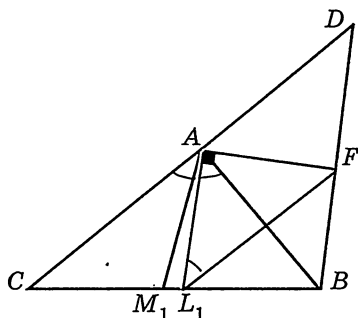


Рис. 22.9

$$AB : AD = BF : FD.$$

Але $AD = AC$, тому

$$AB : AC = BF : FD.$$

Значить,

$$L_1B : CL_1 = AB : AC = BF : FD$$

— паралельність відрізків доведена і

$$\angle AL_1F = \frac{1}{2} A.$$

Відповідно, із трикутника AL_1F можемо знайти AF , бісектрису трикутника ABD , а значить, у

трикутнику ABD є $\angle BAD = 180^\circ - A$; $BD = 2m_a$, і бісектриса AF .

Задача зводиться до знаходження площі трикутника Паппа (аналог a ; A ; l_a). Зазначимо, що трикутник ABD рівновеликий з трикутником ABC (AB — медіана $\triangle BCD$). ●

Задача 11: A ; m_a ; m_b (!!!).

● Маємо:

Підставляємо (3) в (1) і (2), маємо

$$\begin{cases} 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4m_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A & (3) \end{cases}$$

$$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bccosA, \quad (4)$$

$$4m_b^2 = 4c^2 + b^2 - 4bccosA. \quad (5)$$

Віднімемо від рівності (5) рівність (4), знайдемо:

$$4(m_b^2 - m_a^2) = 3c^2 - 6bccosA,$$

звідки

$$c^2 = \frac{4}{3}(m_b^2 - m_a^2) + 2bc \cos A. \quad (6)$$

Підставимо (6) в (4), маємо:

$$b^2 = 4m_a^2 - c^2 - 2bc \cos A = 4m_a^2 - \frac{4}{3}(m_b^2 - m_a^2) - 2bc \cos A - 2bc \cos A,$$

отже,

$$b^2 = \frac{16}{3}m_a^2 - \frac{4}{3}m_b^2 - 4bc \cos A. \quad (7)$$

Зазначимо, що $bc = \frac{2S}{\sin A}$. Тоді, перемноживши (6) і (7),

отримаємо

$$\frac{4S^2}{\sin^2 A} = \frac{2}{3} (2m_b^2 - 2m_a^2 + 6S \operatorname{ctg} A) \cdot \frac{4}{3} (4m_a^2 - m_b^2 - 6S \operatorname{ctg} A),$$

або

$$(9 + 72\cos^2 A)S^2 + 18\sin 2A(m_b^2 - 2m_a^2)S - 4\sin^2 A(m_b^2 - m_a^2)(4m_a^2 - m_b^2) = 0.$$

Отримали квадратне рівняння відносно S . ●

● Другий спосіб розв'язання можливий за допомогою допоміжної точки Q — центра кола, описаного навколо трикутника ABM_2 . ●

І Задача 12: $A; m_b; m_c$ (!!!).

Розв'язання аналогічне до попередньої задачі. Маємо:

$$\begin{cases} 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{cases} \quad (3)$$

Підставимо (3) в (1) і (2):

$$\begin{cases} 4m_b^2 = b^2 + 4c^2 - 4bc \cos A \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 4m_c^2 = c^2 + 4b^2 - 4bc \cos A \end{cases} \quad (5)$$

$$c^2 - b^2 = \frac{4}{3}(m_b^2 - m_c^2),$$

тоді

$$c^2 = b^2 + \frac{4}{3}(m_b^2 - m_c^2). \quad (6)$$

Підставимо (6) в (5):

$$4m_c^2 = b^2 + \frac{4}{3}(m_b^2 - m_c^2) + 4b^2 - 4bc \cos A,$$

звідки

$$b^2 = \frac{16}{15}m_c^2 - \frac{4}{15}m_b^2 + \frac{4bc}{5}\cos A. \quad (*)$$

Підставляючи отриманий вираз для b^2 в (6), маємо:

$$c^2 = \frac{16}{15}m_b^2 - \frac{4}{15}m_c^2 + \frac{4bc}{5}\cos A. \quad (**)$$

Зазначимо, що $bc = \frac{2S}{\sin A}$, а значить, $b^2c^2 = \left(\frac{2S}{\sin A}\right)^2 = \frac{4S^2}{\sin^2 A}$,

тоді, перемноживши (*) і (**), отримаємо

$$\frac{4S^2}{\sin^2 A} = \left(\frac{16}{15} m_c^2 - \frac{4}{15} m_b^2 + \frac{8S}{5} \operatorname{ctg} A \right) \left(\frac{16}{15} m_b^2 - \frac{4}{15} m_c^2 + \frac{8S}{5} \operatorname{ctg} A \right),$$

або

$$(225 - 144 \cos^2 A) S^2 - 36 \sin 2A (m_c^2 + m_b^2) S - 4 \sin^2 A (4m_c^2 - m_b^2)(4m_b^2 - m_c^2) = 0.$$

Маємо квадратне рівняння відносно S . ●

● Другий спосіб розв'язання можливий з точкою Q , центром кола, описаного навколо трикутника ACM_3 (рис. 22.10). Міркуватимемо так.

1) Нехай Q — центр кола, описаного навколо $\triangle AM_3C$. Подвоїмо MM_3 за точку M_3 до точки N . Нехай T — середина CM_3 .

2) Розглянемо $\triangle QTM_3$ ($\angle T = 90^\circ$); $TM_3 = \frac{m_c}{2}$; $\angle TQM_3 = \angle A$.

Тоді із $\triangle QTM_3$:

$$QT = \frac{m_c}{2} \operatorname{ctg} A, \quad QM_3 = R_1 = \frac{m_c}{2 \sin A}.$$

3) Розглянемо $\triangle QTN$:

$$TN = \frac{m_c}{2} + \frac{m_c}{3} = \frac{5}{6} m_c,$$

$$\text{звідси } QN = \sqrt{QT^2 + TN^2} = \frac{m_c}{6} \sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25},$$

$$\angle QNT = \alpha = \arcsin \frac{QT}{QN} = \arcsin \frac{3 \operatorname{ctg} A}{\sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}}.$$

4) Розглянемо $\triangle AQN$:

$$QA = R_1 = \frac{m_c}{2 \sin A}, \quad QN = \frac{m_c}{6} \sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}.$$

Із рівності трикутників ANM_3 і BMM_3

$$AN = BM = \frac{2}{3} m_b.$$

Маємо:

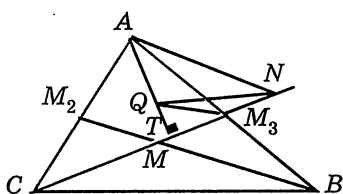


Рис. 22.10

$$\begin{aligned} \cos \angle QNA &= \frac{AN^2 + QN^2 - AQ^2}{2AN \cdot QN} = \\ &= \frac{\frac{4}{9} m_b^2 + \frac{m_c^2}{36} (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25) - \frac{m_c^2}{4 \sin^2 A}}{2 \cdot \frac{2m_b}{3} \cdot \frac{m_c}{6} \sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \angle QNA &= \frac{16m_b^2 \sin^2 A + m_c^2(9 \cos^2 A + 25 \sin^2 A) - 9m_c^2}{8m_b m_c \sin^2 A \sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}} = \\ &= \frac{16m_b^2 \sin^2 A + 9m_c^2 + 16m_c^2 \sin^2 A - 9m_c^2}{8m_b m_c \sin^2 A \sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}} = 2 \frac{m_b^2 + m_c^2}{m_b m_c \sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}};\end{aligned}$$

отже,

$$\cos \angle QNA = 2 \frac{m_b^2 + m_c^2}{m_b m_c \sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}} = \cos \beta.$$

5) Розглянемо $\triangle ANC$:

$$AN = \frac{2}{3} m_b; \quad CN = \frac{4}{3} m_c; \quad \angle CNA = \angle ANQ + \angle QNT,$$

тоді

$$\begin{aligned}AC^2 &= AN^2 + CN^2 - 2AN \cdot CN \cos \angle CNA = \\ &= \frac{4}{9} m_b^2 + \frac{16}{9} m_c^2 - \frac{16}{9} m_b m_c \cos(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Зазначимо, що

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \cos \beta - \sin \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{9 \operatorname{ctg}^2 A}{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}} \cdot 2 \frac{m_b^2 + m_c^2}{m_b m_c \sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}} - \\ &- \frac{3 \operatorname{ctg} A}{\sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}} \cdot \sqrt{1 - 4 \frac{(m_b^2 + m_c^2)^2}{m_b^2 m_c^2 (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25)}} = \\ &= \frac{2\sqrt{25}(m_b^2 + m_c^2)}{m_b m_c (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25)} - \frac{3 \operatorname{ctg} A \sqrt{m_b^2 m_c^2 (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25) - 4(m_b^2 + m_c^2)^2}}{m_b m_c (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25)} = \\ &= \frac{10(m_b^2 + m_c^2) - 3\sqrt{m_b^2 m_c^2 (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25) - 4(m_b^2 + m_c^2)^2} \operatorname{ctg} A}{m_b m_c (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25)}.\end{aligned}$$

$$\text{Отже, } b = AC = \frac{2}{3} \sqrt{m_b^2 + 4m_c^2 - 4m_b m_c \cos(\alpha + \beta)}.$$

$$\text{Аналогічно } c = AB = \frac{2}{3} \sqrt{m_c^2 + 4m_b^2 - 4m_b m_c \cos(\alpha + \beta)} \text{ із } \triangle ANM_3,$$

тоді

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{2}{9} \sqrt{m_b^2 + 4m_c^2 - 4m_b m_c \cos(\alpha + \beta)} \times \\ &\times \sqrt{m_c^2 + 4m_b^2 - 4m_b m_c \cos(\alpha + \beta)} \sin A,\end{aligned}$$

де

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{10(m_b^2 + m_c^2) - 3\sqrt{m_b^2 m_c^2 (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25)} - 4(m_b^2 + m_c^2)^2 \operatorname{ctg} A}{m_b m_c (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25)}. \bullet$$

●Третій спосіб. Пункти 1–4 аналогічні.

$$5) \text{ Розглянемо } \triangle CMB: CM = \frac{2}{3} m_c; BM = \frac{2}{3} m_b;$$

$$\angle CMB = 180^\circ - \angle M_3 MB = 180^\circ - \angle CNA = 180^\circ - (\alpha + \beta);$$

$$S_{\triangle CMB} = \frac{1}{2} CM \cdot BM \sin \angle CMB = \frac{2}{9} m_c m_b \sin(\alpha + \beta);$$

$$S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle CMB} = \frac{2}{3} m_c m_b \sin(\alpha + \beta).$$

При цьому:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \\ &= \frac{3 \operatorname{ctg} A}{\sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}} \times \frac{2(m_b^2 + m_c^2)}{m_b m_c \sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}} + \frac{5}{\sqrt{9 \operatorname{ctg}^2 A + 25}} \times \\ &\times \sqrt{1 - \frac{4(m_b^2 + m_c^2)^2}{m_b^2 m_c^2 (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25)}} = \frac{6 \operatorname{ctg} A (m_b^2 + m_c^2) + 5 \sqrt{m_b^2 m_c^2 (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25) - 4(m_b^2 + m_c^2)^2}}{m_b m_c (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25)}. \end{aligned}$$

Тоді остаточно отримуємо:

$$S = \frac{12 \operatorname{ctg} A (m_b^2 + m_c^2) + 10 \sqrt{m_b^2 m_c^2 (9 \operatorname{ctg}^2 A + 25) - 4(m_b^2 + m_c^2)^2}}{3(9 \operatorname{ctg}^2 A + 25)}. \bullet$$

Задача 13. h_a ; m_a ; R .

●Позначимо φ кут AM_1H_1 (рис. 22.11). Тоді $\sin \varphi = \frac{h_a}{m_a}$.

У трикутнику OM_1A $\angle OM_1A = 90^\circ - \varphi$. За теоремою косинусів: $R^2 = OM_1^2 + m_a^2 - 2OM_1 m_a \cdot \cos(90^\circ - \varphi)$. Отримаємо квадратне рівняння відносно OM_1 .

Із прямокутного трикутника OM_1C тепер знайдемо M_1C , а значить, і a . ●

Задача 14. R ; r ; a .

Вказівка. Скористатися формулою:

$$r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

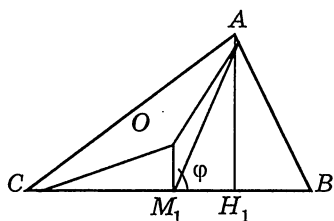


Рис. 22.11

ЗАДАЧА В МІЛЬЙОН ДОЛАРІВ

Ну як ще привернути увагу до задачі, у якій є дивовижна, хоча, можливо, й суперечлива, привабливість: її класичне геометричне розв'язання може зробити, мабуть, тільки сам автор задачі.

Цінність задачі розпочинається вже з вишуканої умови.

Побудувати півкруг з кінцями діаметра на сторонах BC і AC заданого трикутника ABC так, щоб він дотикався до сторони AB у заданій точці D (рис. 23.1).

Розв'язання складається із двох допоміжних задач:

Перша допоміжна задача:

Всередині кута BAC задано точку D . Побудувати прямокутний трикутник DMN ($\angle MDN = 90^\circ$), щоб його вершина збігалася з точкою D , дві інші вершини належали (по одній) сторонам кута і гіпотенуза MN була перпендикулярна до заданого напрямку l (рис. 23.2).

● Задача розв'язується традиційно за допомогою гомотетії: будемо довільний відрізок M_1N_1 , перпендикулярний до променя l . На ньому як на діаметрі опишемо півкруг із центром O_1 . З'єднуємо точки A і D , отримуємо точку D_1 і коефіцієнт гомотетії

$$K = \frac{DA}{D_1A}.$$

Будуємо трикутник MDN , гомотетичний трикутнику $M_1D_1N_1$ із центром гомотетії точкою A і коефіцієнтом K . Зауважимо (і це суттєво), що роль променя l може виконати будь-яка пряма t із заданим напрямком (паралельно до променя l : $t \parallel l$). ●

Аналіз.

Нехай півкруг побудовано (рис. 23.3). Точка O — центр, EF — діаметр.

Друга допоміжна задача:

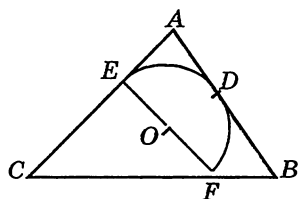


Рис. 23.1

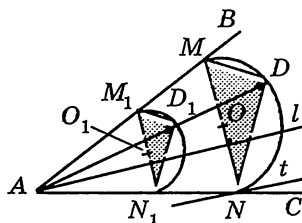


Рис. 23.2

Будуємо трикутник EDF^1 . Для цього ми симетрично перетворимо точку F і пряму BC відносно точки D . Отримаємо точку F^1 і пряму n , паралельну до сторони BC трикутника ABC . Ця пряма перетинатиме сторони трикутника в точках B^1 і P , а значить, кут CPF^1 — заданий.

Оскільки $EO = OF$, то відрізок OD є середньою лінією трикутника EF^1F , а значить, $EF^1 \parallel OD$. Оскільки $\angle ODB = 90^\circ$, то відрізок EF^1 перпендикулярний до сторони AB .

У першій допоміжній задачі трикутник EF^1D , аналогічний до трикутника DMN , можна побудувати: кут EPF^1 — задано, як і точку D . Кут EDF^1 — прямий (він суміжний з кутом EDF , який дорівнює 90°), точки E і F^1 належать сторонам кута PC і PF^1 , і гіпотенуза EF^1 перпендикулярна до заданого напрямку AB .

Побудова. Будуємо пряму, симетричну до прямої BC відносно точки D . Отримуємо точку P , а значить, кут CPB^1 , в який вписуємо прямокутний трикутник з вершиною в точці D ; гіпотенуза якого перпендикулярна до сторони AB . Отримуємо точки E і F^1 , а значить, і точку F (вона симетрична до точки F^1 відносно точки D). На відрізку EF побудуємо півкруг.

Зазначимо, що задачу можна розв'язати за допомогою алгебри, але це у «вартість» задачі не входить. Подамо це розв'язання (рис. 23.4)

● Нехай D — точка дотику, $ME \parallel OD$, $TF \parallel OD$. Позначимо $BE = k$, $FC = l$, $OD = x$. Покажемо, що величина $k - l = d$ задана. Дійсно, $OT = OM$, $OD \parallel TF \parallel ME$, звідси за теоремою Фалеса $FD = DE$. Тоді маємо $k - l = BD - DC$, а ця різниця задана, оскільки точка D — фіксована.

Тоді

$$x = \frac{ME + TF}{2},$$

або

$$2x = ME + TF = k \operatorname{tg} B + l \operatorname{tg} C. \quad (1)$$

За теоремою Піфагора:

$$4x^2 = MT^2 = EF^2 + (TF - ME)^2 = (a - k - l)^2 + (k \operatorname{tg} B - l \operatorname{tg} C)^2. \quad (2)$$

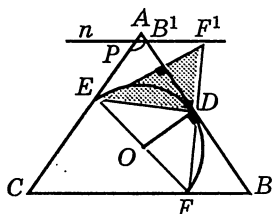


Рис. 23.3

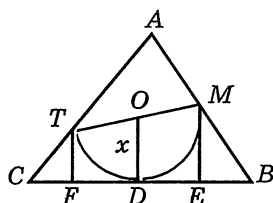


Рис. 23.4

Порівнюючи (1) і (2), отримаємо

$$(ktgB + ltgC)^2 = (a - k - l)^2 + (ktgB - ltgC)^2.$$

Далі

$$(ktgB + ltgC)^2 - (ktgB - ltgC)^2 = (a - k - l)^2,$$

звідки

$$4kltgBtgC = (a - k - l)^2.$$

Враховуючи співвідношення

$$k = l + d, 4(l + d)ltgBtgC = (a - d - 2l)^2,$$

отримаємо квадратне рівняння відносно l . Значить, знайдемо точку F . ●

Так за що ж мільйон? За демонстрацію непересічного інтелекту автора задачі, який, на жаль, автору книги невідомий. Можу лише ще раз виразити захоплення геометричним розв'язанням, чого і вам бажаю!

Глава 24

ФОРМУЛА ЯК СЮЖЕТ ДЛЯ ДЕТЕКТИВА

В геометрії трикутника відрізок OH досить помітний, оскільки визначає пряму Ейлера. Довжину його можна вираховувати за формулою

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \quad (1)$$

Із цієї формули виходить популярна нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2, \quad (5)$$

при цьому знак рівності відповідає випадку рівностороннього трикутника.

За допомогою формули Ейлера, про яку мова піде нижче, можна вивести іншу формулу для OH (вона не просто рідко зустрічається, а й принципово відрізняється від загальновідомої наявністю знаків $\mp$).

$$OH^2 = R^2 \mp \frac{\sqrt{(4R^2 - a^2)(4R^2 - b^2)(4R^2 - c^2)}}{R}. \quad (*)$$

Наявність у формулі знаків $\mp$ наптовхує на думку, що з формулою (5) не все гаразд і, можливо, вона правильна лише для нетупокутного трикутника?!

Підозра посилюється, оскільки нерівність (5), очевидно, неповна: в прямокутному трикутнику, наприклад,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(!).$$

Маємо сюжет для детектива — почнемо розслідування! Доведемо формулу (*) і як наслідок (!) — формулу (1).

● Має місце *формула Ейлера*

$$S_x = \frac{S}{4} \left| 1 - \left(\frac{OX}{R} \right)^2 \right|.$$

Нехай $X \equiv H$. Знайдемо $S_x \equiv S_H$, тобто площа ортоцентричного трикутника

$$\begin{aligned} S_H &= \frac{1}{2} H_1 H_3 \cdot H_1 H_2 \sin(180^\circ - 2A) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{R}{2} \sin 2B \cdot 2 \cdot \frac{R}{2} \sin 2C \sin 2A = \\ &= \frac{1}{2} R^2 \sin 2B \sin 2C \sin 2A. \end{aligned}$$

Оскільки один із множників може виявитися від'ємним (у тупокутному трикутнику!), то останню формулу запишемо так:

$$S_H = \frac{1}{2} R^2 |\sin 2A \sin 2B \sin 2C|, \text{ і при } X \equiv H \quad \frac{S_H}{S} = \frac{1}{4} \left| 1 - \frac{OH^2}{R^2} \right|,$$

або

$$8R^2 |\cos A \cos B \cdot \cos C| = |R^2 - OH^2|.$$

Оскільки для гострокутного трикутника (рис. 24.1)

$$\cos A \cos B \cos C > 0, R > OH$$

і для тупокутного трикутника (рис. 24.2)

$$\cos A \cos B \cos C > 0, R > OH$$

(обидва підмодульних вирази від'ємні), то знак модуля можна прибрати!

$$OH^2 = R^2 - 8R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Оскільки $AH = 2R|\cos A|$, $BH = 2R|\cos B|$, $CH = 2R|\cos C|$, то попередню формулу можна записати (ось де з'являється $\mp$):

$$OH^2 = R^2 \mp \frac{AH \cdot BH \cdot CH}{R},$$

де знак «мінус» відповідає *гострокутному* трикутнику, а знак «плюс» — *тупокутному*.

Отже,

$$OH^2 = R^2 \mp \frac{\sqrt{4R^2 - a^2} \cdot \sqrt{4R^2 - b^2} \cdot \sqrt{4R^2 - c^2}}{R},$$

що і потрібно було довести. ●

Виведемо з цієї формули, як наслідок, формулу

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

і перевіримо, чи справді вона універсальна, адже тут лише один знак між $9R^2$ і $(a^2 + b^2 + c^2)$.

Для цього формулу (*) запишемо так:

$$OH^2 = R^2 \mp Q, \quad (\alpha)$$

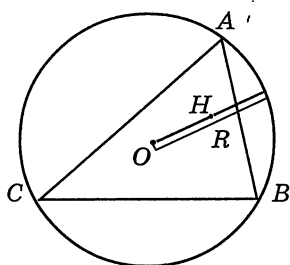


Рис. 24.1

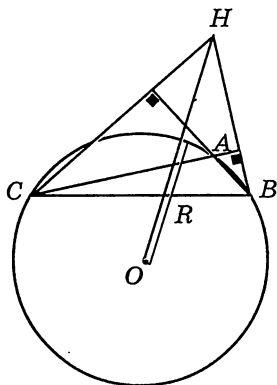


Рис. 24.2

де

$$Q^2 = \frac{(4R^2 - a^2)(4R^2 - b^2)(4R^2 - c^2)}{R^2}.$$

Далі маємо:

$$\begin{aligned} Q^2 &= \frac{(16R^4 - 4R^2a^2 - 4R^2b^2 + a^2b^2)(4R^2 - c^2)}{R^2} = \\ &= \frac{1}{R^2}(64R^6 - 16R^4a^2 - 16R^4b^2 - 16R^4c^2 + \\ &+ 4R^2a^2b^2 + 4R^2a^2c^2 + 4R^2c^2b^2 - a^2b^2c^2) = \\ &= 64R^4 - 16R^2(a^2 + b^2 + c^2) + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - \frac{a^2b^2c^2}{R^2} = \\ &= 64R^4 - 16R^2(a^2 + b^2 + c^2) + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 - 16S^2. \end{aligned}$$

Але за формулою Герона (якщо сторони трикутника — ірраціональні числа):

$$16S^2 = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2,$$

$$\begin{aligned} Q^2 &= 64R^4 - 16R^2(a^2 + b^2 + c^2) + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 - 4a^2c^2 + (a^2 + c^2 - b^2)^2 = \\ &= 64R^4 - 16R^2(a^2 + b^2 + c^2) + 4a^2b^2 + 4b^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = \\ &= 64R^4 - 16R^2(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2)^2 = (8R^2 - (a^2 + b^2 + c^2))^2. \end{aligned}$$

Отже, $Q^2 = (8R^2 - (a^2 + b^2 + c^2))^2$, або $Q = |(8R^2 - (a^2 + b^2 + c^2))|$.

«Розкриємо» отриманий модуль:

1) $Q = a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2$, якщо

$$a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2, \quad (1^0)$$

2) $Q = 8R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, якщо

$$a^2 + b^2 + c^2 < 8R^2. \quad (2^0)$$

Отримаємо формулу (1) із формули (α).

Випадок (1⁰) доцільний при $R^2 - Q$, тобто для гострокутного трикутника:

$$OH^2 = R^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2) = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

У випадку (2⁰) в формулі (α) при $OH^2 = R^2 + Q$ для тупокутного трикутника:

$$OH^2 = R^2 + 8R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Залишається перевірити правильність нерівностей (1⁰) і (2⁰).

(1⁰). Отже, доведемо, що якщо кути A , B і C гострі, то

$$a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2.$$

Дійсно, маємо: $4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) > 8R^2$,

або

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C < -1,$$

або

$$-2\cos C \cos(A - B) + 2\cos^2 C < 0.$$

Враховуючи, що $\cos C > 0$, маємо $\cos(A - B) > \cos C$.

Для визначеності $A > B$. Тоді $A - B < C$, або:

$$A - B < 180^\circ - A - B,$$

$\angle A < 90^\circ$ — правильно.

(2⁰). Нехай трикутник ABC — тупокутний. Доведемо, що $a^2 + b^2 + c^2 < 8R^2$. Маємо: $-2\cos C \cos(A - B) + 2\cos^2 C > 0$.

Нехай $\angle C > 90^\circ$. Тоді $\cos(A - B) > \cos C$, або $A - B < C$, або $\angle A < 90^\circ$ — правильно.

Тепер можна зробити остаточний висновок:

1) Якщо трикутник ABC — гострокутний, то

$$a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2 \text{ і } OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

2) Якщо трикутник ABC — тупокутний, то

$$a^2 + b^2 + c^2 < 8R^2, \text{ а значить, знову } OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Отже, підозри знято!

Формула

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

має місце для довільного трикутника!

А також!

Під час «розслідування» з'ясували всю «правду» про нерівність (5):

Нерівність $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ — незрозуміло! Отже,

1) Якщо $\triangle ABC$ — нетупокутний, то

$$8R^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

2) Якщо $\triangle ABC$ — негострокутний, то

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2.$$

3) Якщо $\triangle ABC$ — прямокутний, то

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2.$$

Справедливість перемогла!

САМОДОСТАТНІСТЬ ЗОВНІВПИСАНОГО КОЛА

Зовнівписане коло цілком закономірно порівнюється з колом, вписаним у трикутник. Однак у нього є свої, притаманні лише йому властивості, які ще мало вивчені.

Розглянемо деякі з них. Окрім власної собівартості, вони дозволяють провести аналогії, які досі в математичній літературі не зустрічалися.

Формула (відрізок M_1W_1): $M_1W_1 = \frac{r_a - r}{2}$. (1)

● Доведення. Проведемо пряму IM_1 , яка перетинатиме відрізок I_aT_1 в точці Q (рис. 25.1). Оскільки $IW_1 = W_1I_a$, то M_1W_1 — середня лінія в трикутнику II_aQ , а значить,

$$M_1 W_1 = \frac{1}{2} Q I_a .$$

Але трикутники T_1QM_1 і K_1IM_1 рівні, отже, $T_1Q = r$ і

$$M_1 W_1 = \frac{r_a - r}{2},$$

що й потрібно було довести. ●

Формула $II_a^2 = 4R(r_a - r)$

(аналог формули Ейлера)

● **Доведення.** Проведемо діаметр DW_1 (рис. 25.2), в трикутнику CW_1D :

$$CW_1^2 = DW_1 \cdot M_1 W_1.$$

Застосуємо формулу (1) і отримаємо

$$II_a = 2CW_1 = 2\sqrt{DW_1 \cdot M_1 W_1} = 2\sqrt{2R \cdot \frac{r_a - r}{2}},$$

значить, $II_a^2 = 4R(r_a - r)$. ●

За допомогою формули

$$II_a^2 = 4R(r_a - r)$$

виведемо формулу Ейлера

$$OI_a^2 = R^2 + 2R \cdot r_a.$$

● Доведення (рис. 25.3). Оскільки $IW_1 = W_1I_a$, то за формулою медіани

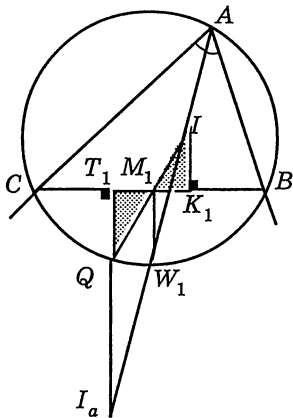


Рис. 25.1

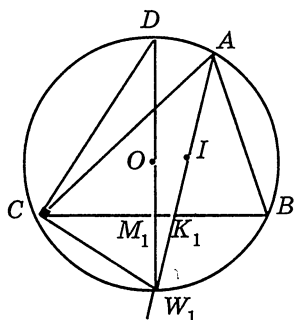


Рис. 25.2

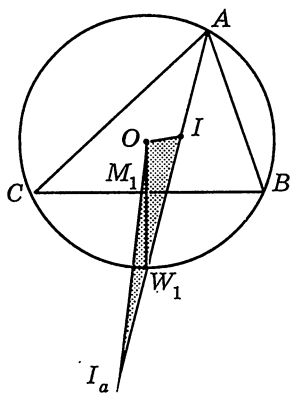


Рис. 25.3

$$OW_1^2 = \frac{2(OI^2 + OI_a^2) - II_a^2}{4}.$$

Позначимо $OI_a = d$. Маємо:

$$4R^2 = 2(R^2 - 2Rr + d^2) - 4R(r_a - r),$$

або

$$4R^2 = 2R^2 - 4Rr + 2d^2 - 4Rr_a + 4Rr,$$

звідки

$$2d^2 = 2R^2 + 4Rr_a, \text{ або } d^2 = R^2 + 2Rr_a. \bullet$$

Формула $r_a = \frac{S}{p-a}$.

Хто ж не знає цю формулу? І справді. Але ми доведемо її, скажімо так, «самодостатньо», незалежно від формул вписаного кола. І допоможе нам в цьому знову відрізок M_1W_1 , або формула

$$M_1W_1 = \frac{r_a - r}{2}.$$

● Доведення. Перший спосіб (рис. 25.4). Трикутники

CW_1M_1 і AK_3I подібні: $\frac{M_1W_1}{IK_3} = \frac{CM_1}{AK_3}$. Оскільки

$$AK_3 = p - a, \quad M_1W_1 = \frac{r_a - r}{2}, \quad \text{то } r_a - r = \frac{a \cdot r}{p - a}, \quad \text{або}$$

$$r_a = r + \frac{ar}{p-a} = \frac{r(p-a+a)}{p-a} = \frac{rp}{p-a} = \frac{S}{p-a}.$$

Другий спосіб. Маємо $M_1W_1 = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, а $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = r_a - r$, або

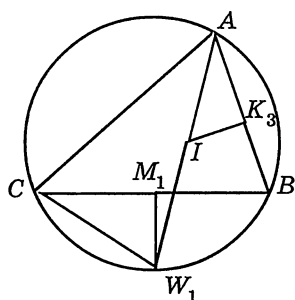


Рис. 25.4

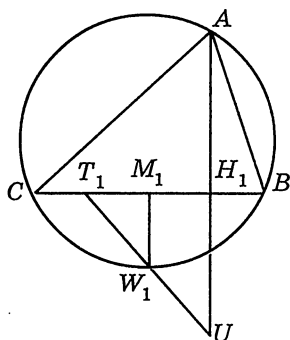


Рис. 25.5

$$r_a = a \operatorname{tg} \frac{A}{2} + r.$$

Оскільки $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$, то $r_a = a \cdot \frac{r}{p-a} + r = \frac{S}{p-a}$. •

Задача 1. Довести, що $r_a > r$.

• Доведення. Оскільки $M_1W_1 > 0$, то $\frac{r_a - r}{2} > 0$, або $r_a > r$. •

Задача 2. Пряма T_1W_1 (T_1 — точка дотику зовнішнього кола до сторони BC трикутника ABC) перетинає продовження висоти AH_1 в такій точці U , що $H_1U = r_a$.

• Доведення (запропоновано Яковлевим С.).

Відомо, що $T_1M_1 = \frac{b-c}{2}$ (рис. 25.5). $M_1H_1 = \frac{b^2 - c^2}{2a}$, значить,

$$T_1H_1 = T_1M_1 + M_1H_1 = \frac{b-c}{2} + \frac{b^2 - c^2}{2a} = \frac{p(b-c)}{a}.$$

Трикутники $T_1M_1W_1$ і T_1H_1U подібні:

$$\frac{T_1M_1}{T_1H_1} = \frac{M_1W_1}{H_1U}.$$

Позначимо $H_1U = x$. Тоді

$$\frac{\frac{b-c}{2}}{\frac{p(b-c)}{a}} = \frac{r_a - r}{2 \cdot x}.$$

Маємо: $x = \frac{2p(r_a - r)}{2a} = \frac{p \cdot r_a - S}{a}$. Але $S = r_a(p - a)$, отже,

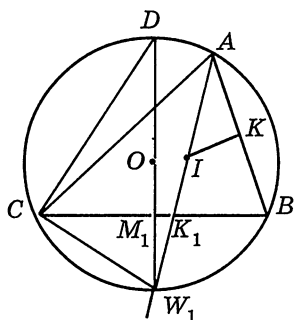


Рис. 25.6

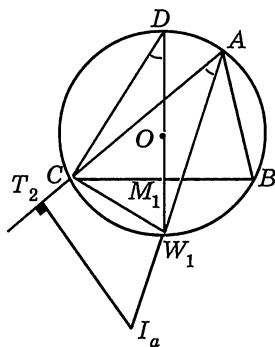


Рис. 25.7

$$x = \frac{pr_a - r_a(p - a)}{a} = r_a. \bullet$$

Нова чудова і дуже перспективна аналогія

$$AI \cdot IW_1 = 2Rr, \quad (1^0)$$

$$AI_a \cdot I_aW_1 = 2Rr_a. \quad (2^0)$$

Аналогія простежується і у самому доведенні:

Доведемо формулу (1⁰). Оскільки $\triangle CDW_1 \sim \triangle AIK$ (рис. 25.6),

то

$$\frac{2R}{AI} = \frac{CW_1}{r}.$$

Враховуючи, що $CW_1 = IW_1$, маємо:

$$2Rr = AI \cdot IW_1.$$

Доведемо формулу (2⁰). Оскільки $\triangle AI_aT_2 \sim \triangle DW_1C$ (рис. 25.7),

то $\frac{2R}{I_aA} = \frac{CW_1}{r_a}$. Враховуючи, що $CW_1 = I_aW_1$, маємо:

$$AI_a \cdot I_aW_1 = 2Rr_a.$$

Новий спосіб доведення формули Ейлера для зовнішписаного кола:

$$OI_a^2 = R^2 + 2R \cdot r_a.$$

Проведемо пряму I_aO , яка перетинатиме коло, описане навколо трикутника ABC , в точках D і E (рис. 25.8). Тоді

$$DI_a \cdot EI_a = AI_a \cdot I_aW_1. \quad (1)$$

Позначимо $OI_a = x$, тоді $DI_a = R + x$; $EI_a = x - R$. Враховуючи формулу (2⁰), маємо $(x + R)(x - R) = 2R \cdot r_a$, звідки

$$x^2 - R^2 = 2Rr_a, \text{ або } x^2 = R^2 + 2Rr_a. \bullet$$

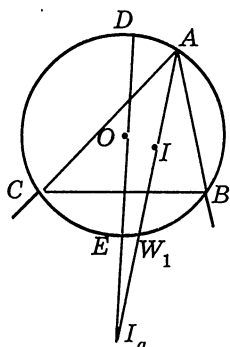


Рис. 25.8

ЛЕМУС, ШТЕЙНЕР... ХТО НАСТУПНИЙ?

У книгах із геометрії неодноразово розглядалася задача, яку в 1840 році С. Л. Лемус запропонував видатному німецькому геометру Якобу Штейнеру: якщо в трикутнику бісектриси двох внутрішніх кутів рівні, то він рівнобедрений. Її, на перший погляд, простота обманлива, а коли познайомишся із задачею ближче, «зачаровуєшся», як, наприклад, давніми задачами. «Несподіваність оберненої задачі» захоплює і... зве до пошуків нових аналогій.

Розглянемо серію задач, які умовно продовжують вивчення проблеми Штейнера–Лемуса.

Задача 1. Довести, що якщо бісектрису трикутника видно з основ двох інших бісектрис під однаковими кутами, то трикутник рівнобедрений.

● Доведення. Нехай L_1, L_2, L_3 — основи бісектрис, проведених із вершин A, B, C відповідно (рис. 26.1). Оскільки трикутник AL_2L_1 рівний трикутнику AL_3L_1 , то $AL_2 = AL_3$, отже, $\triangle AL_2I = \triangle AL_3I$ (I — інцентр), відповідно, $\angle AIL_2 = \angle AIL_3$. Ці кути — зовнішні в трикутниках AIB і AIC відповідно, значить,

$$\frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle C,$$

звідки $\angle B = \angle C$, що й доводить твердження задачі. ●

Задача 2. Якщо відрізки IL_2 і IL_3 видно із точок C і B під однаковими кутами, то трикутник ABC — рівнобедрений. Довести.

Задача 3. Якщо відрізки IL_2 і IL_3 видно із точки L_1 під однаковими кутами, то трикутник ABC — рівнобедрений. Довести.

Вказівка. Задача зводиться до задачі 1.

Задача 4. Якщо кола, описані наколо трикутників AIC і AIB , рівні, то трикутник ABC — рівнобедрений.

Задача 5. Якщо кола, описані навколо трикутників AL_1C і AL_1B , рівні, то трикутник ABC — рівнобедрений.

Задача 6 (!). Якщо проекції бісектрис BL_2 і CL_3 на сторону BC рівні, то трикутник рівнобедрений.

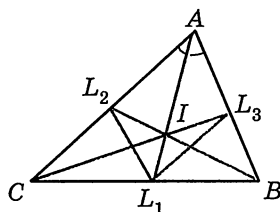


Рис. 26.1

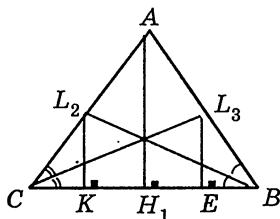


Рис. 26.2

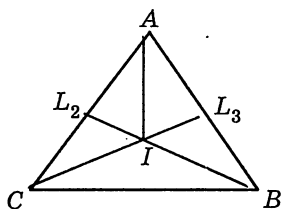


Рис. 26.3

● Доведення. Нехай BK і CE — проєкції бісектрис BL_2 і CL_3 : $BK = CE$ (рис. 26.2). З'єднаємо точки L_2 і K , L_3 і E . З подібності трикутників BEL_3 і BH_1A (H_1 — основа висоти, проведеної з вершини A):

$$\frac{BE}{BH_1} = \frac{BL_3}{BA} = \frac{a}{a+b}.$$

Звідси $BE = BH_1 \cdot \frac{a}{a+b}$. Аналогічно: $CK = CH_1 \cdot \frac{a}{a+c}$.

За умовою

$$BH_1 \cdot \frac{a}{a+b} = CH_1 \cdot \frac{a}{a+c}, \text{ або } \frac{BH_1^2}{(a+b)^2} = \frac{CH_1^2}{(a+c)^2}.$$

Застосуємо теорему Піфагора і отримаємо:

$$\frac{c^2 - h_a^2}{(a+b)^2} = \frac{b^2 - h_a^2}{(a+c)^2}. \quad (1)$$

або $(c^2 - h_a^2)(a+c)^2 = (b^2 - h_a^2)(a+b)^2$. Якщо $c > b$, то

$$(a+c)^2 > (a+b)^2, \quad c^2 - h_a^2 > b^2 - h_a^2$$

— порушена рівність (1). Аналогічно доводимо, що не може бути $c < b$. Значить, $c = b$, що й потрібно було довести. ●

Задача 7. Довести, що якщо $IL_2 = IL_3$, то:

1) $\triangle ABC$ — рівнобедрений або

2) $\angle A = 60^\circ$.

● Доведення. Розглянемо трикутники AIL_2 і AIL_3 . Можливі варіанти:

а) $\angle AL_2I = \angle AL_3I$ — тоді трикутник ABC рівнобедрений (рис. 26.3);

б) $\angle AL_3I = 180^\circ - \angle AL_2I$ і точки A, L_2, L_3 належать одному колу.

Відповідно, $\angle L_3IL_2 = 180^\circ - \angle A$.

Але $\angle L_3IL_2 = 90^\circ + \frac{A}{2}$, відповідно, $90^\circ + \frac{A}{2} + A = 180^\circ$, звідки

$\angle A < 60^\circ$. ●

Задача 8. У трикутник ABC вписано коло, яке дотикається до сторін AB , BC і CA в точках C_1 , A_1 і B_1 відповідно. Відомо, що довжини відрізків AA_1 , BB_1 рівні. Довести, що $AC = BC$.

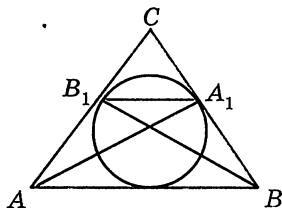


Рис. 26.4

● **Доведення.** Розглянемо трикутник AA_1B_1 і BB_1A_1 (рис. 26.4). Вони мають спільну сторону і рівні за умовою сторони AA_1 і BB_1 . Окрім того, рівні їхні кути AB_1A_1 і BA_1B_1 . Це виходить із рівності відрізків $CA_1 = CB_1$. Зазначимо, що кути AB_1A_1 і BA_1B_1 — тупі, відповідно, інші кути трикутників, які розглядаються, гострі. За теоремою синусів

$$\sin \angle A_1AB_1 = \frac{A_1B_1}{A_1A} \sin \angle AB_1A_1 = \frac{A_1B_1}{B_1B} \sin \angle BA_1B_1 = \sin \angle B_1BA_1,$$

тому $\angle A_1AB_1 = \angle B_1BA_1$ (ці кути гострі), значить, і $\angle AA_1B_1 = \angle BB_1A_1$. Так трикутники AA_1B_1 і BB_1A_1 рівні за стороною і двома кутами. Значить, $AB_1 = BA_1$ і $AC = AB$. ●

Глава 27

ПОШУКИ НЕСПОДІВАНИХ ТВЕРДЖЕНЬ

Математика — це мистецтво давати однакові назви різним видам, а доведення, створені для окремого об'єкта, безпосередньо застосовувати до багатьох нових об'єктів без подальших змін.

А. Пуанкаре

Такого у нас ще не було.

Із фольклору

Шановний читачу! Зараз Ви торкнетеся таємниці життєтворчості — створенню нового. Нових задач, доведень, нових теорем. Ви зможете на конкретних прикладах побачити, як поєднуються два важливі наукові принципи: **утвердження правильності деякого факта як окремого випадка доведеної загальної залежності, і навпаки — узагальнення, здавалось би, незначного факта до відомої теореми.**

У геометрії трикутник часто розглядають як окремий випадок чотирикутника (наприклад, приймається, що одна зі сторін чотирикутника дорівнює нулю). У такому випадку кажуть, що чотирикутник «вироджується» в трикутник.

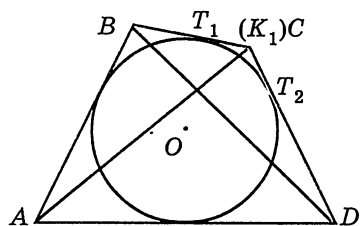


Рис. 27.1

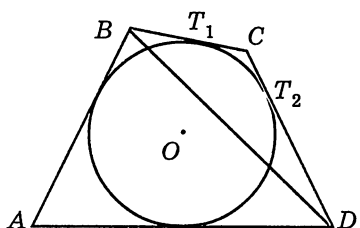


Рис. 27.2

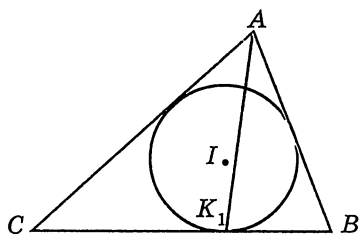


Рис. 27.3

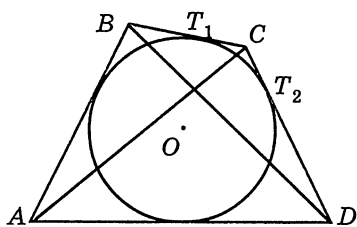


Рис. 27.4

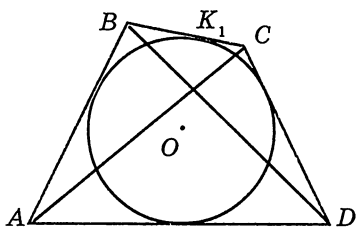


Рис. 27.5

Прирівнюванням до нуля однієї зі сторін чотирикутника його перетворення, «виродження», в трикутник не обмежується. Наприклад, можна простежити за змінами параметрів чотирикутника, коли дві його сторони, що мають спільну вершину, «витагуються» у пряму, тоді коли внутрішній кут чотирикутника наближається до 180° . Що при цьому відбудеться з його діагоналями? Як виражатимуться властивості описаного чотирикутника в «новонародженому» трикутнику?

На рисунках 27.1–27.5 показано, як чотирикутник $ABCD$, описаний навколо кола, перетворюється в трикутник, коли кут BCD «наближається» до 180° . У цьому випадку ламана BCD перетворюється у відрізок BD , точки дотику T_1 і T_2 вписаного кола зі сторонами BC і CD «наближаються» одна до одної, і зрештою маємо їх збіг (точка K_1). Отже, якщо задано трикутник ABC , в якому вписане коло дотикається до сторони BC в точці K_1 (рис. 27.3), то його можна розглядати як «вироджений» описаний чотирикутник $ABCD$. При цьому відрізки AB , AC , BK_1 , CK_1 трикутника ABC відповідають сторонам цього чотирикутника, а в точці K_1 «сховані» точки T_1 , T_2 і вершина C чотирикутника $ABCD$, описаного навколо кола з центром O (у трикутнику ABC — це інцентр I). Зазначимо, що відрізки BC і AK_1 трикутника ABC — є діагоналями BD і AC чотирикутника $ABCD$. Оскільки точка K_1 буде

надалі відігравати суттєву роль, отриманий трикутник із вписаним в нього колом, що дотикається до сторони BC в точці K_1 , ми будемо називати трикутник $ABC(K_1)$. Описаний трикутник, який ми розглядаємо, позначатимемо $ABCD(O)$.

Розглянемо інтерпретацію теорем про чотирикутник $ABCD(O)$ на трикутнику $ABC(K_1)$.

Оскільки в чотирикутнику $ABCD(O)$: $AB + CD = BC + AD$, то в трикутнику $ABC(K_1)$ $AC + BK_1 = AB + CK_1$.

Далі. В чотирикутнику $ABCD(O)$ за теоремою Ньютона: **центр вписаного кола O і середини діагоналей чотирикутника лежать на одній прямій** (рис. 27.6).

Очевидно, що в трикутнику $ABC(K_1)$ середина сторони BC (точка M_1), інцентр I і середина відрізка AK_1 (точка E) належить одній прямій (рис. 27.7). Тим самим ми отримуємо не лише розв'язок задачі, яка як дослівно, так і в мало зміненому вигляді була у 1968 і 1970 роках на Всесоюзній олімпіаді, а в 1977 році на Англійській олімпіаді, але і, як наслідок — одну з найважливіших теорем планіметрії, якою, сподіваємося, читач не раз скористається:

У трикутнику ABC через середину M_1 сторони BC й інцентр I проведено пряму, яка перетинає висоту AH_1 в точці F . Довести, що відрізок AF дорівнює радіусу r вписаного в трикутник кола.

Дійсно, трикутники IK_1E і AFE рівні (рис. 27.8).

Отже, чотирикутник $ABCD(O)$ був використаний для доведення властивостей трикутника $ABC(K_1)$. Поставимо іншу задачу: а чи не можна властивості трикутника $ABC(K_1)$ розповсюдити на чотирикутник $ABCD(O)$. З точки зору чіткого доведення — не можна: аналогічне твердження, доведене для трикутника, не може автоматично вважатися правильним для чотирикутника. Але за аналогією (знову аналогія!) можна висловити (й довести!) твердження, яке без трикутника могло залишитися непоміченим, неформульованим у чотирикутнику, і в цьому сенсі зв'язок між трикутником $ABC(K_1)$ і чотирикутником $ABCD(O)$ дуже плідний.

Дійсно, у трикутнику $ABC(K_1)$ кола, вписані в трикутники ABK_1 і ACK_1 дотикаються один до одного

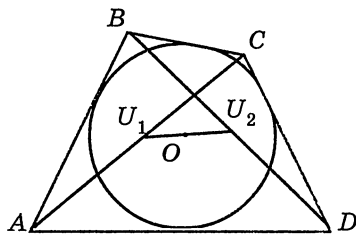


Рис. 27.6

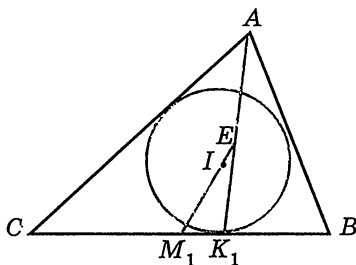


Рис. 27.7

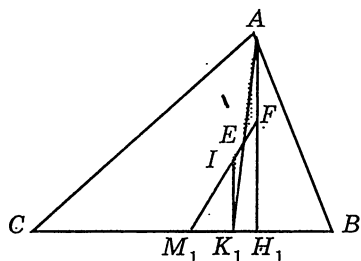


Рис. 27.8

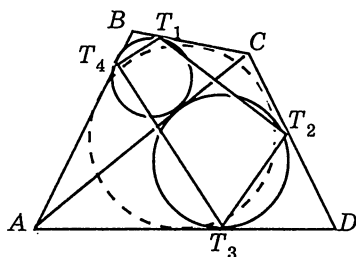


Рис. 27.9

(«Трикутник і тетраедр», с. 34). Виявляється, що кола, вписані в трикутники ABC і ACD чотирикутника $ABCD(O)$ також дотикаються один до одного! (задача № 531, Шаригін І. Ф. Геометрія, Задачник, 9–11 кл. — М.: Дрофа.). Більш того, автор задачі про кола чотирикутника $ABCD(O)$ стверджує, що **точки дотику цих кіл зі сторонами чотирикутника є вершинами вписаного чотирикутника** (рис. 27.9).

Зупинимось і озирнемося! Може, властивість чотирикутника $ABCD(O)$ легко довести і у трикутнику $ABC(K_1)$?!
Отже, народжується нова задача!

Довести, що точки дотику кіл, вписаних у трикутники ABK_1 і ACK_1 трикутника $ABC(K_1)$, до сторін трикутника ABC належать одному колу.

● Доведення. Нехай T_1, T_2, T_3, T_4 — точки дотику кіл до сторін (рис. 27.10), P — точка дотику кіл.

Доведемо, що $\alpha + \beta = 180^\circ$, де $\alpha = \angle T_1 T_2 T_3$, $\beta = \angle T_1 T_4 T_3$.
Дійсно,

$$\beta = \angle B + 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle B.$$

Оскільки $AT_2 = AP = AT_3$, то $AT_2 = AT_3$ і

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - (\angle CT_2 T_1 + \angle AT_2 T_3) = \\ &= 180^\circ - \left(\left(90^\circ - \frac{\angle C}{2} \right) + \left(90^\circ - \frac{\angle A}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{\angle A + \angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\alpha + \beta = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B + 90^\circ + \frac{1}{2} \angle B = 180^\circ,$$

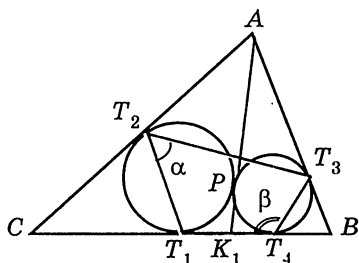


Рис. 27.10

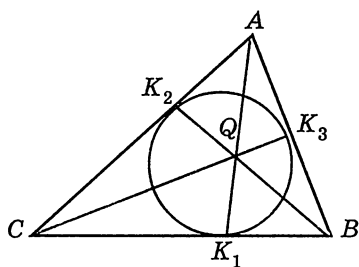


Рис. 27.11

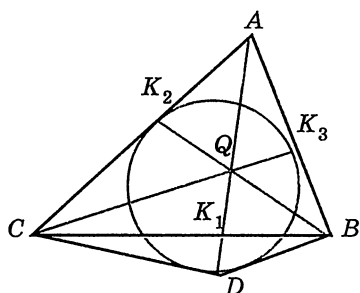


Рис. 27.12

а значить, чотирикутник $T_1T_2T_3T_4$ вписаний в коло, що і потрібно було довести.

Звернемо увагу на відомий факт: нехай коло, вписане в трикутник ABC , дотикається до його сторін в точках K_1, K_2, K_3 (рис. 27.11). Тоді прямі AK_1, BK_2, CK_3 перетинаються в одній точці:

$$AK_1 \cap BK_2 \cap CK_3 = Q. \quad (*)$$

Це нескладно довести за допомогою теореми Чеви. Із цієї конфігурації знайдемо аналоги для описаного навколо кола чотирикутника $ABCD(O)$.

«Замінімо» точку K_1 на вершину D чотирикутника $ABCD$ (рис. 27.12). Тоді очевидним аналогом твердження (*) є гіпотеза: прямі BK_2, CK_3 і AD перетинаються в одній точці. Сформулюємо II:

В описаному чотирикутнику $ABDC$ прямі AD, CK_3 і BK_2 перетинаються в одній точці, де K_2 і K_3 точки дотику вписаного в чотирикутник $ABDC$ кола до сторін AC і AB . Гіпотезу пропонуємо читачу довести (або спростувати).

Далі, за аналогією, замінімо на ще одну вершину ще одну точку дотику, наприклад K_2 (рис. 27.13) (перехід до п'ятикутника).

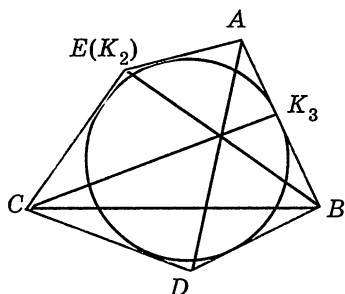


Рис. 27.13

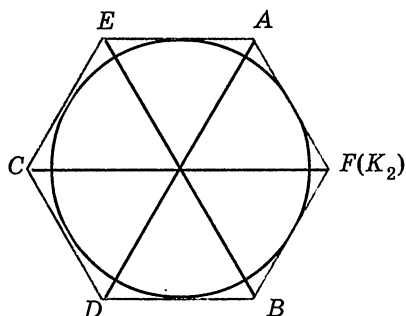


Рис. 27.14

Враховуючи попередню гіпотезу, формулюємо «сильніше» твердження:

В описаному п'ятикутнику $ABDCE$ (рис. 27.13) діагоналі BE , AD і пряма, яка з'єднує вершину C з точкою дотику кола до сторони AB , перетинаються в одній точці. І, нарешті, залишається замінити третю точку дотику K_3 на вершину F . Отримуємо твердження для описаного шестикутника $AFBDCE$ (рис. 27.14).

Діагоналі AD , BE , CF описаного шестикутника $AFBDCE$ перетинаються в одній точці — знаменита теорема Бріаншона! Її доведення загальновідоме.

Глава 28

ФОРМУЛА КАРНО ЯК ДЗЕРКАЛО ГЕОМЕТРІЇ ТРИКУТНИКА

Лазар Карно, 1753–1823, видатний діяч французької революції. Залишив ряд серйозних робіт з математики.

Формула Карно, про яку піде мова, має вигляд: в **гострокутному трикутнику** ABC

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r \quad (*)$$

(O — центр описаного кола, M_1, M_2, M_3 — середини сторін BC , AC , AB , R, r — радіуси описаного і вписаного кіл в $\triangle ABC$).

Формула, широко відома в літературі, зазвичай доводиться за допомогою теореми Птолемея.

У книзі «Трикутник і тетраедр в задачах» застосовано формулу

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

і доведення стає достатньо коротким:

$$\begin{aligned} OM_1 + OM_2 + OM_3 &= R \cos A + R \cos B + R \cos C = R(\cos A + \cos B + \cos C) = \\ &= R \left(1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) = R + 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = R + r. \end{aligned}$$

Проте привертає увагу маловідомий «суто геометричний» спосіб доведення, судячи з усього, саме той, яким формулу доводив сам Лазар Карно. Наведемо його, зробивши декілька спрощень, у зв'язку із залежностями, піднесеними нами до теореми.

Відійдемо від усталених позначень. Нехай D і F — середини сторін AC і AB (рис. 28.1).

Додаткова побудова: проведемо через точку W_1 пряму, паралельну до сторони AC . Вона перетинатиме описане навколо трикутника ABC коло в точці N .

Проведемо пряму OD , яка перетинає хорду W_1N в точці L . Із точки A опустимо на пряму W_1N перпендикуляр AP . Із інцентра I опустимо на прямі W_1O і BC перпендикуляри IE і IK .

Далі суму $DO + OF$ замінимо відрізком DL , довівши, що

$$OL = OF. \quad (1)$$

Розглянемо трикутники OW_1L і OAF . Вони рівні, оскільки $OW_1 = OA$, $\angle W_1OL = \angle ACB$ (кути із взаємно перпендикулярними сторонами) і $\angle AOF = \angle ACB$. Цим рівність доведена.

Зазначимо, що $DL = AP$. Доведемо, що $AP = W_1E$. Для цього доведемо рівність трикутників EIW_1 і PNA . У них

$$W_1I = CW_1 = AN$$

(теорема трилисника і вписана трапеція ACW_1N), а

$$\angle EW_1I = \angle NAP.$$

Дійсно, $\angle EW_1A = \frac{B-C}{2}$ (відоме співвідношення: цей кут дорівнює куту між висотою h_a і бісектрисою l_a).

$\angle NAP = \angle ANW_1 - 90^\circ$ (теорема про зовнішній кут трикутника). Значить,

$$\angle NAP = 180^\circ - \angle ACW_1 - 90^\circ = 90^\circ - \angle ACW_1 = 90^\circ - \left(C + \frac{A}{2}\right) = \frac{B-C}{2}.$$

Отже, $AP = W_1E$. Шукану суму запишемо як

$$\begin{aligned} S &= OD + OF + OM_1 = \underbrace{OD + OL}_{DL} + OM_1 = DL + OM_1 = \\ &= AP + OM_1 = W_1E + OM_1. \end{aligned}$$

Отже, $S = W_1E + OM_1$. Але $W_1E = R - OE$; $OM_1 = r + OE$, значить $S = R - OE + r + OE = R + r$, що й потрібно було довести.

Оригінальне виведення формули Карно (автор Ю. Білецький)

Відомо, що

$$M_1W_1 = \frac{r_a - r}{2}, \quad M_1W^A = \frac{r_b + r_c}{2}.$$

Додамо:

$$M_1W_1 + W^AM_1 = 2R = \frac{r_a + r_b + r_c - r}{2}.$$

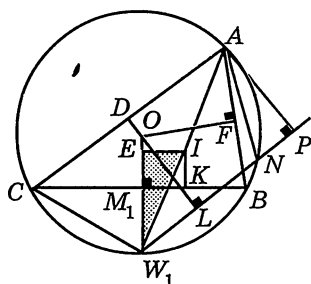


Рис. 28.1

$$r + 4R = r_a + r_b + r_c. \quad (*)$$

Доведемо, що формула (*) є аналогом формули Карно.
Дійсно,

$$R = OM_1 + M_1W_1 = OM_1 + \frac{r_a - r}{2}.$$

Аналогічно,

$$R = OM_2 + \frac{r_b - r}{2}; \quad R = OM_3 + \frac{r_c - r}{2}.$$

Додамо:

$$3R = OM_1 + OM_2 + OM_3 + \frac{r_a + r_b + r_c - 3r}{2}.$$

Враховуючи формулу (*), отримуємо

$$R + r = OM_1 + OM_2 + OM_3.$$

Глава 29

ДОБРОГО ДНЯ, ПАНЕ КИСЕЛЬОВ!

Воістину, його Величність Випадок... Ну хто не знає теорему про середню лінію трикутника! А якщо читач — учитель, то попросить учнів довести цю теорему без підручника. У будь-якому випадку, поставивши перед собою таке завдання, я на мить зіткнувся зі складнощами — довелося скористатися додатковою побудовою (рис. 29.1).

Невдоволений собою, я вирішив подивитися, як доводиться вона в «першоджерелі» — у підручнику з геометрії А. П. Кисельова, найвищого авторитета у питаннях «доступності» геометрії для школяра. І з «жахом» виявив, що ця теорема доводиться «методом від протилежного». Як? — здивувався я. — Якщо можна обійти «припустимо, що це не так», Кисельов цього не зробив? Та й «протилежний» метод на початку курсу? Для ще незміцнілого розуму семикласника? Щось тут не те! А як в інших підручниках подано цю теорему? Деякі автори у шкільних підручниках з геометрії теорему про середню лінію подають як Кисельов А. П. (Погорелов А. В., Шаригін І. Ф., Нікітін Н. Н.) — а інші — ні! (Глаголев М. А., Атанасян Л. С., Петечук В. М.).

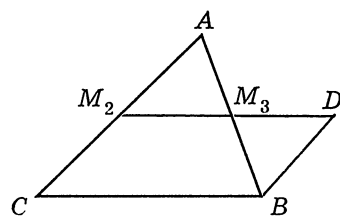


Рис. 29.1

«А як було раніше?» — запитав я сам у себе і відкрив перший том Адамара (вперше видано в 1872 р.). Там було доведення точно таке ж, як

і у мене, тобто таке, що виникло природним шляхом. Впевнений, що Кисельов читав Адамара. То чому ж, ігноруючи доступність, він вибрав інше доведення? Відповісти нескладно — для підтвердження своєї концепції про пропорційність відрізків, теорему Фалеса тощо. Концептуальність перемогла доступність... А шкода...

Не маю права категорично стверджувати, але вдалий термін «середня лінія» ввів також Кисельов, бо ж багато авторів підручників цей термін не визнають.

У будь-якому випадку, в IV томі «Математичної енциклопедії» (Геометрія) такого терміна немає, у перекладних книгах я його також не зустрічав, в систематичному курсі Перепьолкіна А. Н. термін є, але теорема приймається без доведення. Коксетер у «Вступі до геометрії» посилається на Евкліда, в працях якого також не зустрічаються слова «середня лінія».

Підіб'ємо підсумки. Термін «середня лінія», як мені здається, придумав Кисельов. *До теореми про середню лінію трикутника слід ставитися обережніше, знати два (!) (або й більше) способів доведення, із яких останнім (!) буде метод «від протилежного».*

І ще з приводу однієї задачі в підручнику Кисельова «Геометрія». В розділі «Подібність» пропонується для самостійного розв'язання задача:

Побудувати трикутник ABC за $\angle A$; $\frac{a}{h_a}$; m_b .

● Звичайне розв'язання цієї задачі таке (рис. 29.2). Будуємо трикутник A_1BC_1 за заданим кутом A (PC_1A_1B), висотою h_x і основою a_x (h_x , a_x — довільні відрізки, такі що $\frac{a_x}{h_x} = \frac{a}{h_a}$). У ньому проводимо медіану BE , продовжуємо її й на прямій BE відкладемо відрізок $BM_2 = m_b$. Через точку M_2 проведемо пряму, паралельну до A_1C_1 . ●

Ця задача — гарний привід для розгляду задач виду a , A , x , де x — який-небудь лінійний елемент або відношення елементів: трикутника

ABC і $A_1B_1C_1$, подібне за A і $\frac{a}{h_a}$! Значить,

якщо є кут A і відношення $\frac{a}{h_a}$, ми отримаємо ще один кут трикутника ABC .

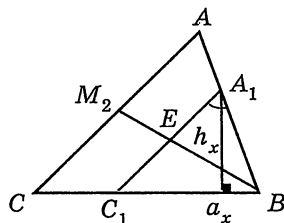


Рис. 29.2

ПРО ДЕЯКІ ЧАСТКОВІСТІ В ГЕОМЕТРИЧНИХ ФОРМУЛАХ

Дозволимо собі нетрадиційний, скажімо так, крок вбік. Розглянемо деякі формули геометрії трикутника в окремому випадку для «чудових» точок. Можливо, з точки зору «строкої» математики в цьому немає сенсу: навіщо, коли є загальна формула? Мета такого підходу — навчальна: розглянути інші, можливо, доступніші для учня способи доведень, знаходження закономірностей в геометрії з допомогою алгебри і особливо тригонометрії. Відкривається велике поле для вправ не лише суто формальних, а й композиторських, творчих. Не варто марнувати таку можливість.

Теорема Жергона

Нехай чевіани AA_1 , BB_1 , CC_1 перетинаються в точці X . Тоді маємо рівності (теорема Жергона):

$$\frac{XA_1}{AA_1} + \frac{XB_1}{BB_1} + \frac{XC_1}{CC_1} = 1, \quad (1)$$

$$\frac{AX}{AA_1} + \frac{BX}{BB_1} + \frac{CX}{CC_1} = 2. \quad (2)$$

Нехай точка X збігається з ортоцентром H трикутника ABC .

$$X \equiv H.$$

Тоді рівність (1) буде такою:

$$\frac{HH_1}{AH_1} + \frac{HH_2}{BH_2} + \frac{HH_3}{CH_3} = 1.$$

Доведемо цю рівність за допомогою тригонометрії.

● Маємо:

$$HH_1 = BH \cos C = 2R \cos B \cos C, \quad AH_1 = c \cdot \sin B = 2R \sin C \sin B.$$

Тоді

$$\frac{HH_1}{h_a} = \frac{2R \cos B \cos C}{2R \sin B \sin C} = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C,$$

і рівність (1) зводиться до тригонометричної рівності

$$\frac{1}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C} + \frac{1}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} + \frac{1}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = 1.$$

Отримали трикомпонентну рівність. Доведемо рівність (2) у випадку $X \equiv H$:

$$\frac{AH}{AH_1} + \frac{BH}{BH_2} + \frac{CH}{CH_3} = 2.$$

Маємо: $\frac{AH}{h_a} = \frac{2R \cos A}{2R \sin C \sin B}$. Отже,

$$\begin{aligned} \frac{AH}{h_a} + \frac{BH}{h_b} + \frac{CH}{h_c} &= \frac{\cos A \sin A + \cos B \sin B + \cos C \sin C}{\sin A \sin B \sin C} = \\ &= \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{2 \sin A \sin B \sin C} = \frac{4 \sin A \sin B \sin C}{2 \sin A \sin B \sin C} = 2. \end{aligned}$$

Теорему Жергона у випадку $X \equiv H$ доведено. Заодно доведено дві тригонометричні тотожності.

Доведемо теорему Жергона для випадку, коли точка X збігається з інцентром I (рис. 30.1).

$$X \equiv I$$

• Маємо $\frac{XA_1}{AA_1} = \frac{IL_1}{AL_1} = \frac{x}{l_a}$ ($x = IL_1$). Але $CL_1 = \frac{ab}{b+c}$; $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b}{CL_1}$, або

$$\frac{l_a - x}{x} = \frac{b+c}{a}; \quad \frac{l_a}{x} - 1 = \frac{b+c}{a}; \quad \frac{l_a}{x} = \frac{b+c}{a} + 1; \quad \frac{l_a}{x} = \frac{2p}{a}, \quad \text{або} \quad \frac{x}{l_a} = \frac{a}{2p}.$$
 Як

результат маємо $\frac{x}{l_a} + \frac{y}{l_b} + \frac{z}{l_c} = \frac{a+b+c}{2p} = 1$ ($y = IL_2$; $z = IL_3$).

Доведемо за допомогою тригонометрії. Із трикутника CIL_1 :

$$\frac{x}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{CL_1}{\sin(\frac{A+C}{2})}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{ab}{(b+c) \sin(\frac{A+C}{2})}. \quad x = \frac{ab \sin \frac{C}{2}}{(b+c) \cos \frac{B}{2}}.$$

Скориставшись формулою бісектриси, отримаємо:

$$\frac{x}{l_a} = \frac{ab \sin \frac{C}{2} (b+c)}{(b+c) \cos \frac{B}{2} \cdot 2bc \cdot \cos \frac{A}{2}} = \frac{a \sin \frac{C}{2}}{2c \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}};$$

$$\frac{x}{l_a} = \frac{\sin A}{4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}}.$$

Аналогічно знаходимо відношення

$$\frac{y}{l_b}; \quad \frac{z}{l_c}.$$

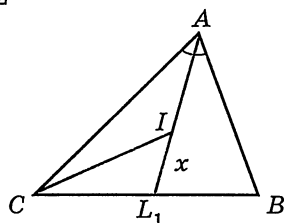


Рис. 30.1

Маємо:

$$\frac{x}{l_a} + \frac{y}{l_b} + \frac{z}{l_c} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = 1. \bullet$$

Доведемо рівність (2) для $X \equiv I$.

• Знайдемо відношення $\frac{AI}{AL_1}$. Позначимо $y = AI$. Тоді

$$\frac{y}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{b}{\sin \left(\frac{A+C}{2} \right)} = \frac{b}{\cos \frac{B}{2}}; \quad y = \frac{b \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}};$$

$$\frac{y}{l_a} = \frac{b \sin \frac{C}{2} (b+c)}{\cos \frac{B}{2} \cdot 2bc \cdot \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{C}{2} (\sin B + \sin C)}{\cos \frac{B}{2} \cdot 2 \sin C \cdot \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin B + \sin C}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

Отже,

$$\frac{AI}{AL_1} + \frac{BI}{BL_2} + \frac{CI}{CL_3} = \frac{2(\sin A + \sin B + \sin C)}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{2 \cdot 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = 2.$$

Теорема Ван-Обеля

Теорема Ван-Обеля:

$$\frac{AX}{XA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}.$$

Нехай точка X збігається з ортоцентром H ($X \equiv H$). Тоді

$$\frac{AH}{HH_1} = \frac{AH_2}{H_2C} + \frac{AH_3}{H_3B}. \quad (*)$$

Доведемо цю формулу.

• $AH = 2R \cos A$; $HH_1 = 2R \cos B \cos C$;

$$AH_2 = c \cdot \cos A = 2R \sin C \cos A; \quad H_2C = a \cdot \cos C = 2R \sin A \cos C;$$

$$AH_3 = 2R \sin B \cos A; \quad H_3B = 2R \sin A \cos B.$$

Підставимо в (*):

$$\frac{\cos A}{\cos B \cdot \cos C} = \frac{\sin C \cos A}{\sin A \cos C} + \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos B}.$$

Доведемо цю тотожність. Запишемо її у вигляді:

$$\frac{\sin C \cos A}{\sin A \cos C} + \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos B} = \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{ctg} A + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} A (\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B) =$$

$$= \frac{\cos A \cdot \sin(B+C)}{\sin A \cdot \cos C \cdot \cos B} = \frac{\cos A}{\cos B \cdot \cos C},$$

що і потрібно було довести.

Далі. Нехай $X \equiv I$. Потрібно довести

$$\frac{AI}{IL_1} = \frac{AL_2}{L_2C} + \frac{AL_3}{L_3B}. \quad (1)$$

Із трикутника ACL_1 : $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b}{t}$ ($t = CL_1$). Оскільки $t = \frac{ab}{b+c}$,

маємо

$$\frac{AI}{IL_1} = \frac{b(b+c)}{ab} = \frac{b+c}{a}.$$

Далі $\frac{AL_2}{L_2C} = \frac{c}{a}$; $\frac{AL_3}{L_3B} = \frac{b}{a}$, або $\frac{AL_2}{L_2C} + \frac{AL_3}{L_3B} = \frac{c}{a} + \frac{b}{a} = \frac{b+c}{a}$,

відповідно, вираз (1) доведено. ●

Точка Жергона (G)

Нехай K_1, K_2, K_3 — точки дотику вписаного кола до сторін BC, AC, AB трикутника ABC . Відомо, що відрізки AK_1, BK_2, CK_3 перетинаються в одній точці G — точці Жергона.

Доведемо теорему Жергона для точки Жергона G ($X \equiv G$):

$$\frac{GK_1}{AK_1} + \frac{GK_2}{BK_2} + \frac{GK_3}{CK_3} = 1.$$

● Зазначимо, що $AK_2 = AK_3 = a_1$; $BK_1 = BK_3 = b_1$; $CK_1 = CK_2 = c_1$ (як відрізки дотичних, які мають спільну точку). Проведемо через точку A пряму, паралельну BC (рис. 30.2). Позначимо

$GK_1 = x$; $AG = y$. Виразимо відношення $\frac{x}{y+x}$. Нехай C_1 — точка

перетину прямої, паралельної до BC , і CK_3 .

Позначимо $AC_1 = t$. Із подібності трикутників AK_3C_1 і BK_3C маємо:

$$\frac{t}{b_1 + c_1} = \frac{a_1}{b_1}. \quad (1)$$

Із подібності трикутників AGC_1 і GK_1C :

$$\frac{t}{c_1} = \frac{y}{x}. \quad (2)$$

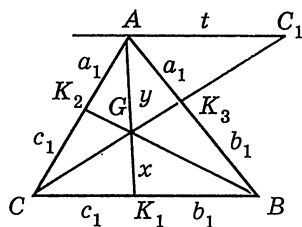


Рис. 30.2

Поділимо рівність (1) на рівність (2):

$$\frac{c_1}{b_1 + c_1} = \frac{a_1 \cdot x}{b_1 \cdot y}; \quad \frac{y}{x} = \frac{(b_1 + c_1)a_1}{c_1 \cdot b_1}. \quad (*)$$

Значить, $\frac{x}{x+y} = \frac{b_1 \cdot c_1}{(b_1 + c_1)a_1 + b_1 c_1}$. Запишемо теорему Жергона:

$$\begin{aligned} & \frac{b_1 c_1}{(b_1 + c_1)a_1 + b_1 c_1} + \frac{a_1 b_1}{(a_1 + b_1)c_1 + a_1 b_1} + \frac{a_1 c_1}{(a_1 + c_1)b_1 + a_1 c_1} = \\ & = \frac{b_1 c_1 + a_1 b_1 + a_1 c_1}{a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1} = 1, \end{aligned}$$

що й потрібно було. ●

● Доведемо друге твердження теореми Жергона:

$$\frac{AG}{AK_1} + \frac{BG}{BK_2} + \frac{CG}{CK_3} = 2.$$

Маємо:

$$\frac{y}{x+y} = \frac{(b_1 + c_1)a_1}{b_1 c_1 + (b_1 + c_1)a_1}.$$

Значить,

$$\frac{(b_1 + c_1)a_1 + b_1(a_1 + c_1) + c_1(a_1 + b_1)}{b_1 c_1 + a_1 b_1 + a_1 c_1} = \frac{2(b_1 c_1 + a_1 b_1 + a_1 c_1)}{b_1 c_1 + a_1 b_1 + a_1 c_1} = 2. \quad \bullet$$

Точка Нагеля (N)

● Відомо, що прямі AN_1 , BN_2 , CN_3 перетинаються в одній точці (N_1 , N_2 , N_3 — точки дотику зовнівписаних кіл, тобто $AN_3 = b_1$; $BN_3 = a_1$; $BN_1 = c_1$; $CN_2 = a_1$; $CN_1 = b_1$; $AN_2 = c_1$) (рис. 30.3).

За аналогією з попередньою задачею ($AC_1 = t$) маємо ($\triangle AN_3 C_1 \sim \triangle BN_3 C$):

$$\frac{t}{b_1 + c_1} = \frac{b_1}{a_1}.$$

Позначимо $x = NN_1$, $y = AN$. Тоді $\frac{t}{b_1 + c_1} = \frac{y}{x}$. Із подібності

трикутників $AC_1 N$ і $N_1 C N$. Розділимо останні дві пропорції.

$$\frac{b_1}{b_1 + c_1} = \frac{b_1 \cdot x}{a_1 \cdot y},$$

$$\text{Відповідно, } \frac{y}{x} = \frac{b_1(b_1 + c_1)}{a_1 b_1},$$

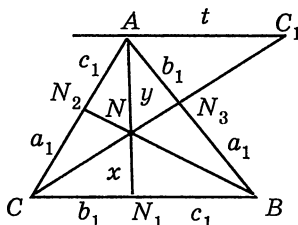


Рис. 30.3

значить, $\frac{x}{x+y} = \frac{a_1}{b_1+c_1+a_1}$. Отже,

$$\frac{a_1}{b_1+c_1+a_1} + \frac{b_1}{b_1+c_1+a_1} + \frac{c_1}{b_1+c_1+a_1} = 1. \bullet$$

• Доведемо другу рівність. Маємо:

$$\frac{AN}{AN_1} = \frac{y}{x+y} = \frac{b_1+c_1}{a_1+b_1+c_1}.$$

Аналогічно знаходимо $\frac{BN}{BN_2}$ і $\frac{CN}{CN_3}$. Значить,

$$\frac{AN}{AN_1} + \frac{BN}{BN_2} + \frac{CN}{CN_3} = \frac{b_1+c_1+a_1+b_1+a_1+c_1}{a_1+b_1+c_1} = 2. \bullet$$

Теорема Ван-Обеля (для точки Нагеля)

Потрібно довести: $\frac{AN}{NN_1} = \frac{AN_2}{N_2C} + \frac{AN_3}{N_3B}$.

• Отже,

$$\frac{AN}{NN_1} = \frac{y}{x} = \frac{b_1+c_1}{a_1}; \quad \frac{AN_2}{N_2C} = \frac{c_1}{a_1}; \quad \frac{AN_3}{N_3B} = \frac{b_1}{a_1}.$$

$$\frac{c_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_1+c_1}{a_1} = \frac{y}{x} = \frac{AN}{NN_1}, \text{ що й потрібно було. } \bullet$$

Нерівності

Нехай $X \equiv H$. Довести $\frac{HA}{HH_1} + \frac{HB}{HH_2} + \frac{HC}{HH_3} \geq 6$.

• Доведення. *Перший спосіб.* Скористаємося теоремою Ван-Обеля ($X \equiv H$):

$$\frac{AH}{HH_1} = \frac{AH_2}{H_2C} + \frac{AH_3}{H_3B}.$$

Тоді задана нерівність може бути записана так:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{AH_2}{H_2C} + \frac{AH_3}{H_3B} \right) + \left(\frac{BH_3}{H_3A} + \frac{BH_1}{H_1C} \right) + \left(\frac{CH_1}{H_1B} + \frac{CH_2}{H_2A} \right) = \\ & = \left(\frac{AH_2}{H_2C} + \frac{H_2C}{AH_2} \right) + \left(\frac{BH_3}{H_3A} + \frac{H_3A}{BH_3} \right) + \left(\frac{CH_1}{H_1B} + \frac{H_1B}{CH_1} \right). \end{aligned}$$

Оскільки кожний вираз у дужках не менший за 2, то задана нерівність доведена.

Другий спосіб. Маємо

$$\frac{HA}{HH_1} = \frac{2R \cos A}{2R \cos B \cos C}.$$

Так задана нерівність запишеться як:

$$\frac{\cos A}{\cos B \cos C} + \frac{\cos B}{\cos A \cos C} + \frac{\cos C}{\cos A \cos B} \geq 6.$$

Маємо:

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}{\cos B \cos C \cos A} = \frac{1 - 2 \cos A \cos B \cos C}{\cos A \cos B \cos C} = \frac{1}{\cos A \cos B \cos C} - 2.$$

Оскільки $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$, то $\frac{1}{\cos A \cos B \cos C} - 2 \geq 8 - 2 \geq 6$.

Нехай $X \equiv I$. Маємо:

$$\frac{IA}{IL_1} + \frac{IB}{IL_2} + \frac{IC}{IL_3} \geq 6.$$

Дійсно, $\frac{IA}{IL_1} = \frac{b+c}{a}$.

Отже, $\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$, а це очевидно. ●

Точка Жергона (G)

Потрібно довести (рис. 30.4) $\frac{AG}{GK_1} + \frac{BG}{GK_2} + \frac{CG}{GK_3} \geq 6$.

● Доведення. Оскільки

$$\frac{y}{x} = \frac{a(p-a)}{(p-c)(p-b)} = \frac{ap(p-a)^2}{S^2},$$

отже,

$$\frac{AG}{GK_1} + \frac{BG}{GK_2} + \frac{CG}{GK_3} = \frac{ap(p-a)^2 + bp(p-b)^2 + cp(p-c)^2}{S^2}.$$

Потрібно довести, що

$$a(p-a)^2p + b(p-b)^2p + c(p-c)^2p \geq 6S^2.$$

Позначимо A — ліву частину нерівності. За нерівністю Коші

$$A \geq 3\sqrt[3]{abc p^3 (p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2} = 3\sqrt[3]{S^4 abc \cdot p} = 3S^2 \sqrt[3]{\frac{4R}{r}} \geq 6S^2$$

(застосували нерівність $R \geq 2r$). ●

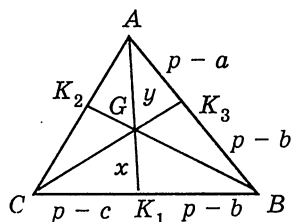


Рис. 30.4

Точка Нагеля (N)

Раніше нами вже було доведено, що (рис. 30.5):

$$\frac{y}{x} = \frac{t}{p-b}; \quad \frac{p-b}{p-a} = \frac{t}{a}; \quad \frac{y}{x} = \frac{a}{p-a}.$$

Отже, потрібно довести, що

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \geq 6.$$

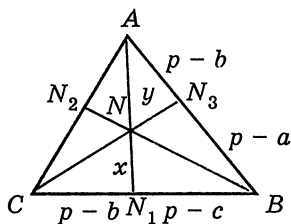


Рис. 30.5

Позначимо A — ліву частину нерівності. Тоді за нерівністю

Коші $A \geq 3^3 \sqrt{abc \cdot \frac{p}{S^2}} \geq 6$. (Використали співвідношення $R = \frac{abc}{4S}$ і $R \geq 2r$).

Привертає увагу нерівність

$$\frac{A_1X}{XA} + \frac{B_1X}{XB} + \frac{C_1X}{XC} \geq \frac{3}{2}.$$

При $X \equiv H$ доведення нестандартне! Отже, доведемо, що

$$\frac{HH_1}{HA} + \frac{HH_2}{HB} + \frac{HH_3}{HC} \geq \frac{3}{2}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \frac{HH_1}{HA} &= \frac{2R \cos B \cos C}{2R \cos A} = \frac{\cos B \cos C}{-\cos(B+C)} = \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C - \cos B \cos C} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C - 1} = \frac{\operatorname{tg}(B+C)}{-(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}. \end{aligned}$$

Отже, задану нерівність можна записати так:

$$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} + \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C} + \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} \geq \frac{3}{2},$$

що аналогічно до відомої нерівності.

Доведемо нерівність при $X \equiv I$.

Доведення відповідної нерівності для $X \equiv I$ виходить безпосередньо із співвідношення

$$\frac{IL_1}{IA} = \frac{a}{b+c}.$$

Маємо нерівність

$$\frac{AX}{XA_1} + \frac{BX}{XB_1} + \frac{CX}{XC_1} \geq 8.$$

Для $X \equiv H$ маємо:

$$\frac{HA}{HH_1} = \frac{2R \cos A}{2R \cos B \cos C},$$

отже,

$$\frac{\cos A}{\cos B \cos C} \cdot \frac{\cos B}{\cos A \cos C} \cdot \frac{\cos C}{\cos B \cos A} = \frac{1}{\cos A \cos B \cos C} \geq 8$$

(оскільки $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$).

Нехай $X \equiv I$. Тоді

$$\frac{AI}{IL_1} \cdot \frac{BI}{IL_2} \cdot \frac{CI}{IL_3} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \frac{8abc}{abc} = 8.$$

Якщо $X \equiv G$, то враховуючи $\frac{K_1 G}{AG} = \frac{(p-c)(p-b)}{a(p-a)}$, потрібно довести, що

$$\frac{a(p-a)b \cdot (p-b) \cdot c(p-c)}{(p-c)(p-b)(p-a)(p-c)(p-a)(p-b)} \geq 8,$$

або, що те ж саме, $\frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)} \geq 8$, або $\frac{4RS \cdot p}{S^2} \geq 8$, $\frac{R}{r} \geq 2$, тобто $R \geq 2r$.

При $X \equiv N$, беручи до уваги рівність $\frac{AN}{NN_1} = \frac{a}{p-a}$, маємо

$\frac{a}{p-a} \cdot \frac{b}{p-b} \cdot \frac{c}{p-c} \geq 8$, або $\frac{p \cdot abc}{S^2} \geq 8$; $\frac{S \cdot 4R \cdot S}{r \cdot S^2} \geq 8$; $\frac{R}{r} \geq 2$, або $R \geq 2r$.

Нерівність

$$\frac{AA_1}{XA_1} + \frac{BB_1}{XB_1} + \frac{CC_1}{XC_1} \geq 9.$$

● Нехай $X \equiv H$. У цьому випадку отримуємо нову нерівність

$$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A \geq 9. \quad (*)$$

Дійсно,

$$\frac{h_a}{HH_1} = \frac{c \cdot \sin B}{2R \cos B \cos C} = \frac{\sin C \sin B}{\cos C \cos B} = \operatorname{tg} C \operatorname{tg} B.$$

Отже, потрібно довести

$$\frac{h_a}{HH_1} + \frac{h_b}{HH_2} + \frac{h_c}{HH_3} = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A \geq 9.$$

Доведемо, що $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geq 3\sqrt{3}$. Маємо:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geq 3\sqrt{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C},$$

або $(\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C)^3 \geq 3^3 \cdot \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$, або

$$(\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C)^2 \geq 3^3,$$

звідки

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \geq \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}.$$

Перейдемо до нерівності (*):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C &\geq 3\sqrt{\operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C} \geq \\ &\geq 3\sqrt{(3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{27} = 9. \end{aligned}$$

Нехай $X \equiv I$. Тоді

$$\frac{l_a}{IL_1} + \frac{l_b}{IL_2} + \frac{l_c}{IL_3} \geq 9.$$

Оскільки $\frac{y}{x} = \frac{b+c}{a}$, то $\frac{l_a}{IL_1} = \frac{a+b+c}{a}$,

$$\frac{l_a}{IL_1} + \frac{l_b}{IL_2} + \frac{l_c}{IL_3} = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

Доведемо, що при $X \equiv G$

$$\frac{AK_1}{GK_1} + \frac{BK_2}{GK_2} + \frac{CK_3}{GK_3} \geq 9.$$

● Оскільки $\frac{AK_1}{GK_1} = \frac{x+y}{x} = \frac{a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1}{b_1c_1}$, то задана нерівність зводиться до нерівності

$$(a_1b_1 + b_1c_1 + a_1c_1) \left(\frac{1}{b_1c_1} + \frac{1}{a_1c_1} + \frac{1}{a_1b_1} \right) \geq 9,$$

що очевидно. ●

Нехай $X \equiv N$. Доведемо:

$$\frac{AN_1}{NN_1} + \frac{BN_2}{NN_2} + \frac{CN_3}{NN_3} \geq 9.$$

● Дійсно, враховуючи співвідношення $\frac{y}{x} = \frac{a}{p-a}$, зводимо нерівність до такої, що легко довести:

$$\frac{b_1 + c_1}{a_1} + \frac{a_1 + c_1}{b_1} + \frac{a_1 + b_1}{c_1} \geq 6. \quad \bullet$$

Нерівність

$$\frac{AA_1}{A_1X} \cdot \frac{BB_1}{B_1X} \cdot \frac{CC_1}{C_1X} \geq 27$$

правильна, якщо $X \equiv H$.

Маємо:

$$\frac{h_a}{HH_1} \cdot \frac{h_b}{HH_2} \cdot \frac{h_c}{HH_3} = \frac{\sin A \sin B \sin C \cdot \sin A \sin B \sin C}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} = \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C,$$

а нерівність $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \geq \sqrt{27}$ було доведено.

Нехай $X \equiv I$. Оскільки $\frac{y}{x} = \frac{b+c}{a}$, то задана нерівність буде записана так:

$$\left(1 + \frac{b+c}{a}\right) \left(1 + \frac{a+c}{b}\right) \left(1 + \frac{a+b}{c}\right) \geq 27.$$

Маємо:

$$\frac{a+b+c}{a} \cdot \frac{a+b+c}{b} \cdot \frac{a+b+c}{c} = \frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq \frac{(3\sqrt[3]{abc})^3}{abc} = 27.$$

Нехай $X \equiv G$. Доведемо нерівність

$$\left(1 + \frac{a_1(b_1 + c_1)}{b_1c_1}\right) \left(1 + \frac{b_1(a_1 + c_1)}{a_1c_1}\right) \left(1 + \frac{c_1(a_1 + b_1)}{a_1b_1}\right) \geq 27.$$

● Оскільки

$$1 + \frac{a_1}{c_1} + \frac{a_1}{b_1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a_1^2}{b_1c_1}}, \quad 1 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1}{c_1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b_1^2}{a_1c_1}}, \quad 1 + \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_1}{b_1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{c_1^2}{a_1b_1}},$$

то, перемноживши нерівності, отримаємо необхідне.

$X \equiv N$. Доведемо, що

$$\frac{AN_1}{NN_1} \cdot \frac{BN_2}{NN_2} \cdot \frac{CN_3}{NN_3} \geq 27.$$

Маємо

$$1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{b_1 + c_1}{a_1} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{a_1}.$$

Отже,

$$\frac{(a_1 + b_1 + c_1)^3}{a_1b_1c_1} \geq 3^3 \frac{a_1b_1c_1}{a_1b_1c_1} = 27. \quad \bullet$$

ГЕОМЕТРИЧНЕ РОЗПІЗНАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

«Вам хочеться песен?»

Роль тригонометрії в геометрії звична: за її допомогою вирішуються задачі навіть тоді, коли, здавалось би, приводу для цього немає. Цілі розділи задачників з назвами «геометричні задачі із застосуванням тригонометрії» напевно відомі читачу. Універсальність тригонометрії настільки велика, що, прибравши геометричні факти в тригонометричні шати, ми інколи забуваємо про «першоджерело», звідки взялися ці нині утворені тригонометричні задачі. І справа, звісно, не в модних пошуках іменитих предків, а в тому, що геометричне походження тригонометричної задачі дає змогу застосувати в розв'язанні геометрію, до речі, як і алгебру. Мета цієї глави не лише «відновити справедливність», а й подарувати читачеві, можливо, несподівано емоційні факти.

Не пропустіть!

Почнемо з відомих тотожностей.

Задача 1. Довести, що співвідношення

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

є формула Герона.

● **Доведення.** A, B, C — кути трикутника ABC . Застосуємо формулу $r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ (r — радіус вписаного в трикутник ABC кола, p — півпериметр). Тоді задане співвідношення можна записати як

$$\frac{p - a + p - b + p - c}{r} = \frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{r^3},$$

або $p^2 r^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$. Враховуючи, що $S = rp$, маємо $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$, звідки

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \bullet$$

Задача 2. Довести, що співвідношення

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1 \text{ є формула } S = rp.$$

● Доводиться аналогічно до попередньої задачі. ●

Задача 3. Довести, що співвідношення $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$ є формула $S = R \cdot P_H$ (P_H — півпериметр ортоцентричного трикутника $H_1 H_2 H_3$).

● **Доведення.** Оскільки $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, а сторона ортоцентричного трикутника $H_1 H_2 H_3$, наприклад, $H_2 H_3 = 2R \sin 2A$, то твердження задачі доведено. ●

Задача 4. Довести, що співвідношення

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \text{ є формула Карно.}$$

$OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$ (O — центр описаного кола, M_1, M_2, M_3 — середини сторін трикутника ABC).

● **Доведення.** Маємо

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 = R \cos A + R \cos B + R \cos C = R \left(1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right).$$

Враховуючи, що $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$, твердження задачі доведено. ●

Задача 5. Довести, що співвідношення $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$ є теорема проєкцій:

$$\begin{cases} a \cos B + b \cos A = c \\ b \cos C + c \cos B = a \\ a \cos C + c \cos A = b \end{cases}$$

Довести самостійно.

Задача 6. Довести, що співвідношення $2\sin^2 A = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ є співвідношення для сторін a, b, c трикутника ABC : $a^4 = b^4 + c^4$.

● **Доведення.** Маємо $2\sin^2 A = \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C}$.

Враховуючи, що $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, маємо

$$\begin{aligned} \cos B \cos C &= \frac{(a^2 - (b^2 - c^2))(a^2 + (b^2 - c^2))}{4a^2 bc} = \\ &= \frac{a^4 - (b^2 - c^2)^2}{4a^2 b^2} = \frac{a^4 - b^4 + 2b^2 c^2 - c^4}{4a^2 bc}. \end{aligned}$$

Враховуючи умову

$$\cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{2\sin^2 A}, \text{ або } \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2}{4a^2 b^2 c} = \frac{bc}{2a^2},$$

звідки $a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 = 2b^2c^2$, або
 $a^4 = b^4 + c^4$.

Задача 7. Довести, що формула додавання $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ є теорема Птолемея.

● **Доведення.** Нехай α і β — довільні кути. Побудуємо чотирикутник $ABCD$, вписаний у коло радіуса R так, щоб $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAD = \beta$ (рис. 31.1) і щоб діагональ AC збіглася з діаметром. За теоремою Птолемея:

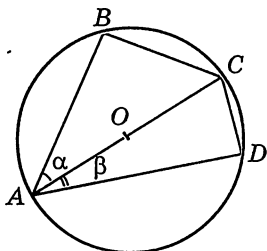


Рис. 31.1

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \quad (1)$$

Але

$$AB = 2R\cos\alpha; \quad CD = 2R\sin\beta, \quad AD = 2R\cos\beta, \\ BC = 2R\sin\alpha, \quad BD = 2R\sin(\alpha + \beta).$$

Підставимо цих два вирази в співвідношення (1), отримаємо $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. ●

Навколо рівності

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad (*)$$

Це тригонометричне співвідношення особливо пов'язано з геометрією. Вважаючи, що за допомогою тригонометричних формул воно доведено (*перший спосіб*), зупинимось на доведеннях, пов'язаних з геометрією.

Другий спосіб. Оскільки

$$\sin A = \frac{h_b}{c}, \quad \sin B = \frac{h_c}{a}, \quad \sin C = \frac{h_a}{b},$$

маємо

$$\begin{aligned} \frac{h_b}{c} + \frac{h_c}{a} + \frac{h_a}{b} &= 2S \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} \right) = \frac{2S}{abc} (a + b + c) = \\ &= \frac{2S}{R \cdot 4S} \cdot 2p = \frac{p}{R} = \frac{pr}{Rr} = \frac{S}{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} ab \sin C}{4R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{2R^2 \sin A \sin B \sin C}{4R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{16 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Отримали ще одну задачу:

Довести, що $\frac{h_a}{b} + \frac{h_b}{c} + \frac{h_c}{a} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

Співвідношення (*) можна довести за допомогою формул бісектрального трикутника, зокрема з формулою Чезаро.

Застосуємо формули:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}; \quad l_b = \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{B}{2},$$

$$l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{C}{2}.$$

Нехай S_L — площа бісектрального трикутника $L_1L_2L_3$.

Відомо, що $S_L = \frac{l_a \cdot l_b \cdot l_c}{4p}$ (формула Чезаро). Відомо також, що

$$S_L = 2S \cdot \frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}.$$
 Значить,

$$\frac{l_a \cdot l_b \cdot l_c}{4p} = 2S \cdot \frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)},$$

або

$$\frac{8a^2b^2c^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{4p(a+b)(b+c)(a+c)} = 2S \frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)},$$

звідки

$$4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{4p \cdot S}{abc} = \frac{p}{R} = \sin A + \sin B + \sin C.$$

Нерівності

Задача 8. Довести, що

$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 > 2p \sin A \sin B \sin C.$$

● **Доведення.** Задану нерівність перепишемо так:

$$\left(\frac{a+b+c}{2R} \right)^2 > 2\pi \frac{abc}{8R^3}, \text{ или } \frac{p^2}{R^2} > \pi \frac{abc}{4R^3}.$$

Враховуючи, що $R = \frac{abc}{4S}$ і $r = \frac{S}{p}$, зазначимо, що остання нерівність еквівалентна нерівності $p^2 > \pi r p$, $p > \pi r$, або $2p > 2\pi r$. ●

Ця нерівність правильна, бо в лівій частині — периметр трикутника, а в правій — довжина вписаного в трикутник кола.

Задача 10. Довести нерівності:

$$1) \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \geq 6;$$

$$2) \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A-C}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} \geq \frac{3}{2}.$$

● Доведемо другу нерівність. Маємо

$$\frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} = \frac{a}{b+c},$$

і задана нерівність записується як відома алгебраїчна нерівність

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (a > 0; b > 0; c > 0).$$

Перша нерівність запишеться так

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq 6.$$

Соло на бісектрисах

«Тату, Ви зараз таке побачите!»

Із анекдота

Пропонуємо довести умовну рівність:

Якщо в трикутнику ABC $\sin A \cos \frac{B-C}{2} = \sin B \cos \frac{A-C}{2}$, то він рівнобедрений. Довести.

Аби оцінити, що відбувається, спробуйте це зробити самостійно, і лише коли сформуєте свою точку зору, читайте далі.

Швидше за все, звичайні тригонометричні перетворення швидкого результату не дадуть.

Переходимо до незвичайного доведення: запишемо задану умову так:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}},$$

або

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}}. \quad (1)$$

Оскільки $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$, то співвідношення (1) запишемо так

$$\frac{h_a}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{h_b}{\cos \frac{A-C}{2}},$$

або $l_a = l_b$, а це задача Штейнера-Лемуса. Твердження заданої задачі доведено. ●

Варто з'явитися першому способу доведення, як виникає і *другий*, цікавий застосуванням авторської формули

$$S = \frac{1}{2} AW_1 \cdot M_1 N_1. \quad (*)$$

(Автор способу Д. Басов, член авторського семінару «Як стати суперучителем».)

Зазначимо, що $\cos \frac{B-C}{2} = \frac{2R}{AW_1}$. Тоді вираз

$$\sin A \cdot \cos \frac{B-C}{2}$$

можна записати так:

$$\sin A \cdot \frac{2R}{AW_1}. \quad (1)$$

Враховуючи формулу (*), маємо

$$AW_1 = \frac{2S}{M_1 N_1},$$

підставимо в вираз (1):

$$\sin A \cdot 2R \cdot \frac{M_1 N_1}{2S} = \frac{R}{S} M_1 N_1 \sin A. \quad (2)$$

Оскільки

$$M_1 N_1 \sin A = l_a,$$

то вираз (2) виглядатиме так: $\frac{R}{S} l_a$.

Аналогічно другу частину заданої нерівності можна записати як $\frac{R}{S} l_b$. За умовою

$$\frac{R}{S} l_a = \frac{R}{S} l_b,$$

або $l_a = l_b$ — знову задача Штейнера-Лемуса.

Штейнер, Лемус... Хто наступний?

Задача. Чи правильно, що якщо $M_1 N_1 = M_2 N_2$, то трикутник ABC — рівнобедрений?

По ходу народжується задача: чи правильно, що якщо

$\frac{l_a}{l_b} = \frac{b}{a}$, то трикутник ABC — рівнобедрений і т.д., і т.д., і т.д.

Аплодисменти?

Глава 32

МОДЕРНІЗАЦІЯ ПРОБЛЕМИ ШТЕЙНЕРА-ЛЕМУСА

Про задачу Штейнера-Лемуса написано достатньо. Нагадаємо коротко:

якщо $l_a = l_b$, то $a = b$.

Розглянемо рівність відрізків $M_1 N_1$ і $M_2 N_2$, які поєднують проєкції довільних точок на сторонах трикутника на дві інші сторони (точки X_1 і X_2).

1. Якщо точка X збігається з основою висоти, то проблеми Штейнера-Лемуса немає, оскільки

$$M_1 N_1 = M_2 N_2 = \frac{S}{R}$$

і тут доречно поговорити про однойменні відрізки.

2. Нехай точки X_1 і X_2 збігається з серединою AC і серединою сторони AB . Оскільки

$$M_1 N_1 = m_b \sin B, \text{ а } M_2 N_2 = m_c \sin C,$$

то

$$\frac{m_b}{m_c} = \frac{\sin C}{\sin B}.$$

Враховуючи формулу медіани, маємо

$$\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \frac{c^2}{b^2},$$

або

$$2a^2(b^2 - c^2) = b^4 - c^4;$$

$$(b^2 - c^2)(2a^2 - (b^2 + c^2)) = 0,$$

звідки

$$b = c$$

або

$$2a^2 = b^2 + c^2.$$

Значить, трикутник може бути рівнобедреним або автомедіанним (визначення С. І. Зетеля).

3. Нехай тепер точка X збігається з основою бісектриси (L_1 або L_2).

Перший спосіб. Оскільки

$$M_1N_1 = l_a \sin A, \text{ а } M_2N_2 = l_b \sin B,$$

то за умовою $l_a \sin A = l_b \sin B$.

Скористаємося формулою бісектриси:

$$\frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \sin A = \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{B}{2} \sin B,$$

або

$$\frac{b}{b+c} \cos \frac{A}{2} \sin A = \frac{a}{a+c} \cos \frac{B}{2} \sin B,$$

або

$$\frac{\sin B \cos \frac{A}{2} \sin A}{\sin B + \sin C} = \frac{\sin A \cos \frac{B}{2} \sin B}{\sin A + \sin C},$$

$$\cos \frac{A}{2} \cdot 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 2 \cos \frac{B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2},$$

звідки

$$\cos \frac{A-C}{2} = \cos \frac{B-C}{2},$$

звідки

$$A = B, \text{ або ж } C = 60^\circ.$$

Другий спосіб. Доречно скористатися формулою

$$S = \frac{1}{2} AW \cdot MN.$$

Пропонуємо читачеві продовжити пошук модернізацій проблеми Штейнера-Лемуса.

КАЗКОВА РЕАЛЬНІСТЬ РАДІУСА НАПІВВПИСАНОГО КОЛА

Напіввписане коло було розглянуто в главі «Знання чи імпровізація» в книзі «Повернення шкільної геометрії» (К.: Факт, 2000)¹. Цариця Шахерезада виводить формулу радіуса цього кола:

$$r_1 = \frac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}}, \quad (*)$$

і робить це не таким вже й простим *першим способом*. Ніяк не менш «казковий» *другий спосіб* виведення формули (*) — застосування теореми Кезі. Покажемо ще два способи доведення.

● *Третій спосіб*. Нехай коло з центром O_1 і радіусом r_1 дотикається до кола з центром O радіуса R (рис. 33.1).

Опустимо з точок O і O_1 перпендикуляри OM і O_1N на хорду AB . Далі опустимо перпендикуляр O_1P на OM і розглянемо прямокутний трикутник OO_1P .

$$\text{За теоремою Піфагора } (R \cos C - r_1)^2 + \left(r_1 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 = (R - r_1)^2.$$

Після спрощення отримаємо:

$$\begin{aligned} r_1 &= c \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} - 2R(1 - \cos C) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = c \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} - 2R \sin C \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \\ &= c \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right) = c \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right). \end{aligned}$$

Але

$$c = r \left(\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \right) = r \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}}.$$

Відповідно,

$$r_1 = r \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \right), \quad r_1 = r \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}}. \quad \bullet$$

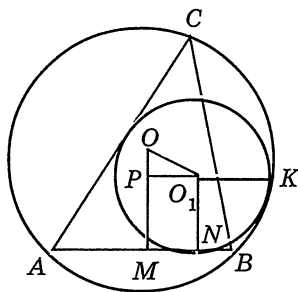


Рис. 33.1

¹ Маємо на увазі коло, яке дотикається до двох сторін трикутника і описаного навколо нього кола.

● *Четвертий спосіб.* За теоремою Стюарта для $\triangle AOO_1$, враховуючи, що інцентр I лежить на AO_1 , маємо:

$$OI^2 = \frac{1}{AO_1} (AI \cdot OO_1^2 + IO_1 \cdot OA^2 - AI \cdot IO_1 \cdot AO_1).$$

За формулою Ейлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Отже,

$$R^2 - 2Rr = \frac{\sin \frac{A}{2}}{r_1} \left(\frac{r}{\sin \frac{A}{2}} (R - r_1)^2 + \frac{r_1 - r}{\sin \frac{A}{2}} R^2 - \frac{r(r_1 - r)r_1}{\sin^3 \frac{A}{2}} \right).$$

Після перетворень отримуємо

$$r_1(R^2 - 2Rr) = r(R - r_1)^2 + (r_1 - r)R^2 - \frac{rr_1(r_1 - r)}{\sin^2 \frac{A}{2}},$$

або $r_1 = \frac{r_1 - r}{\sin^2 \frac{A}{2}}$; звідки $r_1 = \frac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}}$. ●

Задача 1. Довести, що радіус напіввписаного кола, яке дотикається до катетів прямокутного трикутника, дорівнює діаметру вписаного кола.

● *Доведення.* Оскільки $r_1 = \frac{r}{\cos^2 \frac{90^\circ}{2}}$, то $r_1 = 2r$. ●

Задача 2. Дано: $R; r_1; a$. Знайти S .

Вказівка. Задача зводиться до знаходження площі трикутника ABC за $R; r; a$.

Напіввписане коло і нерівність

Задача 3. Довести, що $r \leq r_1$.

● *Доведення очевидне.* ●

Задача 4. Побудовані напіввписані кола радіусів r_1, r_2 і r_3 . Довести, що $2R \geq r_1 + r_2 + r_3 \geq 4r$.

● *Доведення.* Доведемо, що $r_1 + r_2 + r_3 \geq 4r$.

Оскільки

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2},$$

$$\text{маємо } r_1 + r_2 + r_3 = r \left(3 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \right).$$

Оскільки

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

а $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$, то $r_1 + r_2 + r_3 \leq 4r$.

Доведемо, що $r_1 + r_2 + r_3 \leq 2R$. Дійсно,

$$r_1 + r_2 + r_3 = r \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} \right) = 4Rr \left(\frac{1}{r_b + r_c} + \frac{1}{r_a + r_c} + \frac{1}{r_a + r_b} \right),$$

де r_a, r_b, r_c — радіуси зовнівписаних кіл.

Маємо

$$\frac{1}{r_a + r_b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right); \quad \frac{1}{r_b + r_c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right); \quad \frac{1}{r_c + r_a} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_a} \right).$$

Тому $r_1 + r_2 + r_3 \leq 2Rr \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right)$. Але з іншого боку:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c},$$

відповідно, $r_1 + r_2 + r_3 \leq 2R$. ●

Глава 34

ДОТЕПНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДОТЕПНОЇ ЗАДАЧІ

Мова піде про досить відому задачу:

На стороні BC трикутника ABC знайти таку точку D , щоб величина AD була середнім геометричним величин BD і CD .

Думаю, що задача стала популярною після Шістнадцятої міжнародної математичної олімпіади, проведеної в 1974 році в Німеччині. Розв'язок задачі відомий (рис. 34.1).

Нехай O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC (для наочності зобразимо його тупокутним). На радіусі OA як на діаметрі побудуємо коло, яке перетинатиме хорду BC в шуканій точці D .

Дійсно, проведемо хорду AA_1 , якій належить точка D . Оскільки $OD \perp AA_1$, то $AD = DA_1$, і

$$AD \cdot DA_1 = BD \cdot DC, \text{ або } AD^2 = BD \cdot DC.$$

Визначення точки D було лише елементом запропонованої задачі. Насправді умова задачі (вона була запропонована Фінляндією) була дещо іншою:

У трикутнику ABC величини кутів при вершинах A , B і C дорівнюють α , β і γ . Довести, що нерівність $\sin \alpha \cdot \sin \beta \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2}$ є

необхідною і достатньою умовою для того, щоб на відрізку AB знайшлася така точка D , що величина CD була середнім геометричним величин AD і BD .

Звісно, автори розділили задачу на два етапи: перший — знайти точку D (це ми вже зробили) і другий — дослідити, коли задача має розв'язок, підказуючи для цього тригонометричну нерівність.

Отже, визначення точки D з шуканими властивостями, еквівалентне до визначення на колі, описаному навколо трикутника ACB (рис. 34.2), такої точки C_1 , що відрізок CC_1 точкою перетину D з відрізком AB ділиться навпіл.

Доведемо, і це головне, що точку C_1 на колі можна знайти тоді й тільки тоді, коли $CH \leq KM$, де K — середина дуги AC_1B , M — середина відрізка AB , CH — висота.

Дійсно, розглянемо хорду CC_1 . Проекцією відрізка CD на діаметр KE буде відрізок FM , який дорівнює висоті CH . Проекцією відрізка DC_1 на діаметр EK буде відрізок ML . Якщо $CD = DC_1$, то $FM = ML$, а щоб існувала точка L , необхідно і достатньо, щоб $FM \leq KM$, або

$$CH \leq KM. \quad (1)$$

$$\text{Очевидно, } CH = 2R \sin \alpha \cdot \sin \beta, \text{ а } MK = R - R \cos \gamma = 2R \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

або, враховуючи (1), маємо: $\sin \alpha \cdot \sin \beta \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2}$, що й потрібно було довести.

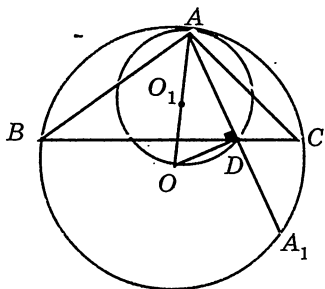


Рис. 34.1

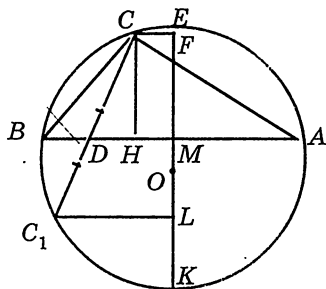


Рис. 34.2

ПІДТВЕРДЖЕННЯ ПРОРОКУВАНЬ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

Дивно, але досі не помітили дивовижну, ба навіть «потойбічну», властивість прямокутного трикутника — він здатен пророкувати! Навіть більше — всі його пророкування справджуються! Феномен прямокутного трикутника полягає в тому, що найпростіші, геть очевидні залежності, властиві цій фігурі, дозволяють гіпотетично стверджувати: тривіальна властивість прямокутного трикутника може виявитися особливою, а інколи й важкою для доведення теоремою геометрії трикутника. Наприклад, теорема про перетин трьох висот трикутника в одній точці. Хто зна, може, ця тепер така очевидна теорема виникла саме як аналогія з прямокутним трикутником. Отже, спробуємо побачити в прямокутному трикутнику деяку залежність, а з її допомогою «спророкувати» особливу теорему в «звичайному» трикутнику.

Попередньо звернемо увагу на два «незвичних» твердження.

Твердження 1. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) вершина C є ортоцентром цього трикутника.

Твердження 2. Висота CH_3 є «ортоцентричним трикутником» прямокутного трикутника, периметр якого дорівнює подвоєнній висоті.

Дійсно,

$$H_2H_3 + H_3H_1 + H_1H_2 = CH_3 + CH_3 + 0 = 2CH_3.$$

Розглянемо гіпотетичні задачі прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) на такому прикладі.

Задача 1. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) очевидно, що $\angle ACH_3 = \angle CBA$ (рис. 35.1).

• Маємо відповідну аналогію (рис. 35.2). Аналогом кута ACH_3 прямокутного трикутника є кут AH_2H_3 непрямокутного трикутника ABC . Припускаємо, а точніше пророкуємо, що в

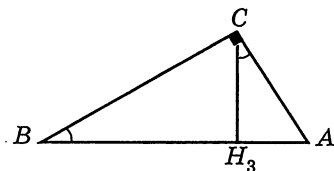


Рис. 35.1

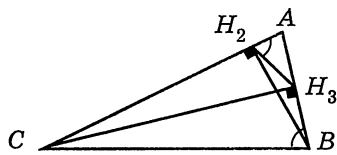


Рис. 35.2

непрямокутному трикутнику ABC кут $\angle H_2H_3$ дорівнює куту $\angle ABC$ — отримали відому задачу, яка приводить до антипаралельних прямих. Пророкування справдилося. ●

Задача 2. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) трикутник CAH_3 подібний до трикутника BAC . Знайти відповідну аналогію.

● У трикутнику ABC трикутники AH_2H_3 і ABC подібні (рис. 35.2). ●

Задача 3. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) O — центр описаного кола, й $OA \perp CH_3$. Знайти відповідну аналогію (рис. 35.3).

● Очевидно, що в трикутнику ABC $OA \perp H_2H_3$ (рис. 35.4). ●

Задача 4. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $S = CH_3 \cdot \frac{1}{2} AB$. Знайти відповідну аналогію.

● Оскільки в прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) висота CH_3 є виродженим ортоцентричним трикутником, периметр якого дорівнює $2CH_3$, а гіпотенуза $AB = 2R$, то можна припустити, що в трикутнику ABC $S_{ABC} = R \cdot p_H$, де p_H — півпериметр ортоцентричного трикутника $H_1H_2H_3$. Припущення виявилось правильним, оскільки формула $S = R \cdot P_{\Pi}$ — загально відома. ●

Задача 5. Опишемо навколо прямокутного трикутника ABC коло і продовжимо висоту CH_3 до перетину з цим колом в точці N (рис. 35.5). Знайти відповідну аналогію.

● Оскільки точки N і C у прямокутному трикутнику симетричні відносно AB , а C — ортоцентр прямокутного трикутника ABC , то стверджуємо, що точка перетину прямої CH в гострокутному трикутнику ABC з описаним колом симетрична ортоцентру H відносно AB . Отримали відому задачу. ●

Задача 6. Знайти відповідну аналогію кола, описаного навколо прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$).

● У трикутнику ABC кола, які проходять через кожних дві вершини трикутника і його ортоцентр, дорівнюють колу, описаному навколо трикутника. ●

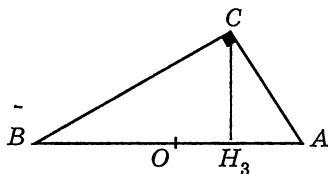


Рис. 35.3

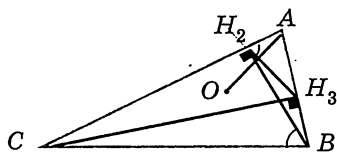


Рис. 35.4

Задача 7. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) через вершину C і центр O описаного кола проведено діаметр CC_1 . Точки C і C_1 симетричні відносно точки O . Знайти відповідну аналогію.

• У трикутнику ABC точка C_1 діаметрально протилежна точці C , симетрична з ортоцентром трикутника H відносно точки M_3 , середини сторін AB (рис. 35.6). •

Задача 8. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено медіану CM_3 . Знайти відповідну аналогію.

• Відповідь: пряма Ейлера. •

Задача 9. Якщо в прямокутному трикутнику інцентр I належить медіані CM_3 , то цей трикутник рівнобедрений. Знайти відповідну аналогію.

• Якщо в трикутнику ABC точка I належить прямій Ейлера, то трикутник рівнобедрений. Доведення можна знайти в книзі «Трикутник і тетраедр в задачах». •

Задача 10. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC^2 = AB^2 - BC^2$. Знайти відповідну аналогію в трикутнику ABC .

• У трикутнику ABC $AH^2 = 4R^2 - a^2$. •

Задача 11. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$)

$$OM_1 = \frac{1}{2} AC. \text{ Знайти відповідну аналогію.}$$

• У трикутнику ABC $OM_1 = \frac{1}{2} AH$ (рис. 35.7 і 35.8). •

Задача 12. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$)

$$M_1M_2 = \frac{1}{2} AB. \text{ Знайти відповідну аналогію.}$$

• У трикутнику ABC $M_1E_1 = R$ (E_1 — точка Ейлера — середина відрізка AH). •

Задача 13. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) ортоцентр S лежить на колі, яке проходить через середини його сторін. Знайти відповідну аналогію.

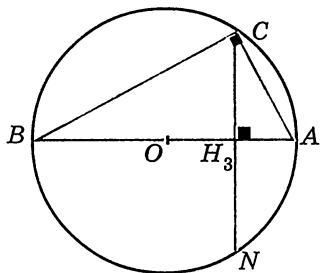


Рис. 35.5

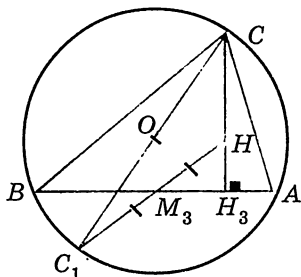


Рис. 35.6

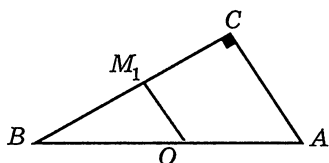


Рис. 35.7

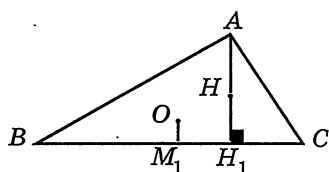


Рис. 35.8

● Довести, що якщо ортоцентр трикутника лежить на колі, яке проходить через середини його сторін, то трикутник прямокутний. ●

Задача 14. У прямокутному трикутнику проти кута 30° лежить катет, що дорівнює половині гіпотенузи. Знайти відповідну аналогію.

● Довести, що для того щоб один із кутів трикутника дорівнював 60° (або 120°), необхідно і достатньо, щоб відстань від вершини трикутника до ортоцентра дорівнювала радіусу описаного кола. ●

Задача 15. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$):

$$p_H = \frac{h_c}{p} = \frac{S}{\frac{c}{2} \cdot p} = \frac{r \cdot p}{R \cdot p} = \frac{r}{R}.$$

Знайти відповідну аналогію.

● В трикутнику ABC $\frac{p_H}{p} = \frac{r}{R}$. ●

У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведемо пряму через точки M_1 і I . Вона перетинатиме катет AC в точці K . Доведемо, що $KA = r$ (рис. 35.9).

● Доведення. Позначимо $KK_2 = x$, $AK = y$. Оскільки трикутник IK_2K подібний до трикутника M_1CK , то

$$\frac{2r}{a} = \frac{x}{r+x}; \text{ звідки } x = \frac{2r^2}{a-2r}.$$

$$\text{Нехай } y = b - (r+x), \text{ або } y = b - \frac{ar}{a-2r}.$$

Доведемо, що $y = r$. Маємо $ar - 2r^2 = ab - 2rb - ar$, або $2r^2 - 2r(b+a) + ab = 0$, звідки

$$r = \frac{a+b-c}{2},$$

що і потрібно було. ●

Відповідна аналогія: пряма, яка проходить через точки M_1 і I в трикутнику ABC , відтинає на висоті AH_1 відрізок $AK = r$.

Задача 16. Довести, що в прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$), $h_c < 0,5r$.

● Доведення. Оскільки $2h_c = 2r_H$, а $2r_H < r$, звідки

$$h_c < 0,5r. \bullet$$

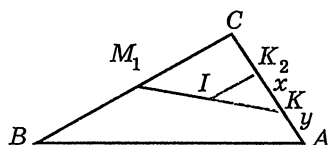


Рис. 35.9

Глава 36

ТЕОРЕМА КЕЗІ, АБО УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ¹

Кезі — шотландський математик XIX века. Окрім іншого, написав коментарі до перших шести книг «Начал» Евкліда (Casey «A sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid, Containing an Easy Introduction to Modern Geometry with Numerous Examples», Dublin, 1888).

Теорема, про яку піде мова, зустрічається серед задач Сангаку — Японської храмової геометрії (XVII — XIX).

Теорема Кезі «працює» з чотирма колами $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C, \gamma_D$, які дотикаються до кола γ (зсередини або ж зовні). Позначимо точки дотику A, B, C, D (рис. 36.1), тобто чотирикутник $ABCD$ вписаний, і до нього далі буде застосована теорема Птолемея. Позначимо відрізки спільних зовнішніх дотичних $d_{AB}, d_{BD}, d_{DC}, d_{AC}, d_{AD}, d_{BC}$.

Теорема Кезі

Маємо рівність:

$$d_{AB} \cdot d_{CD} + d_{AD} \cdot d_{BC} = d_{AC} \cdot d_{BD}$$

Зазначимо, що теорема правильна і для кіл нульового радіуса, тобто точок.

● Доведення теореми Кезі.

Лема. Дано коло $(O; R)$ і два кола $\gamma_A(O_1; r_1), \gamma_B(O_2; r_2)$, що дотикаються до нього зсередини в точках A і B . Довести, що відстань $d(\gamma_A; \gamma_B)$ обчислюється за формулою:

$$d(\gamma_A; \gamma_B) = \frac{AB}{R} \sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}. (*)$$

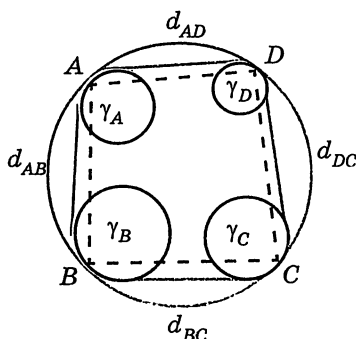


Рис. 36.1

¹ У главі використано матеріал книги З. А. Скопця «Геометрические миниатюры», розділ «Обобщение теоремы Птолемея» (М.: Просвещение, 1990).

● Доведення. Позначимо $d(\gamma_A; \gamma_B) = A_1B_1$. Проведемо відрізок O_1K , паралельний до A_1B_1 (рис. 36.2). Очевидно, що $O_1K = A_1B_1$.

Із $\triangle O_1O_2K$:

$$A_1B_1^2 = O_1O_2^2 - (r_2 - r_1)^2. \quad (1)$$

Із $\triangle O_1OO_2$:

$$O_1O_2^2 = (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1) \cdot (R - r_2) \cos \varphi, \quad (2)$$

де $\varphi = \angle AOB$.

Із $\triangle AOB$: $AB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \varphi$, звідки

$$\cos \varphi = \frac{2R^2 - AB^2}{2R^2} = 1 - \frac{AB^2}{2R^2}, \quad (3)$$

Підставимо вирази (2) і (3) в (1). Маємо

$$A_1B_1^2 = -(r_2 - r_1)^2 + (R - r_2)^2 + (R - r_1)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2) \left(1 - \frac{AB^2}{2R^2} \right).$$

Покажемо, як із останнього виразу отримати вираз (*).
Маємо

$$\begin{aligned} d^2 = & -r_2^2 + 2r_2 \cdot r_1 - r_1^2 + R^2 - 2Rr_1 + r_1^2 + R^2 - \\ & - 2Rr_2 + r_2^2 - 2(R - r_1)(R - r_2) \left(1 - \frac{AB^2}{2R^2} \right), \end{aligned}$$

або

$$d^2 = 2(R - r_1)(R - r_2) - 2(R - r_1)(R - r_2) \left(\frac{2R^2 - AB^2}{2R^2} \right).$$

$$d^2 = (R - r_1)(R - r_2) \left(\frac{2R^2 - 2R^2 + AB^2}{R^2} \right) = (R - r_1)(R - r_2) \frac{AB^2}{R^2};$$

звідки остаточно

$$d = \frac{AB}{R} \sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}. \quad \bullet$$

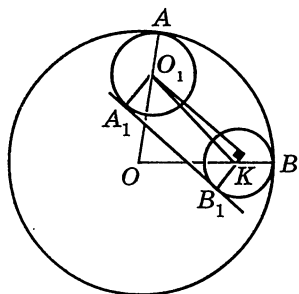


Рис. 36.2

Перейдемо до безпосереднього доведення теореми Кезі. Розглянемо чотирикутник $ABCD$, вписаний в коло γ (рис. 36.1). За допомогою формули (*) виразимо його сторони і діагоналі, щоб застосувати потім теорему Птолемея. Нехай кола $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C, \gamma_D$ мають радіуси r_1, r_2, r_3, r_4 . Тоді за формулою (*) маємо:

$$d_{AB} = \frac{AB}{R} T_1 T_2, \text{ де } T_1 T_2 = \sqrt{(R - r_1)(R - r_2)},$$

$$d_{BC} = \frac{BC}{R} T_2 T_3, \text{ де } T_2 T_3 = \sqrt{(R - r_2)(R - r_3)},$$

$$d_{CD} = \frac{CD}{R} T_3 T_4, \text{ де } T_3 T_4 = \sqrt{(R - r_3)(R - r_4)},$$

$$d_{DA} = \frac{DA}{R} T_1 T_4, \text{ де } T_1 T_4 = \sqrt{(R - r_4)(R - r_1)},$$

$$d_{CA} = \frac{CA}{R} T_1 T_3, \text{ де } T_1 T_3 = \sqrt{(R - r_3)(R - r_1)},$$

$$d_{DB} = \frac{DB}{R} T_2 T_4, \text{ де } T_2 T_4 = \sqrt{(R - r_4)(R - r_2)}.$$

Для чотирикутника $ABCD$ запишемо *теорему Птолемея*.

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot AC. \quad (1^0)$$

Оскільки

$$AB = \frac{d_{AB} \cdot R}{T_1 T_2}, \quad CD = \frac{d_{CD} \cdot R}{T_3 T_4}, \quad BC = \frac{d_{BC} \cdot R}{T_2 T_3}, \quad AD = \frac{d_{AD} \cdot R}{T_1 T_4},$$

$$AC = \frac{d_{AC} \cdot R}{T_1 T_3}, \quad BD = \frac{d_{BD} \cdot R}{T_2 T_4},$$

то вираз (1^0) запишемо так

$$R^2 \cdot \frac{d_{AB} \cdot d_{CD}}{T_1 T_2 \cdot T_3 T_4} + R^2 \cdot \frac{d_{AD} \cdot d_{BC}}{T_1 T_4 \cdot T_2 T_3} = R^2 \cdot \frac{d_{BD} \cdot d_{AC}}{T_2 T_4 \cdot T_1 T_3},$$

або

$$d_{AB} \cdot d_{CD} + d_{AD} \cdot d_{BC} = d_{BD} \cdot d_{AC}. \bullet$$

Методична порада: як скористатися теоремою Кезі

Записуємо по колу як букви A, C, E, B всі кола. Як правило A, B, C — точки, нульові кола, а E — задане коло (позначається ω). До чотирикутника $ACEB$ застосуємо теорему Птолемея, замінюючи сторони — відрізками дотичних.

Розглянемо декілька задач.

Задача 1. (Прасолов. Збірник задач з планіметрії: ч. 1, № 3.42 б). В коло S вписано рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$). Коло S_1 вписане в сегмент BC , який не містить точки A . Довести, що довжина дотичної до кола S_1 AH дорівнює AB .

● Доведення. Нехай коло S_1 дотикається до сторони BC в точці T , а дуги BC — в точці E (рис. 36.3). Створюємо чотирикутник $ABEC$ для теореми Кезі, вважаючи точку E колом. Тоді

$$AB \cdot d_{EC} + d_{BE} \cdot AC = d_{AE} \cdot BC$$

Оскільки $d_{EC} = CT$, $d_{BE} = BT$, $d_{AE} = AX$, то

$$AB \cdot CT + BT \cdot AC = AX \cdot BC.$$

Але за умовою $AB = AC$. Маємо $AB(CT + BT) = AX \cdot BC$, або $AB \cdot BC = AX \cdot BC$,

звідки $AB = BX$. ●

Задача 2. На відрізку AB як на діаметрі побудовано півколо γ . Точка C належить діаметру, а півкола γ_1 і γ_2 , побудовані на відрізках AC і BC , дотикаються один до одного і півкола γ . Відрізок CE — їхня спільна дотична ($E \in \gamma$), MN — зовнішня дотична. Довести, що $MN = CE$.

● Доведення (рис. 36.4). Доповнимо півколо до кола γ . Продовжимо EC до перетину з γ в точці F . Розглянемо многокутник, вершини якого — точки кола $AEBF$.

Позначимо $EC = t$. Враховуючи, що

$$d_{AE} \cdot d_{BF} + d_{AF} \cdot d_{EB} = MN \cdot EF,$$

і

$$d_{AE} = d_{EB} = EC = t; d_{FA} = d_{FB} = FC = t; EF = 2t,$$

отримаємо $t^2 + t^2 = MN \cdot 2t$, відповідно $MN = CE$. ●

Теорема Кезі на Міжнародній олімпіаді

Задача 3, яку ми маємо намір розглянути, вперше з'явилася на Міжнародній математичній олімпіаді в 1978 році: коло дотикається зсередини до кола, описаного навколо рівнобедреного

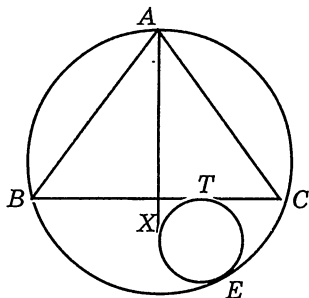


Рис. 36.3

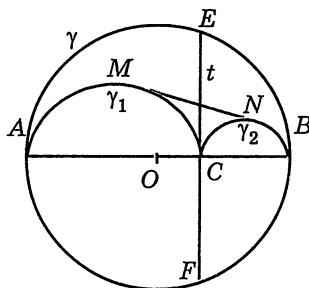


Рис. 36.4

трикутника ABC , а також рівних сторін AB і BC цього трикутника в точках C_1 і A_1 відповідно. Довести, що середина відрізка C_1A_1 є центром кола, вписаного в трикутник ABC .

Умова «рівнобедрений» — зайва. Задача розглядалася в книзі «Повернення втраченої геометрії».

Покажемо застосування теореми Кезі.

Задача 4. Довести, що

$$BA_1 = \frac{ac}{p}, \quad (p \text{ — півпериметр } \triangle ABC) \quad (1^0)$$

• Доведення (рис. 36.5). Прийнемо точки C, A, B як «нульові» кола, позначимо точку E як коло ω . «По колу» поставимо вершини вписаного чотирикутника $CEAB$ і застосуємо до нього теорему Птолемея:

$$CE \cdot AB + EA \cdot BC = CA \cdot EB.$$

За теоремою Кезі позначимо A_1 і C_1 — точки дотику кола ω зі сторонами BC і BA , отримаємо:

$$CA_1 \cdot AB + AC_1 \cdot BC = AC \cdot BC_1. \quad (2^0)$$

Нехай $BA_1 = BC_1 = x$. Тоді рівність (2^0) виглядатиме так:

$$(a - x)c + (c - x)a = bx,$$

або

$$ac - xc + ac - ax = bx,$$

звідки

$$2ac = x(b + c + a),$$

отже $x = \frac{ac}{p}$, що й потрібно було довести. •

Теорема Кезі й напіввписане коло

Коло ω ми назвали *напіввписаним* (рис. 36.5). Знайдемо радіус r напіввписаного кола.

Задача 5. Довести, що

$$r' = \frac{r}{\cos^2 \frac{B}{2}},$$

де r — радіус кола, вписаного в трикутник ABC .

• Доведення. Очевидно, що

$$r' = BA_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}$$

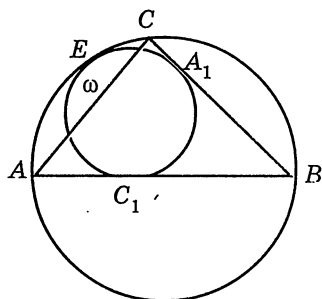


Рис. 36.5

(A_1 — точка дотику напіввписаного кола і сторони BC) (рис. 36.6).

За формулою (1⁰) маємо:

$$r' = \frac{ac}{p} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\frac{1}{2} ac \sin B \sin \frac{B}{2}}{\frac{1}{2} \sin B \cdot p \cdot \cos \frac{B}{2}} = \frac{S \cdot \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \cdot p \cdot \cos \frac{B}{2}} = \frac{r}{\cos^2 \frac{B}{2}}. \bullet$$

Задача 6. Нехай напіввписане коло дотикається до сторін BC і BA в точках A_1 і C_1 . Довести, що середина відрізка A_1C_1 збігається з інцентром I трикутника ABC .

● **Доведення.** Нехай X — середина відрізка A_1C_1 (рис. 36.7).

Очевидно, що $BX \perp A_1C_1$ і $\angle XBA = \frac{B}{2}$. Доведемо, що $XE = r$

($XE \perp BC$, $E \in BC$). Маємо:

$$XE = BX \sin \frac{B}{2} = BA_1 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}.$$

Застосуємо формулу (1):

$$XE = \frac{ac}{2p} \sin B = \frac{S}{p} = r.$$

Значить, $X \equiv I$. ●

Задача 7. (Збірник задач за редакцією М. Сканаві, № 12.394).

У сегмент кола радіусом R вписано два рівних кола, які дотикаються один до одного, до дуги сегмента і до його хорди. Знайти радіуси цих кіл, якщо центральний кут, що опирається на дугу сегмента, дорівнює α ($\alpha < \pi$).

● **Доведення.** Нехай O — центр кола, а AOD — сегмент, у який вписано два кола (рис. 36.8). Проведемо радіус OB через точку K — спільну точку цих кіл. Одне з кіл дотикається до хорди AD в точці E і до дуги ABD в точці C .

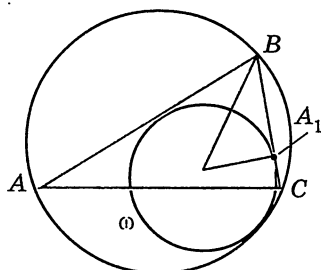


Рис. 36.6

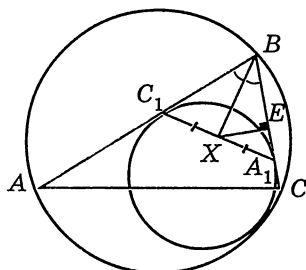


Рис. 36.7

Застосуємо теорему Птолемея до чотирикутника $ABCD$:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

За теоремою Кезі:

$$AB \cdot DE + BK \cdot AD = AE \cdot BD.$$

Маємо $AB = BD = 2R \sin \frac{\alpha}{4}$; $AE = R \sin \frac{\alpha}{2} + x$ (x — радіус рівних кіл).

$$BK = R - x - R \cos \frac{\alpha}{2}; \quad AD = 2R \sin \frac{\alpha}{2}; \quad DE = R \sin \frac{\alpha}{2} - x.$$

Тоді:

$$2R \sin \frac{\alpha}{4} \left(R \sin \frac{\alpha}{2} - x \right) + \left(R - x - R \cos \frac{\alpha}{2} \right) 2R \sin \frac{\alpha}{2} = \left(R \sin \frac{\alpha}{2} + x \right) \cdot 2R \sin \frac{\alpha}{4}.$$

Поділимо обидві частини на $2R \sin \frac{\alpha}{4}$, отримаємо:

$$2R \cos \frac{\alpha}{4} - 2R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} = 2x + 2x \cos \frac{\alpha}{4}; \quad R \cos \frac{\alpha}{4} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2x \cos^2 \frac{\alpha}{8};$$

$$x = \frac{R \cos \frac{\alpha}{4} \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{8}} = 4R \cos \frac{\alpha}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{8}. \bullet$$

Задача 8. Два кола, вписані в сегмент AB даного кола, дотикаються зовні в точці X . Доведіть, що їхня спільна дотична, проведена через точку X , пройде через середину додаткового сегмента для даної дуги AB .

● **Доведення.** Нехай менші кола дотикаються до даного кола в точках E і F (рис. 36.9), хорди AB — в точках M і N . Нехай дотична, що проведена через точку X , перетинатиме дугу AtB в точці C .

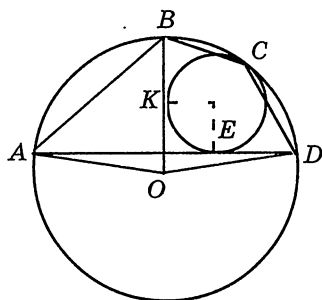


Рис. 36.8

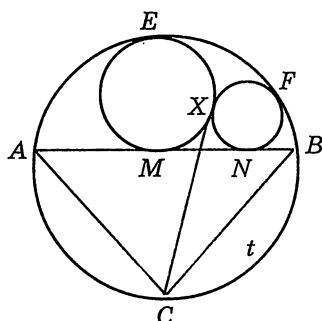


Рис. 36.9

Доведемо, що C — середина дуги AB . Запишемо теорему Кезі для чотирикутника $AEB C$. Маємо: $d_{AE} \cdot BC + AC \cdot d_{BE} = AB \cdot d_{EC}$, що означає

$$AM \cdot BC + AC \cdot BM = AB \cdot CX. \quad (1)$$

Запишемо теорему Кезі для чотирикутника $AFBC$:

$$d_{AF} \cdot BC + AC \cdot d_{BF} = AB \cdot d_{CF},$$

що означає:

$$AN \cdot BC + AC \cdot BN = AB \cdot CX. \quad (2)$$

Порівняємо рівності (1) і (2), маємо:

$$AM \cdot BC + AC \cdot BM = AN \cdot BC + AC \cdot BN,$$

$$\text{або } AC(BM - BN) = BC(AN - AM).$$

Але $BM - BN = AN - AM = MN$, $AC \cdot MN = BC \cdot MN$. Остаточно $AC = BC$, значить, точка C — середина дуги AB , що й потрібно було довести. ●

Задача 9 (Збірник задач з планіметрії, Прасолов, ч. 1, № 3.44).

Два кола, вписані в сегмент AB кола, перетинаються в точках M і N . Довести, що пряма MN проходить через середину додаткової для даного сегмента дуги AB .

● **Доведення.** Нехай вписані в сегмент кола (рис. 36.10) дотикаються до хорди AB в точках X і Y , а дуги AB — в точках E і F . Нехай пряма MN перетинає дугу AtB в точці C . Потрібно довести, що C — середина дуги AtB .

Нехай CK_1 — дотична до одного з вписаних кіл, CK_2 — до другого. Тоді $CK_1^2 = CM \cdot CN = CK_2^2$, звідки

$$CK_1 = CK_2. \quad (2^0)$$

Запишемо теорему Птолемея для $AEB C$:

$$AE \cdot BC + AC \cdot BE = AB \cdot EC,$$

або

$$AX \cdot BC + AC \cdot BX = AB \cdot CK_1. \quad (3^0)$$

Запишемо теорему Птолемея для $AFBC$:

$$AF \cdot BC + AC \cdot FB = AB \cdot FC,$$

або

$$AY \cdot BC + AC \cdot BY = AB \cdot CK_2. \quad (4^0)$$

Враховуючи рівність (2⁰), маємо:

$$AX \cdot BC + AC \cdot BX = AY \cdot BC + AC \cdot BY,$$

$$\text{або } AC(BX - BY) = BC(AY - AX).$$

Але

$$BX - BY = XY = AY - AX,$$

$$AC \cdot XY = BC \cdot XY,$$

значить, $AC = BC$, що і потрібно було довести. ●

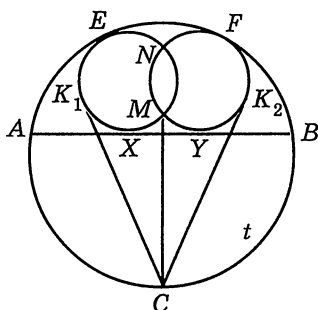


Рис. 36.10

ЗАДАЧА ЯК ОБ'ЄКТ КОЛЕКЦІОНУВАННЯ

Колекціонувати задачі? Навіщо? Таке запитання може виникнути лише у дилетанта. Людина, захоплена математикою, завжди має свою колекцію улюблених задач. Їх можна збирати за різними ознаками: умови, розв'язування, історичні задачі, мініатюри тощо. Про такі задачі розповідають як про мистецькі шедеври, як про винятковий талан для автора, зрештою, к про найвище втілення математичної естетики і умови, і розв'язку. Багатьом «колекційним» задачам — сотні й тисячі років. Не сумніваюся, що такі задачі народжуються і сьогодні.

Однією з таких задач, опублікованою в журналі «Квант» (М. 511), хочу поділитися. У ній є все: коротка умова, нестандартне розв'язування, а головне — яскравий показ методів розв'язання. Навіть розповідь про неї (якщо не вдалося розв'язати самотужки) не лише повчальна, а й хвилює, викликає захоплення автором задачі й тими, хто зміг її розв'язати.

Всередині чотирикутника $ABCD$ позначено таку точку M , що чотирикутник $ABMD$ — паралелограм. Доведіть, що якщо $\angle CBM = \angle CDM$, то $\angle ACD = \angle BCM$.

● *Доведення. Перший спосіб.* Проведемо відрізок CN , рівний і паралельний до відрізка BM (рис. 37.1). Тоді чотирикутники $BNCM$ і $ANCD$ — паралелограми, звідки випливає, що

$$\angle NAB = \angle CDM, \angle NCB = \angle CBM.$$

За умовою $\angle CBM = \angle CDM$, відповідно, $\angle NAB = \angle NCB$ і точки A, B, N, C лежать на одному колі. Тому $\angle NBC = \angle BCM$, а $\angle NAC = \angle ACD$ (чотирикутники $BNCM$ і $ANCD$ — паралелограми) і $\angle BCM = \angle ACD$, що й потрібно було довести.

Другий спосіб базується на подібності чотирикутників. Нехай точка B' — перетин прямих BM і CD , а точка D' — прямих DM і BC .

Доведемо, що чотирикутники $ABCD$ і $MB'D'$ подібні.

Дійсно, у цих чотирикутників кут C спільний, а інші кути попарно рівні:

$$\angle A = \angle M, \angle B = \angle D', \angle D = \angle B'.$$

Доведемо тепер, що їхні сторони пропорційні.

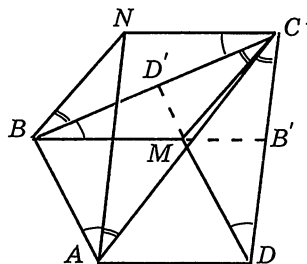


Рис. 37.1

Оскільки трикутники $BD'M$ і $DB'M$ подібні й чотирикутник $ABMD$ — паралелограм, то

$$\frac{MB'}{AB} = \frac{MD'}{AD},$$

а це означає, що чотирикутники $ABCD$ і $MB'CD'$ — подібні! Із цього виходить, що

$$\angle ACD = \angle MCD' = \angle MCB,$$

що й потрібно було довести. ●

Глава 38

ЗАХОПЛЕННЯ НАВЧАННЯМ

Даруйте, але не пригадаю, де була вперше надрукована ця задача і хто її автор. Проте впевнено можу стверджувати, що тираж її величезний: вона скромно зайняла місце в групі B відомого задачника під редакцією М. Сканаві. Ось її умова.

Площа трикутника ABC дорівнює S_1 , площа трикутника AHB (H — ортоцентр) дорівнює S_2 . На прямій CH взяли таку точку K , що трикутник ABK прямокутний. Довести, що площа трикутника ABK є середнім геометричним між S_1 і S_2 .

Із задачею я «знайомий» давно, та лише зараз оцінив її педагогічну цінність.

Почнемо з того, що розв'язати задачу не просто. Мабуть, найприродніше її розв'язання — за допомогою подібності.

● *Перший спосіб* (рис. 38.1). Потрібно довести, що $S_3^2 = S_1 \cdot S_2$ (S_3 — площа трикутника ABK).

Цю рівність можна записати так:

$$c^2 \cdot KH_3^2 = c^2 \cdot CH_3 \cdot HH_3,$$

або

$$KH_3^2 = CH_3 \cdot HH_3. \quad (*)$$

Оскільки $\angle BKA = 90^\circ$, то

$$KH_3^2 = AH_3 \cdot BH_3.$$

Щоб отримувати рівність (*), потрібно довести, що

$$CH_3 \cdot HH_3 = AH_3 \cdot BH_3.$$

Якщо цю рівність записати як

$$\frac{CH_3}{AH_3} = \frac{BH_3}{HH_3}, \quad (1^0)$$

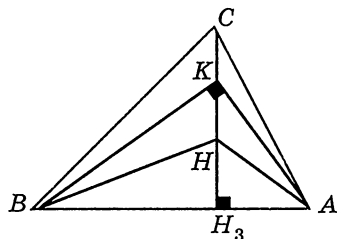


Рис. 38.1

то очевидно, що потрібно використати подібність трикутників CBH_3 і AHH_3 . Дійсно, ці прямокутні трикутники мають рівний гострий кут.

До речі, можна «обійти» подібність: із рівності (1⁰)

$$\frac{CH_3}{AH_3} = \operatorname{tg} A, \text{ а } \frac{BH_3}{HH_3} = \operatorname{tg} \angle BHH_3, \text{ але } \angle BHH_3 = \angle A!$$

Отже, задача «вміщається» в рівність:

$$KH_3^2 = CH_3 \cdot HH_3. \quad (*)$$

Спробуємо тригонометрію.

Другий спосіб. Виразимо за допомогою R і кутів трикутника всі компоненти рівності (*):

$$HH_3 = BH \cos A = 2R \cos A \cos B, \quad CH_3 = a \sin B = 2R \sin A \sin B,$$

$$KH_3 = \sqrt{AH_3 \cdot BH_3} = \sqrt{b \cos A \cdot a \cos B} = \sqrt{R^2 \sin 2A \cdot \sin 2B}.$$

$$\text{Маємо } HH_3 \cdot CH_3 = R^2 \sin 2A \cdot \sin 2B.$$

Проте! Існує ще й третій спосіб доведення. І знову на «відмінну геометрію» виведе алгебра!

Третій спосіб. Позначимо

$$AH_3 = m; \quad BH_3 = n; \quad HH_3 = t.$$

Маємо:

$$\frac{S_{AKB}}{S_{AHB}} = \frac{KH_3}{HH_3} = \frac{\sqrt{mn}}{t}.$$

Далі

$$\frac{S_{AKB}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{mn}}{h_a}.$$

Помножимо:

$$\frac{S_{AKB}^2}{S_{AHB} \cdot S_{ABC}} = \frac{\sqrt{mn} \cdot \sqrt{mn}}{t \cdot h_a}.$$

Очевидно, що повинно бути $mn = t \cdot h_a$. Дійсно, опишемо коло навколо $\triangle ABC$ (рис. 38.2). Продовжимо відрізок CH_3 до перетину з колом в точці N .

Тоді $H_3N = t$ (використали відому властивість $HH_3 = H_3N$). Тепер застосуємо теорему про добуток відрізків хорд

$$CH_3 \cdot H_3N = AH_3 \cdot BH_3,$$

або $mn = t \cdot h_a$, а значить,

$$S_{AKB}^2 = S_{AHB} \cdot S_{ABC}.$$

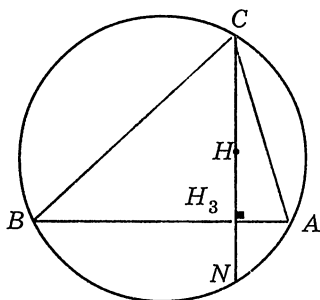


Рис. 38.2

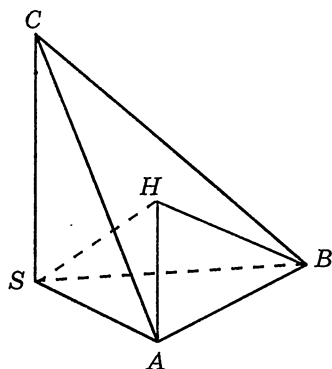


Рис. 38.3

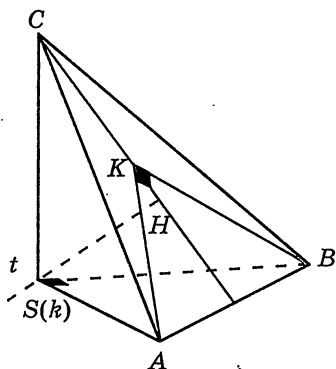


Рис. 38.4

Розв'яжемо задачу за допомогою стереометрії. Застосування стереометрії для розв'язання планіметричних задач особливо цікаво!

Четвертий спосіб. Розглянемо прямокутний тетраедр $CSAB$ (три кути при вершині S — прямі (рис. 38.3)).

Можна довести, що

$$S_{SAB} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{AHB}}. \quad (2^0)$$

До трикутника ABC (рис. 38.4) у просторі з ортоцентра H поставимо перпендикуляр t . Нехай K — деяка точка на прямій CH , така, що $\angle AKB = 90^\circ$. Повернемо трикутник AKB так, щоб його вершина K опинилася на перпендикулярі t . Отриману точку позначимо $S(k)$. Тоді тетраедр $CS(k)AB$ — прямокутний, оскільки $\angle BS(k)A = 90^\circ$, а висота $S(k)H$ проходить через ортоцентр H грані CAB . Тоді за формулою (2^0)

$$S_{S(k)AB} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{AHB}},$$

але трикутник SAB — це трикутник AKB , а тому

$$S_{AKB} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{AHB}}. \bullet$$

Воістину, ця задача — скарб не лише для геометрії, а й для педагогіки геометрії!

Гадаю, що пропонувана задача буде також до речі і поповнить скарбницю цієї глави.

Задача¹. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено висоту CD , що дорівнює h . Точки M і N — середини відрізків BD і AD . Знайти відстань від точки C до ортоцентра трикутника CMN .

¹ Автор І. Ф. Шаригін.

● Нехай Q — ортоцентр трикутника CMN (рис. 38.5). Позначимо

$$BM = MD = m; DN = NA = n.$$

Опишемо навколо трикутника CMN коло і продовжимо відрізок CD до перетину з колом у точці Q_1 .

Нехай $DQ_1 = DQ = t$. Маємо

$$CD = h = 2\sqrt{mn}; CD \cdot DQ_1 = mn,$$

або $h \cdot t = \frac{h^2}{4}$; значить, $t = \frac{h}{4}$ і $CQ = \frac{3h}{4}$. ●

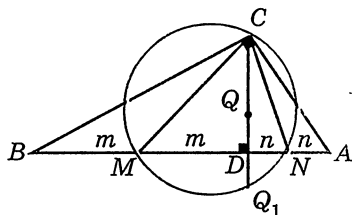


Рис. 38.5

Глава 39

КАТЕТИ ЯК ВИСОТИ. НАРОДЖЕННЯ ЧИ ВИРОДЖЕННЯ?

А можуть бути висоти як катети? Яка абракадабра!

...І нічого дивного тут немає — це ж так просто — прийняти катети прямокутного трикутника за його висоти!

Висоти «виродилися» у катети! Катети «народилися» висотами! Така собі «надризна» ситуація — що вона може дати?

Теорема-ланцюжок (назва теореми пов'язана з її доведенням). Якщо у трикутнику ABC одночасно

$$\begin{cases} a = h_a \\ b = h_b \end{cases},$$

то трикутник ABC — рівнобедрений прямокутний.

● Доведення. Маємо «ланцюжок»:

$$a \geq h_b = b \geq h_a = a.$$

Оскільки в ланцюжку всюди стоїть знак «дорівнює», то отримуємо

$$a = b = h_a = h_b.$$

Оскільки відрізок h_b — перпендикуляр, а сторона a — похила, то a повинна збігатися з висотою h_b , значить, сторона a перпендикулярна до сторони b — і теорема доведена. ●

Задача 1. Якщо $a + b = h_a + h_b$, то $\angle C = 90^\circ$. Довести.

● Доведення. Дійсно, оскільки $a \geq h_b$, $b \geq h_a$, то $a + b \geq h_a + h_b$.

Отже, ці нерівності будуть правильні тільки у випадку знака рівності. Оскільки сторона a — похила, а h_b — перпендикуляр, то a збігається з h_b , значить, a перпендикулярна до b . ●

Задача 2¹ (Четверта Всеросійська олімпіада, 1964 р., Москва). У трикутнику дві висоти не менші за сторони, на які вони опущені. Знайти кути трикутника (автор задачі — Л. М. Лоповок).

Застосуємо принцип теореми-ланцюжка. Тоді трикутник ABC — рівнобедрений прямокутний.

Відповідь: $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

Покажемо, як, враховуючи умову «висота — катет», «катет — висота», можна створити нові задачі.

Відомо, що

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

«Замінімо» h_a і h_b сторонами a і b й поставимо задачу.

Задача 3. Довести, що якщо $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$, то трикутник прямокутний.

● **Доведення.** *Перший спосіб.* Перепишемо задану рівність так:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r} - \frac{1}{h_c}, \text{ або } \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{r} - \frac{c}{2S}, \text{ або } \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{r} - \frac{c}{2 \cdot rp},$$

звідки $\frac{a+b}{ab} = \frac{a+b}{2r \cdot p}$, $\frac{1}{2}ab = rp$, $\frac{1}{2}ab = S$, значить, $\angle C = 90^\circ$.

Другий спосіб. Маємо: $\frac{h_a}{2S} + \frac{h_b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{2p}{2S}$, або $h_a + h_b + c = 2p$, або

$$h_a + h_b = a + b.$$

За задачею 1 трикутник ABC — прямокутний. ●

Нехай X — довільна точка всередині трикутника, d_1, d_2, d_3 — відстані від точки X до сторін AB, BC, AC . Відомо співвідношення:

$$\frac{d_1}{h_a} + \frac{d_2}{h_b} + \frac{d_3}{h_c} = 1. \quad \bullet$$

«Замінімо» h_a і h_b сторонами a і b . Отримаємо нову умову.

Задача 4. Довести, що якщо для будь-якої точки X на відстанях d_1, d_2, d_3 відповідно від сторін BC, AC, AB трикутника ABC виконується рівність

$$\frac{d_1}{a} + \frac{d_2}{b} + \frac{d_3}{h_c} = 1,$$

¹ Задачу внесено до багатьох конкурсних і олімпіадних завдань.

то трикутник ABC рівнобедрений прямокутний².

● Доведення. Відомо співвідношення $\frac{d_1}{h_a} + \frac{d_2}{h_b} + \frac{d_3}{h_c} = 1$. За умовою $\frac{d_1}{a} + \frac{d_2}{b} + \frac{d_3}{h_c} = 1$, відніmemo від першої рівності другу й отримаємо

$$\frac{d_1}{h_a} + \frac{d_2}{h_b} = \frac{d_1}{a} + \frac{d_2}{b},$$

або

$$d_1(h_a - a) + d_2(h_b - b) = 0. \quad (1^0)$$

Далі. Всередині трикутника ABC візьмемо точку X_1 , у якій відстань $d_1' = d_1$, але $d_2' \neq d_2$ (рис. 39.1). Тоді за рівністю (1⁰) маємо:

$$d_1'(h_a - a) + d_2'(h_b - b) = 0. \quad (2^0)$$

Відніmemo почленно із (1⁰) рівність (2⁰):

$$(d_2 - d_2')(h_b - b) = 0.$$

Тоді $h_b = b$. Аналогічно доводиться, що $h_a = a$. За теоремою-ланцюжком можемо тепер стверджувати, що трикутник ABC — рівнобедрений і прямокутний. Мабуть, найкоротший спосіб розв'язання — сумістити точку X з вершинами A і B й застосувати теорему-ланцюжок. ●

Відомо, що для всякого трикутника

$$d_1a + d_2b + d_3c = 2S.$$

Зміниmo умову й створимо аналогічно нову задачу.

Задача 5. Відомо, що в трикутнику ABC

$$d_1h_a + d_2h_b + d_3c = K,$$

де K — деяка константа. Довести, що трикутник прямокутний і рівнобедрений.

● Доводиться аналогічно до задачі 4. ●

Наступна задача цікава не лише розв'язанням. Наведемо її умову.

Задача 6. Довести, що якщо

$$\frac{p^2}{h_c(a+b)+ab} = \frac{R}{2r},$$

то трикутник прямокутний.

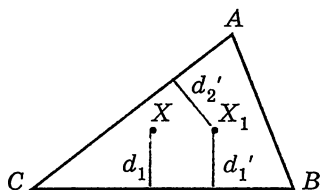


Рис. 39.1

² Звертаємо увагу на нетривіальне розв'язування цієї досі невідомої задачі.

Перш ніж перейти до доведення, подивимося, як створювалася ця задача. Далі буде доведено формулу

$$\frac{p^2}{h_b h_c + h_a h_b + h_a h_c} = \frac{R}{2r}.$$

Переробимо її. Якщо в трикутнику ABC $\frac{p^2}{bh_c + ah_c + ab} = \frac{R}{2r}$, то він прямокутний — отримали умову задачі 6. Перейдемо до доведення. Маємо $R(b \cdot h_c + a \cdot h_c + ab) = 2Sp$,

$$R\left(\frac{2S}{h_b} \cdot h_c + \frac{2S}{h_a} \cdot h_c + ab\right) = 2Sp,$$

або $R\left(\frac{2Sb}{c} + \frac{2Sa}{c} + ab\right) = 2Sp$. Враховуючи, що $R = \frac{abc}{4S}$, маємо

$$R(2Sb + 2Sa + 4SR) = 2S \cdot p \cdot c, \text{ звідки } 2S(a + b + 2R) = \frac{2Sp c}{R}, \text{ або}$$

$$a + b + 2R = \frac{pc}{R}.$$

Остання рівність розглядається в главі «Провокує одна». Задачу розв'язано.

Задача 7 (I). Середини трьох висот нетупокутного трикутника лежать на одній прямій. Довести, що цей трикутник прямокутний.

Доведення цієї задачі також пов'язано з теоремою Ланцюжком. Але спочатку доведемо лему:

Лема. Відрізки AA_1 , BB_1 , CC_1 з'єднують вершини трикутника ABC із внутрішніми точками протилежних сторін. Доведіть, що середини цих відрізків не лежать на одній прямій.

● Доведення. Нехай M_1 , M_2 , M_3 — середини сторін BC , AC , AB (рис. 39.2). Тоді прямі AA_1 , BB_1 , CC_1 перетинатимуть сторони трикутника $M_1M_2M_3$ в точках X , Y , Z , які є серединами відрізків AA_1 , BB_1 , CC_1 . Оскільки точки X , Y , Z належать трьом сторонам

трикутника, то вони не лежать на одній прямій.

Переходимо до основної задачі. Оскільки за умовою середини висот лежать на одній прямій, то дві з висот збігаються зі сторонами, а це можливо, якщо трикутник прямокутний. ●

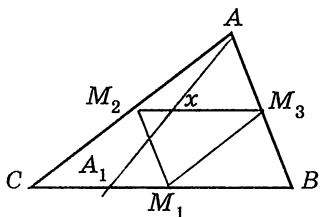


Рис. 39.2

ДОБРИДЕНЬ, ПАНЕ КАРНО!

На вступному іспиті до математичного ліцею було запропоновано задачу.

Задача 1. Нехай O — центр кола, описаного навколо гострокутного трикутника ABC . Точки O_1 і O_2 — симетричні до точки O відносно середин сторін BC і AB відповідно. Із точки B на пряму O_1O_2 опущено перпендикуляр BE ($E \in O_1O_2$) і на прямій BE відкладено відрізок $EK = BE$. Довести, що точка K збігається з ортоцентром трикутника ABC .

• **Доведення.** *Перший спосіб* (не потребує спеціальних знань з геометрії трикутника). Нехай M_1 і M_3 — середини сторін BC і AB трикутника ABC (рис. 40.1).

Оскільки $BO_1 = BO_2 = BO$ (симетрія точок O і O_1 відносно точки M_1), то точка B — центр кола, описаного навколо трикутника O_1OO_2 , а оскільки $BE \perp O_1O_2$ (за умовою), то $O_1E = EO_2$, тобто точка E — середина відрізка O_1O_2 .

Оскільки $BE = KE$ і $BM_3 = AM_3$, то відрізок EM_3 — середня лінія трикутника AKB , а значить, $M_3E \parallel AK$. Із трикутника O_1OO_2 : $M_3E \parallel OO_1$, а значить, $AK \parallel OO_1$, відповідно, AK належить висоті AN_1 .

Оскільки (із $\triangle O_1OO_2$) $O_1O_2 \parallel M_1M_3$ і $BE \perp O_1O_2$, то $BE \perp M_1M_3$, а значить, BE належить висоті BH_2 . Перетин прямих AK і BK (точка K) — ортоцентр трикутника ABC .

Другий спосіб (застосування формули $OM_1 = \frac{1}{2} AN$). Нехай

M_2 — середина сторони AC трикутника ABC (рис. 40.2). Оскільки $O_1B = O_2B = R$ (R — радіус кола, описаного навколо трикутника ABC), то $O_1B = OC$, $O_2B = AO$. Оскільки

$$O_1O_2 = 2M_1M_3 = AC,$$

то

$$\triangle OCA = \triangle BO_1O_2$$

і

$$OM_2 = BE = \frac{1}{2} BK, \quad CM_2 \perp BK,$$

значить, K — ортоцентр трикут-

ника ABC ($OM_2 = \frac{1}{2} BH$).

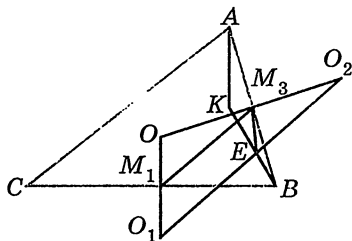


Рис. 40.1

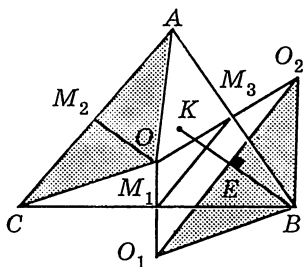


Рис. 40.2

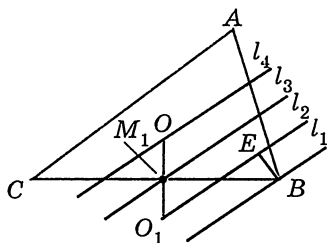


Рис. 40.3

Третій спосіб (використання факта: центр O описаного навколо трикутника ABC кола є ортоцентром трикутника $M_1M_2M_3$).

Через точки B, E, M_1, O проведемо паралельні до AC прямі l_1, l_2, l_3, l_4 (рис. 40.3). Позначимо як t_i відстань між ними. Тоді $t(l_2, l_3) = t(l_3, l_4)$.

Але оскільки

$$\begin{aligned} t(l_3, l_4) &= t(l_3, AC) - t(l_4, AC) = \\ &= \frac{1}{2} BH_2 - OM_2 = \frac{1}{2} BH_2 - \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} HH_2, \end{aligned}$$

отже, $t(l_2, l_3) = \frac{1}{2} HH_2$. Далі

$$t(l_1, l_3) = \frac{1}{2} BH_2,$$

значить,

$$t(l_1, l_2) = \frac{1}{2} BH_2 - \frac{1}{2} HH_2 = \frac{1}{2} BH.$$

Відповідно

$$BE = \frac{1}{2} BH,$$

отже, $K \equiv H$. ●

Мені захотілося відстежити витоки цієї задачі. Згадалася задача:

Задача. Всередині трикутника ABC взяли точку X . Точки X_1, X_2, X_3 — образи точки X відносно середини сторони BC, CA, AB трикутника ABC відповідно. Довести, що трикутники ABC і $X_1X_2X_3$ рівні.

● **Доведення.** Очевидно, що $X_1X_2 = 2M_1M_2 = AB$ (рис. 40.4). Значить, сторони трикутника $X_1X_2X_3$ дорівнюють сторонам трикутника ABC . ●

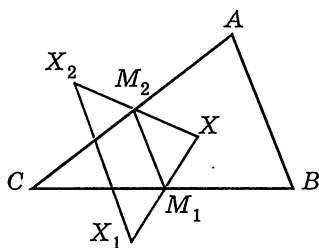


Рис. 40.4

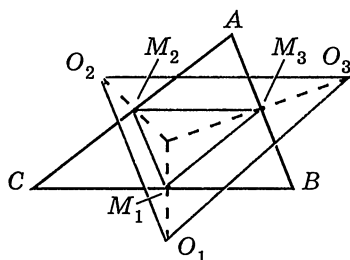


Рис. 40.5

Добридень, пане Карно!

Нехай X збігається з точкою O — центром кола, описаного навколо трикутника ABC . Тоді отримаємо умову задачі, відомої як задача Л. Карно.

Задача Карно. Нехай O_1, O_2, O_3 — образи точки O — центра описаного навколо трикутника ABC кола відносно сторін BC, CA, AB . Довести, що трикутник $O_1O_2O_3$ дорівнює трикутнику ABC і має з ABC спільне коло Ейлера (O_9) (Моденов П. С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. — М., 1960. — С. 212, № 45).

● Доведення (рис. 40.5). Оскільки трикутники $O_1O_2O_3$ і ABC рівні (див. попередню задачу), то радіуси кіл Ейлера рівні. Зазначимо, і це головне, що трикутники $O_1O_2O_3$ і ABC гомотетичні (кожний з них гомотетичний з трикутником $M_1M_2M_3$), а також (і це також важливо!) центр O описаного кола трикутника ABC буде ортоцентром трикутника $O_1O_2O_3$ (оскільки сторони трикутника $O_1O_2O_3$ паралельні до сторін трикутника $M_1M_2M_3$). Це означає, що прямі Ейлера цих трикутників збігаються, а відповідно, збігаються і центри кіл Ейлера (середина відрізка OH). ●

І, нарешті, переходимо до доведення першої задачі (рис. 40.6) із застосуванням задачі Карно.

● У трикутнику $O_1O_2O_3$ точку O можна отримати як точку K у трикутнику ABC . Значить, точка K — ортоцентр $\triangle ABC$, що і потрібно було довести. ●

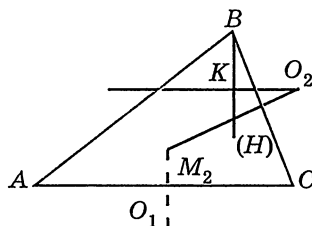


Рис. 40.6

ХТО З НИХ КОРОЛЕВА?

Близнюків не долюблювали. Згадаймо «Принца й жебрака», кінострічку з Жаном Маре «Небезпечна схожість», «Залізна маска» — інтриги, боротьба з несправедливістю, неоднозначний фінал.

Дві бісектриси: внутрішня l_a і бісектриса зовнішнього кута l'_a . Про першу відомо «все», про другу згадують мимохідь як про аналог першої. А насправді, незважаючи на таку собі «невідомість», бісектриса зовнішнього кута аж ніяк не поступається своїй знаній родичці, а іноді навіть перевершує її за вишуканими геометричними властивостями. Почнемо з трикутника $AL_aL'_a$. Отже,

Трикутник $AL_aL'_a$

Тут і далі позначатимемо l_a і l'_a — бісектриси внутрішнього кута BAC і зовнішнього кута BAN (рис. 41.1), L_a і L'_a — точки перетину бісектрис із прямою BC .

Зазначимо, що трикутник $AL_aL'_a$ — прямокутний, а його висота $AH_1 = h_a$ збігається з висотою трикутника ABC . Цей факт використовується в розв'язанні деяких задач на побудову, в яких неявно задається трикутник $AL_aL'_a$, а він, у свою чергу, «допомагає» знайти елементи, яких не вистачає для побудови трикутника ABC .

Отже, задача побудувати трикутник ABC :

1) за $L_aL'_a$; l_a ; $\angle B$ — зводиться до задачі побудувати трикутник за h_a ; l_a ; $\angle B$;

2) за l_a , l'_a , m_a — зводиться до задачі h_a ; m_a ; l_a .

Задача 1. Побудувати трикутник за відрізком $L_aL'_a$; висоті h_a ; стороні c .

● За висотою h_a , $\angle L_aAL'_a = 90^\circ$ і відрізком $L_aL'_a$ будуюмо прямокутний трикутник $L_aAL'_a$. За стороною c знаходимо вершину B . Далі очевидно. ●

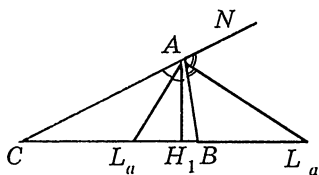


Рис. 41.1

Точки L_a і L'_a

Теорема-аналог: бісектриса внутрішнього кута трикутника перетинає продовження протилежної сторони в точці, відстань від якої до кінців цієї сторони пропорційна прилеглим сторонам трикутника (рис. 41.2).

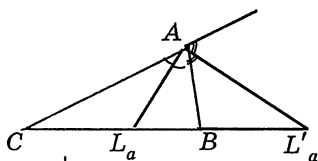


Рис. 41.2

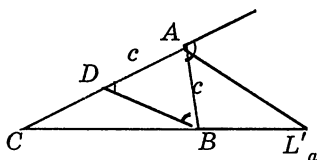


Рис. 41.3

Потрібно довести, що

$$L'_a C : L'_a B = AC : AB.$$

● Доведення - аналогія. *Перший спосіб.* Проведемо $BD \parallel AL'_a$ (рис. 41.3). Тоді $\angle DBA = \angle BAL'_a = \angle ADB$ і $AD = c$. Значить, $CL'_a : L'_a B = AC : DA = AC : AB$, що й потрібно було довести.

Другий спосіб (рис. 41.4). Очевидно, що

$$\frac{CL'_a}{BL'_a} = \frac{S_{AL'_a C}}{S_{ABL'_a}}, \text{ але } S_{AL'_a C} = \frac{1}{2} AC \cdot L'_a D \quad (L'_a D \perp AC).$$

Позначимо $\angle BAL'_a = \angle L'_a AD = \varphi$. Із $\triangle ADL'_a$:

$$DL'_a = l'_a \cdot \sin \varphi,$$

так

$$S_{AL'_a C} = \frac{1}{2} b \cdot l'_a \sin \varphi. \quad (1)$$

Далі:

$$S_{ABL'_a} = \frac{1}{2} AB \cdot l'_a \sin \varphi = \frac{1}{2} c \cdot l'_a \sin \varphi. \quad (2)$$

Розділимо рівність (1) на (2), отримаємо:

$$\frac{S_{AL'_a C}}{S_{ABL'_a}} = \frac{\frac{1}{2} b \cdot l'_a \sin \varphi}{\frac{1}{2} c \cdot l'_a \sin \varphi} = \frac{b}{c},$$

отже, $\frac{CL'_a}{BL'_a} = \frac{b}{c}$, що й потрібно було довести. ●

Якщо дві точки X і Y ділять відрізок AB (одна внутрішньо, а друга — зовнішньо) в однакових пропорціях, тобто $AX : XB = AY : YB$, то кажуть, що **точки X і Y розділяють гармонічно точки A і B** .

Зрозуміло, що точки L_a і L'_a розділяють гармонічно точки C і B .

Задача 1 (у ній чотири задачі). Побудувати трикутник, якщо відомі вершини B і C , точка L'_a і точка:

- 1) H ; 2) I ; 3) W_1 ; 4) I_a .

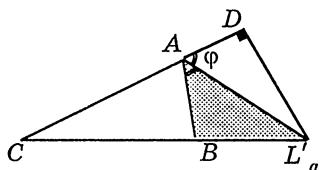


Рис. 41.4

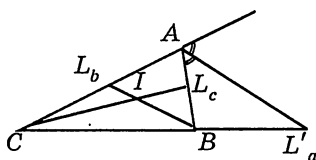


Рис. 41.5

Вказівка. Знайти розташування точки L_a .

Аналогічна задача виникає, якщо замість точки L'_a задано точку L_a .

Задача 2. Якщо Q — середина відрізка $L_a L'_a$, то

$QL_a = \sqrt{QB \cdot QC}$. Довести.

• **Доведення.** Маємо $L_a B = \frac{ac}{b+c}$; $L'_a B = \frac{ac}{b-c}$;

$$L_a L'_a = L_a B + L'_a B = ac \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b-c} \right) = \frac{2abc}{b^2 - c^2}.$$

За умовою

$$L_a Q = QL'_a = \frac{1}{2} L_a L'_a = \frac{abc}{b^2 - c^2}.$$

Маємо:

$$QB = QL_a - L_a B = \frac{ac}{b+c} \left(\frac{b}{b-c} - 1 \right) = \frac{ac \cdot c}{b^2 - c^2} = \frac{ac^2}{b^2 - c^2},$$

аналогічно $QC = \frac{ab^2}{b^2 - c^2}$.

Перевіримо за допомогою отриманих формул співвідношення, що нами доводяться:

$$QB \cdot QC = \frac{ab^2 \cdot ac^2}{(b^2 - c^2)^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b^2 - c^2)^2} = QL_a^2.$$

Значить, $QL_a = \sqrt{QB \cdot QC}$, що і потрібно було довести. •

Де «ночують» основи бісектрис L_a, L_b, L_c і L'_a, L'_b, L'_c

Задача 3. Довести, що основи бісектрис внутрішніх кутів при двох вершинах трикутника і основах бісектрис зовнішнього кута при третій вершині лежать на одній прямій.

• **Доведення** (рис. 41.5). Отже, потрібно довести, що рівність правильна (застосуємо теорему Менелая).

$$\frac{AL_b}{L_bC} \cdot \frac{CL'_a}{L'_aB} \cdot \frac{BL_c}{L_cA} = 1.$$

Дійсно,

$$\frac{AL_b}{L_bC} \cdot \frac{CL'_a}{L'_aB} \cdot \frac{BL_c}{L_cA} = \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{b} = 1,$$

що й потрібно було довести. ●

Задача 4. Довести, що основи бісектрис зовнішніх кутів при вершинах трикутника лежать на одній прямій.

● Доведення.

$$\frac{AL'_b}{L'_bC} \cdot \frac{CL'_a}{L'_aB} \cdot \frac{BL'_c}{L'_cA} = \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{b} = 1,$$

а це означає, що за теоремою Менелая твердження доведено. ●

Аналогія точки W_1 (Точка W^A)

Точку перетину зовнішньої бісектриси l'_a трикутника ABC з описаним навколо нього колом назовемо **точкою W^A** (рис. 41.6).

Теорема: Точки W_1 і W^A діаметрально протилежні.

● Доведення (рис. 41.7). Дійсно, оскільки $\angle W^A A W_1 = 90^\circ$, то $W^A W_1$ — діаметр. ●

Наслідок.

(1⁰) Діаметр $W^A W_1$ — перпендикулярний до сторони BC трикутника ABC .

(2⁰) Точка W^A ділить дугу BAC навпіл.

Дійсно, оскільки

$$\cup CW_1 = \cup W_1 B,$$

а $W_1 W^A$ — діаметр, то $\cup CW^A = \cup BW^A$.

Аналог трилисника — теорема чотирилисника

Маємо рівність $W^A B = W^A C = W^A I_b = W^A I_c$. Довести.

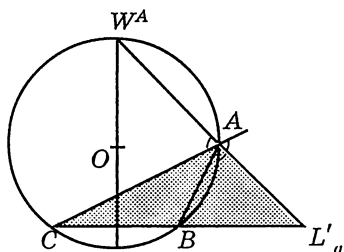


Рис. 41.6

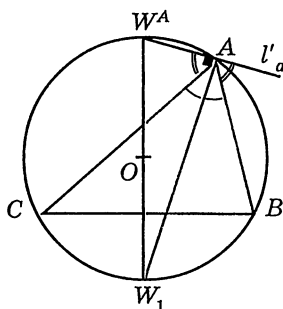


Рис. 41.7

- Доведення (рис. 41.8). Очевидно, що $W^A B = W^A C$.
Доведемо, що $W^A I_b = W^A B$, або $\angle 1 = \angle 2$. Із $\triangle I_b A I$:

$$\angle 2 = 90^\circ - \angle A I I_b = 90^\circ - (180^\circ - \angle A I B) = 90^\circ - \left(180^\circ - \left(90^\circ + \frac{C}{2} \right) \right) = \frac{C}{2}.$$

Далі

$$\angle 1 = \angle I_b B A - \angle A B W^A = \frac{B}{2} - \angle W^A W_1 A = \frac{B}{2} - \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2} \right) = \frac{C}{2},$$

що і потрібно було довести. Аналогічно доводиться, що $W^A C = W^A I_c$, значить, твердження доведено. ●

Наслідок. Чотири точки: A, W^A, I_b, I_c належать одній прямій, і точка W^A — середина відрізка $I_b I_c$.

Задача 5. На колі задано точку A і точку X поза колом. Побудувати трикутник ABC , вписаний в це коло, щоб точка X була ексцентром I_b (центром зовнівписаного кола, що дотикається до сторони AC).

Вказівка. Побудувати точку W^A — середину відрізка $I_b I_c$.

Формули-аналоги

Задача 6. Довести, що $\frac{1}{l_a^2} + \frac{1}{(l'_a)^2} = \frac{1}{h_a^2}$.

- Дійсно, трикутник $AL_a L'_a$ — прямокутний. ●

Задача 7. Довести, що якщо $b > c$, то $l'_a = \frac{2bc}{b-c} \sin \frac{A}{2}$ (аналог

формули $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$).

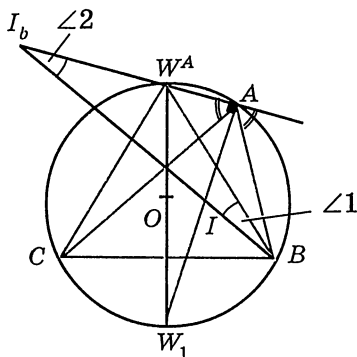


Рис. 41.8

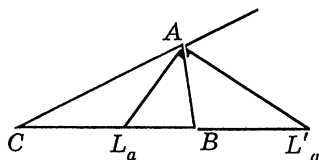


Рис. 41.9

● Доведення (рис. 41.9). Нехай $S_1 = S_{AL'aC}$ і $S_2 = S_{AL'aB}$. Тоді $S_1 = S + S_2$. Маємо

$$S_1 = \frac{1}{2} b \cdot l'_a \sin\left(90^\circ + \frac{A}{2}\right); \quad S = \frac{1}{2} bc \sin A; \quad S_2 = \frac{1}{2} c \cdot l'_a \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right).$$

Значить,

$$l'_a \left(b \cos \frac{A}{2} - c \cos \frac{A}{2} \right) = bc \sin A, \text{ звідки } l'_a = \frac{2bc}{b-c} \sin \frac{A}{2}. \bullet$$

Задача 8. За допомогою формул

$$1) l_a = \frac{h_a}{\cos \frac{B-C}{2}} \text{ і } 2) l'_a = \frac{h_a}{\sin \frac{B-C}{2}}$$

отримати формулу бісектриси внутрішнього і зовнішнього кута.

● Із $\triangle AL_a H_1$ маємо:

$$\begin{aligned} l_a &= \frac{h_a}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{2S}{a \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{bc \sin A}{a \cos \frac{B-C}{2}} = \\ &= \frac{2bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2R \sin A \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{bc \cos \frac{A}{2}}{2R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Далі: } 2R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} &= R \left(\sin \frac{B+C+B-C}{2} + \sin \frac{B+C-B+C}{2} \right) = \\ &= R(\sin B + \sin C) = \frac{b+c}{2}. \end{aligned}$$

Отже, $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$. Аналогічно доводиться формула

$$l'_a = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b-c}.$$

Дійсно, із $\triangle H_1 L'_a A$:

$$l'_a = \frac{h_a}{\sin \frac{B-C}{2}} = \frac{2S}{a \sin \frac{B-C}{2}} = \frac{bc \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2R \sin A \sin \frac{B-C}{2}} = \frac{bc \sin \frac{A}{2}}{2R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}}.$$

Маємо:

$$2R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2} = 2R \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2} = R(\sin B - \sin C) = \frac{b-c}{2}.$$

Отже,

$$l'_a = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b-c}. \bullet$$

Задача 9. Довести формулу-аналог $l'_a = \sqrt{b_1^1 c_1^1 - bc}$, де $b_1^1 = L'_a B$; $c_1^1 = L'_a C$.

● **Доведення.** Доведемо чудову пропорцію

$$\frac{l'_a}{c} = \frac{b}{AW^A}.$$

Дійсно (рис. 41.10), трикутник ACW^A подібний до $\triangle AL'_a B$, звідки

$$\frac{l'_a}{c} = \frac{b}{AW^A}.$$

Трикутник $CW^A L'_a$ подібний до трикутника ABL'_a , звідки

$$\frac{l'_a}{c_1^1} = \frac{b_1^1}{L'_a W^A}, \text{ або } b_1^1 c_1^1 = L'_a B \cdot L'_a C = L'_a A \cdot L'_a W^A,$$

або

$$b_1^1 c_1^1 = l'_a (l'_a + AW^A),$$

або

$$b_1^1 c_1^1 = (l'_a)^2 + l'_a \cdot AW^A.$$

Оскільки $l'_a \cdot AW^A = bc$, то попередня формула виглядатиме так:

$$(l'_a)^2 = b_1^1 c_1^1 - bc. \bullet$$

Задача-аналог. Довести формулу $l'_a = \frac{2}{b-c} \sqrt{bc(p-b)(p-c)}$ ($b > c$).

● **Доведення.** Маємо

$$l'_a = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b-c}.$$

Піднесемо до квадрату

$$(l'_a)^2 = \frac{4b^2 c^2 \sin^2 \frac{A}{2}}{(b-c)^2} = \frac{2b^2 c^2 (1 - \cos A)}{(b-c)^2}.$$

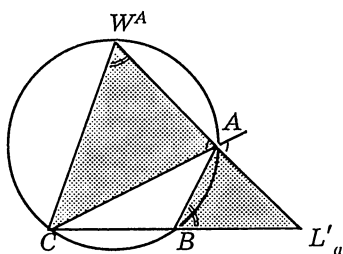


Рис. 41.10

Застосуємо формулу $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Отримаємо:

$$\begin{aligned}(l'_a)^2 &= \frac{2b^2c^2 \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}}{(b-c)^2} = \frac{bc(a^2 - (b-c)^2)}{(b-c)^2} = \\ &= \frac{bc(a-b+c)(a+b-c)}{(b-c)^2} = \frac{4bc(p-b)(p-c)}{(b-c)^2},\end{aligned}$$

звідки $l'_a = \frac{2}{b-c} \sqrt{bc(p-b)(p-c)}$. ●

Задача 10. Довести формулу $S = \frac{l_a \cdot l'_a (b^2 - c^2)}{4bc}$ ($b > c$).

● **Доведення.** Маємо

$$\begin{aligned}\frac{l_a \cdot l'_a (b^2 - c^2)}{4bc} &= \frac{2\sqrt{bc p(p-a)}}{b+c} \cdot \frac{2\sqrt{bc(p-b)(p-c)} \cdot (b^2 - c^2)}{(b-c)4bc} = \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S. \bullet\end{aligned}$$

Задача 11. Довести формулу

$$4b^2c^2 = l_a^2(b+c)^2 + l_a'^2(b-c)^2.$$

● **Доведення.** Скористаємося формулами для l_a і l'_a :

$$\begin{aligned}l_a^2(b+c)^2 + (l'_a)^2(b-c)^2 &= 4bcp(p-a) + 4bc(p-b)(p-c) = \\ &= 4bc(p(p-a) + (p-b)(p-c)) = 4bc(p^2 - pa + p^2 - bp - cp + bc) = \\ &= 4bc(2p^2 - p(a+b+c) + bc) = 4bc \cdot bc = 4b^2c^2. \bullet\end{aligned}$$

Задача 12. Довести формулу $\frac{bc}{l_a \cdot l_a} - \frac{ac}{l_b \cdot l_b} + \frac{ab}{l_c \cdot l_c} = 0$ ($a > b > c$).

● **Доведення.** Оскільки $S = \frac{l_a \cdot l'_a (b^2 - c^2)}{4bc}$, то $\frac{bc}{l_a \cdot l_a} = \frac{b^2 - c^2}{4S}$;

$$\text{аналогічно } \frac{-ac}{l_b \cdot l_b} = \frac{-a^2 + c^2}{4S} \text{ та } \frac{ab}{l_c \cdot l_c} = \frac{a^2 - b^2}{4S}.$$

Додамо три рівності й отримаємо те, що необхідно довести. ●

Задача 13. Довести $S = \sqrt{\frac{l'_a l'_b l'_c (b-c)(a-c)(a-b)p}{8abc}}$.

● Доведення. Маємо

$$\frac{l'_a l'_b l'_c (b-c)(a-c)(a-b)p}{8abc} = \frac{8 \cdot \sqrt{bc(p-b)(p-c)ac(p-a)(p-c)ab(p-a)(p-b)}}{8abc} \times \\ \times \frac{(b-c)(a-b)(a-c) \cdot p}{(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{\sqrt{a^2 b^2 c^2 (p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2} \cdot p}{abc} = \\ = p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2,$$

що і потрібно було довести. ●

Аналогія: формула $S = \frac{1}{2} AW^A \cdot M_1 N_1^1$, де M_1 і N_1 — проекції точки L'_a на прямі AC і AB .

● Доведення (рис. 41.11). Навколо чотирикутника $AM_1 L'_a N_1$ можна описати коло з діаметром AL'_a . Тоді

$$M_1 N_1 = AL'_a \cdot \sin A. \quad (1)$$

Застосуємо формулу чудової пропорції (задача 9):

$$b \cdot c = AW^A \cdot l'_a,$$

звідки $S = \frac{1}{2} AW^A \cdot l'_a \sin A$. Підставимо в цю формулу вираз (1) і отримаємо

$$S = \frac{1}{2} AW^A \cdot M_1 N_1.$$

Наслідок: $S_{ABC} = S_{W^A N_1 A M_1}$.

Побудови з бісектрисою l'_a

Зазначимо, що якщо задача на побудову трикутника, в умові якої є бісектриса l'_a , має розв'язок, то й задача на побудову трикутника, в умові якої є бісектриса l'_a , також має розв'язок.

Перевіряється безпосередньо.

! **Задача 14.** Побудувати ABC за b ; c ; l'_a .

● Проведемо $DC \parallel AB$ до перетину з прямою AL'_a (рис. 41.12).

$$\text{Маємо: } \frac{DL'_a}{AL'_a} = \frac{CL'_a}{BL'_a} = \frac{AC}{AB}. \text{ Отже, } \frac{DL'_a}{l'_a} = \frac{b}{c}, \quad DL'_a = \frac{l'_a \cdot b}{c}.$$

Далі:

$$\angle CAD = \angle BAL'_a = \angle CDL'_a,$$

тому трикутник CDA — рівнобедрений. Але $CA = CD = b$, $DA = DL'_a - AL'_a$.

¹ Порівняйте з формулою $S = \frac{1}{2} AW_1 \cdot MN$.

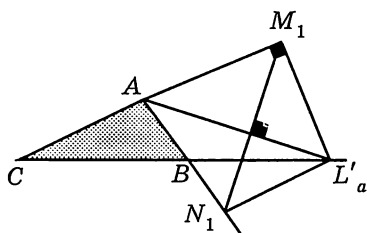


Рис. 41.11

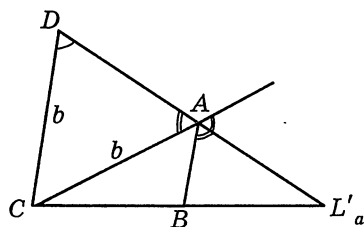


Рис. 41.12

Отже, в трикутнику ACD відомі три сторони, що дозволить знайти кут DAC , отже, і побудувати трикутник. ●

Задача 15. Побудувати трикутник ABC за A ; r ; l'_a .

● Будуємо трикутник AIK_3 (рис. 41.13) (K_3 — точка дотику вписаного кола до сторони AB). Далі вписуємо в кут A коло з центром I радіуса r . Оскільки $AI \perp AL'_a$, то побудуємо прямокутний трикутник AIL'_a й отримаємо точку L'_a , з якої проведемо дотичну і знайдемо точку B , отже, і трикутник ABC .

Задача 16. Побудувати трикутник ABC за h_a , m_a , l'_a .

Вказівка. Будуємо трикутник $AL'_aL'_a$. Знаходимо l_a , і задача зводиться до відомої: h_a , m_a , l_a .

Задача 17 (задача Паппа для l'_a): побудувати трикутник ABC за a , A , l'_a .

● Розглянемо подібні трикутники AW_1W^A і $M_1W^AL'_a$

(рис. 41.14): $\frac{AW^A}{W_1W^A} = \frac{M_1W^A}{W^AL'_a}$. Позначимо $W^AL'_a = x$, $M_1W^A = t$.

Отримаємо $\frac{x}{2R} = \frac{t}{x - l_a}$ — квадратне рівняння відносно x . А це

означає, що задану задачу розв'язано. ●

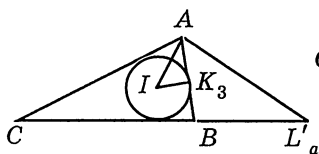


Рис. 41.13

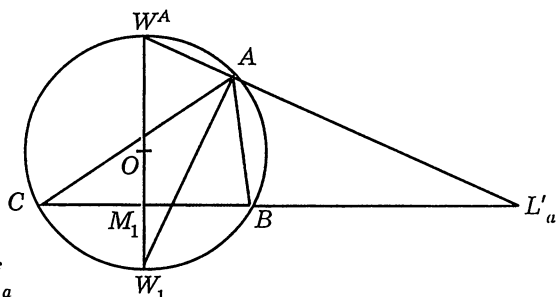


Рис. 41.14

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ В. ПРОІЗВОЛОВА

Декілька років тому я звернув увагу на задачу московського математика В. Проізволова в журналі «Квант»:

У квадрат $ABCD$ вписано чотирикутник $MNPQ$ (чотири вершини належать чотирьом сторонам квадрата). Трикутники APQ , BMQ , CMN , DNP — рівновеликі. Довести, що чотирикутник $MNPQ$ — квадрат (рис. 42.1).

Два розв'язки (не авторські) в мене були, та особливої зацікавленості, на жаль, задача не викликала. Та раптом... я осягнув задум автора. В геометрії квадрат у квадраті відомий, мабуть, ще з часів Евкліда:

- вписати в даний квадрат квадрат;
- довести, що центри даного і вписаного квадратів збігаються;
- якщо трикутники $(APQ, BMQ...)$ рівні, то чотирикутник $MNPQ$ — квадрат.

Зверніть увагу на останню задачу. Це «майже» задача В. Проізволова! Але сміливість автора полягає у тому, що він пішов далі й замінив рівність трикутників на рівновеликість (!). Пряма теорема не просто правильна, вона елементарна. А чи правильною буде обернена? В. Проізволов стверджує, що і обернена правильна! Доведемо її!

● *Перший спосіб.* Нехай $BM = x$, $BQ = y$ (рис. 42.1). Тоді

$$S_{APQ} = S_{DNP} = S_{CMN} = S = \frac{1}{2}xy \text{ (за умовою).}$$

$$\text{Очевидно, що } AQ = a - y, \text{ а значить, } AP = \frac{2S}{AQ} = \frac{2S}{a - y}.$$

$$\text{Аналогічно, } CM = a - x; \quad CN = \frac{2S}{a - x}; \quad DN = a - CN = a - \frac{2S}{a - x}.$$

$$\text{За умовою } S_{DNP} = S, \quad \frac{1}{2}DP \cdot DN = S. \text{ Підставимо } DP \text{ і } DN:$$

$$\frac{1}{2} \left(a - \frac{2S}{a - y} \right) \left(a - \frac{2S}{a - x} \right) = S.$$

Маємо

$$\begin{aligned} (a^2 - ay - 2S)(a^2 - ax - 2S) &= 2S(a - y)(a - x), \\ a^4 - (x + y)a^3 + (xy - 4S)a^2 + 2S(x + y)a + 4S^2 &= \\ &= 2S^2 \cdot a^2 - 2S \cdot a(x + y)^2 Sa + xy \cdot 2S. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $xy = 2S$, маємо

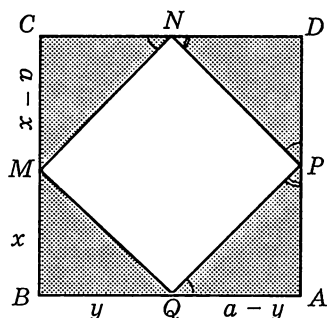


Рис. 42.1

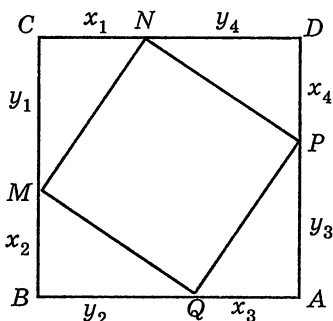


Рис. 42.2

$$\begin{aligned}
 a^4 - (x+y)a^3 - 2Sa^2 + 2S(x+y)a + 4S^2 &= 2Sa^2 - (x+y) \cdot 2Sa + 4S^2, \\
 a^4 - (x+y)a^3 - 4Sa^2 + 4S(x+y)a &= 0; \\
 a^3 - (x+y)a^2 - 4Sa + 4S(x+y) &= 0; \\
 a^2(a-x-y) - 4S(a-x-y) &= 0; (a-x-y)(a^2-4S) = 0.
 \end{aligned}$$

Так, або $a-x-y=0$, або $a^2-4S=0$. Друга рівність неможлива: $4S$ — площа трикутників, a^2 — площа квадрата $ABCD$, яка більша за площу трикутників.

Отже, $a-x-y=0$. Звідки $y=a-x$, отже, $BM=x$; $CM=a-x$; $BQ=y=a-x$; $AQ=x$. Далі очевидно.

Другий спосіб. Позначимо $CN=x_1$, $CM=y_1$; $MB=x_2$, $BQ=y_2$; $QA=x_3$, $AP=y_3$; $PD=x_4$, $DN=y_4$ (рис. 42.2).

Припустимо, що

$$x_1 > x_2. \quad (1)$$

Оскільки $x_1y_1 = x_2y_2$, то $y_1 < y_2$. Оскільки $y_1 + x_2 = y_2 + x_3$, то $x_2 > x_3$.

Отже, якщо $x_1 > x_2$, то $x_2 > x_3$. Аналогічно, якщо $x_2 > x_3$, то $x_3 > x_4$ і $x_4 > x_1$. Остаточно $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_1$, а це протиріччя. Значить, $x_1 = x_2$, а це доводить твердження задачі. ●

Глава 43

КУТИ ТРИКУТНИКА ЯК КОМПОНЕНТИ НЕРІВНОСТЕЙ

Тригонометричні нерівності в геометрії трикутника явище не нове. Дійсно, запишемо нерівність для сторін трикутника $a + b > c$ і одразу зможемо перетворити його в тригонометричну нерівність $\sin A + \sin B > \sin C$ (A, B і C — кути трикутника).

Тригонометричні нерівності ніколи не виходять із моди, тому що з'єднують пласти не лише шкільної, а й вищої математики. Їх постійно співставляють, витонченість доведень зростає, але все-таки в школі вони не приживаються.

Правда, багато залежить від учителя. Такі нерівності недостатньо просто знати. Їх потрібно систематично вивчати і навіть любити.

У цій главі буде зроблено ще одну спробу привернути увагу «шкільної математичної громади» до цієї теми. Запропоновані нерівності, звісно, прості за умовою. «Пікантність» полягає в тому, що багато з них очевидні (!), якщо застосувати умову випуклості (чи увігнутості) функції. А якщо не застосовувати цієї умови? Можна? Можна і потрібно!

Хоча, звісно, автор з повагою ставиться до класичної нерівності Ієнсена, яка така доречна і в цьому випадку.

Отже, розглянемо нерівності виду:

$$f(A) + f(B) \vee F\left(\frac{A+B}{2}\right);$$

$$f(2A) + f(2B) \vee F(A+B);$$

$$f(A) \cdot f(B) \vee F\left(\frac{C}{2}\right); \quad f(2A) \cdot f(2B) \vee F(C),$$

де A, B, C — кути трикутника; f, F — деякі тригонометричні функції, а символом « $\vee$ » позначено знак « $\leq$ » або « $\geq$ ».

Умовно назвемо такі нерівності *двокомпонентними*. Запишемо й доведемо кожну з них.

Перша група нерівностей

Задача 1. Довести: 1) $\sin A + \sin B \leq 2 \sin \frac{A+B}{2}$.

● Доведення. Маємо:

$$2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \sin \frac{A+B}{2}, \quad \text{або} \quad \cos \frac{A-B}{2} \leq 1,$$

що очевидно. ●

Аналогічно доводяться нерівності:

$$2) \cos A + \cos B \leq 2 \cos \frac{A+B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2};$$

$$3) \sin 2A + \sin 2B \leq 2 \sin C;$$

$$4) \cos 2A + \cos 2B \leq 2 \cos C \text{ (для гострокутного трикутника).}$$

Задача 2. Довести нерівність: у гострокутному трикутнику

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B \geq 2 \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = 2 \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

● Доведення. Маємо:

$$\frac{\sin(A+B)}{\cos A \cdot \cos B} \geq 2 \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}}, \text{ або } \cos^2 \frac{A+B}{2} \geq \cos A \cdot \cos B.$$

Тоді

$$\begin{aligned} &1 + \cos(A+B) \geq 2\cos A \cdot \cos B, \\ &1 + \cos(A+B) \geq \cos(A+B) + \cos(A-B), \\ &\cos(A-B) \leq 1, \end{aligned}$$

що очевидно. ●

Задача 3. Довести нерівність $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B \geq 2 \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{C}{2}$.

● Доведення.

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B} \geq 2 \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}, \text{ або } \sin^2 \frac{A+B}{2} \geq \sin A \cdot \sin B,$$

або

$$\begin{aligned} &1 - \cos(A+B) \geq \cos(A-B) - \cos(A+B), \\ &\cos(A-B) \leq 1. \bullet \end{aligned}$$

Друга група нерівностей

Задача 4. Довести нерівності:

$$(1^0) \sin A \cdot \sin B \leq \cos^2 \frac{C}{2};$$

$$(2^0) \sin 2A \cdot \sin 2B \leq \sin^2 C;$$

$$(3^0) \cos A \cdot \cos B \leq \sin^2 \frac{C}{2};$$

$$(4^0) \cos 2A \cdot \cos 2B \leq \cos^2 C.$$

● Доведення. Доведемо, що

$$\sin A \cdot \sin B \leq \cos^2 \frac{C}{2}.$$

Дійсно,

$$2\sin A \cdot \sin B \leq 1 + \cos C,$$

або

$$\cos(A-B) - \cos(A+B) \leq 1 + \cos C,$$

або

$$\cos(A-B) \leq 1.$$

Інші нерівності цього циклу доводяться аналогічно.

Про нерівність

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

Ця нерівність загальновідома і заслужено популярна. Існує декілька способів її доведення. Всі вони дещо штучні, хоча існує *природний* метод доведення (публікується вперше).

Маємо

$$\sin A \sin B \leq \cos^2 \frac{C}{2};$$

$$\sin B \sin C \leq \cos^2 \frac{A}{2};$$

$$\sin A \sin C \leq \cos^2 \frac{B}{2}.$$

Перемножимо нерівності:

$$\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \leq \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2},$$

або

$$\sin A \sin B \sin C \leq \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

або

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

або $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$, що й потрібно було довести. ●

Розглянемо групу *трикомпонентних* нерівностей, доведення яких базується на *двокомпонентних* нерівностях.

Задача 5. Довести, що

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}.$$

● **Доведення.** За формулою (1) маємо:

$$\sin A + \sin B \leq 2 \cos \frac{C}{2};$$

$$\sin B + \sin C \leq 2 \cos \frac{A}{2};$$

$$\sin C + \sin A \leq 2 \cos \frac{B}{2}.$$

Додамо й отримаємо нерівність, яку доводимо. ●

Задача 6. Довести, що

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}.$$

● Доводиться аналогічно.●

Третя група нерівностей (подвійні нерівності)

$$(1') \sin 2A + \sin 2B \leq \sin C;$$

$$(2') \sin 2A \cdot \sin 2B \leq \sin^2 C;$$

$$(3') \cos 2A + \cos 2B \leq 2\cos C \text{ (для гострокутного трикутника);}$$

$$(4') \cos 2A \cdot \cos 2B \leq \cos^2 C.$$

● Доведення.

$$(1') \sin 2A + \sin 2B = 2\sin(A+B)\cos(A-B) \leq 2\sin(A+B) = 2\sin C;$$

$$(2') \sin 2A \cdot \sin 2B = \frac{\cos(2A-2B) - \cos(2A+2B)}{2} \leq \frac{1 - \cos 2(A+B)}{2} = \\ = \sin^2(A+B) = \sin^2 C;$$

$$(3') \cos 2A + \cos 2B = 2\cos(A+B)\cos(A-B) = -2\cos C \cdot \cos(A-B) = \\ = 2\cos C(-\cos(A-B)) \leq 2\cos C. \bullet$$

Четверта група нерівностей

$$(1'') \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C;$$

$$(2'') \sin 2A \cdot \sin 2B \cdot \sin 2C \leq \sin A \sin B \sin C;$$

$$(3'') \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \leq \cos A + \cos B + \cos C;$$

$$(4'') \cos 2A \cos 2B \cos 2C \leq \cos A \cos B \cos C \text{ (для гострокутного трикутника).}$$

● Доведення.

$$(1''). \text{ Маємо: } \sin 2A + \sin 2B \leq 2\sin C;$$

$$\sin 2A + \sin 2C \leq 2\sin B;$$

$$\sin 2B + \sin 2C \leq 2\sin A.$$

Додамо три нерівності:

$$2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \leq 2(\sin A + \sin B + \sin C),$$

що й потрібно було довести.

$$(2''). \text{ Маємо: } \sin 2A \sin 2B \leq \sin^2 C;$$

$$\sin 2A \sin 2C \leq \sin^2 B;$$

$$\sin 2B \sin 2C \leq \sin^2 A.$$

Перемножимо нерівності:

$$\sin^2 2A \cdot \sin^2 2B \cdot \sin^2 2C \leq \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C,$$

або $\sin 2A \sin 2B \sin 2C \leq \sin A \sin B \sin C$, що й потрібно було довести.

Інші нерівності доводяться аналогічно.●

Задача 7. Довести $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geq \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$.

● Доведення. Скористаємося нерівністю:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B \geq 2 \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \text{ (задача 2).}$$

$$\text{Тоді маємо: } \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geq 2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2}; \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C \geq 2 \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.$$

Додамо три нерівності, отримаємо те, що доводимо. ●

$$\text{Задача 8. Довести } \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \leq \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

$$\text{Вказівка: скористатися задачею 3: } \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B \leq 2 \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Задача 9. Довести нерівності:

$$1) 2P_H \leq P_{ABC} \quad (P_H \text{ — периметр ортоцентричного трикутника } H_1H_2H_3).$$

Вказівка: задача зводиться до нерівності

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C.$$

$$2) P_{N_1N_2N_3} \leq P_{ABC} \quad (N_1 \text{ — точка перетину прямої } AH_1 \text{ з колом, описаним навколо трикутника } ABC).$$

$$3) P_{W_1W_2W_3} \geq P_{ABC}.$$

Вказівка: задача зводиться до нерівності

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}.$$

Глава 44

ЧЕВІАНИ. ПОЛЮВАННЯ НА АНАЛОГІЄЮ

Той, хто захоплюється геометрією, не міг не звернути уваги на задачу, що неодноразово зустрічалася в математичній літературі.

У книзі С. І. Зетеля «Новая геометрия треугольника» (М.: Учпедгиз, 1962) її було опубліковано як теорему:

Якщо у трикутнику ABC дві прямі BT і CN , що виходять із вершин трикутника, перетинаються на висоті AN_1 , то ця висота є бісектрисою кута TH_1N .

Задача «мандрувала» із задачника в задачник, розв'язання було вельми громіздким, поки не з'явилася раптом у «Задачнику» журналу «Квант» із абсолютно новим і свіжим розв'язком (було застосовано теорему Чеви).

У цьому розв'язанні використовувалася властивість прямої, проведеної через одну з вершин паралельно до протилежної сторони (рис. 44.1) (назвемо її прямою t).

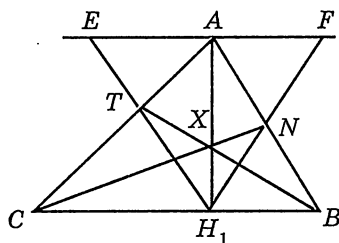


Рис. 44.1

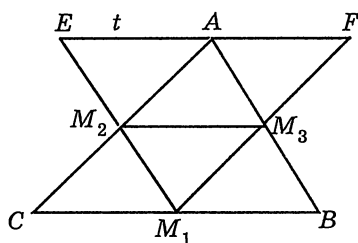


Рис. 44.2

● Очевидно, що відрізки EA і AF рівні. Дійсно, нехай точка X — довільна точка висоти AH_1 трикутника ABC , точки T і N — перетин прямих BX і CX зі сторонами AC і AB .

Із подібності трикутників ANF і BNH_1 випливає, що

$$AF = \frac{BH_1 \cdot AN}{BN}.$$

Аналогічно

$$AE = \frac{CH_1 \cdot AT}{CT}.$$

Тоді $AF = AE$, якщо $BH_1 \cdot AN \cdot CT = CH_1 \cdot AT \cdot BN$, а це випливає із теореми Чеви.

Отже, $EA = FA$, отже, AH_1 — бісектриса кута TH_1N . ●

Дослідимо за аналогією різні випадки трьох чевіан, коли точка X буде чудовою точкою трикутника (випадок, коли X збігається з ортоцентром, ми розглянули). Доведемо, що в кожному з них $EA = FA$.

1) $X \equiv M$ (рис. 44.2); M — центроїд.

Отже, прями M_1M_2 і M_1M_3 перетинають пряму t в точках E і F . Доведемо, що $EA = FA$.

● Дійсно, в паралелограмі AM_2M_3F : $AF = M_2M_3$. Аналогічно $EA = M_2M_3$. Значить, $EA = FA$. ●

2) $X \equiv I$ (I — інцентр). Побудови аналогічні (рис. 44.3).

Позначимо $EA = x$; $AF = y$. Доведемо, що $x = y$.

● Дійсно, трикутник EL_2A подібний до трикутника CL_2L_1 :

$$\frac{x}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$$

$$(a_1 = CL_1, b_1 = CL_2, b_2 = AL_2).$$

Аналогічно і трикутник AL_3F подібний до трикутника BL_3L_1 :

$$\frac{y}{a_2} = \frac{c_2}{c_1} \quad (a_2 = BL_1, c_1 = BL_3, c_2 = AL_3).$$

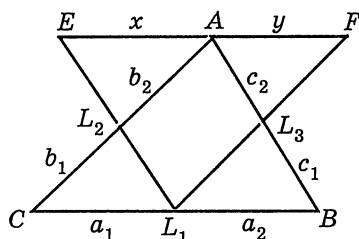


Рис. 44.3

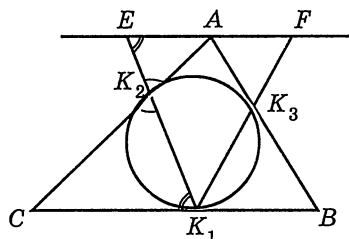


Рис. 44.4

Звідси

$$\frac{x}{y} = \frac{b_2 a_1}{b_1} : \frac{a_2 c_2}{c_1} = \frac{b_2 a_1 c_1}{b_1 a_2 c_2} = \frac{c \cdot b \cdot a}{a \cdot c \cdot b} = 1$$

(застосували властивість бісектриси кута трикутника), отже $x = y$, що й потрібно було довести. ●

3) Точки K_1, K_2, K_3 (X збігається з точкою Жергона) — точки дотику вписаного кола (рис. 44.4). Доведемо, що $EA = AF$. Побудови аналогічні.

● Дійсно, оскільки $K_2 C = K_1 C$, то $\angle CK_2 K_1 = \angle CK_1 K_2$. Але $\angle CK_2 K_1 = \angle EK_2 A$ і $\angle CK_1 K_2 = \angle K_1 E A$, відповідно, $AK_2 = AE$. Аналогічно доводиться, що $AK_3 = AF$. Але ж $AK_2 = AK_3$, значить, $EA = AF$. ●

4) Точки T_1, T_2, T_3 — точки дотику зовнівписаного кола зі сторонами трикутника BC, AC, AB (рис. 44.5). X — точка Нагеля.

Побудова аналогічна. Доведемо, що $EA = AF$.

● Дійсно, трикутник $ET_2 A$ подібний до трикутника $CT_2 T_1$:

$$\frac{AT_2}{CT_2} = \frac{EA}{CT_1}, \text{ або } \frac{p-c}{p-a} = \frac{EA}{p-b}, \text{ звідки } EA = \frac{(p-b)(p-c)}{p-a}.$$

Із подібності трикутників $AF T_3$ і $BT_3 T_1$:

$$\frac{AT_3}{BT_3} = \frac{AF}{BT_1}, \text{ або } \frac{p-b}{p-a} = \frac{AF}{p-c}, \text{ звідки } AF = \frac{(p-b)(p-c)}{p-a}, \text{ отже,}$$

$EA = AF$. ●

Наведені тут випадки можна узагальнити.

5) Нехай AX_1, BX_2, CX_3 — чевіани. Прямі $X_1 X_2$ і $X_1 X_3$ перетинають пряму t в точках E і F . Довести, що $EA = AF$ (рис. 44.6).

● Доведення. Із подібності трикутників $AX_2 E$ і $CX_2 X_1$:

$$\frac{EA}{CX_1} = \frac{AX_2}{CX_2}.$$

Аналогічно із подібності трикутників $AX_3 F$ і $BX_3 X_1$:

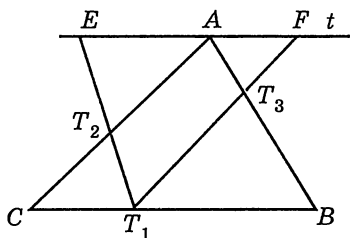


Рис. 44.5

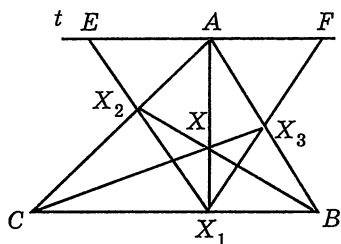


Рис. 44.6

$$\frac{AF}{BX_1} = \frac{AX_3}{BX_3},$$

звідки $\frac{EA}{AF} = \frac{AX_2 \cdot CX_1 \cdot BX_3}{CX_2 \cdot BX_1 \cdot AX_3}$. Застосуємо теорему Чеви і

отримаємо: $\frac{EA}{AF} = 1$, або $EA = AF$. ●

Розглянемо пошук аналогій у співвідношеннях, пов'язаних з чевіанами і кутами трикутника.

1) $X = I$. Довести, що

$$AI \cdot \sin \angle BIC + BI \cdot \sin \angle AIC + CI \cdot \sin \angle AIB = p \text{ (рис. 42.7).}$$

● Доведення. Враховуючи, що $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$, а $AK_3 = p - a$,

маємо:

$$\begin{aligned} & AI \cdot \sin \angle BIC + BI \cdot \sin \angle AIC + CI \cdot \sin \angle AIB = \\ &= \frac{p-a}{\cos \frac{A}{2}} \sin \left(90^\circ + \frac{A}{2} \right) + \frac{p-b}{\cos \frac{B}{2}} \sin \left(90^\circ + \frac{B}{2} \right) + \frac{p-c}{\cos \frac{C}{2}} \sin \left(90^\circ + \frac{C}{2} \right) = \\ & p - a + p - b + p - c = p. \bullet \end{aligned}$$

2) $X = O$. Довести нерівність

$$AO \sin \angle BOC + BO \sin \angle AOC + CO \sin \angle AOB \leq p.$$

● Доведення. Оскільки $OA = OB = OC = R$, а $\angle BOC = 2A$, доводитимемо нерівність: $R \sin 2A + R \sin 2B + R \sin 2C \leq p$.

$$\text{Оскільки } p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2} 2R(\sin A + \sin B + \sin C),$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

і

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2},$$

то нерівність зводиться до нерівності

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Отримали «знамениту» нерівність. ●

3) $X \equiv H$. Довести нерівність

$$HA \sin \angle BHC + HB \sin \angle AHC + HC \sin \angle AHB \leq p.$$

● Доведення. Оскільки $\angle BHC = 180^\circ - A$, а $AH = 2R|\cos A|$, то необхідно довести, що

$$2R \cos A \sin A + 2R \cos B \sin B + 2R \cos C \sin C \leq \frac{a+b+c}{2},$$

або

$$R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \leq R(\sin A + \sin B + \sin C). \bullet$$

Отримали нерівність, доведену в главі 41. Перейдемо до загального випадку.

Теорема. Нехай X — точка всередині трикутника ABC . Довести нерівність $AX \sin \angle BXC + BX \sin \angle AXC + CX \sin \angle AXB \leq p$.

● Доведення (рис. 44.8). На променях XB і XC візьмемо такі точки C_1 і B_1 , що $XC_1 = XC$ і $XB_1 = XB$. Через точку X проведемо пряму l , перпендикулярну до AX . Позначимо проекції точок C_1 і B_1 на пряму l як C_2 і B_2 . Оскільки трикутники XB_1C_1 і XBC рівні, то

$$BC = B_1C_1. \quad (1^0)$$

Із $\triangle XB_1B_2$:

$$\begin{aligned} XB_2 &= XB_1 \cos \angle B_1XB_2 = XB_1 \cos(\angle AXC - 90^\circ) = \\ &= XB_1 \sin \angle AXC = BX \sin \angle AXC. \end{aligned}$$

Аналогічно $XC_2 = CX \cos \angle AXB$.

Оскільки

$$XB_2 + XC_2 = B_2C_2, \text{ а } B_2C_2 \leq B_1C_1 \text{ (див. (1}^0\text{))},$$

то

$$BX \sin \angle AXC + CX \sin \angle AXB = B_2C_2 \leq BC.$$

Додамо три аналогічні нерівності й отримаємо нерівність, яку доводимо. ●

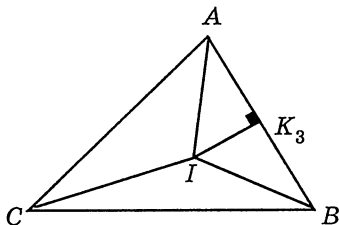


Рис. 44.7

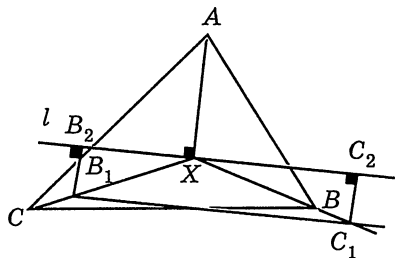


Рис. 44.8

РІВНІСТЬ ЯК ФАБРИКА ЗАДАЧ

Скласти нову змістовну геометричну задачу — справа не з простих. А тому особливо важливо знати стандартні композиторські прийоми. Одним із них є використання алгебраїчних співвідношень.

Розглянемо рівність:

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3}. \quad (*)$$

Змінюючи компоненти рівності (*), можна отримати не лише нові *рівності*, а й тотожні *нерівності*.

Задача 1. Довести, що в трикутнику ABC

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2Rr}.$$

● **Доведення.** Маємо (згідно з (*))

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{2p}{4SR} = \frac{2p}{4 \cdot r \cdot p \cdot R} = \frac{1}{2Rr},$$

що й потрібно було довести. ●

Задача 2. Довести

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} = \frac{1}{r^2}.$$

● **Доведення.** Позначимо A — ліву частину рівності, що доводимо, і отримаємо

$$A = \frac{p-a+p-b+p-c}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p^2}{S^2} = \frac{1}{r^2}. \quad \bullet$$

Задача 3. Довести, що

$$h_a \cdot h_b + h_b \cdot h_c + h_c \cdot h_a = \frac{2S^2}{r \cdot R}.$$

● **Доведення.** Маємо:

$$\frac{1}{\frac{1}{h_a} \cdot \frac{1}{h_b}} + \frac{1}{\frac{1}{h_a} \cdot \frac{1}{h_c}} + \frac{1}{\frac{1}{h_b} \cdot \frac{1}{h_c}} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{a}{2S} \cdot \frac{b}{2S} \cdot \frac{c}{2S}} = \frac{8S^3}{r \cdot abc} = \frac{8S^3}{r \cdot 4RS} = \frac{2S^2}{r \cdot R}. \quad \bullet$$

Задача 4. Довести $\frac{1}{r_a \cdot r_b} + \frac{1}{r_b \cdot r_c} + \frac{1}{r_c \cdot r_a} = \frac{4R+r}{rp^2}.$

● **Доведення.** Враховуючи формули

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

i

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r,$$

маємо:

$$A = \frac{4R+r}{\frac{S^3 \cdot p}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{4R+r}{r \cdot p \cdot p} = \frac{4R+r}{r \cdot p^2}. \bullet$$

Задача 5. Довести, що в непрямокутному трикутнику ABC
 $\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A = 1.$

• Доведення. Маємо:

$$A = \frac{1}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} + \frac{1}{\operatorname{tg} C \operatorname{tg} A} = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C} = 1. \bullet$$

Задача 6. Довести, що

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} + \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq \frac{\sqrt[3]{S \cdot p}}{r}.$$

• Доведення. Маємо

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}.$$

Задану нерівність запишемо так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}} = \\ & = \frac{r \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right)}{r^3 \cdot \frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}} \geq \frac{r \cdot 3\sqrt[3]{\frac{p}{S^2}} \cdot S^2}{r^3 \cdot p} = \frac{3\sqrt[3]{pS^4}}{r^2 \cdot p} = \frac{\sqrt[3]{p \cdot S}}{r}. \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. •

Задача 7. Довести, що в непрямокутному трикутнику

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1.$$

• Доведення. Маємо:

$$A = \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2}} + \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} + \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} =$$

$$\frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = 1. \bullet$$

Задача 8. Довести, що $\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} \geq 4$.

• Доведення. Маємо:

$$A = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{2R}{r}.$$

Але $R \geq 2r$, тому $A \geq 4$. •

Глава 46

Т-КОНФІГУРАЦІЯ ЯК СКАРБНИЦЯ ЗАДАЧ

У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведемо висоту CH (рис. 46.1). Висота CH і гіпотенуза AB нагадують перевернуту букву Т ($\perp$). Такий трикутник назвемо **Т-конфігурацією**. З такою конфігурацією читач, напевне, зустрічався. Однак зацікавленість нею виправдана. Як печера Аладдіна, таїть вона, як скарб, задачі, короткі й цікаві як за умовою, так і за розв'язанням. У них всіх є дивовижна властивість, яку можна схарактеризувати як «посильні задачі підвищеної складності». Далі ми скористаємося такими властивостями Т-конфігурації:

1. У Т-конфігурації $\angle BCH = \angle A$, $\angle ACH = \angle B$.

2. Трикутники ACH , CBH і ABC подібні.

3. $l_1^2 + l_2^2 = l^2$, (*)

де l_1, l_2, l — відповідно лінійні елементи трикутників $CH A$, $CH B$, $CA B$.

Три центри

У трикутниках ACH і BCH проведемо бісектриси CT_1 і CT_2 (рис. 46.2).

Задача 1. Довести, що $AT_2 = AC$;
 $BT_1 = BC$.

• Доведення. Із трикутника $CT_2 B$:

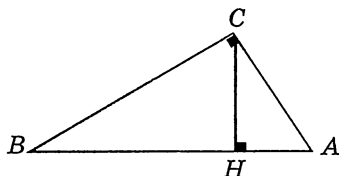


Рис. 46.1

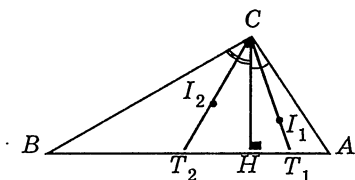


Рис. 46.2

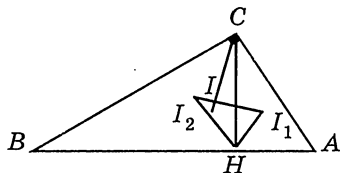


Рис. 46.3

$$\angle CT_2A = \angle B + \frac{1}{2} \angle A, \quad \angle T_2CA = \frac{1}{2} \angle A + \angle B,$$

значить,

$$\angle CT_2A = \angle T_2CA$$

і трикутник ACT_2 — рівнобедрений, відповідно,

$$AT_2 = AC.$$

Аналогічно доводиться, що $BT_1 = BC$. ●

Задача 2. Довести, що $T_1T_2 = 2r$.

● Доведення. Скориставшись попередньою задачею, маємо $AT_1 = b - T_1T_2$, а $BT_2 = a - T_1T_2$. Так,
 $c = a - T_1T_2 + b - T_1T_2 + T_1T_2$,
 або $T_1T_2 = a + b - c = 2r$, значить, $T_1T_2 = 2r$. ●

Задача 3. Довести, що $h_c = r_1 + r_2 + r$ (r_1, r_2 — радіуси вписаних в трикутники ACH і BCH кіл).

● Доведення. Перший спосіб. $\frac{r_1}{a} = \frac{r_2}{b} = \frac{r}{c}$, або $\frac{r_1 + r_2 + r}{a + b + c} = \frac{r}{c}$,

$$\text{звідки } r_1 + r_2 + r = \frac{2p \cdot r}{c} = \frac{2S}{c} = h_c.$$

Другий спосіб. Позначимо $BH = c_1$; $AH = c_2$.

$$r_1 + r_2 + r = \frac{h_c + c_1 - a + h_c + c_2 - b + a + b - c}{2} = h_c. \quad \bullet$$

Задача 4. Нехай I_1 і I_2 — інцентри трикутників ACH і BCH . Довести, що $I_1I_2 = \sqrt{2} \cdot r$ (рис. 46.3).

● Доведення. Із прямокутного трикутника I_1I_2H :

$$I_1I_2^2 = I_1H^2 + I_2H^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2 = 2(r_1^2 + r_2^2) = 2r^2$$

(застосуємо формулу (*)). ●

Задача 5(!) (Три інцентри). Довести, що $CI = I_1I_2$ (рис. 46.3).

● Доведення. За формулою (*): $CI^2 = HI_1^2 + HI_2^2$.

Але із ΔI_1I_2H :

$$HI_1^2 + HI_2^2 = I_1I_2^2.$$

Тому $CI^2 = I_1I_2^2$, або $CI = I_1I_2$. ●

Задача 6. Дано r . Знайти CI .

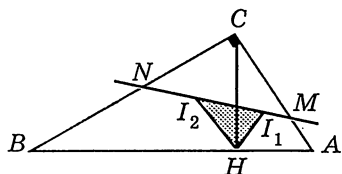


Рис. 46.4

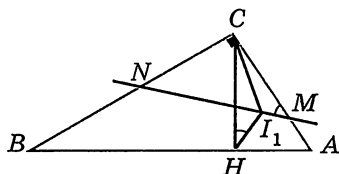


Рис. 46.5

● Оскільки

$$CI = I_1I_2, \text{ а } I_1I_2 = \sqrt{2} \cdot r,$$

то

$$CI = \sqrt{2} \cdot r. \bullet$$

Задача 7. Довести, що трикутник I_1I_2H подібний до трикутника ABC .

● Доведення. Оскільки обидва трикутники прямокутні

й $\frac{I_1H}{b} = \frac{I_2H}{a}$, то твердження задачі доведено. ●

Пряма I_1I_2 і кут 45°

Нехай пряма I_1I_2 перетинає катети CA і CB в точках M і N (рис. 46.4)

Задача 8. Довести, що $\angle CNM = \angle CMN = 45^\circ$.

● Доведення. В чотирикутнику HI_1MA

$$\angle MI_1H + \angle MAN = \angle MI_1H + \angle I_2I_1H = 180^\circ.$$

Отже, $\angle I_1MA + 45^\circ = 180^\circ$, відповідно,

$$\angle I_1MA = 135^\circ, \angle CMN = 45^\circ. \bullet$$

Задача 9. Довести, що $CM = CN = CH$.

● Доведення. Оскільки трикутники CI_1H і CI_1M рівні, то $CH = CM$ (рис. 46.5). ●

Нокаут самому собі

Наступна задача є в «Методах розв'язання задач з геометрії...». Порівняйте розв'язання. Отже...

Задача 10. Довести, що $CI \perp MN$.

● Доведення... Оскільки $CM = CN$ (рис. 46.6), то в рівнобедреному трикутнику CNM відрізок CI є бісектрисою, отже і висотою. ●

Трикутник CI_1I_2

Задача 11. У трикутнику CI_1I_2 точка I — ортоцентр. Довести.

● Доведення (рис. 46.7).

Дійсно, $CI \perp MN$, а AI_1 — бісектриса

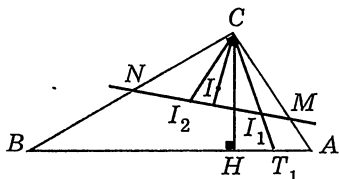


Рис. 46.6

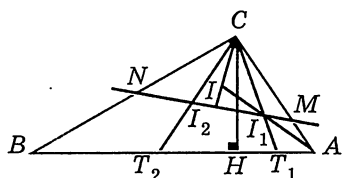


Рис. 46.7

рівнобедреного трикутника CAT_2 ($AC = AT_2$), відповідно $AI_1 \perp CT_2$. ●

Задача 12. (Московська олімпіада). Довести, що $Q_1Q_2 = r$, де Q_1 і Q_2 — середини відрізків CT_1 і CT_2 .

● **Доведення.** Дійсно, Q_1Q_2 — середня лінія, що дорівнює половині відрізка T_1T_2 . ●

Глава 47

Т-КОНФІГУРАЦІЯ. МУРАШНИК РАДІУСІВ

Т-конфігурація, про яку йшлося в попередній главі, дозволяє створювати нові задачі, та й, власне кажучи, не одну.

У цьому читач зможе переконатися сам, коли розгляне запропоновані задачі на радіуси кіл, вписаних у трикутники CHA і CHB (рис. 47.1).

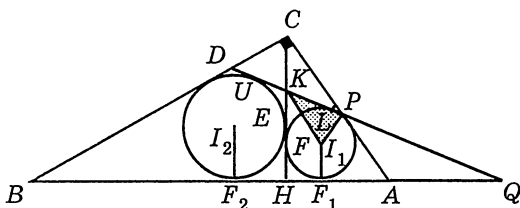


Рис. 47.1

Проведемо дотичну до кіл, вписаних у трикутники ACH і BCH , їхні інцентри I_1 і I_2 , точки дотику L і U , радіуси r_1 і r_2 .

■ **Задача 1¹.** Довести, що $UL = r_1 + r_2$.

● **Доведення.** Позначимо F_1 і F_2 — точки дотику цих кіл до гіпотенузи AB . Нехай Q — точка перетину прямої UL із прямою AB . Маємо $QU = QF_2$, $LQ = QF_1$. Значить,

$$\underbrace{QU - LQ}_{UL} = QF_2 - QF_1 = UL = F_1F_2 = r_1 + r_2. \bullet$$

■ **Задача 2.** Нехай F і E — точки дотику кіл з інцентрами I_1 і I_2 до висоти CH . Довести, що

$$KE + KF = r_1 + r_2$$

(де K — точка перетину прямих UL і CH).

¹ Задачі 1–4 — для довільних трикутників.

• Доведення. Маємо $KE = KU$, $KF = KL$, отже, $KE + KF = KU + KL = UL = r_1 + r_2$ (за задачею 1). •

| **Задача 3.** Довести, що $KE = r_1$, $KF = r_2$.

• Доведення. Оскільки $KE + KF = r_1 + r_2$ (задача 2), то
 $KE = r_1 + r_2 - KF = r_1 + r_2 - (KE + EF) = r_1 + r_2 - KE - (EH - FH) =$
 $= r_1 + r_2 - KE - (r_2 - r_1) = 2r_1 - KE,$

звідки $KE = r_1$. Тоді $KF = KL = UL - r_1 = r_2$. •

| **Задача 4.** Довести, що $KI_1 = KI_2 = r$.

• Доведення. Оскільки $LI_1 = r_1$, $KL = r_2$, то з трикутника KI_1L :

$$KI_1 = \sqrt{LI_1^2 + KL^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = r. \bullet$$

| **Задача 5.** Довести, що трикутник KI_1L подібний до трикутника ABC .

• Доведення. Дійсно, його сторони r , r_1 , r_2 пропорційні зі сторонами трикутника ABC :

$$\frac{r_1}{b} = \frac{r_2}{a} = \frac{r}{c}. \bullet$$

Трикутник CDP

Нехай D і P — точки перетину прямої UL з BC і AC відповідно (рис. 47.1).

| **Задача-лема.** В трикутнику CDK кут CDK дорівнює куту BAC .

• Доведення. Маємо $\angle FKL = 2\angle LKI_1 = 2\angle B$.

З трикутника CDK :

$$\begin{aligned} \angle CDK &= 180^\circ - (\angle DCK + \angle CKD) = 180^\circ - (\angle A + 2\angle B) = \\ &= 180^\circ - (\angle A + 2(90^\circ - \angle A)) = \angle A. \bullet \end{aligned}$$

Теорема. У Т-конфігурації $DK = CK = PK$.

• Доведення. Оскільки $\angle DCK = \angle CDK = \angle A$, то $CK = DK$. Аналогічно $\angle KPC = \angle PCK = \angle B$ і $CK = KP$.

Отже, $DK = CK = KP$. •

| **Задача 6.** Довести, що $CK = r$.

• Доведення.

$$CK = CH - KH = r + r_1 + r_2 - (KF + r_1) = r + r_1 + r_2 - r_1 - r_2 = r$$

(використали відоме співвідношення: $CH = r + r_1 + r_2$). •

| **Задача 7.** Довести, що точки C , D , P , I_1 , I_2 належать одному колу.

• Доведення. Дійсно, точка K — центр цього кола ($KC = KD = KP = KI_2 = KI_1 = r$). •

НЕСПОДІВАНИЙ ПОДАРУНОК ДЛЯ МЕДІАНИ

Теоремою про точку перетину медіан цікавляться понад дві тисячі років. Вона завжди входила і входить (іноді як задача) в шкільні підручники, тому популярність її величезна. В книзі «Повернення втраченої геометрії» я запропонував двадцять два способи розв'язання задачі:

У трикутнику ABC проведено медіану AM_1 . Через вершину C і середину E цієї медіани проведено пряму. У якому співвідношенні вона ділить сторону AB ?

Але... Ах, аналогія, аналогія! Згадалося: «Математик — це той...», і промайнула думка: «А чи не підійдуть ці двадцять два способи для доведення теореми про медіану?». І ось що з цього вийшло: спосіб із книги «Повернення втраченої геометрії» — ми позначимо A , спосіб доведення теореми про медіану — M .

У кожному зі способів будемо доводити, що дві медіани, перетинаючись, діляться у співвідношенні $2 : 1$, починаючи від вершини, а це рівносильно доведенню того, що точка перетину медіан одна. Доведемо це, доведемо й саму теорему.

Перший спосіб A

Через вершину A проведемо пряму l , паралельну до сторони BC (рис. 48.1). Нехай пряма CE перетинає сторону AB в точці X , а пряма l — в точці T . Трикутники ATX і BCX подібні, тому

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AT}{BC}. \quad (1)$$

Трикутники AET і M_1EC рівні; звідси $AT = CM_1$, отже,

$$\frac{AT}{BC} = \frac{1}{2}. \text{ Враховуючи рівність (1), маємо } \frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}. \bullet$$

Перший спосіб M

Через вершину A (рис. 48.2) проведемо пряму l , паралельну до сторони BC . Нехай пряма CM_3 перетинає пряму l в точці T .

Оскільки

$$AM_3 = M_3B, \angle AM_3T = \angle BM_3C, \angle ATM_3 = \angle BCM_3, \text{ тоді } AT = BC = 2CM_1.$$

Трикутник ATM подібний до трикутника M_1CM , звідки

$$\frac{AM}{MM_1} = \frac{AT}{CM_1} = \frac{2}{1}. \bullet$$

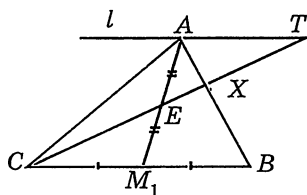


Рис. 48.1

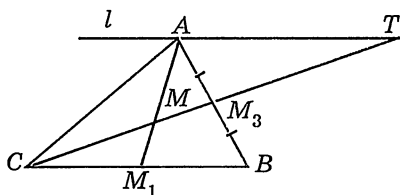


Рис. 48.2

Другий спосіб А

● Через точку M_1 проведемо відрізок M_1D ($D \in AB$), паралельний до відрізка CX (рис. 48.3). Оскільки $BM_1 = CM_1$, то $BD = DX$. Оскільки $AE = EM_1$, то $AX = XD$. Отже, $AX = XD = DB$, звідки $AX : XB = 1 : 2$. ●

Другий спосіб М

● Через точку M_1 (рис. 48.4) проведемо відрізок M_1D ($D \in AB$), паралельний до відрізка CM_3 . Оскільки $BM_1 = CM_1$, то $BD = DM_3$, отже,

$$M_3D = \frac{1}{2} BM_3 = \frac{1}{4} AB.$$

Але $AM_3 = \frac{1}{2} AB$, звідси $AM_3 : M_3D = 2 : 1$, відповідно за теоремою Фалеса: $AM : MM_1 = 2 : 1$. ●

Третій спосіб А

● Нехай M_3 — середина сторони AB (рис. 48.5). Оскільки EM_3 — середня лінія в трикутнику AM_1B , то $EM_3 = \frac{1}{4} BC$.

Трикутники EXM_3 і CXB подібні, тому

$$\frac{XM_3}{XB} = \frac{EM_3}{BC} = \frac{1}{4}, \text{ тобто } XM_3 = \frac{1}{4} XB.$$

Але $AM_3 = M_3B$, звідки $AX + XM_3 = XB - XM_3$, або

$$AX + \frac{1}{4} XB = XB - \frac{1}{4} XB, \quad AX = \frac{1}{2} XB. \quad \bullet$$

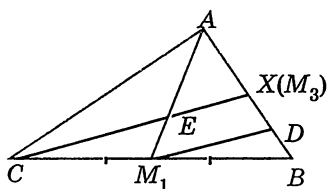


Рис. 48.3

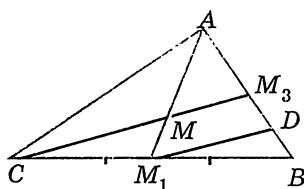


Рис. 48.4

Третій спосіб М

● Проведемо пряму M_3E паралельно до BC (рис. 48.5). Тоді в трикутнику AM_1BEM_3 — середня лінія і

$$EM_3 = \frac{1}{2} M_1B = \frac{1}{4} BC.$$

Трикутники EMM_3 і M_1MC подібні, отже,

$$\frac{EM}{MM_1} = \frac{EM_3}{CM_1} = \frac{\frac{1}{4} BC}{\frac{1}{2} BC} = \frac{1}{2}.$$

Тоді $MM_1 = \frac{2}{3} EM_1$. Оскільки EM_3 — середня лінія трикутника ABM_1 , маємо

$$\frac{2}{3} EM_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AM_1 = \frac{1}{3} AM_1,$$

тоді $AM = \frac{2}{3} AM_1$, або $AM : MM_1 = 2 : 1$. ●

Четвертий спосіб А

● Доведемо спочатку співвідношення (рис. 48.6): $\frac{XE}{CE} = \frac{1}{3}$.

Із трикутника CXB $\frac{XC}{XE} = \frac{BC}{EM_3} = \frac{4EM_3}{EM_3} = 4$, звідки

$$\frac{CE}{XE} = \frac{CX - XE}{XE} = \frac{CX}{XE} - 1 = 3,$$

що й потрібно було довести. Проведемо тепер відрізок $XP \parallel BC$ ($P \in AM_1$). Тоді

$$\frac{AX}{AB} = \frac{XP}{M_1B} = \frac{XP}{M_1C} = \frac{EX}{CE} = \frac{1}{3},$$

отже, $AX : XB = 1 : 2$. ●

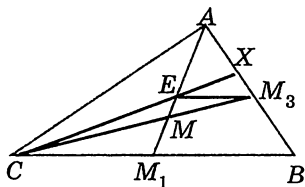


Рис. 48.5

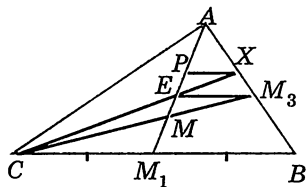


Рис. 48.6

Четвертий спосіб М

● Оскільки EM_3 — середня лінія трикутника ABM_1 (рис. 48.6), то $EM_3 = \frac{1}{2}BM_1 = \frac{1}{4}BC$. Оскільки трикутник M_1MC подібний до трикутника EMM_3 , маємо

$$\frac{CM}{MM_3} = \frac{CM_1}{EM_3} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{4}BC} = \frac{2}{1}. \bullet$$

П'ятий спосіб А

● Проведемо через точку B пряму, паралельну до відрізка AM_1 (рис. 48.7). Нехай N — точка перетину її з прямою CA . Оскільки $CM_1 = M_1B$, то $CA = AN$. Нехай точка K — точка перетину прямої CX з NB . Оскільки $AE = EM_1$, то $NK = KB$. Отже, CK і BA — медіани в трикутнику BNC . Як відомо, вони перетинаються у співвідношенні $2 : 1$, звідки

$$AX : XB = 1 : 2. \bullet$$

П'ятий спосіб М

● Проведемо через точку B пряму, паралельну до відрізка AM_1 (рис. 48.8). Нехай точка N — точка перетину її з прямою CA . Оскільки $CM_1 = M_1B$, то $CA = AN$.

Скористаємося відомою задачею: в трикутнику NBC проведено медіану BA . Через вершину C і середину M_3 цієї медіани проведено пряму. Довести, що ця пряма ділить сторону BN у співвідношенні $2 : 1$, починаючи від точки N . Отже,

$$NK : KB = 2 : 1 \text{ і } AM : MM_1 = 2 : 1. \bullet$$

Шостий спосіб А

● Нехай $EX = l$. Тоді, скориставшись рівністю $\frac{XE}{CE} = \frac{1}{3}$,

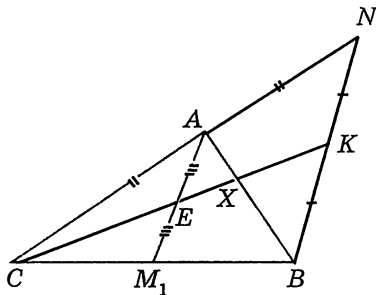


Рис. 48.7

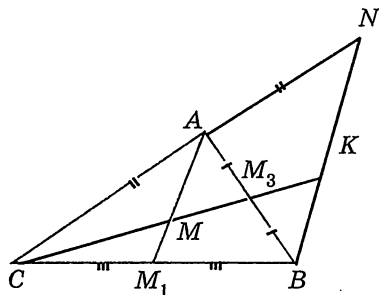


Рис. 48.8

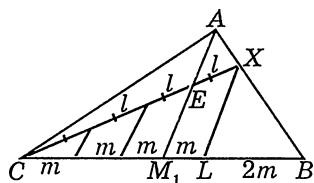


Рис. 48.9

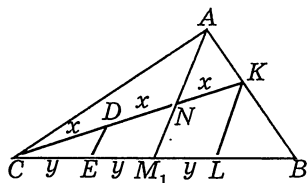


Рис. 48.10

маємо $CE = 3l$. Поділимо відрізок CE на три рівні частини (рис. 48.9) і проведемо через точки поділу прямі, паралельні до AM_1 . Вони поділять відрізок CM_1 на три рівні частини, довжини яких позначимо за m . Проведемо відрізок $XL \parallel AM_1$. Тоді $M_1L = m$, а оскільки $3m = CM_1 = M_1B$, то $LB = 2m$. Отже,

$$\frac{AX}{XB} = \frac{M_1L}{LB} = \frac{1}{2}. \bullet$$

Шостий спосіб М

● Нехай AM_1 — медіана, точка K належить AB , а N — точка перетину відрізків CK і AM_1 , причому $CN : NK = 2 : 1$ (рис. 48.10). Доведемо, що CK — медіана. Нехай $NK = x$. Тоді $CN = 2x$. Проведемо через середину CN пряму DE , паралельну AM_1 , а через точку K — пряму, паралельну до AM_1 (пряму KL). Маємо $CD = DN = NK = x$, звідси

$$CE = EM_1 = M_1L = y.$$

Але $BM_1 = CM_1 = 2y$, відповідно,

$$LB = BM_1 - M_1L = 2y - y = y.$$

Отже, LK — середня лінія трикутника BM_1A , тоді K — середина AB , відповідно, CK — медіана. ●

Сьомий спосіб А

● «Подвоїмо» медіану AM_1 ($AM_1 = M_1A_2$). Отримаємо паралелограм ABA_2C (рис. 48.11). Трикутники EA_2C і EAX — подібні, звідси

$$\frac{AX}{AB} = \frac{AX}{A_2C} = \frac{AE}{EA_2} = \frac{1}{3},$$

$$\text{отже, } \frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}. \bullet$$

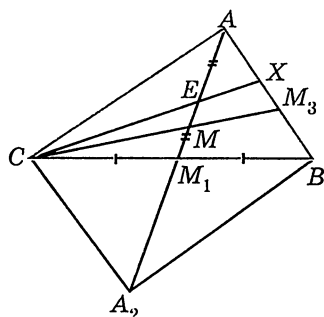


Рис. 48.11

Сьомий спосіб М

● «Подвоїмо» медіану AM_1 (рис. 48.11) — отримаємо паралелограм ABA_2C . Трикутники MA_2C і MAM_3 подібні:

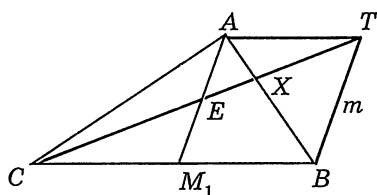


Рис. 48.12

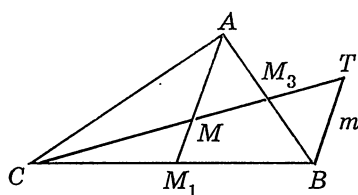


Рис. 48.13

$$\frac{CM}{MM_3} = \frac{CA_2}{AM_3} = \frac{AB}{AM_3} = \frac{2}{1}. \bullet$$

Восьмий спосіб А

Через точку B проведемо пряму m , паралельну до AM_1 (рис. 48.12), і продовжимо відрізок CX до його перетину з m у точці T . Оскільки EM_1 — середня лінія в трикутнику CTB , то $TB = 2EM_1$. Трикутники AEX і BTX подібні, відповідно

$$\frac{AX}{BX} = \frac{EA}{TB} = \frac{EM_1}{TB} = \frac{1}{2}. \bullet$$

Восьмий спосіб М

Через точку B проведемо пряму m , паралельну AM_1 , і продовжимо відрізок CM_3 до перетину з цією прямою в точці T (рис. 48.13). Оскільки MM_1 — середня лінія трикутника CTB , то $BT = 2MM_1$. Трикутники AM_3M і BM_3T рівні, тому $AM = BT = 2MM_1$. $\bullet$

Дев'ятий спосіб А

«Подвоїмо» медіану AM_1 ($AM_1 = M_1A_2$). Отримаємо паралелограм (рис. 48.14). Через точку M_1 проведемо пряму, паралельну до CX . Вона перетинатиме відрізки CA_2 і AB в точках F і D відповідно. Оскільки EX — середня лінія в трикутнику AM_1D , а чотирикутник $CXDF$ — паралелограм, то $AX = XD = CF$. Але трикутники CM_1F і BM_1D рівні, значить, $CF = BD$. Отже, $AX = XD = DB$; $AX : XB = 1 : 2$. $\bullet$

Дев'ятий спосіб М

«Подвоїмо» медіану AM_1 ($AM_1 = M_1A_2$). Отримаємо паралелограм ABA_2C (рис. 48.15). Через точку M_1 проведемо пряму, паралельну до CM_3 . Вона перетинатиме відрізки CA_2 і AB в точках F і D відповідно. Оскільки трикутники CM_1F і BM_1D рівні, то $BD = CF$. Чотирикутник CM_3DF — паралелограм, отже, $M_3D = CF$, звідси

$$M_3D = \frac{1}{2}BM_3 = \frac{1}{2}AM_3, \text{ отже, } MM_1 = \frac{1}{2}AM. \bullet$$

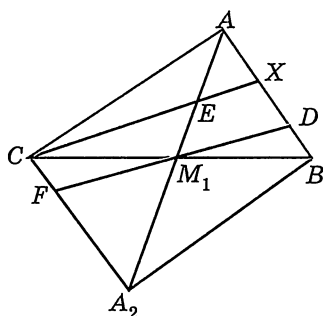


Рис. 48.14

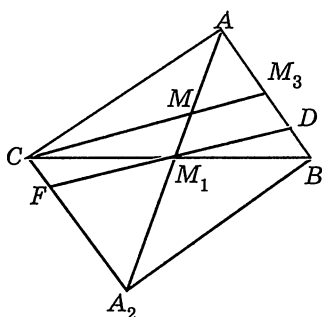


Рис. 48.15

Десятий спосіб А

● Нехай точка F — точка перетину відрізків M_1M_2 і CX (рис. 48.16).

Оскільки $M_1M_2 \parallel AB$, то трикутники AXE і M_1FE — рівні, а тому $FM_1 = AX$.

Але відрізок FM_1 — середня лінія трикутника BCX , звідси

$$XB = 2FM_1.$$

Отже,

$$XB = 2AX. \bullet$$

Десятий спосіб М

● Нехай точка F — точка перетину відрізків CM_3 і M_1M_2 (рис. 48.17). Оскільки $M_1M_2 \parallel AB$, то M_1F — середня лінія трикутника CM_3B , звідки

$$FM_1 = \frac{1}{2} M_3B.$$

Але трикутники M_1FM і AM_3M подібні, тому

$$\frac{M_1M}{MA} = \frac{M_1F}{AM_3} = \frac{\frac{1}{2} M_3B}{AM_3} = \frac{1}{2}. \bullet$$

Інші способи доведення властивості медіан пропонуємо довести самостійно, скориставшись, звісно, книгою «Повернення втраченої геометрії».

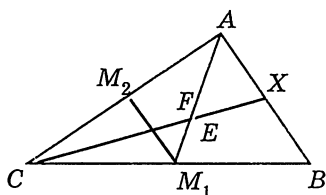


Рис. 48.16

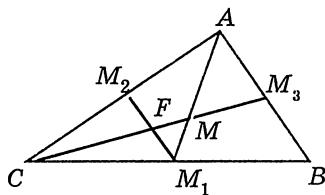


Рис. 48.17

РІВНОПОДІЛЬНА — НОВА ЧУДОВА ПРЯМА

Рівновеликість — одна із найпопулярніших тем в геометрії. Властивості прямої, яка ділить площу фігури навпіл (її ми назвемо **рівноподільною**¹), не менш цікаві, ніж властивості чудових прямих у трикутнику — бісектриси, медіани, висоти.

Ці властивості будемо розглядати як задачі.

Рівноподільна в трикутнику

Задача 1. Якщо рівноподільна проходить через вершину трикутника, то вона збігається з медіаною, проведеною через цю вершину.

● Доведення очевидне. ●

Задача 2. Якщо центроїд M належить рівноподільній, то вона збігається з медіаною трикутника.

● Доведення. Нехай у трикутнику ABC (рис. 49.1) KP — рівноподільна. Позначимо

$$S_{KMM_1C} = S_0, S_{AKM} = S_1, S_{MM_1P} = S_2, S_{ABC} = S.$$

Оскільки KP — рівноподільна, то $S_0 + S_2 = \frac{1}{2}S$. Оскільки

AM_1 — теж рівноподільна, то $S_1 + S_0 = \frac{1}{2}S$.

Отже, $S_0 + S_2 = S_0 + S_1$, звідки $S_1 = S_2$, а це значить, що APM_1K — трапеція і $KM_1 \parallel AP$, M_1K — середня лінія трикутника ACP , відповідно точка P збігається з точкою B , і рівноподільна KP збігається з медіаною BM_2 . ●

Задача 3. Якщо точка X всередині трикутника ABC така, що $S_{ABX} = S_{ACX}$, то X належить рівноподільній.

● Доведення. Оскільки

$$S_{ABX} = S_{ACX},$$

то $BE = CD$ (рис. 49.2), де E і D — проєкції точок B і C на пряму AX . Нехай T — точка перетину прямої AX зі стороною BC . Оскільки

$$\triangle BET = \triangle CDT,$$

то $BT = CT$, отже, AT — медіана.

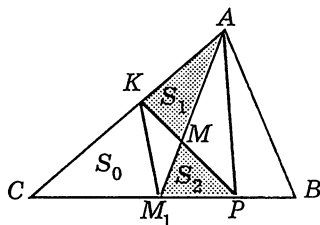


Рис. 49.1

¹ «Рівноподільною» в старих книгах називали теперішню бісектрису (Пржевальський Е. Собрание геометрических теорем и задач. — М., 1901).

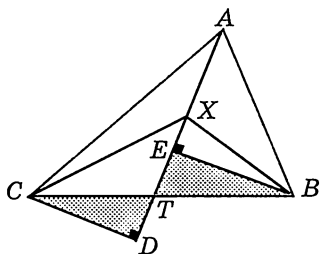


Рис. 49.2

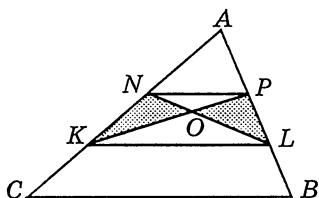


Рис. 49.3

Точка X належить медіані, тобто належить рівноподільній. ●

Задача 4. Якщо у трикутнику ABC KP — рівноподільна і LN — рівноподільна, то $KL \parallel NP$. Довести.

● **Доведення.** Дійсно, розглянемо чотирикутник $NPLK$ (рис. 49.3). Нехай NL і KP перетинаються в точці O . Оскільки KP і NL — рівноподільні, то $S_{AKP} = S_{ANL}$. Оскільки в трикутників ANL і AKP чотирикутник $ANOP$ — спільний, то $S_{ONK} = S_{OPL}$, а це означає, що $KNPL$ — трапеція і $KL \parallel NP$, що й потрібно було довести. ●

Задача 5. Якщо H_2H_3 — рівноподільна, то відрізок H_2M_3 перпендикулярний до сторони AB . Довести.

● **Доведення.** Оскільки за умовою H_2H_3 — рівноподільна (рис. 49.4) і CM_3 — рівноподільна, то $H_2M_3 \parallel CH_3$ (попередня задача), отже, $H_2M_3 \perp AB$. ●

Задача 6. Якщо H_2H_3 — рівноподільна, то $\angle A = 45^\circ$. Довести.

● **Доведення.** *Перший спосіб.* Оскільки $\angle H_2M_3A$ дорівнює 90° (див. попередню задачу), а $H_2M_3 = AM_3$, то $\angle A = 45^\circ$.

Другий спосіб. Оскільки трикутники AH_2H_3 і ABC подібні

($k = \cos A$), а за умовою $S_{AH_2H_3} : S_{ABC} = 1 : 2$, то $\frac{AH_2}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Але

$$\frac{AH_2}{AB} = \cos A, \text{ отже, } \angle A = 45^\circ.$$

Третій спосіб. Із точки H_2 опустимо перпендикуляр H_2D на сторону AB (рис. 49.5). У трапеції H_2DH_3C проведемо

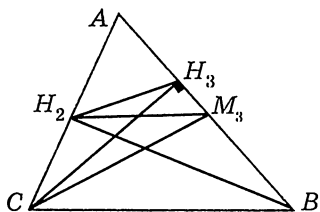


Рис. 49.4

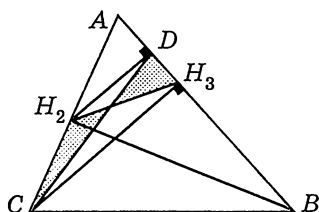


Рис. 49.5

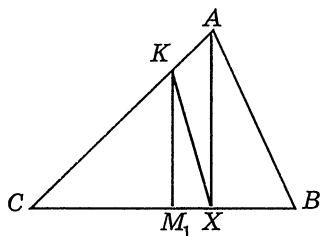


Рис. 49.6

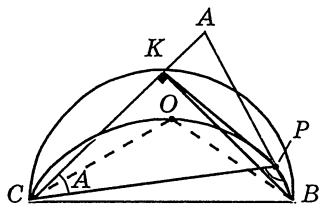


Рис. 49.7

діагональ CD . Оскільки H_2H_3 — рівноподільна в трикутнику ABC , а CH_2DH_3 — трапеція, то CD — також рівноподільна, якій належить вершина C трикутника ABC , отже, відрізку CD належить медіана m_c : $AD = DB$. Отже, в трикутнику AH_2B висота H_2D є і медіаною, відповідно, $\angle A = 45^\circ$. ●

Задача 7. Довести, що якщо рівноподільну трикутника ABC , яка перетинає сторону BC , видно з точки M_1 під прямим кутом, то однією з точок цієї прямої є точка H_1 (рис. 49.6).

● **Доведення.** За задачею 4 $AX \parallel KM_1$, отже,

$$\angle AXM_1 = \angle KM_1X = 90^\circ \text{ і } X \equiv H_1. \bullet$$

Задача 8. На стороні BC трикутника ABC як на діаметрі побудовано півколо, що перетинає AC в точці K . Дуга з хордою BC , що проходить через центр описаного кола, перетинає AB в точці P . Довести, що KP — рівноподільна (рис. 49.7).

● **Доведення.** Очевидно, що BK — висота $\triangle ABC$, а $\angle BPC = \angle BOC = 2\angle A$. Маємо $\angle BPC = \angle A + \angle ACP$. Отже, $\angle ACP = \angle A$, тобто $AP = PC$, відповідно, точка P належить серединному перпендикуляру до AC — задача зводиться до попередньої. ●

Задача 9. Якщо пряма Ейлера ділить площу трикутника навпіл, то цей трикутник рівнобедрений або прямокутний. Довести.

● **Доведення.** Оскільки центроїд належить прямій Ейлера, то пряма Ейлера збігається з медіаною трикутника. Але цій медіані належить і ортоцентр, що остаточно доводить твердження задачі. ●

Задача 10. Довести, що якщо $BK = KA + AC$ (K — точка на стороні AB), то KL_1 — рівноподільна (L_1 — основа бісектриси, проведеної з вершини A). Правильною буде й обернена теорема.

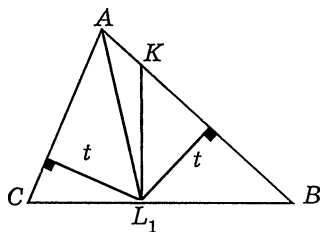


Рис. 49.8

● Доведення. Відстані від точки L_1 до сторін AB і AC рівні (рис. 49.8). Позначимо їх t . Маємо

$$S_{ACL_1} + S_{AKL_1} = \frac{1}{2} t (\underbrace{AC + AK}_{BK}) = \frac{1}{2} t \cdot BK = S_{BKL_1},$$

що й доводить твердження задачі. ●

Задача 11. Нехай TW_1 — діаметр кола, описаного навколо трикутника ABC . Точка K — проекція точки T на сторону AB . Довести, що KL_1 — рівноподільна.

● Доведення (рис. 49.9). Відомо, що $BK = KA + AC$ (задача Архімеда. Доведіть!) відповідно, задача зводиться до попередньої. ●

Задача 12. Нехай K_1 і T_1 — точки дотику зі стороною BC вписаного і зовнівписаного кіл трикутника ABC . Нехай K_1P і T_1Q — рівноподільні, що перетинаються. Довести, що точка їх перетину належить медіані AM_1 .

● Доведення (рис. 49.10). Оскільки $CT_1 = p - b$, $BK_1 = p - b$ (p — півпериметр), то

$$BK_1 = CT_1. \quad (1)$$

Оскільки $T_1M_1 = M_1K_1$, то в рівновеликих трикутниках BQT_1 і CPK_1 з огляду на (1) основи BT_1 і CK_1 рівні, отже, рівні висоти, тобто $PQ \parallel BC$ і PQK_1T_1 — трапеція. Із того, що $K_1M_1 = M_1T_1$, виходить, що EF — друга середня лінія цієї трапеції й точка F перетину діагоналей цієї трапеції належить середній лінії, а це доводить твердження задачі. ●

Задача 13. У формулі $S = x \cdot CH_1$ знайти (побудувати) відрізок x , що належить трикутнику ABC (рис. 49.11).

● Доведення. Проведемо через точку M_1 пряму, паралельну до AH_1 . Вона перетинатиме сторону AC в точці D . Доведемо, що відрізок M_1D — шуканий. Дійсно, оскільки DH_1 — рівноподільна (доведіть!), то

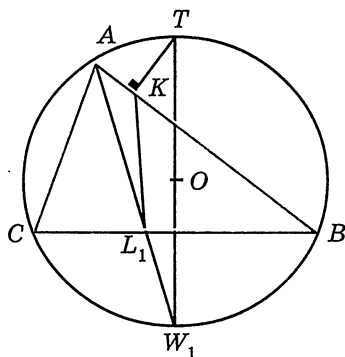


Рис. 49.9

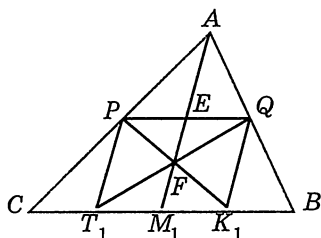


Рис. 49.10

$$S_{CDH_1} = \frac{1}{2} DM_1 \cdot CH_1,$$

і $S = DM_1 \cdot CH_1$, отже, x — це відрізок DM_1 . ●

Рівноподільна в багатокутнику

Задача 14. Будь-яка пряма, що проходить через точку перетину діагоналей паралелограма, є рівноподільна.

● Доведення очевидне. ●

Задача 15. Якщо діагональ чотирикутника ділить другу діагональ навпіл, то вона рівноподільна. Правильною буде й обернена теорема.

● Доведення очевидне. ●

Задача 16. У трапеції друга середня лінія є рівноподільною.

● Доведення очевидне. ●

Задача 17. Якщо кожна діагональ чотирикутника є рівноподільною, то цей чотирикутник — паралелограм.

● Доведення. Нехай в чотирикутнику $ABCD$ точка O — точка перетину діагоналей (рис. 49.12). Оскільки за умовою $S_{ABD} = S_{BCD}$, то висоти, опущені з вершин A і C на діагональ BD , рівні, отже, $AO = OC$. Аналогічно доводиться, що $BO = OD$, а це означає, що $ABCD$ — паралелограм. ●

Задача 18. Дано випуклий шестикутник $ABCDEF$. Відомо, що кожна з діагоналей AD , BE і CF є рівноподільною. Доведіть, що ці діагоналі перетинаються в одній точці.

● Доведення. Доведемо за допомогою гомотетії. Нехай $ABCDEF$ (рис. 49.13) — заданий шестикутник. Площі трикутників ABD і BDE рівні (оскільки чотирикутники $ABCD$ і $BCDE$ рівновеликі). Відповідно, рівні висоти, опущені на BD з вершин A і E , отже, $AE \parallel BD$.

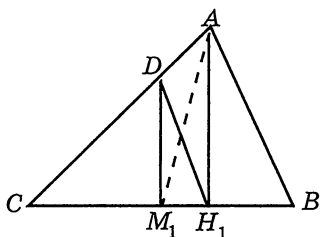


Рис. 49.11

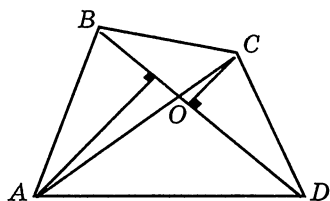


Рис. 49.12

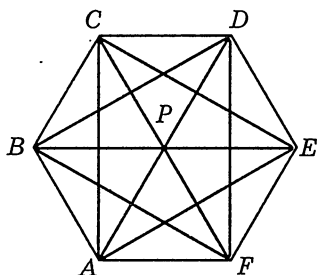


Рис. 49.13

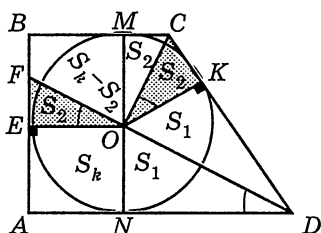


Рис. 49.14

Аналогічно встановлюємо, що $CE \parallel BF$, $DF \parallel AC$. Так, трикутники BDF і ACE — подібні.

Розглянемо гомотетію з центром в точці P — точці перетину діагоналей AD і BE . При $|k| = PE : PB$ точка B перейде в точку E , а точка D — в точку A , пряма DF в пряму AC , BF — в EC . Оскільки прямі DF і BF перетинаються в точці F , то ця точка перейде в точку перетину прямих AC і EC (це буде точка C). Відповідно, точки F , P і C лежать на одній прямій, отже, твердження задачі доведено. ●

Задача 19. У прямокутну трапецію вписано коло з центром O ($BC \parallel AD$, $BC < AD$). Довести, що пряма OD — рівноподільна.

● Доведення. Позначимо F — точку перетину OD з AB (рис. 49.14). M , K , N , E — точки дотику кола і сторін трапеції. S_k — площа квадрата $EONA$. S_1 — площа трикутника DON , S_2 — площа трикутника MOC . Оскільки $\triangle EFO = \triangle COK$ ($\angle ODN = \angle FOE = \angle COK$), то

$$S_{EFO} = S_2.$$

Маємо:

$$S_{AFD} = S_2 + S_k + S_1. \quad (1)$$

Далі:

$$S_{FBCD} = S_k - S_2 + 2S_2 + S_1 = S_2 + S_k + S_1. \quad (2)$$

Порівнюємо (1) і (2), отримаємо необхідне. ●

Задача 20. Доведіть, що якщо два трикутники, утворені від продовження сторін випуклого чотирикутника до їх перетину, рівновеликі, то одна з діагоналей — рівноподільна чотирикутника.

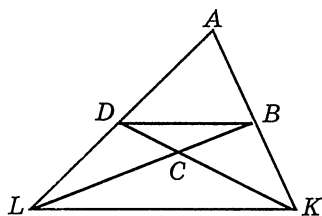


Рис. 49.15

● Доведення. Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник (рис. 49.15). Проведемо відрізки BD і KL . Оскільки трикутники ADK і BAL — рівновеликі, то рівновеликі також трикутники, а це означає, що

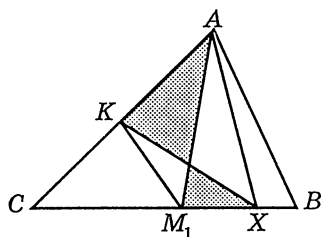


Рис. 49.16

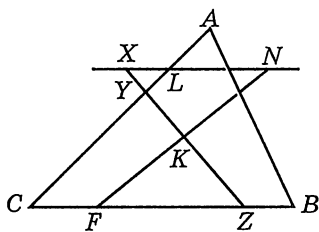


Рис. 49.17

чотирикутник $BDLK$ — трапеція ($BD \parallel KL$). Оскільки в трапеції точка перетину продовжень бокових сторін (точка A), точка перетину діагоналей (точка C) і середини основ лежать на одній прямій, то твердження задачі доведено (задача 15). ●

Побудова рівноподільної

Задача 21. Через вершину трикутника провести рівноподільну.

● Цією рівноподільною буде медіана. ●

Задача 22. Через точку K на стороні трикутника провести рівноподільну.

● Проведемо медіану AM_1 (рис. 49.16). Через точку A проведемо пряму, паралельну до KM_1 . Вона перетинатиме BC в шуканій точці X . ●

Задача 23. Через точку X поза трикутником ABC провести рівноподільну.

● Оскільки площа трикутника ABC задана (позначимо її Q), то зведемо задачу до такої: через точку X поза кутом ACB провести пряму, яка від даного кута ACB відтинатиме трикутник YCZ ,

площа якого дорівнює $\frac{Q}{2}$ (рис. 49.17).

Проведемо через точку X пряму $XN \parallel BC$. Ця пряма перетинатиме сторону AC в точці L . Проведемо $NF \parallel CL$, щоб паралелограм $CLNF$ був рівновеликим з квадратом площі $\frac{Q}{2}$.

Припустимо, що шукана пряма XZ побудована.

Позначимо $XL = a_1$, $CF = a_2$, $FZ = x$.

Оскільки трикутник CYZ і паралелограм $CLNF$ мають спільну частину — чотирикутник $CYKF$, то

$$S_{KFZ} = S_{KYLN},$$

або

$$S_{KFZ} = S_{XNK} - S_{XLY},$$

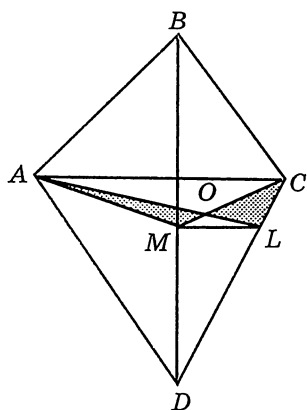


Рис. 49.18

або

$$\frac{S_{XNK}}{S_{KFZ}} - \frac{S_{XLY}}{S_{KFZ}} = 1. \quad (1)$$

Трикутники XLY , XNK , KFZ — подібні.

Отже,

$$\frac{S_{XNK}}{S_{KFZ}} = \frac{(a_1 + a_2)^2}{x^2}; \quad \frac{S_{XLY}}{S_{KFZ}} = \frac{a_1^2}{x^2}.$$

Рівність (1) запишемо так:

$$\frac{(a_1 + a_2)^2}{x^2} - \frac{a_1^2}{x^2} = 1,$$

або

$$x^2 = (a_1 + a_2)^2 - a_1^2.$$

Оскільки відрізки a_1 і a_2 задано, то знайдемо відрізок x , точку Z і шукаємо пряму XZ . ●

Задача 24. Через вершину A чотирикутника $ABCD$ провести рівноподільну.

● Нехай M — середина діагоналі BD (рис. 49.18). Площі чотирикутників $ABCM$ і $AMCD$ рівні, тому шукана пряма повинна перетинати відрізок MC в точці O і сторону CD в точці L так, щоб площі трикутників AOM і COL були рівні.

«Створюємо» трапецію $AMLC$ з урахуванням того, що M — середина BD .

Шукана AL — діагональ цієї трапеції. ●

Задача 25. Побудувати одну з рівноподільних фігур, зображених на малюнку 49.19.

● Знайдемо середину дуги AB (точку K) (рис. 49.20). Оскільки дуги AmK і KnB рівні, то залишається через точку K провести рівноподільну в чотирикутнику $AKBC$. ●

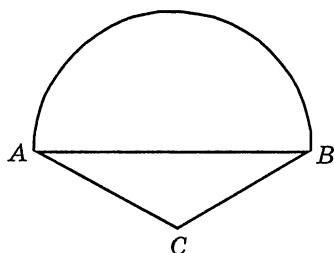


Рис. 49.19

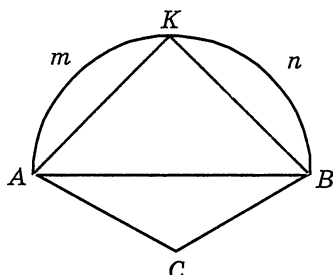


Рис. 49.20

ЗАДАЧА «ЯПОНСЬКОЇ ХРАМОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ»

Геометрію в Японії любили і, сподіваюся, що й досі люблять. У будь-якому випадку, про «Японську храмову геометрію» (XVII–XIX ст.) відомо, що задачі, вивішені в храмах на спеціальних дощечках «сангаку», і цікаві, і складні.

З однією з них ми познайомилися в книзі З. А. Скопця і В. А. Жарова «Задачі и теоремы по геометрии (планиметрия)», що вийшла в 1962 році.

У трикутник вписано коло радіусом r . Побудовано кола, які дотикаються до сторін трикутника і вписаного кола. Довести, що між радіусами r_1, r_2, r_3 останніх трьох кіл є залежність

$$\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1} = r.$$

Наведемо розв'язання, надруковане в цій книзі, зробивши його детальнішим (перший спосіб).

● Нехай I, I_1, I_2, I_3 — центри кіл (рис. 50.1). Проведемо через точку I_1 пряму, яка паралельна до AB і перетинає радіус IK в точці E (K і K_1 — точки дотику сторони AB з колами, центри яких I і I_1). У трикутнику II_1E : $II_1 = r_1 + r$; $IE = r - r_1$, а

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{r - r_1}{r + r_1},$$

звідки $r_1 = \frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} r = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{A}{4} \right) r$. Аналогічно

$$r_2 = \frac{1 - \sin \frac{B}{2}}{1 + \sin \frac{B}{2}} r = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{B}{4} \right) r; \quad r_3 = \frac{1 - \sin \frac{C}{2}}{1 + \sin \frac{C}{2}} r = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{C}{4} \right) r.$$

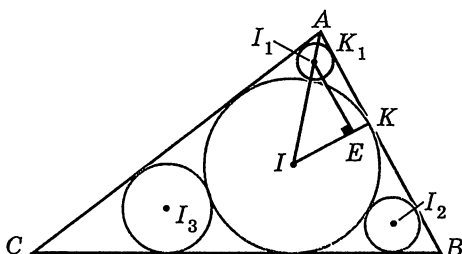


Рис. 50.1

Далі автори розв'язання обрали віртуозний шлях — вони застосовують відому тотожність: якщо $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1. \quad (1^0)$$

У нашому випадку $\alpha = 90^\circ - \frac{A}{2}$; $\beta = 90^\circ - \frac{B}{2}$; $\gamma = 90^\circ - \frac{C}{2}$, і буде правильною рівність (1^0) , тобто

$$\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1} = r \left(\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{A}{4} \right) \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{B}{4} \right) + \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{B}{4} \right) \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{C}{4} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{A}{4} \right) \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{C}{4} \right) \right).$$

Оскільки вираз у дужках дорівнює 1, то

$$\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1} = r,$$

що і потрібно було довести. ●

Погодьтеся, шановний читачу, що здогадатися застосувати відому тригонометричну тотожність здатен не кожний. Очевидно, подумав я, тут має бути хоч і довший, проте більш «природний» спосіб доведення. Отримали такі розв'язання.

● *Другий спосіб.* Нехай K_1 і K_3 — точки дотику кіл з центрами I та I_3 сторони BC (рис. 50.2).

Нескладно знайти $K_3 K_1$: $K_3 K_1 = 2\sqrt{rr_3}$. Із подібності трикутників $CK_1 I$ і $I_3 D I$ маємо:

$$\frac{r - r_3}{2\sqrt{rr_3}} = \frac{r}{p - c} \left(p = \frac{a + b + c}{2} \right). \quad (1)$$

Аналогічно можна отримати ще два співвідношення:

$$\frac{r - r_1}{2\sqrt{rr_1}} = \frac{r}{p - a}; \quad (2)$$

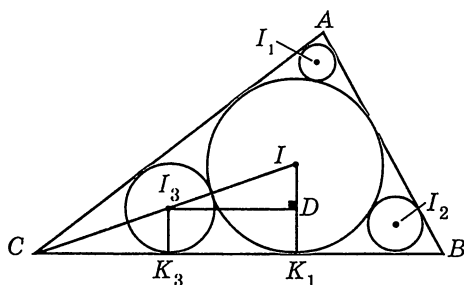


Рис. 50.2

$$\frac{r-r_2}{2\sqrt{rr_2}} = \frac{r}{p-b}. \quad (3)$$

Зазначимо, що

$$\frac{r^2}{(p-b)(p-c)} + \frac{r^2}{(p-c)(p-a)} + \frac{r^2}{(p-a)(p-b)} = 1.$$

Враховуючи співвідношення (1), (2), (3), отримуємо рівняння

$$\frac{(r-r_1)(r-r_2)}{4r\sqrt{r_1r_2}} + \frac{(r-r_3)(r-r_2)}{4r\sqrt{r_3r_2}} + \frac{(r-r_3)(r-r_1)}{4r\sqrt{r_1r_3}} = 1,$$

або

$$\begin{aligned} & (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}) \cdot r^2 - ((r_1 + r_2)\sqrt{r_3} + (r_2 + r_3)\sqrt{r_1} + (r_3 + r_1)\sqrt{r_2} + \\ & + 4\sqrt{r_1r_2r_3})r + r_1r_2\sqrt{r_3} + r_2r_3\sqrt{r_1} + r_3r_1\sqrt{r_2} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Але

$$\begin{aligned} & ((r_1 + r_2)\sqrt{r_3} + (r_2 + r_3)\sqrt{r_1} + (r_3 + r_1)\sqrt{r_2} + 4\sqrt{r_1r_2r_3}) = \sqrt{r_3r_1^2} + \sqrt{r_3r_2^2} + \\ & + \sqrt{r_1r_2^2} + \sqrt{r_1r_3^2} + \sqrt{r_2r_3^2} + \sqrt{r_2r_1^2} + 4\sqrt{r_1r_2r_3} = \sqrt{r_2r_3}(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}) + \\ & + \sqrt{r_1r_3}(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}) + \sqrt{r_1r_2}(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}) + \sqrt{r_1r_2r_3} = \\ & = (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3})(\sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_3r_1} + \sqrt{r_1r_2}) + \sqrt{r_1r_2r_3}, \end{aligned}$$

і рівняння (4) виглядатиме так

$$\begin{aligned} & (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3})r^2 - ((\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3})(\sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_3r_1} + \sqrt{r_1r_2}) + \sqrt{r_3} + \\ & + \sqrt{r_1r_2r_3})r + (\sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_3r_1} + \sqrt{r_1r_2})\sqrt{r_1r_2r_3} = 0. \end{aligned}$$

Розв'яжемо це рівняння і отримаємо два корені:

$$r' = \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_1r_3}, \quad r'' = \frac{\sqrt{r_1r_2r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}}.$$

Припустимо, що $r_1 \geq r_2 \geq r_3$ і знайдемо:

$$r'' = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{r_2r_3}} + \frac{1}{\sqrt{r_3r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_1r_2}}} \leq \sqrt{r_2r_1} \leq r_1,$$

що неможливо. Отже, у даній задачі:

$$r = \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_1r_3}. \bullet$$

Можна довести, що r'' відповідає колам, які дотикаються до продовжень сторін трикутника ABC . Це розв'язання належить П. С. Моденову і С. І. Новосьолову.

● *Третій спосіб* нагадує другий: з допомогою подібності трикутників знаходимо, що

$$p - a = \frac{2\sqrt{r^3 r_1}}{r - r_1}; \quad p - b = \frac{2\sqrt{r^3 r_2}}{r - r_2}; \quad p - c = \frac{2\sqrt{r^3 r_3}}{r - r_3}.$$

Потім прийдемо до рівняння

$$\frac{2\sqrt{r^3 r_1}}{r - r_1} \cdot \frac{2\sqrt{r^3 r_2}}{r - r_2} \cdot \frac{2\sqrt{r^3 r_3}}{r - r_3} = \left(\frac{2\sqrt{r^3 r_1}}{r - r_1} + \frac{2\sqrt{r^3 r_2}}{r - r_2} + \frac{2\sqrt{r^3 r_3}}{r - r_3} \right) r^2.$$

Після скорочення отримаємо:

$$4r \cdot \sqrt{r_1 r_2 r_3} = (r - r_2)(r - r_3)\sqrt{r_1} + (r - r_1)(r - r_3)\sqrt{r_2} + (r - r_2)(r - r_1)\sqrt{r_3} = \\ = r^2 (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}) - r (r_1 \sqrt{r_2} + r_3 \sqrt{r_2} + r_1 \sqrt{r_3} + r_2 \sqrt{r_3} + r_3 \sqrt{r_1} + r_2 \sqrt{r_1}) + \\ + \sqrt{r_1 r_2 r_3} (\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_1 r_3}),$$

звідки

$$\left(r - (\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_1 r_3}) \right) \cdot r \cdot (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}) - \\ - \sqrt{r_1 r_2 r_3} \cdot \left(r - (\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_1 r_3}) \right) = \\ = \left(r - (\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_1 r_3}) \right) \cdot \left(r (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}) - \sqrt{r_1 r_2 r_3} \right) = 0,$$

значить,

$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_1 r_3}.$$

Про другий корінь r' вже йшлося. ●

● *Четвертий спосіб*. Позначимо x — радіус шуканого кола. Маємо

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{A}{2}} = \sqrt{1 - \frac{(x - r_1)^2}{(x + r_1)^2}} = \frac{2\sqrt{x r_1}}{x + r_1}; \quad \cos \frac{B}{2} = \frac{2\sqrt{x r_2}}{x + r_2}; \\ \cos \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{x r_3}}{x + r_3}.$$

Оскільки

$$\sin \frac{C}{2} = \cos \left(\frac{A + B}{2} \right) = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2},$$

$$\text{маємо: } \frac{x - r_3}{x + r_3} = \frac{2\sqrt{x r_1}}{x + r_1} \cdot \frac{2\sqrt{x r_2}}{x + r_2} - \frac{x - r_1}{x + r_1} \cdot \frac{x - r_2}{x + r_2}.$$

Далі

$$\frac{x - r_3}{x + r_3} = \frac{4x\sqrt{r_1 r_2} - x^2 + (r_1 + r_2)x - r_1 r_2}{(x + r_1)(x + r_2)},$$

або

$$(x + r_1)(x + r_2)(x - r_3) = (-x^2 + (r_1 + r_2 + 4\sqrt{r_1 r_2})x - r_1 \cdot r_2)(x + r_3).$$

Отже,

$$(x^2 + r_1 x + r_2 x + r_1 r_2)(x - r_3) = (-x^2 + r_1 x + r_2 x + 4x\sqrt{r_1 r_2} - r_1 r_2)(x + r_3),$$

або

$$x^3 + r_1 x^2 + r_2 x^2 + r_1 r_2 x - r_3 x^2 - r_1 r_3 x - r_2 r_3 x - r_1 r_2 r_3 = -x^3 + r_1 x^2 + r_2 x^2 + 4x^2 \sqrt{r_1 r_2} - r_1 r_2 x - r_3 x^2 + r_1 r_3 x + r_2 r_3 x + 4x r_3 \sqrt{r_1 r_2} - r_1 r_2 r_3.$$

Після зведення подібних членів маємо

$$2x^3 - 4\sqrt{r_1 r_2} x^2 + 2(r_1 r_2 - r_2 r_3 - r_1 r_3 - 2r_3 \sqrt{r_1 r_2})x = 0.$$

Отримуємо

$$x^2 - 2\sqrt{r_1 r_2} x + r_1 r_2 - r_2 r_3 - r_1 r_3 - 2r_3 \sqrt{r_1 r_2} = 0,$$

або

$$(x - \sqrt{r_1 r_2})^2 = r_2 r_3 + r_1 r_3 + 2\sqrt{r_1 r_2} \cdot r_3 = r_3 (r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2}) = r_3 (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2.$$

$$x = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_1 r_3}. \bullet$$

Глава 51

ЧУДОВА РІВНІСТЬ ГЕОМЕТРІЇ ТРИКУТНИКА

Рівностей у геометрії трикутника існує неймовірно багато. Звання «чудового» потрібно заслужити. Мова піде про співвідношення

$$AI \cdot IW_1 = 2Rr$$

(*)

(I — інцентр, W_1 — точка перетину бісектриси внутрішнього кута BAC трикутника ABC з описаним навколо цього трикутника колом, R, r — радіуси описаного навколо трикутника і вписаного в трикутник ABC кіл).

Рівність для істинних любителів геометрії — не новинка, але чомусь в жодній із знайомих мені книг вона не виділялася як необхідна і значна. Спробую переконати читача у важливості цієї рівності.

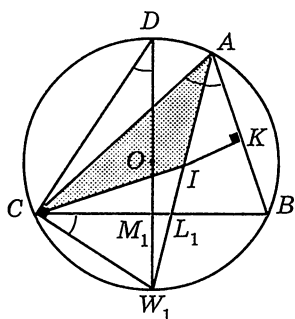


Рис. 51.1

Способи доведення

● *Пеший спосіб.* Із трикутника AIK (K — точка дотику вписаного кола зі стороною AB) (рис. 51.1):

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Із трикутника AW_1C (застосуємо «трилисник»):

$$CW_1 = IW_1 = 2R \sin \frac{A}{2},$$

отже, $AI \cdot IW_1 = \frac{r \cdot 2R \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = 2Rr$, що і потрібно було довести. ●

● *Другий спосіб.* Проведемо діаметр W_1D .

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}; IW_1 = CW_1 = 2R \sin \frac{A}{2} \text{ (із } \triangle CDW_1 \text{)}.$$

Тоді $AI \cdot IW_1 = 2Rr$. ●

● *Третій спосіб.* Трикутник CDW_1 подібний до трикутника AIK :

$$\frac{DW_1}{AI} = \frac{CW_1}{IK}, \text{ або } \frac{2R}{AI} = \frac{IW_1}{r}, \text{ звідки } AI \cdot IW_1 = 2Rr. \bullet$$

● *Четвертий спосіб.* Із $\triangle AIC$:

$$\frac{AI}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{AC}{\sin \left(90^\circ + \frac{B}{2} \right)}, \text{ звідси } AI = \frac{b \cdot \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{2R \sin B \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}},$$

отже,

$$AI = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \text{ и } IW_1 = 2R \sin \frac{A}{2}.$$

$$AI \cdot IW_1 = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cdot 2R \sin \frac{A}{2}.$$

Враховуючи, що $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$, маємо $AI \cdot IW_1 = 2Rr$. ●

● *П'ятий спосіб.* У книзі З. А. Скопця і В. А. Жарова «Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия)» (М., 1962) дається вказівка до доведення: «Розглянути трикутник W_1OC і використати теорему Стюарта, а потім скористатися теоремою Ейлера». Пропонуємо цей спосіб читачам розглянути самостійно. ●

Задачі на побудову¹

Задача 1. Побудувати трикутник ABC за AI ; IW_1 ; a .

● Будуємо базовий трикутник W_1M_1C (рис. 49.1), отримаємо кут M_1CW_1 , що дорівнює $\frac{1}{2}\angle A$. Із трикутника AIK отримаємо радіус r . Дана задача зводиться до розв'язання задачі: R, r, a . ●

Побудувати трикутник ABC :

2) за AI, IW_1, A — аналогічна до попередньої.

3) AI, IW_1, R ;

4) AI, IW_1, r ;

5) AI, IW_1, h_a .

Вказівка. В задачах 3 і 4 застосовується формула (*). В задачі 5 спочатку потрібно знайти діаметр описаного кола.

6) $AI, IW_1, p-a$;

7) R, r, AI ;

8) R, r, IW_1 ;

9) $AI, IW_1, \angle B - \angle C$.

Доведення формул

Задача 2. Довести, що $\frac{IW_1 \cdot IW_3}{IB} = R$.

● Доведення. Маємо

$$\frac{IW_1 \cdot IW_3}{IB} = \frac{AI \cdot IW_1 \cdot CI \cdot IW_3}{AI \cdot CI \cdot BI} = \frac{2Rr \cdot 2Rr}{AI \cdot CI \cdot BI}.$$

Скориставшись тим, що

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}; \quad BI = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}}; \quad CI = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}},$$

і формулою

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

¹ Задачі рекомендується розв'язувати двома способами.

отримуємо

$$\frac{IW_1 \cdot IW_3}{IB} = \frac{2Rr \cdot 2Rr \cdot \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cdot 4R}{r^3 \cdot 4R} = \frac{4R^2 r^2}{r^3 \cdot 4R} = R. \bullet$$

Задача 3. Довести, що $\frac{IA \cdot IC}{IW_2} = 2r$.

● Доведення. Маємо

$$\frac{IA \cdot IC}{IW_2} = \frac{AI \cdot IW_1 \cdot CI \cdot IW_3}{IW_1 \cdot IW_2 \cdot IW_3} = \frac{2Rr \cdot 2Rr}{8R^3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{4R^2 r^2}{2 \cdot rR^2} = 2r. \bullet$$

Найкоротше доведення формули Ейлера:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

● Позначимо $OI = d$. Проведемо через точки O й I хорду PM (рис. 51.2). Тоді $PI = d + R$; $OM = R - d$.

Оскільки

$$PI \cdot IM = AI \cdot IW_1,$$

маємо

$$(R + d)(R - d) = 2Rr, R^2 - d^2 = 2Rr, d^2 = R^2 - 2Rr. \bullet$$

Формула $AI^2 = bc - 4Rr$

● Доведення. Оскільки

$$4Rr = 2AI \cdot IW_1,$$

то формулу перепишемо так: $AI^2 = bc - 2AI \cdot IW_1$.

Із подібності трикутників AW_1C і AL_1B випливає, що

$$bc = AW_1 \cdot l_a \quad (1^0)$$

(l_a — бісектриса кута BAC). Маємо

$$AI^2 + 2AI \cdot IW_1 = bc,$$

або

$$AI^2 + 2AI \cdot IW_1 + IW_1^2 = bc + IW_1^2.$$

Скористаємося співвідношенням (1^0) :

$$(AI + IW_1)^2 = AW_1 \cdot l_a + IW_1^2,$$

звідки

$$AW_1(AW_1 - l_a) = IW_1^2,$$

або

$$AW_1 \cdot L_1W_1 = IW_1^2 = CW_1^2,$$

отримали відому формулу. ●

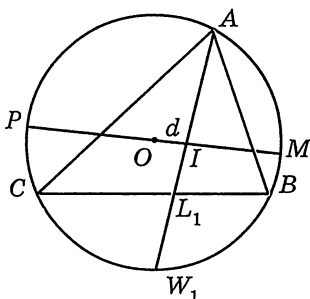


Рис. 51.2

Нерівності

Задача 4. Довести, що $R \geq 2r$.

- Доведення. Маємо $\sqrt{AI \cdot IW_1} \leq \frac{AI + IW_1}{2}$, тоді

$$AI \cdot IW_1 \leq \frac{AW_1^2}{4}.$$

Очевидно, що $AW_1 \leq 2R$, отже $AI \cdot IW_1 \leq R^2$. Оскільки $AI \cdot IW_1 = 2Rr$, то $2Rr \leq R^2$, або $R \geq 2r$. ●

Задача 5. Довести, що $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$, где A, B, C — кути трикутника ABC .

- Доведення. Маємо $AI \cdot IW_1 \leq R^2$ (див. доведення попередньої задачі).

Далі (з трикутника AW_1C):

$$IW_1 = CW_1 = 2R \sin \frac{A}{2}. \quad (1)$$

За теоремою синусів із трикутника AIC :

$$\frac{AI}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{AC}{\sin \angle AIC}.$$

Враховуючи, що

$$\angle AIC = 90^\circ + \frac{B}{2} \text{ і } AC = 2R \sin B,$$

маємо

$$AI = \frac{2R \sin B \sin \frac{C}{2}}{\sin \left(90^\circ + \frac{B}{2} \right)}, \quad AI = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \quad (2)$$

Скористаємося рівностями (1) і (2) і отримаємо:

$$AI \cdot IW_1 = 8R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Але $AI \cdot IW_1 \leq R^2$, отже,

$$8R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq R^2,$$

або

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}. \quad \bullet$$

ЧУДОВІ ПАРАЛЕЛОГРАМИ ГЕОМЕТРІЇ ТРИКУТНИКА

Подвоєна медіана

Чудові точки і прямі геометрії трикутника дещо «витіснили» паралелограми, без властивостей яких обійтися не можна. Звісно, найпопулярніший з них — паралелограм, який утворюється від «подвоєння» медіани (рис. 52.1).

Назвемо умови деяких задач і теорем, для розв'язання і доведення яких доцільна побудова такого паралелограма.

1. Дано три сторони трикутника. Знайти довжину медіани.
2. Довести, що три прямі, яким належать висоти трикутника, перетинаються в одній точці.
3. Пряма Ейлера.
4. Побудувати трикутник за такими елементами:
 - 1) h_a, m_b, m_c ;
 - 2) h_a, h_b, m_c ;
 - 3) A, h_a, m_a ;
 - 4) A, h_a, m_b ;
 - 5) a, h_b, m_b (Київська олімпіада, 1964 р.).

Як приклад розглянемо задачу:

Побудувати трикутник за a, A, m_b (II Українська олімпіада, 1962 р.).

● Проведемо аналіз задачі: нехай трикутник ABC побудовано (рис. 52.2). «Подвоїмо» медіану BM_2 . Отримаємо паралелограм $ABCD$. Оскільки кут $BAM_2 = \angle A$ — задано, то на медіані $BM_2 = m_b$ можна побудувати сегмент, який містить кут A , а потім із точки D провести дугу радіуса, що дорівнює a . Вона перетинатиме сегмент в точці A . Значить, трикутник ABM_2 можна побудувати, отже, і трикутник ABC також. ●

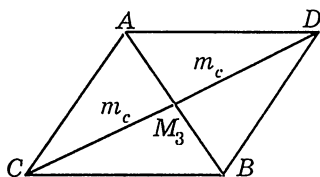


Рис. 52.1

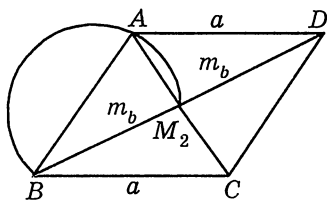


Рис. 52.2

Паралелограми Ейлера

Нехай E_1 — середина відрізка AH (точка Ейлера). Оскільки

$$OM_1 = \frac{1}{2}AH = E_1H. \text{ Чотирикутник } OM_1HE_1 \text{ назвемо першим}$$

паралелограмом Ейлера (тим більше, що його діагональ OH належить прямій Ейлера) (рис. 52.3).

Задача 1. Довести, що $M_1E_1 = M_2E_2 = M_3E_3$.

● Доведення. Розглянемо ще один чудовий паралелограм OM_1E_1A — назвемо його другим паралелограмом Ейлера: $M_1E_1 = OA = R$. Отже,

$$M_1E_1 = M_2E_2 = M_3E_3 = R. \bullet$$

Задача 2. Довести, що центр кола Ейлера ділить відрізок OH навпіл.

● Дійсно, це точка перетину діагоналей першого паралелограма Ейлера. ●

Задача 3. Довести, що другий паралелограм Ейлера не може бути ромбом (рис. 52.4).

● Доведення. Оскільки $\angle OAC = \angle H_1AB$, а $\angle OAM_1 = \angle M_1AE_1$, то $\angle CAM_1 = \angle BAM_1$, отже, медіана AM_1 збігається з бісектрисою кута BAC , тобто трикутник ABC — рівнобедрений і другий паралелограм Ейлера вироджується. ●

Задача 4. Якщо перший паралелограм Ейлера — ромб, то $OH^2 = 3R^2 - a^2$.

● Доведення. Оскільки $OH \perp M_1E_1$, то $\angle AOH = 90^\circ$, а значить,

$$OH^2 = AH^2 - OA^2, \text{ або } OH^2 = 4R^2 - a^2 - R^2 = 3R^2 - a^2. \bullet$$

Задача 5 (Соросівська олімпіада, Київ). Нехай H — ортоцентр трикутника ABC , M_1 і N — середини відрізків BC і AH відповідно, K — точка перетину прямої M_1N з бісектрисою кута BAC . Довести, що $\angle AKH = 90^\circ$.

● Доведення. Побудуємо другий паралелограм Ейлера (рис. 52.4). Оскільки бісектриса AL_1 ділить кут OAN навпіл, то $\angle OAK = \angle AKN = \angle KAN$, отже, медіана KN трикутника AKN дорівнює половині AH , тобто $\angle AKH = 90^\circ$. ●

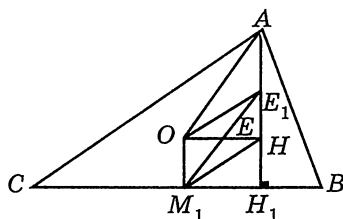


Рис. 52.3

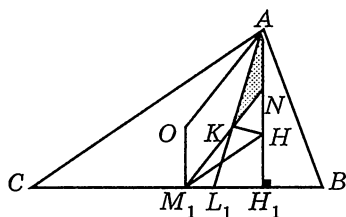


Рис. 52.4

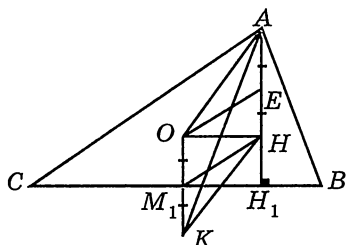


Рис. 52.5

Задача 6. Довести, що точки, симетричні центру описаного навколо трикутника кола відносно середин його медіан, лежать на висотах трикутника.

● Доведення. Це виходить безпосередньо із властивостей діагоналей другого паралелограма Ейлера. ●

Задача 7 (Шарыгин И. Ф. «Геометрия 9–11», М., Дрофа). Нехай K — точка, симетрична центру описаного навколо трикутника ABC кола відносно сторони BC . Довести, що пряма Ейлера трикутника ABC ділить відрізок AK навпіл.

● Доведення. Дійсно, чотирикутник $OKHA$ — паралелограм, діагоналі якого AK і OH (рис. 52.5). ●

Паралелограм IK_1DA (I — інцентр)

Доведемо, що пряма M_1I відтинає на висоті AN_1 відрізок AD , що дорівнює радіусу r вписаного в трикутник ABC кола (рис. 52.6).

● Опишемо навколо трикутника ABC коло і продовжимо бісектрису кута BAC до перетину з колом в точці W . Оскільки трикутники IAD і IWM_1 подібні, то

$$\frac{AD}{M_1W} = \frac{AI}{IW}.$$

Із подібності трикутників WM_1C і AIK (K — точка дотику сторони AC і вписаного в трикутник ABC кола):

$$\frac{r}{M_1W} = \frac{AI}{CW}.$$

За «трилисником» $CW = IW$, маємо $AD = r$.

Звідси очевидно, що чотирикутник AIK_1D — паралелограм ($IK_1 = r$) (рис. 52.7). ●

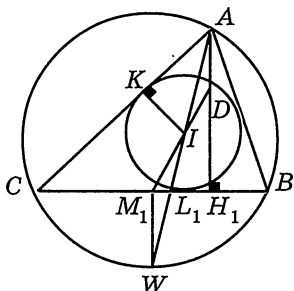


Рис. 52.6

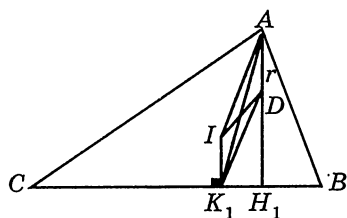


Рис. 52.7

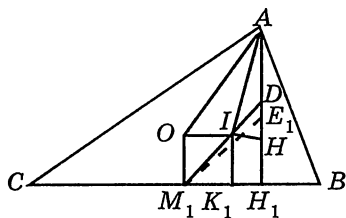


Рис. 52.8

Задача 8. Довести, що точка, симетрична інцентру I відносно середини відрізка AK_1 , належить висоті AH_1 .

Дійсно, це виходить із властивостей діагоналей паралелограма IK_1DA (рис. 52.7). ●

Задача 9. Побудувати трикутник за r, IA, AK_1 .

Ця задача зводиться до задачі: «Побудувати трикутник за a, b, m_c ». Дійсно, в паралелограмі $IADK_1$ діагональ AK_1 ділить діагональ ID навпіл (рис. 52.8). Побудуємо трикутник AID за двома сторонами (AI і $ID = r$) і медіаною, що дорівнює $0,5AK_1$, отримаємо точку K_1 . Побудуємо далі коло з центром I , радіусом $IK_1 = r$. Далі очевидно. ●

Задача 10. Довести, що якщо $OI \parallel BC$, то $IH \perp l_a$.

Доведення. Оскільки $OI \parallel BC$, то $OM_1 = r$ (рис. 52.8). Отже, $M_1D \parallel OA$. Але, враховуючи паралелограм Ейлера, можна стверджувати, що через точку M_1 проходить пряма $M_1E_1 \parallel OA$, отже, точка E_1 (середина відрізка AH) збігається з точкою D , тобто ID — медіана трикутника AIH . Оскільки $\angle AID = \angle DAI$, то $ID = AD$, а це означає, що $\angle AIH = 90^\circ$. ●

Глава 53

ТРИКУТНИК ЯК «ВИРОДЖЕНА» ТРАПЕЦІЯ

*Нам не дано передугадать,
як слово наше отзовется...*

На розгляд трапеції як «виродженого» трикутника може «спровокувати» формула середньої лінії:

$$MN = \frac{a+b}{2}. \quad (1)$$

Очевидно, що за умови $a = 0$ трапеція «вироджується» в трикутник, і формула (1) перетворюється на формулу середньої

лінії трикутника: $MN = \frac{b}{2}$ (M і N — середини сторін трикутника, b — відповідна сторона) (рис. 53.1).

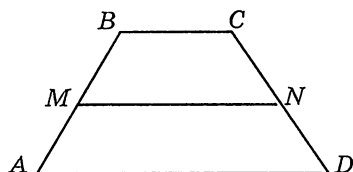


Рис. 53.1

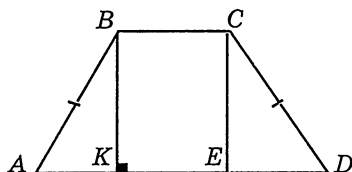


Рис. 53.2

Задача 1. У рівнобедреній трапеції $ABCD$ ($BC < AD$) точка K — проекція точки B на основу AD . Довести, що KD — відрізок, що дорівнює середній лінії трапеції.

● **Доведення.** Із вершини C опустимо висоту CE (рис. 53.2). Тоді середня лінія MN трапеції дорівнює

$$MN = \frac{BC + AK + KE + ED}{2} = \frac{2KE + 2ED}{2} = KE + ED = KD. \bullet$$

Задача 1⁰. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) відрізок H_1B дорівнює середній лінії трикутника (H_1 — основа висоти, проведеної з вершини A).

● **Доведення очевидне.** ●

Далі розглянемо, що станеться з різними елементами трапеції: з бічними сторонами, діагоналями, відрізками AN і DM (N і M — середини бокових сторін трапеції), з другою середньою лінією трапеції.

Епіграф, винесений у заголовок, як і належить епіграфу, відображає настрій того, що відбувається. У кожній задачі виникає запитання: які властивості трапеції аналогічні з властивостями трикутника? Ця загадка зачаровує і... не розчаровує!

Задача 2. Довести, що в трапеції $ABCD$ чотирикутник $T_1T_3T_2T_4$ — паралелограм (T_1, T_3, T_2, T_4 — середини сторін трапеції) (рис. 53.3).

● **Доведення.** Дійсно, відрізок T_1T_3 — середня лінія трикутника ABC , а T_2T_4 — середня лінія трикутника ADC (рис. 53.3). Отже, T_1T_3 паралельна до діагоналі AC , так само як і відрізок T_2T_4 . До того ж вони дорівнюють половині відрізка AC . ●

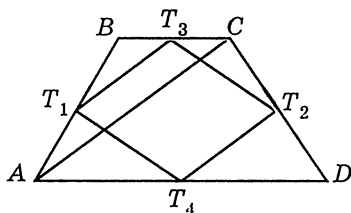


Рис. 53.3

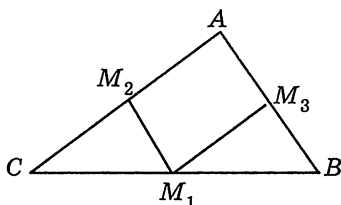


Рис. 53.4

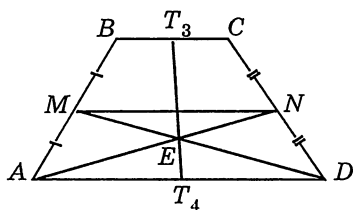


Рис. 53.5

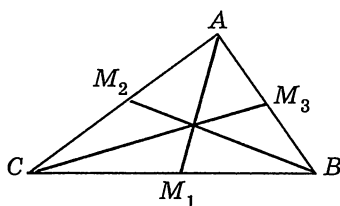


Рис. 53.6

Задача 2⁰. У трикутнику ABC чотирикутник $AM_2M_1M_3$ — паралелограм (рис. 53.4).

• Доведення очевидне. •

Задача 3. У трапеції $ABCD$ середні лінії T_1T_2 і T_3T_4 в точці перетину діляться навпіл (впливає із задачі 2).

Задача 3⁰. У трикутнику ABC середня лінія M_2M_3 і медіана AM_1 діляться точкою перетину навпіл.

• Доведення очевидні (впливає із задачі 2⁰). •

Задача 4. Якщо середні лінії трапеції рівні, то діагоналі трапеції перетинаються під прямим кутом.

• Доведення очевидне (впливає із задачі 2). •

Задача 4⁰. Якщо середня лінія трикутника дорівнює відповідній медіані, то трикутник прямокутний.

• Доведення очевидне (впливає із задачі 2⁰). •

Задача 5. У трапеції $ABCD$ друга середня лінія, відрізки AN і DM перетинаються в одній точці (рис. 53.5). Довести.

• Доведення. Дійсно, друга середня лінія проходить через точку перетину діагоналей трапеції. Отже, точка перетину діагоналей трапеції $AMND$ також належить відрізку T_3T_4 (другій середній лінії). •

Задача 5⁰. Три медіани трикутника перетинаються в одній точці. Довести.

• Доведення. Дійсно, AN і DM перейдуть в медіани CM_3 і BM_2 , а друга середня лінія — в медіану AM_1 (рис. 53.6). •

Задача 6. Довести, що якщо в трапеції $ABCD$ $AN = DM$, то трапеція рівнобедрена.

• Доведення. Дійсно, проведемо відрізок MN (середню лінію) (рис. 53.7). Тоді трапеція $AMND$ — рівнобедрена, отже, рівнобедрена і трапеція $ABCD$. •

Задача 6⁰. Довести, що якщо в трикутнику ABC медіана m_b дорівнює медіані m_c , то трикутник рівнобедрений.

• Доведення очевидне. •

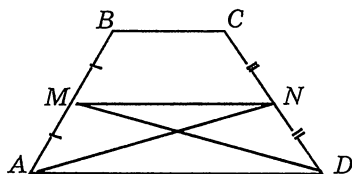


Рис. 53.7

Задача 7. Довести, що якщо в трапеції $ABCD$ відрізок $BN = CM$, то трапеція рівнобедрена.

Задача 7⁰. Якщо в трикутнику ABC відрізок $BM_1 = BM_3$, то $a = c$.

● Доведення очевидне. ●

Задача 8. Якщо в трапеції $ABCD$ відрізок $CM = DM$, то трапеція прямокутна ($\angle D = 90^\circ$).

● Доведення очевидне. ●

Задача 8⁰. Якщо в трикутнику ABC $m_c = \frac{1}{2}c$, то $\angle C = 90^\circ$.

Задача 9. В трапеції $ABCD$ $S_{CMD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Довести.

Задача 9⁰. Довести, що медіана ділить трикутник на дві рівновеликі частини.

Формула медіани m_a трикутника ABC

У трапеції $ABCD$ розглянемо паралелограм $T_1T_3T_2T_4$ (T_1, T_2, T_3, T_4 — середини сторін трапеції). Нехай d_1, d_2 — діагоналі трапеції (рис. 53.8).

Маємо

$$2\left(\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2\right) = T_3T_4^2 + T_1T_2^2. \quad (1^0)$$

Після «виродження» в трикутник діагоналі стануть сторонами b і c , відрізки T_3T_4 і T_1T_2 медіаною m_a і середньою лінією,

що дорівнює $\frac{a}{2}$. Тоді формула (1⁰) виглядатиме так:

$$2\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right) = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$\text{звідки } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

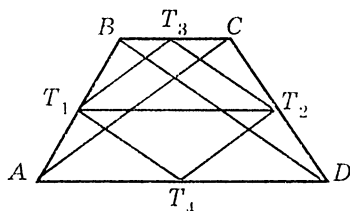


Рис. 53.8

ВЧИСЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ — ЯКІСТЬ ГАРАНТУЄТЬСЯ

Хотілося назвати: «Вчу розв'язувати задачі!» Не наважився. Причина проста — навчити розв'язувати задачі, як на мене, неможливо. А от навчитися розв'язувати задачі, мабуть, можна. Вчителі, вчені в усі часи прагнули допомогти в цьому ентузіастам. Але це прагнення, гадаю, мало кому допомогало. Кожен користувався своїм життєвим досвідом і здібностями, дарованими йому долею. Саме розв'язування багато в чому підсвідоме, хоча, наприклад, Д. Пойа в книзі «Как решать задачу» запропонував декілька положень.

Щоб побачити їхню ефективність, потрібен був, скоріше, не час, а спрямованість педагогічної роботи. Судячи з усього, є досить складні задачі, які ніби для того і створені, аби навчати мистецтву розв'язання.

Задача 1. Чотирикутник $ABCD$ з перпендикулярними діагоналями вписано в коло з центром O . Довести, що ламана AOC ділить площу чотирикутника навпіл.

Для розв'язування задачі скористаємося такими загальними рекомендаціями.

Рекомендація 1. Змініть вимогу задачі, розшифруйте її.

У цій задачі спробуємо знайти декілька фігур, рівновеликості яких довести нескладно.

Рекомендація 2. Навчіться «витягнути» з умови все можливе для розв'язання, не пропустіть дрібничок, саме вони можуть стати вирішальними для досягнення мети.

Отже, точка O — центр описаного навколо чотирикутника кола $ABCD$ (рис. 54.1). З'єднаємо її з вершинами чотирикутника і отримаємо декілька рівнобедрених трикутників. Тепер замінимо задану в умові вимогу еквівалентною, а саме: доведемо, що пари трикутників, наприклад, AOB і DOC , рівновеликі, як і пара трикутників AOD і BOC .

Отже, розв'язування починаємо з доведення рівновеликості трикутників AOB і COD .

● Оскільки дві сторони одного з них дорівнюють двом сторонам другого (як радіуси), то застосуємо формулу:

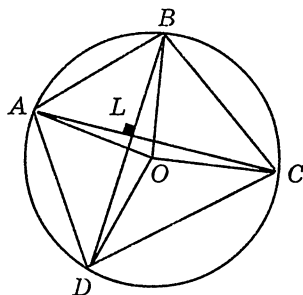


Рис. 54.1

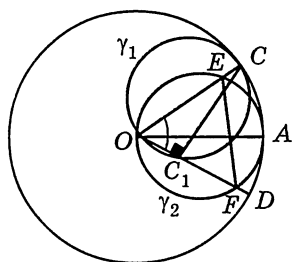


Рис. 54.2

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB$$

$$S_{DOC} = \frac{1}{2} DO \cdot OC \cdot \sin \angle DOC.$$

Залишається довести, що рівні треті множники:

$$\sin \angle AOB = \sin \angle DOC.$$

Очевидно, що $\angle AOB$ не дорівнює $\angle DOC$. Але, можливо, рівні синуси цих кутів? Точніше, мають (!) бути рівними синуси кутів!

Знову скористаємося умовою! Для чого задано перпендикулярність хорд?

Нехай L — точка перетину діагоналей чотирикутника. Оскільки

$$\angle BLA = \frac{1}{2} (\cup AB + \cup CD) = 90^\circ, \quad \angle AOB + \angle COD = 180^\circ$$

і

$$\sin \angle AOB = \sin(180^\circ - \angle COD) = \sin \angle COD,$$

відповідно, $S_{AOB} = S_{DOC}$. ●

Аналогічно доводиться, що $S_{AOD} = S_{BOC}$. Отже, ламана AOC ділить площу чотирикутника пополам, що потрібно було довести.

Задача 2. На радіусі OA кола з центром O , як на діаметрі, побудовано інше коло. Радіус OC першого кола перетинає друге коло в точці E , а радіус OD — в точці F , $CC_1 \perp OD$. Довести, що відрізок CC_1 дорівнює хорді EF (рис. 54.2).

● 1. «Працюємо» над вимогами задачі. Припустимо, що відрізки CC_1 і EF можуть бути рівними або із рівності трикутників, або як хорди одного або рівних кіл.

2. Одне коло для EF є — це коло з діаметром OA (коло γ_2).

3. Де взяти коло для відрізка CC_1 ? Це коло з діаметром OC (коло γ_1).

4. Запитання до умови: для чого проводяться радіуси OA і OC ?

Відповідь: вони рівні, отже, рівними будуть кола γ_1 і γ_2 .

5. У колах γ_1 і γ_2 розглянемо дуги, які стягують хорди CC_1 і EF .

6. І в одному, і в іншому колі на ці дуги опирається один і той же вписаний кут: в колі γ_1 — це кут COC_1 , а в рівному йому колі γ_2 — це той же кут EOF .

Твердження задачі доведено! ●

ДМИТРО МАВЛО, ВИДАТНИЙ ГЕОМЕТР СУЧАСНОСТІ, У НАС В ГОСТЯХ

На презентації книги «Повернення втраченої геометрії» до мене підійшов високий імпозантний чоловік з живим поглядом, чарівною посмішкою і прекрасними манерами. Делікатно і з розумом засипав компліментами і відрекомендувався: «Дмитро Пантелеймонович Мавло, математик із Києва, зараз живу в Москві».

Перші хвилини розмови засвідчили, що співрозмовник володіє геометрією на найвищому рівні. І лише через якийсь час я побачив його записи і осягнув масштабність цього вченого. Його знає Європа й Америка, а тепер, завдяки українському журналу «Математика в школі», знатимуть і у нас, в Україні. Багато з того, над чим працює Дмитро Пантелеймонович, не входить у шкільну програмну геометрію. Проте у нас є чудова можливість ознайомитися з деякими його авторськими задачами і навіть зі статтю, опублікованою в українському журналі «Математика в школі», № 3, 2004 р.

Для початку — три мініатюри.

Нерівності Мавло

Ще раз хочу наголосити, що пропоновані нерівності — лише «верхівка айсберга», скажімо, перше знайомство... але яке приємне!

Перша нерівність. Довести, що

$$S \geq \frac{l_a \cdot l_b \cdot l_c}{p}, \quad (1^0)$$

де l_a, l_b, l_c — бісектриси кутів трикутника ABC , p — півпериметр.

Пропоную доведення, дещо відмінне від авторського.

- Відома формула $l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$. Її можна записати так:

$$l_a^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a), \quad (1)$$

звідки $l_a^2 \leq p(p-a)$, отже, $l_b^2 \leq p(p-b)$, $l_c^2 \leq p(p-c)$.

Звідси

$$(l_a l_b l_c)^2 \leq p^2(p(p-a)(p-b)(p-c)) = p^2 S^2,$$

відповідно, $S \geq \frac{l_a l_b l_c}{p} = \frac{2l_a l_b l_c}{a+b+c}$. ●

Коментар: нерівність Мавло можна довести за допомогою формули Чезаро: $S_L = \frac{l_a l_b l_c}{p}$ (див.: Трикутник і тетраедр в задачах).

Друга нерівність

Довести, що $S \leq \frac{m_a m_b m_c}{p}$, де m_a, m_b, m_c — медіани трикутника ABC .

● Доведення. Враховуючи формулу медіани, маємо

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{b^2 + b^2 + c^2 + c^2 - a^2}{4} \geq \\ &\geq \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{4} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} = p(p-a). \end{aligned}$$

Отже і

$$m_b^2 \geq p(p-b), \quad m_c^2 \geq p(p-c).$$

Звідси

$$(m_a m_b m_c)^2 \geq p^2(p-a)(p-b)(p-c) = p^2 S^2,$$

або

$$S \leq \frac{m_a m_b m_c}{p} = \frac{2m_a m_b m_c}{a+b+c}. \quad \bullet$$

Третя нерівність

Довести, що $S \leq \frac{2\sqrt{m_a m_b m_c l_a l_b l_c}}{a+b+c}$.

● Доведення.

$$m_a l_a \geq p(p-a), \quad m_b l_b \geq p(p-b),$$

$$m_c l_c \geq p(p-c).$$

Звідси

$$S \leq \frac{2\sqrt{m_a m_b m_c l_a l_b l_c}}{a+b+c} \quad \text{і} \quad S^3 \leq \frac{\sqrt{3}}{12} (abc m_a m_b m_c l_a l_b l_c)^{\frac{2}{3}}. \quad \bullet$$

З люб'язного дозволу Дмитра Мавла, пропоную читачеві його статтю, опубліковану в журналі «Математика в школі» (2004. — №3).

КРАСИВІ ВЛАСТИВОСТІ ЧУДОВИХ ТІЛ

Любіть красу, вона тїнь Бога у Всесвіті
Габрієла Містраль¹

Будемо стверджувати, що об'єкт має *адитивну властивість* (АС), якщо одна величина Q_1 , що характеризує об'єкт, дорівнює сумі двох інших подібних характеристик Q_2 і Q_3 ($Q_1 = Q_2 + Q_3$). У випадках, коли Q_1 є довжиною деякого відрізка, відповідна АС буде називатися *лінійною адитивною властивістю* (ЛАС); коли Q_1 є кутом або дугою (вимірними в градусах або радіанах), будемо казати, що геометричний об'єкт має *кутову адитивну властивість* (УАС). Наступні дві теореми мають переконати читачів, що адитивна властивість є дуже цікавим геометричним феноменом, вартим розгляду і подальшого вивчення.

Нехай ABC — трикутник зі сторонами a, b, c і кутами α, β, γ у звичному порядку та радіусом описаного кола R . Під $|x|$ розуміємо абсолютну величину x , а під $|MN|$ — довжину відрізка MN . Решта позначень зрозуміла з малюнків 1–4, де A_0, B_0, C_0 — середини сторін BC, CA і AB відповідно; H_A, H_B, H_C — основи висот AH_A, BH_B і CH_C трикутника ABC ; O_9 — центр кола

дев'яти точок, $r_9 = \frac{R}{2}$ — радіус кола дев'яти точок; $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ — центральні кути, що спираються на дуги, $\text{arc}A_0H_A, \text{arc}B_0H_B, \text{arc}C_0H_C$ (рис. 1) відповідно; W_A, W_B, W_C — основи бісектрис AW_A, BW_B, CW_C кутів трикутника.

Перший наш геометричний об'єкт (класичний) — *коло дев'яти точок* Ω_9 трикутника ABC (рис. 1). У 22 (двадцяти двох!) теоремах і 49 (сорока дев'яти?) вправах найширшого джерела посилань на евклідову геометрію коло Ω_9 з'являється як «основний герой». Досить почесне місце воно також займає в більш сучасних, але менш широких геометричних курсах. Але *ніде* не можна знайти сліду нашої чудової теореми.

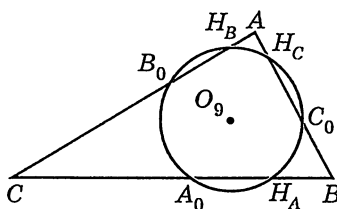


Рис. 1

¹ Містраль (Mistral) Габрієла (1889–1957) — чилійська поетеса.

Теорема 1. Дуги кола дев'яти точок Ω_9 , вирізані з нього сторонами гострокутного трикутника ABC (рис. 1), мають адитивну властивість: одна з них дорівнює сумі двох інших.

● Доведення. З означення Ω_9 та добре відомих тригонометричних тотожностей маємо (рис. 2):

$$\sin \frac{\varphi_A}{2} = \left(\frac{1}{2} |A_0 H_A| \right) : \left(\frac{R}{2} \right) = \frac{|b^2 - c^2|}{2Ra} = \frac{|\sin^2 \beta - \sin^2 \gamma|}{\sin \alpha} = |\sin(\beta - \gamma)|. \quad (1)$$

З рівності (1) і двох аналогічних формул для $\sin \frac{\varphi_B}{2}$ і $\sin \frac{\varphi_C}{2}$ випливає, що

$$\varphi_A = 2|\beta - \gamma|, \varphi_B = 2|\gamma - \alpha|, \varphi_C = 2|\alpha - \beta|. \quad (2)$$

Без втрати загальності можемо припустити, що

$$a \geq b \geq c \Leftrightarrow \alpha \geq \beta \geq \gamma. \quad (3)$$

Із рівностей (2) і (3) тепер випливає, що

$$\varphi_A = 2(\beta - \gamma), \varphi_B = 2(\alpha - \gamma), \varphi_C = 2(\alpha - \beta). \quad (4)$$

Додаючи ці рівності почленно, отримаємо шукану рівність:

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_C \Leftrightarrow \text{arc} B_0 H_B = \text{arc} A_0 H_A + \text{arc} C_0 H_C. \quad (5)$$

Як і більшість хороших доведень, наше доведення дало більше, ніж ми від нього бажали. Дійсно, на основі рівностей (2)–(5) можна зробити висновок, яка саме дуга дорівнює сумі двох інших: це дуга, вирізана з Ω_9 *проміжною стороною* (стороною b в наших позначеннях) трикутника ABC .[●]

Нашим другим геометричним об'єктом є неklasичний — коло Ω_W (з радіусом r_W і центром O_W), що проходить через основи W_A , W_B , W_C бісектрис внутрішніх кутів довільного трикутника ABC (рис. 3). Сторони трикутника перетинають це коло знову в точках N_A , N_B , N_C (рис. 3 і 4).

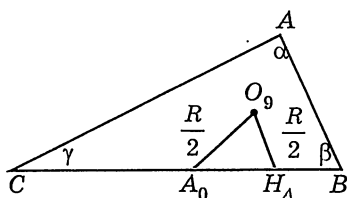


Рис. 2

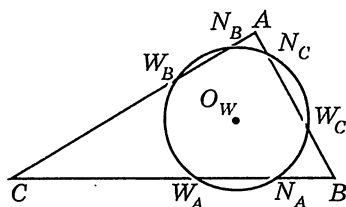


Рис. 3

Введемо деякі додаткові позначення відрізків, що застосовуються в подальших міркуваннях:

$$D_A = |W_A N_A|, D_B = |W_B N_B|, D_C = |W_C N_C|,$$

$$x_A = |AO_W|, x_B = |BO_W|, x_C = |CO_W|.$$

Наступна теорема також не є широко відомою і добре доповнює попередню (або конкурує з нею).

Теорема 2. Хорди, утворені в результаті перетину кола Ω_W зі сторонами даного трикутника ABC , мають таку лінійну адитивну властивість: одна з них дорівнює сумі двох інших.

Не дивно, що маючи справу з неklasичним об'єктом, нам необхідна деяка додаткова підтримка, скажімо, таких двох лем.

Лемма 1. У вище наведених позначеннях

$$x_A^2 = r_W^2 + \frac{bc}{2} \left[-\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right], \quad (6)$$

$$x_B^2 = r_W^2 + \frac{ca}{2} \left[\frac{a}{b+c} - \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right], \quad (7)$$

$$x_C^2 = r_W^2 + \frac{ab}{2} \left[\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} - \frac{c}{a+b} \right]. \quad (8)$$

Доведення. Добре відомо, що відрізки, на які сторона трикутника ділиться відповідною бісектрисою, пропорційні прилеглим сторонам трикутника. Тому

$$|AW_C| = \frac{bc}{a+b}, \quad |W_CB| = \frac{ca}{a+b}, \quad |BW_A| = \frac{ca}{b+c}, \quad |W_AC| = \frac{ab}{b+c},$$

$$|CW_B| = \frac{ab}{c+a}, \quad |W_BA| = \frac{bc}{c+a}. \quad (9)$$

Розглядаючи трикутники AO_WB , BO_WC , CO_WA і використовуючи теорему Стюарта,² а також рівність (9), отримаємо лінійну (відносно x_A^2 , x_B^2 , x_C^2) систему таких трьох рівностей:

$$\begin{cases} ax_A^2 + bx_B^2 = (a+b)r_W^2 + \frac{abc^2}{a+b}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} bx_B^2 + cx_C^2 = (b+c)r_W^2 + \frac{bca^2}{b+c}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} cx_C^2 + ax_A^2 = (c+a)r_W^2 + \frac{cab^2}{c+a}, \end{cases} \quad (12)$$

² Для зручності читача наприкінці статті наведено формулювання теореми Стюарта.

розв'язок якої (6)–(8) можна легко отримати за допомогою одного із стандартних методів.

Лема 2. Нехай

$$P = a + b + c, \Pi = abc, K = [2(a + b)(b + c)(c + a)]^{-1},$$

тоді

$$\Delta_A = K|b - c|(P^3 - 2aP^2 - \Pi), \quad (13)$$

$$\Delta_B = K|c - a|(P^3 - 2bP^2 - \Pi), \quad (14)$$

$$\Delta_C = K|a - b|(P^3 - 2cP^2 - \Pi). \quad (15)$$

Доведення. Для того щоб виразити, наприклад, Δ_A в термінах a, b, c , необхідно розглянути трикутники $O_W B(W_A)C$ і $O_W B(N_A)C$ на рис. 4 і застосувати теорему Стюарта двічі:

$$r_W^2 a = x_C^2 \left(\frac{ca}{b+c} \right) + x_B^2 \left(\frac{ab}{b+c} \right) - \left(\frac{ca}{b+c} \right) \left(\frac{ab}{b+c} \right) a, \quad (16)$$

$$r_W^2 a = x_C^2 \left[\frac{ca}{b+c} - \Delta_A \right] + x_B^2 \left[\frac{ab}{b+c} + \Delta_A \right] - \left[\frac{ca}{b+c} - \Delta_A \right] \left[\frac{ab}{b+c} + \Delta_A \right] a. \quad (17)$$

Розв'язуючи рівняння (17) відносно Δ_A і використовуючи (16), отримаємо:

$$\Delta_A = \frac{x_C^2 - x_B^2}{a} + \frac{a(c-b)}{b+c}. \quad (18)$$

Перший доданок в рівності (18) можна легко перетворити в такий вираз:

$$\frac{x_C^2 - x_B^2}{a} = \frac{(b-c)}{2} \left\{ \frac{a}{b+c} + \frac{(b+c)P}{(c+a)(a+b)} \right\}. \quad (19)$$

Підставляючи (19) в (18) і роблячи деякі очевидні спрощення, отримуємо майже остаточний результат:

$$\Delta_A = K(b-c)(P^3 - 2aP^2 - \Pi). \quad (20)$$

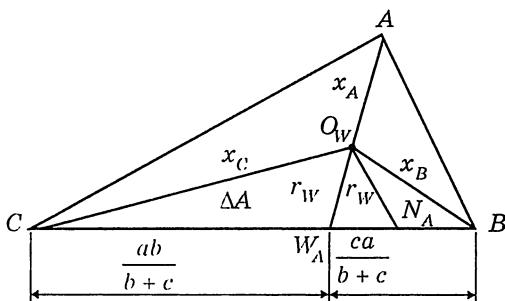


Рис. 4

«Майже» — тому що формула (20) була отримана при мовчазному припущенні, що точка N_A лежить між точками W_A і B , що еквівалентне тому факту, що $b > c$. Якщо виявляється, що точка N_A лежить між точками C і W_A , що відповідає припущенню, що $b < c$, тоді точно такі самі обчислення (16)–(19) приводять до формули:

$$\Delta_A = K(c - b)(P^3 - 2aP^2 - \Pi). \quad (21)$$

Остаточний результат (13) покриває обидва ці випадки ((20) і (21)). Тепер, будучи повністю озброєними лемами 1 і 2, можемо завершити доведення теореми 2 абсолютно аналогічно до того, як було завершено доведення теореми 1. Як і раніше, припускаємо (без втрати загальності), що нерівності (3) мають місце, тобто

$$\Delta_A = K(b - c)(P^3 - 2aP^2 - \Pi), \quad (22)$$

$$-\Delta_B = K(c - a)(P^3 - 2bP^2 - \Pi), \quad (23)$$

$$\Delta_C = K(a - b)(P^3 - 2cP^2 - \Pi). \quad (24)$$

Додаючи ці рівності почленно, отримуємо *нарешті* шукану рівність

$$\Delta_A - \Delta_B + \Delta_C = 0 \Leftrightarrow \Delta_B = \Delta_A + \Delta_C.$$

Як і раніше, представлене доведення дало більше, ніж вимагалось: його приємним побічним продуктом є те, що можна завжди зробити висновок, яка з хорд, що входить до суми, є сумою інших двох (та, що утворена перетином кола Ω_W з проміжною стороною трикутника ABC). ●

«Не знаю, чим я можу здаватися світу, але сам себе я відчуваю тільки хлопчиком, що грається наморському березі і розважається тим, що час від часу відшукує камінець цікавіший, ніж завжди, або красиву мушлю, в той час як великий океан істини простягається переді мною недослідженим» (Ісаак Ньютон).

Запитання. Чи можете ви, за словами Ньютона, зібрати деяку гальку з адитивними властивостями на морському березі класичної геометрії, в той час як великий океан істини лежить недослідженим перед вами?

Доповнення перекладача. Теорема Стюарта. Розглянемо на основі BC трикутника ABC точку X (рис. 5). Нехай

$$|AX| = p, |BX| = m, |CX| = n.$$

$$\text{Тоді } a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

Читачі України чекають від Д. П. Мавла нових відкриттів. Успіхів. З любов'ю, І. Кушнір.

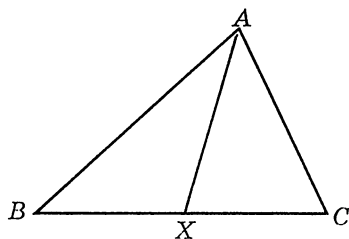


Рис. 5

ДРАМА І КОМЕДІЯ ОДНІЄЇ РІВНОПОДІЛЬНОЇ

Задачі про поділ навпіл площі трикутника вже, мабуть, понад дві тисячі років. Задача, про яку мова піде далі, прийшла до школи в шістдесятих роках минулого століття. Тоді нею «різали» на вступних іспитах ще не навчених репетиторами абітурієнтів Київського політехнічного інституту (КПІ):

Через точку на стороні трикутника провести пряму так, щоб вона ділила площу трикутника навпіл.

Звернувши увагу на цю задачу, я простежив її історію.

Звісно, ще до КПІ її можна було знайти в задачниках дореволюційного періоду:

«Разделить треугольник ABC на две равномѣрныя части прямою, исходящею из точки M , данной на одной стороне треугольника» («Собрание геометрических теорем и задач»). Составил Е. Пржевальський, издание седьмое, Москва, 1901 г.).

У радянську шкільну математику вона прийшла разом з «Геометрією» А. П. Кисельова.

Задачу розв'язували різними способами (за допомогою трапеції, за допомогою алгебри), але чомусь не виникало питання, як розв'язати цю задачу, якщо точка буде *всередині* або *поза* трикутником. А це було б так природно:

поділити прямою площу трикутника навпіл.

Або ж використовуючи термінологію нашої книги:

у трикутнику провести рівноподільну!

Якось у журналі «Математика в школі» серед авторських задач було запропоновано провести пряму, якщо точка M поза трикутником, але... розв'язання за допомогою гомотетії було неправильним (!).

Підкралася зрадлива думка: «А якщо це взагалі неможливо?»

Допоміг «Сборник геометрических задач на построение» І. Александрова (М.: Учпедгиз, 1950). У ньому розглядалося розв'язання задачі:

Через дану точку D провести пряму, яка відтинає від даного кута $\triangle ABC$ даної площі (“De sectione spatii” Аполлонія).

Але запропоноване геометричне розв'язання цієї задачі не задовольнило. Спробував застосувати перевірений спосіб: алгебра (!) (див. с. 243).

Сьогодні у нас свято! Нарешті знайдено розв'язання, простота якого викликає здивування: «Куди дивилася наші очі? Сміх та й годі!».

Хоча... переконайтеся самі.

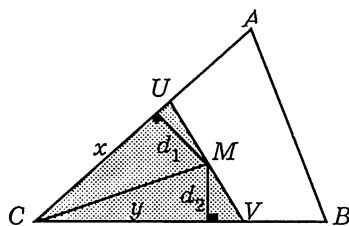


Рис. 56.1

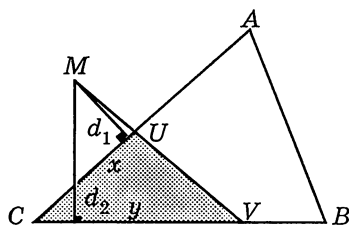


Рис. 56.2

Точка M всередині трикутника

Нехай UV — шукана рівноподільна, якій належить точка M , d_1 і d_2 — перпендикуляри, опущені з точки M на сторони AC і BC (рис. 56.1).

Нехай $CU = x$; $CV = y$. Складемо перше рівняння:

$$2(d_1x + d_2y) = ah_a.$$

Складемо друге рівняння: $2xy = ab$. Отже,

$$2d_1x^2 - ah_ax + abd_2 = 0.$$

Точка M поза трикутником

Маємо (рис. 56.2): $\frac{1}{2}d_2y - \frac{1}{2}d_1x = \frac{1}{4}a \cdot h_a$, або

$$2(d_2y - d_1x) = ah_a.$$

А також $2xy = ab$. Отже, $2d_1x^2 + ah_ax - abd_2 = 0$.

Задачу розв'язано, і тепер її можна сформулювати так: через дану точку провести рівноподільну даного трикутника.

Насолоджуйтесь!

Глава 57

ПРО ОДИН ЧУДОВИЙ ТРИКУТНИК І НЕРІВНІСТЬ РУДОЛЬФА УШАКОВА¹

Позначимо K_1 , K_2 , K_3 — точки дотику кола, вписаного в трикутник ABC (рис. 57.1).

У трикутника $K_1K_2K_3$ є деякі чудові властивості.

Властивість 1. Трикутник $W_1W_2W_3$ гомотетичний трикутнику $K_1K_2K_3$ з коефіцієнтом гомотетії $\frac{R}{r}$.

¹ Р. П. Ушаков — відомий український математик і педагог.

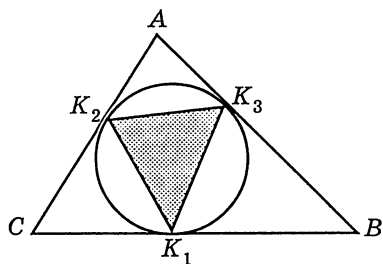


Рис. 57.1

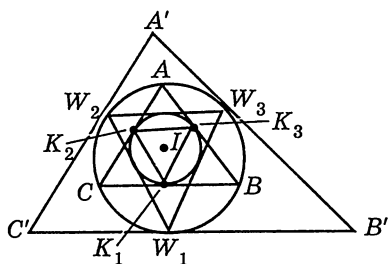


Рис. 57.2

● **Доведення.** Проведемо через точки W_1, W_2, W_3 дотичні до кола, описаного навколо трикутника ABC (рис. 57.2), отримаємо трикутник $A'B'C'$, гомотетичний трикутнику ABC , а образом трикутника $K_1K_2K_3$ буде трикутник $W_1W_2W_3$. Оскільки коло, описане навколо трикутника ABC , буде вписаним у трикутник $A'B'C'$, то коефіцієнт гомотетії $k = \frac{R}{r}$. ●

Властивість 2. Пряма OI є прямою Ейлера трикутника $K_1K_2K_3$.

● **Доведення.** Оскільки інцентр I є ортоцентром трикутника $W_1W_2W_3$, то пряма OI є прямою Ейлера цього трикутника, гомотетичного трикутнику $K_1K_2K_3$, отже, цій прямій належить точка I — образ точки O . ●

Властивість 3. Площу S_K трикутника $K_1K_2K_3$ можна обчислити за формулою: $S_K = \frac{pr^2}{2R}$.

● **Доведення.** Оскільки $S_{W_1W_2W_3} = R \cdot \frac{p}{2}$, а $K = \frac{r}{R}$, то

$$S_K = R \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{r^2}{R^2} = \frac{pr^2}{2R}. \quad \bullet$$

Властивість 4. Площу S трикутника ABC можна обчислити за формулою

$$S = 2\sqrt{S_W \cdot S_K} \quad (S_W = S_{W_1W_2W_3})$$

● **Доведення.** $S_W \cdot S_K = \frac{Rp}{2} \cdot \frac{pr^2}{2R} = \frac{S^2}{4}$,

звідки

$$S = 2\sqrt{S_W \cdot S_K}. \quad \bullet$$

Нерівність Рудольфа Ушакова

$$S_K \leq S_L,$$

де S_L — площа трикутника, вершини якого збігаються з основами бісектрис кутів трикутника ABC (бісектральний трикутник $L_1L_2L_3$).

● Доведення. Оскільки $S_L = \frac{2Sabc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$; $S_K = \frac{pr^2}{2R}$, то потрібно довести, що $\frac{2Sabc}{(a+b)(b+c)(a+c)} \geq \frac{pr^2}{2R}$.

Враховуючи, що $R = \frac{abc}{4S}$ і $S = rp$, маємо

$$\frac{8RS}{(a+b)(b+c)(a+c)} \geq \frac{r}{2R}.$$

Оскільки $(a+b)(b+c)(a+c) \leq \left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3$, то достатньо довести, що $\frac{8R \cdot S \cdot 27}{8 \cdot 8p^3} \geq \frac{r}{2R}$, $\frac{27R \cdot S}{8p^3} \geq \frac{r}{2R}$, $27R^2 \geq 4p^2$, або

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Доведемо цю нерівність. Відомо, що

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Доведемо спочатку, що

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq 1 + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

Далі доведемо, що

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3}{8} \sqrt{3}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)}{8}} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{8} \left(\frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{3} \right)^3} \leq \sqrt{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{27} \left(3 + \frac{3}{2} \right)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Тепер доведемо, що у трикутника ABC

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Маємо

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Нерівність $S_K \leq S_L$ доведено. ●

Глава 58

ВЛАСТИВОСТІ ВІДСТАНЕЙ ВІД ДОВІЛЬНОЇ ТОЧКИ КОЛА ДО ВЕРШИН ВПИСАНОГО КВАДРАТА Й ВПИСАНОГО ТРИКУТНИКА

Існує досить багато цікавих властивостей фіксованих точок кола: точки W_i , точки, симетричної до ортоцентру трикутника відносно його сторони, точки, діаметрально протилежної до вершини трикутника тощо. Коло — настільки своєрідна геометрична фігура, що навіть у його довільної точки є цікаві властивості.

Розглянемо довільну точку X кола і рівносторонній трикутник ABC , вписаний у це коло (рис. 58.1).

Властивість 1. $XA = XB + XC$.

● **Доведення. Перший спосіб.** Нехай ABC (рис. 58.1) рівносторонній трикутник, X — довільна точка кола. Відкладемо на відрізку AX відрізок AD , що дорівнює BX . Трикутники BXC і ADC рівні ($BX = AD$, $BC = AC$, $\angle XBC = \angle DAC$).

Отже, $DC = XC$. Оскільки $\angle DXC = \angle ABC = 60^\circ$, то трикутник DXC — рівносторонній і $XC = DX$, отже,

$$XA = AD + DX = XB + XC.$$

(Зазначимо, що, відклавши відрізок AD на відрізку AX , задачу можна розв'язати за допомогою повороту.)

Другий спосіб. Нехай O — центр кола, R — його радіус (рис. 58.2). Позначимо $\angle XOБ = \alpha$. Тоді $\angle AOX = 120^\circ + \alpha$, $\angle XOC = 120^\circ - \alpha$. Із трикутників AOX , BOX , XOC :

$$XA = 2R \sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right); \quad XB = 2R \sin \frac{\alpha}{2}; \quad XC = 2R \sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

$$XB + XC = 2R \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \right) = 2R \sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = XA.$$

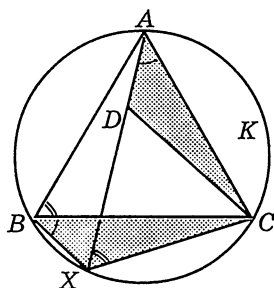


Рис. 58.1

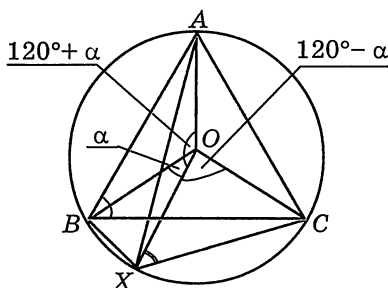


Рис. 58.2

Третій спосіб. Застосуємо теорему Птолемея до чотирикутника $ABXC$:

$$AX \cdot BC = AC \cdot BX + AB \cdot XC, \text{ або } XA = XB + XC. \bullet$$

Властивість 2. Сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин правильного вписаного трикутника стала і не залежить від розташування точки на колі.

● *Доведення. Перший спосіб.* $XA = t_1$, $XB = t_2$, $XC = t_3$.

Із $\triangle XBC$ (рис. 58.2) за теоремою косинусів:

$$a^2 = t_2^2 + t_3^2 - 2t_2t_3\cos 120^\circ, \text{ або } a^2 = t_2^2 + t_3^2 + t_2t_3.$$

За властивістю 1 маємо:

$$\begin{aligned} t_2^2 + t_3^2 + t_1^2 &= t_2^2 + t_3^2 + (t_2 + t_3)^2 = \\ &= \underbrace{t_2^2 + t_3^2 + t_2t_3}_{a^2} + \underbrace{t_2^2 + t_3^2 + t_2t_3}_{a^2} = a^2 + a^2 = 2a^2. \end{aligned}$$

Другий спосіб. Враховуючи **властивість 1 (другий спосіб)**, маємо:

$$\begin{aligned} XA^2 + XB^2 + XC^2 &= 4R^2 \left(\sin^2 \left(60^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \\ &= 4R^2 \cdot \frac{1 - \cos \alpha + 1 - \cos(120^\circ + \alpha) + 1 - \cos(120^\circ - \alpha)}{2} = \\ &= 4R^2 \cdot \frac{3 - \cos \alpha + \cos \alpha}{2} = 6R^2 = 2a^2. \end{aligned}$$

Третій спосіб (доведення за допомогою векторів). Можна показати (див. Кушнір І. А. Координатный и векторный методы решения задач. — К.: Астарт, 1996. — С. 339–340), що для довільного трикутника ABC

$$S(x) = XA^2 + XB^2 + XC^2 = 6R^2 + 2\overline{XO} \cdot \overline{OH}$$

(O — центр описаного кола, H — ортоцентр трикутника ABC).

Оскільки в рівносторонньому трикутнику $\overline{OH} = \overline{0}$, то $S(x) = 6R^2$, що доводить твердження задачі. ●

Розглянемо довільну точку X кола, вписаного в рівносторонній трикутник.

Властивість 3. Коло вписано в рівносторонній трикутник ABC , точка X — довільна точка кола. Сума квадратів відстаней від точки X до вершин трикутника ABC — величина стала.

● **Доведення.** *Перший спосіб.* Нехай I — центр кола (рис. 58.3), L, K, M — точки дотику зі сторонами трикутника, r — радіус кола. Квадрат довжини відрізка AX знайдемо з трикутника AKX за теоремою косинусів, враховуючи, що

$$KX = 2r \sin \alpha; \quad AK = r\sqrt{3}, \quad \text{де } \alpha = \angle AKX.$$

$$\text{Отже, } XA^2 = (r\sqrt{3})^2 + (2r \sin \alpha)^2 - 4\sqrt{3}r^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad \text{Отже,}$$

$$XA^2 = r^2(3 + 4 \sin^2 \alpha - 2\sqrt{3} \sin 2\alpha).$$

XC^2 знайдемо з трикутника LXC . Оскільки $\angle XLC = 120^\circ - \alpha$, а $LX = 2r \sin(120^\circ - \alpha)$ (із $\triangle XIL$), то

$$\begin{aligned} XC^2 &= 4r^2 \cdot \sin^2(120^\circ - \alpha) + 3r^2 - 4r \sin(120^\circ - \alpha) \cdot r\sqrt{3} \cos(120^\circ - \alpha) = \\ &= r^2(3 + 4 \sin^2(120^\circ - \alpha) - 4\sqrt{3} \cdot \sin(120^\circ - \alpha) \cdot \cos(120^\circ - \alpha)). \end{aligned}$$

Квадрат довжини відрізка XB знайдемо із трикутника XLB :

$$XB^2 = 3r^2 + 4r^2 \cdot \sin^2(120^\circ - \alpha) - 2 \cdot r\sqrt{3} \cdot 2r \sin(120^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha),$$

або

$$XB^2 = r^2(3 + 4 \sin^2(120^\circ - \alpha) - 4\sqrt{3} \sin(120^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha)).$$

Отже,

$$\begin{aligned} XA^2 + XB^2 + XC^2 &= r^2(9 + 4(\sin^2 \alpha + \sin^2(120^\circ - \alpha) + \sin^2(120^\circ - \alpha)) - \\ &- 4\sqrt{3}(\sin \alpha \cos \alpha + \sin(120^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha) + \sin(120^\circ - \alpha) \cos(120^\circ - \alpha))) = \\ &= r^2(9 + 4(\sin^2 \alpha + 2(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha)^2) - 4\sqrt{3}(\frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2}(\sin 180^\circ + \\ &+ \sin(60^\circ - 2\alpha)) + \frac{1}{2} \sin(240^\circ - 2\alpha))) = r^2(9 + 4(\sin^2 \alpha + \frac{3}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \\ &+ \sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha) - 2\sqrt{3}(\sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2\alpha)) = r^2(9 + 6 + 4\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha - 2\sqrt{3} \sin 2\alpha) = 15r^2. \end{aligned}$$

Другий спосіб. Скористаємося прямокутною системою координат у просторі (рис. 58.4).

Нехай вершини трикутника ABC мають координати $A(1; 0; 0)$; $B(0; 1; 0)$; $C(0; 0; 1)$ і $X(x; y; z)$ (X — довільна точка кола). Коло,

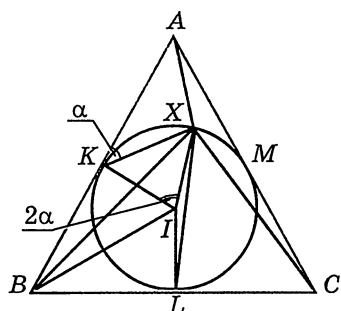


Рис. 58.3

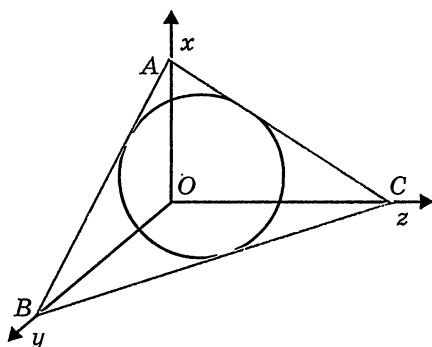


Рис. 58.4

вписане в трикутник ABC , є лінією перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = c_1$ і площини $x + y + z = c_2$.

Відповідно,

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y-1)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3c_1 - 2c_2 + 3 -$$

величина стала. ●

Далі розглянемо властивості точки кола, вписаної в квадрат або описаної навколо квадрата.

Властивість 4. Навколо квадрата описано коло. Сума квадратів відстаней від точки кола до вершин квадрата не залежить від вибору цієї точки. Знайти цю суму.

● *Доведення. Перший спосіб* (рис. 58.5). Позначимо $\angle AOX = \alpha$. Маємо:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 = 2R^2(1 - \cos\alpha) + 2R^2(1 - \cos(90^\circ - \alpha)) + 2R^2(1 - \cos(180^\circ - \alpha)) + 2R^2(1 - \cos(90^\circ + \alpha)) = 2R^2(4 - \cos\alpha - \sin\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha) = 8R^2.$$

Другий спосіб. Оскільки $\angle AXC = 90^\circ$, то з трикутника AXC $AX^2 + XC^2 = AC^2$. Аналогічно $BX^2 + XD^2 = BD^2$. Додамо ці рівності й отримаємо

$$AX^2 + BX^2 + XC^2 + XD^2 = AC^2 + BD^2 = 4a^2. \bullet$$

Властивість 5 (сума четвертих степенів відстаней). Квадрат $ABCD$ вписано в коло. Сума четвертих степенів відстаней від точки X кола до вершин квадратів стала.

● *Доведення.* Маємо

$$XA^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha;$$

$$XB^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(90^\circ - \alpha);$$

$$XC^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(180^\circ - \alpha);$$

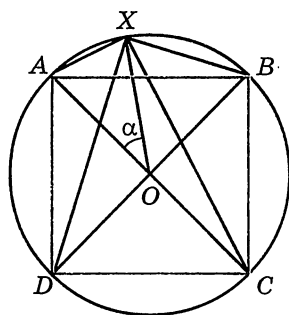


Рис. 58.5

$$XD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(90^\circ + \alpha).$$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрату, додамо нові рівності й отримаємо

$$XA^4 + XB^4 + XC^4 + XD^4 = 4R^4((1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha) + (1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha) + (1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha) + (1 + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha)) = 24R^4. \bullet$$

Розглянемо коло, вписане в квадрат.

Властивість 6. Сума квадратів відстаней від точки X кола до вершин описаного квадрата стала.

● **Доведення.** *Перший спосіб.* За теоремою косинусів із трикутника AXO (рис. 58.6):

$$XA^2 = 3r^2 - 2\sqrt{2}r^2 \cos\alpha$$

(r — радіус кола, $\alpha = \angle AOX$). Аналогічно:

$$XB^2 = 3r^2 - 2\sqrt{2}r^2 \cos(90^\circ - \alpha);$$

$$XC^2 = 3r^2 - 2\sqrt{2}r^2 \cos(180^\circ - \alpha);$$

$$XD^2 = 3r^2 - 2\sqrt{2}r^2 \cos(90^\circ + \alpha).$$

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 = r^2(12 - 2\sqrt{2}(\cos\alpha + \sin\alpha - \cos\alpha - \sin\alpha)) = 12r^2.$$

Другий спосіб (застосування векторів). Нехай O — центр квадрата.

$$\overline{XB} = \overline{OB} - \overline{OX}, \overline{XC} = \overline{OC} - \overline{OX}, \overline{XD} = \overline{OD} - \overline{OX}, \overline{XA} = \overline{OA} - \overline{OX}.$$

$$XB^2 + XC^2 + XD^2 + XA^2 = OB^2 + OC^2 + OD^2 + OA^2 + 4OX^2 -$$

$$- 2\overline{OX}(\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OA}) = 4OB^2 + 4OX^2 = 4\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4r^2 = 3a^2.$$

Третій спосіб (застосування векторів). Маємо (рис. 58.7):

$$\overline{AB} = \overline{XB} - \overline{XA}, \overline{BC} = \overline{XC} - \overline{XB}, \overline{CD} = \overline{XD} - \overline{XC}, \overline{DA} = \overline{XA} - \overline{XD}.$$

Далі

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4a^2 = 2(XB^2 + XA^2 + XC^2 + XD^2) - 2(\overline{XB} \cdot \overline{XA} + \overline{XC} \cdot \overline{XB} + \overline{XD} \cdot \overline{XC} + \overline{XA} \cdot \overline{XD}),$$

звідки

$$\begin{aligned} XB^2 + XC^2 + XC^2 + XD^2 &= 2a^2 + \overline{XB}(\overline{XA} + \overline{XC}) + \overline{XD}(\overline{XC} + \overline{XA}) = \\ &= 2a^2 + (\overline{XO} + \overline{OB} + \overline{XO} + \overline{OD})(\overline{XO} + \overline{OC} + \overline{XO} + \overline{OA}) = \\ &= 2a^2 + 4\overline{XO} \cdot \overline{XO} = 2a^2 + 4r^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. ●

Властивість 7 (сума квадратів добутків). Якщо коло вписане в квадрат $ABCD$, то $XA^2 \cdot XC^2 + XB^2 \cdot XD^2 = 10r^4$.

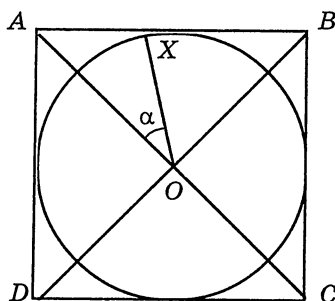


Рис. 58.6

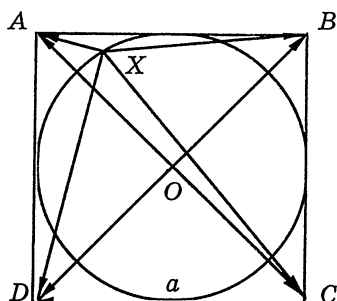


Рис. 58.7

● Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} XA^2 \cdot XC^2 + XB^2 \cdot XD^2 &= (3r^2 - 2\sqrt{2}r^2 \cos \alpha)(3r^2 + 2\sqrt{2}r^2 \cos \alpha) + \\ &+ (3r^2 - 2\sqrt{2}r^2 \sin \alpha)(3r^2 + 2\sqrt{2}r^2 \sin \alpha) = (9r^4 - 8r^4 \cos^2 \alpha) + \\ &+ (9r^4 - 8r^4 \sin^2 \alpha) = 18r^4 - 8r^4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 10r^4, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. ●

Глава 59

АРАМ ТУМАНЯН ПЕРЕМІГ АНГЛІЙЦІВ

Ця задача з'явилася на Олімпіаді в Англії у 1983 році (див. «Зарубежные математические олимпиады», М.: Наука, 1987). Ось її умова:

Нехай O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC , D — середина сторони AB , а E — точка перетину медіан трикутника ACD . Довести, що якщо $AB = AC$, то $OE \perp CD$.

Задача заінтригувала неймовірно простою умовою. Навіть не знаю, що може бути простіше, хіба що задача Штейнера-Лемуса.

Судячи з розв'язання, ні англійці, ні журі, ні учасники олімпіади не знайшли розв'язання за допомогою теорем класичної геометрії. Тому було запропоновано розв'язання за допомогою векторів.

● Із співвідношень (рис. 59.1):

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right),$$

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}),$$

ОБЕРНЕНІ ТЕОРЕМИ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

Нескінченна кількість співвідношень у прямокутному трикутнику не перестає дивувати. Цього разу ми розглянемо обернені теореми (задачі), багато з яких хоч і достатньо відомі, проте дуже цікаві. Зазначимо, що доведення для учнів можуть бути складними. Обернені теореми будемо розглядати як задачі для нетупокутних трикутників.

Задача 1 (обернена теорема Піфагора). Якщо в трикутнику ABC $c^2 = a^2 + b^2$, то трикутник ABC — прямокутний.

• Існує доведення, що базується на теоремі про квадрат сторони трикутника, що лежить навпроти гострого (тупого) кута.

Якщо припустити, що третя сторона лежить навпроти тупого (гострого) кута, то її квадрат має бути меншим (більшим) за суму квадратів двох інших сторін, що суперечить умові.

За допомогою теореми косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Оскільки $c^2 = a^2 + b^2$, то $2ab \cos C = 0$, або $\angle C = 90^\circ$.

Спосіб, який базується на рівності трикутників. Нехай сторони трикутника ABC перебувають у співвідношенні:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Доведемо, що цей трикутник прямокутний. Побудуємо прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ за двома катетами a і b . Нехай c_1 — його гіпотенуза. Тоді

$$a^2 + b^2 = c_1^2 = c^2.$$

Отримуємо $c_1 = c$. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ і $\angle C = 90^\circ$. •

Задача 2. Якщо $h^2 = mn$, то $\angle C = 90^\circ$.

• **Доведення. Перший спосіб.** Оскільки $h^2 = mn$, то $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$, а це означає, що трикутник CHB (рис. 60.1) подібний до трикутника AHC , отже,

$$\angle HCA = \angle HBC = \alpha, \angle HAC = \angle HCB = \beta.$$

Маємо

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ,$$

або $\alpha + \alpha = 90^\circ$, тобто $\angle C = 90^\circ$.

Другий спосіб. Маємо

$$h = ntgA; h = mtgB; h^2 = mntgA \cdot tgB,$$

$$tgA \cdot tgB = 1; tgA = ctgB,$$

отже, $A + B = 90^\circ$, відповідно

$$\angle C = 90^\circ. \bullet$$

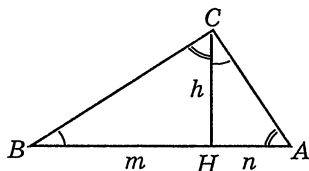


Рис. 60.1

Задача 3. Якщо $a = \sqrt{ct}$, то $\angle C = 90^\circ$. Довести.

● Доводиться аналогічно до попередньої задачі. ●

Задача 4. Якщо $m_c = \frac{1}{2}c$, то $\angle C = 90^\circ$. Довести.

● Доведення. Нехай $\angle M_3CA = \alpha$ (рис. 60.2). Тоді $\angle BM_3C = 2\alpha$, а $\angle BCM_3 = 90^\circ - \alpha$, $\angle C = 90^\circ$. ●

Задачу можна довести ще декількома способами, наприклад, «подвоївши» медіану.

Задача 5. Якщо $r = p - c$, то $\angle C = 90^\circ$. Довести.

● Доведення. Нехай коло з центром I вписано в трикутник ABC (рис. 60.3). Оскільки $CK_2 = p - c$, і за умовою $IK_2 = r = p - c$, отже, $\angleICK_2 = 45^\circ$, відповідно, $\angle C = 90^\circ$. ●

Задача 6. Якщо $r = \frac{a+b-c}{2}$, то $\angle C = 90^\circ$. Довести.

● Доведення виходить із задачі 5. ●

Задача 7. Якщо площі прямокутних трикутників співвідносяться як квадрати їхніх катетів, то ці трикутники подібні. Довести.

● Доведення. Нехай a_1 і a_2 — катети двох прямокутних трикутників. S_1 і S_2 — їхні площі. За умовою

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}.$$

Нехай b_1 і b_2 — також катети прямокутних трикутників, які ми розглядаємо. Маємо $\frac{a_1b_1}{a_2b_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$, або $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2}$, отже, ці трикутники подібні. ●

Задача 8. Якщо квадрати гіпотенуз двох прямокутних трикутників співвідносяться як площі цих трикутників, то вони подібні. Довести.

● Доведення. Нехай S_1 і S_2 — площі прямокутних трикутників з гострими кутами α_1 і α_2 , c_1 і c_2 — їхні гіпотенузи. Маємо

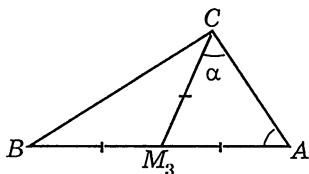


Рис. 60.2

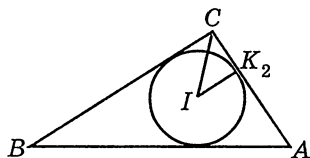


Рис. 60.3

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{c_1^2 \sin 2\alpha_1}{c_2^2 \sin 2\alpha_2} = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \text{ або } \frac{\sin 2\alpha_1}{\sin 2\alpha_2} = 1,$$

отже, $\alpha_1 = \alpha_2$, або $\alpha_1 = 90^\circ - \alpha_2$, що доводить твердження задачі. ●

Задача 9. Нехай r_a, r_b, r_c — радіуси зовнівписаних кіл, що дотикаються відповідно до сторін a, b і c трикутника ABC . Якщо виконується одна з умов:

1) $r_a = p - b$;

2) $r_b = p - a$;

3) $r_c = p$,

то трикутник ABC — прямокутний. Довести.

● **Доведення.** 1) Нехай зовнівписане коло дотикається до сторони BC трикутника ABC (рис. 60.4). Нехай T_1 і T_2 — точки дотику цього кола зі стороною BC і продовженням сторони AC . Оскільки $CT_2 = p - b = r_a$ (за умовою), то чотирикутник $CT_1 I_a T_2$ — квадрат, а отже, $\angle ACB = 90^\circ$. Пункти 2) і 3) доводяться аналогічно. ●

Проведемо висоту CH_3

Задача 10. Нехай r_1, r_2, r — радіуси кіл, вписаних у трикутник ACH_3, BCH_3 і ABC . Довести, що якщо $r_1 + r_2 + r = h_c$, то $\angle C = 90^\circ$.

● **Доведення.** Нехай p_1 і p_2 — півпериметри трикутників ACH_3 і BCH_3 (рис. 60.5). Оскільки ці трикутники прямокутні, то маємо

$$p_1 - b + p_2 - a + r = h_c,$$

або

$$\frac{h_c + m + b}{2} + \frac{h_c + n + a}{2} - a - b + r = h_c,$$

або $r = \frac{a + b - c}{2}$, отже, $\angle C = 90^\circ$. ●

Задача 11. Довести, що якщо $R_1^2 + R_2^2 = R^2$, то $\angle C = 90^\circ$, де R, R_1 і R_2 — радіуси описаних навколо трикутників ABC, ACH_3 і BCH_3 кіл.

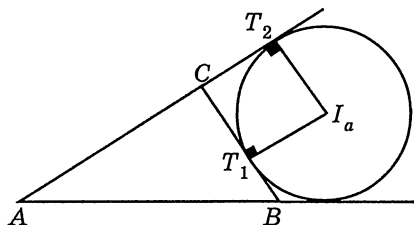


Рис. 60.4

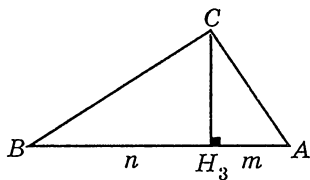


Рис. 60.5

● Доведення. Маємо $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = R^2$, або

$$\sin^2 A + \sin^2 B = 1, \text{ або } \sin^2 A = \cos^2 B = \sin^2(90^\circ - B).$$

Отже, $\angle A = 90^\circ - \angle B$ (A і B — гострі кути), відповідно, $\angle C = 90^\circ$. ●

Задача 12. Довести, що якщо $h_1^2 + h_2^2 = h_c^2$, то $\angle C = 90^\circ$ (h_1 і h_2 — висоти трикутників AH_3C і BH_3C).

● Доведення. Перший спосіб. Нехай $H_3F = h_1$, $H_3E = h_2$ (рис. 60.6). Із $\triangle CEH_3$:

$$CE^2 = h_c^2 - h_2^2 = h_1^2 + h_2^2 - h_2^2 = h_1^2,$$

отже, $CE = h_1$, тобто чотирикутник CFH_3E — прямокутник і $\angle C = 90^\circ$.

Другий спосіб. Нехай $\angle ACH_3 = \alpha$, $\angle BCH_3 = \beta$. Тоді $h_1 = h_c \sin \alpha$; $h_2 = h_c \sin \beta$. Враховуючи умову, маємо

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1,$$

тоді $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$, звідки $\alpha + \beta = 90^\circ$. Відповідно, $\angle C = 90^\circ$. ●

Задача 13. Довести, що якщо $m_1^2 + m_2^2 = m_c^2$, то $\angle C = 90^\circ$ (m_1 і m_2 — медіани трикутників ACH_3 і BCH_3 , проведені з вершини H_3).

● Доведення. Перший спосіб. Очевидно, що

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = m_c^2.$$

Але за формулою медіани $4m_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$. Маємо

$$a^2 + b^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2, \text{ або } a^2 + b^2 = c^2,$$

а це означає, що $\angle C = 90^\circ$.

Другий спосіб. Нехай M_1 , M_2 , M_3 — середини сторін трикутника ABC (рис. 60.7). Оскільки

$$m_1 = \frac{1}{2} AC, \text{ то } M_3M_1 = \frac{1}{2} AC = m_1.$$

Аналогічно $M_3M_2 = m_2$. За умовою

$$m_1^2 + m_2^2 = m_c^2,$$

відповідно, $M_3M_1^2 + M_3M_2^2 = CM_3^2$, і трикутник CM_3M_2 — прямокутний ($CM_2 = M_1M_3$), отже, чотирикутник $M_3M_1CM_2$ — прямокутник, і $\angle C = 90^\circ$. ●

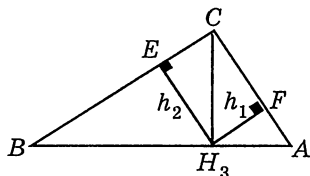


Рис. 60.6

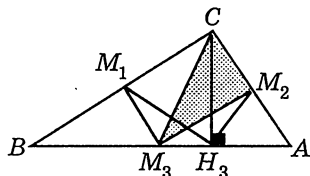


Рис. 60.7

Задача 14 (другі медіани). Якщо $(m_1')^2 + (m_2')^2 = m_a^2$, то $\angle C = 90^\circ$, де m_1' і m_2' — медіани трикутників AH_3C і BH_3C , проведені з вершин A і C . Довести.

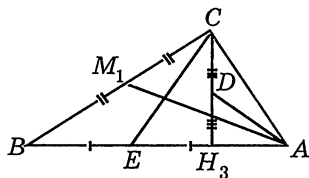


Рис. 60.8

● **Доведення.** Нехай AD і CE — медіани m_1' і m_2' (рис. 60.8). Маємо

$$CE^2 + AD^2 = AM_1^2. \quad (1)$$

Позначимо $AH_3 = n$; $BH_3 = m$. Тоді з (1), скориставшись формулою медіани, отримаємо

$$2(a^2 + h_c^2) - m^2 + 2(b^2 + n^2) - h_c^2 = 2(c^2 + b^2) - a^2. \quad (2)$$

Після спрощень: $3a^2 - 2c^2 + h_c^2 - m^2 + 2n^2 = 0$. За теоремою Піфагора із трикутників BH_3C і AH_3C :

$$3a^2 - 2c^2 + h_c^2 - (a^2 - h_c^2) + 2(b^2 - h_c^2) = 0,$$

або $a^2 + b^2 = c^2$, тобто $\angle C = 90^\circ$. ●

Задача 15. Довести, що якщо $\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, то $\angle C = 90^\circ$.

● **Доведення.** Задану рівність перепишемо так:

$$a^2 b^2 = (a^2 + b^2) h_c^2,$$

або $\frac{4S^2}{\sin^2 C} = \frac{(a^2 + b^2) \cdot 4S^2}{c^2}$, звідки $\sin^2 A + \sin^2 B = 1$, або $\sin^2 A = \cos^2 B$, а це означає, що $\angle C = 90^\circ$. ●

Проблемно: якщо $l_1^2 + l_2^2 = l_c^2$, то $\angle C = 90^\circ$ (l_1 і l_2 — бісектриси прямих кутів трикутників AH_3C і BH_3C). Довести або спростувати.

Глава 61

ДУЕЛЬ НА М'ЯСОРУБКАХ, АБО ЧИЙ СПОСІБ КРАЩИЙ

У січні 2005 року в газеті «Математика» було опубліковано «Завдання олімпіади VII Всеукраїнського турніру юних математиків». Геометрична задача, як кажуть, «зачепила».

У трикутнику ABC проведено бісектриси BL і AK . Відомо, що KL — бісектриса кута AKC . Знайти величину кута BAC в градусах.

Вирішили запропонувати її «олімпіадним бійцям» Русанівського ліцею. Перше розв'язання не забарилося.

● Оскільки KL — бісектриса кута AKC (рис. 61.1), то

$$\frac{AL}{CL} = \frac{AK}{CK}. \quad (1)$$

Нехай a, b, c — довжини сторін трикутника, а $\angle CAK = \alpha$. Тоді

$$CK = \frac{ab}{b+c}; \quad AK = l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \alpha.$$

Отже, вираз (1) можна задисати, скориставшись властивістю бісектриси кута ABC : $\frac{c}{a} = \frac{2bc \cos \alpha \cdot (b+c)}{(b+c) \cdot ab}$, або $2c \cos \alpha = c$, звідки

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \text{ тоді } \angle A = 2\alpha = 120^\circ.$$

Незабаром отримали інше розв'язання. Швидше за все, саме на нього і розраховували автори завдання: розглянемо трикутник ABK ; в ньому BL — бісектриса внутрішнього кута CBA , а KL — бісектриса зовнішнього кута CKA , отже, AC — бісектриса зовнішнього кута KAN і розгорнений кут BAN складається з трьох рівних кутів, два з яких складають кут A , тобто $\angle A = 120^\circ$. ●

Після розв'язання рисунок 61.1 варто було би переробити, накресливши кут BAC тупим. Але не в тім річ. Постало запитання: а чий спосіб кращий?

Прихильники першого способу визнавали, що він не такий уже й витончений, на відміну від другого, але задача розв'язалася миттєво — і тут неможливо було заперечити, адже всі бачили і переконалися.

Одні учні вважали використання формули бісектриси «важкою зброєю», інші наполягали, що важлива ерудиція й знання формул. Противники першого способу докоряли застосуванням тригонометрії і навіть «зазіхнули» на повношення олімпіадного журі: «А якщо задачу дати восьми-класнику?». Восьмикласники не знають формули

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}.$$

Суперечка посилювалася. Досить вагомим аргументом була складність використання властивості точки, в якій перетинаються бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів.

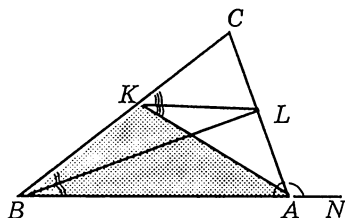


Рис. 61.1

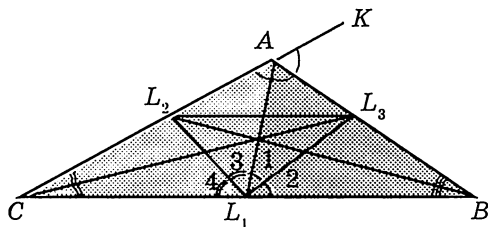


Рис. 61.2

Гадаю, що суперечка виникла через те, що на теорему про перетин внутрішньої і зовнішньої бісектрис трикутника (далі називатимемо її «теоремою двох бісектрис») не звертали стільки уваги, як, скажімо, на теорему «трилисника». Зазначимо, що саме за допомогою цієї теореми розв'язуються досить цікаві задачі (див. Повернення втраченої геометрії. — К.: Факт, 2000. — С. 30). До речі, серед згаданих задач є задача, яка стала предметом суперечки, і оригінальне доведення формули $S = R \cdot P_H$. На завершення наведемо розв'язання знаменитої задачі Шебаршина. З іншими способами шановний читач зможе ознайомитися у цій же книзі.

Отже, доведемо, що якщо у трикутнику ABC кут A дорівнює 120° , то кут $L_2L_1L_3$ прямий (L_1, L_2, L_3 — точки перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника з відповідними сторонами). Оскільки $\angle BAC = 120^\circ$, то $\angle L_1AB = \angle BAK$ (рис. 61.2), отже AL_3 належить бісектрисі кута L_1AK , тобто є бісектрисою зовнішнього кута при вершині A трикутника AL_1C . Перетин бісектрис кутів ACB і KAL_1 дасть точку L_3 , отже, L_1L_3 — бісектриса кута AL_1B : $\angle 1 = \angle 2$. Аналогічно $\angle 3 = \angle 4$, звідки $\angle 3 + \angle 1 = 90^\circ$.

Здавалося, «суперечці» кінець. Як тут... знову запитання?

А як розв'язати *обернену* задачу: якщо $\angle L_2L_1L_3 = 90^\circ$, то $\angle BAC = 120^\circ$? Здається, застосувати «теорему двох бісектрис» не вийде?! Можливо, тоді перший спосіб? А можливо, і обернена задача неправильна? Принаймні, вона мені не зустрічалася не часто. Відповідь на запитання читач знайде в книзі «Трикутник і тетраедр в задачах» (розділ «Бісектральний трикутник»). Дуель за пріоритет способу не буде закінчено, оскільки вона не потрібна взагалі. Тому і названо її «дуеллю на м'ясорубках». Виграє тут не той, хто доведе, чий спосіб кращий, а той, хто знатиме обидва способи! І навіть більше...

Глава 62

СЕМИКЛАСНИКУ, ЯКИЙ ХОЧЕ ЗНАТИ ГЕОМЕТРІЮ. ІГРИ З ТОЧКАМИ В ПЕДАЛЬНИХ І АНТИПЕДАЛЬНИХ ТРИКУТНИКАХ

Усі хочуть. Усі хочуть знати. І бажано — не докладаючи зусиль. Не вийде! Ця глава посиљна для семикласника. Як гора... А задоволення — наприкінці шляху. На вершині!

Нехай довільна точка X розташована всередині нетупокутного трикутника ABC (рис. 62.1).

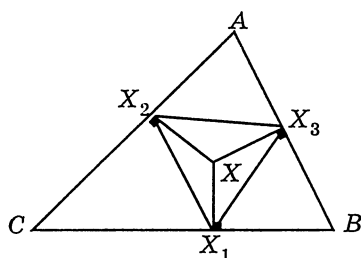


Рис. 62.1

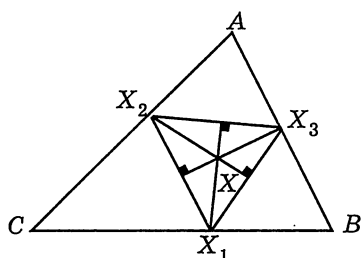


Рис. 62.2

Точки X_1, X_2, X_3 — проєкції точки X на сторони BC, AC, AB . Трикутник $X_1X_2X_3$ називається *педальним*. Трикутники $AX_2X_3, BX_3X_1, CX_1X_2$ назвемо *антипедальними*¹.

Розглянемо задачі з точкою X і чудовими точками трикутника. Для всіх задач правильною буде обернена теорема.

Задача 1. Якщо точка X збігається з ортоцентром трикутника $X_1X_2X_3$, то вона є центром кола, описаного навколо трикутника ABC ($H_X \equiv O_{ABC}$).

● **Доведення.** Оскільки точка X — ортоцентр трикутника $X_1X_2X_3$ (рис. 62.2), то сторони цього трикутника паралельні до відповідних сторін трикутника ABC , а чотирикутники $AX_2X_1X_3, BX_1X_2X_3, CX_2X_3X_1$ — паралелограми, й відрізки XX_1, XX_2, XX_3 належать серединним перпендикулярам до сторін BC, AC, AB . Отже, точка X є центром кола, описаного навколо трикутника ABC . ●

Задача 2. Довести, що якщо ортоцентри антипедальних трикутників належать колу, описаному навколо трикутника $X_1X_2X_3$, то точка X збігається з ортоцентром трикутника $X_1X_2X_3$ ($X \equiv H_X$).

● **Доведення.** Позначимо H_X і H_1 — ортоцентри трикутників $X_1X_2X_3$ і AX_2X_3 , $\angle X_2XX_3 = \alpha$, $\angle X_1XX_2 = \beta$, $\angle X_1XX_3 = \gamma$ (рис. 62.3). Оскільки $\angle X_2H_1X_3 = 180^\circ - \angle A$, а чотирикутник $H_1X_2X_1X_3$ вписано в коло, то $\angle X_2X_1X_3 = \angle A$. Аналогічно, $\angle X_1X_2X_3 = \angle B$, $\angle X_1X_3X_2 = \angle C$. Оскільки чотирикутник AX_3XX_2 вписано в коло, то $\alpha = 180^\circ - \angle A$.

Аналогічно

$$\beta = 180^\circ - \angle B, \gamma = 180^\circ - \angle C.$$

Сегменти, які містять кути α, β, γ і побудовані на сторонах трикутника $X_1X_2X_3$, перетинаються в єдиній точці X . Але єдиним є ортоцентр H_X , із якого ці ж сторони видно під кутами

$$180^\circ - \angle A, 180^\circ - \angle B, 180^\circ - \angle C.$$

Отже, точки X і H_X збігаються. ●

¹ Назви, як і задачі, авторські.

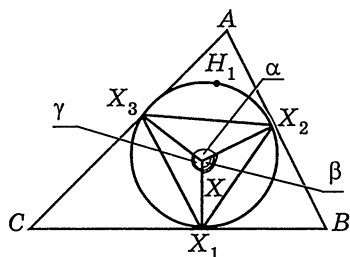


Рис. 62.3

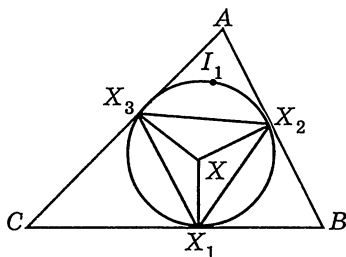


Рис. 62.4

Задача 3. Якщо точка X збігається з центром O_X кола, описаного навколо трикутника $X_1X_2X_3$, то вона є інцентром трикутника ABC ($O_X \equiv I_{ABC}$).

• **Доведення.** Дійсно, в такому випадку $XX_1 = XX_2 = XX_3 = r$ (r — радіус кола, вписаного в трикутник ABC), що і доводить твердження задачі. •

Задача 4. Довести, що якщо інцентри антипедальних трикутників належать колу, описаному навколо педального трикутника, то точка X є центром цього кола.

• **Доведення.** Позначимо I_1 — центр кола, вписаного в трикутник AX_2X_3 (рис. 62.4). Оскільки

$$\angle X_2I_1X_3 = 90^\circ + \frac{A}{2},$$

то $\angle X_2X_1X_3 = 180^\circ - \angle X_2I_1X_3 = 90^\circ - \frac{A}{2}$.

Оскільки $\angle X_2XX_3 = 180^\circ - A$, то

$$\angle X_2XX_3 = 2\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = 2\angle X_2X_1X_3,$$

аналогічно $\angle X_1XX_2 = 2\angle X_1X_3X_2$ і $\angle X_1XX_3 = 2\angle X_1X_2X_3$, тому точка X — центр кола, описаного навколо трикутника $X_1X_2X_3$. •

Задача 5. Якщо точка X — інцентр педального трикутника, то вона збігається з ортоцентром трикутника ABC .

• **Доведення.** Доведемо, що точки A, X, X_1 належать одній прямій, або $\angle X_2XX_1 + \angle X_2XA = 180^\circ$.

Опишемо кола навколо чотирикутників XX_1BX_3 , XX_1CX_2 , X_3XX_2A (рис. 62.5). Доведемо рівність кутів, позначених рівними дугами на цьому рисунку. Наприклад,

$$\angle XBX_3 = \angle XX_1X_3 = \angle XX_1X_2 = \angle XCX_2.$$

Дійсно, навколо чотирикутника X_3XX_1B можна описати коло, отже, $\angle X_3BX = \angle X_3X_1X$.

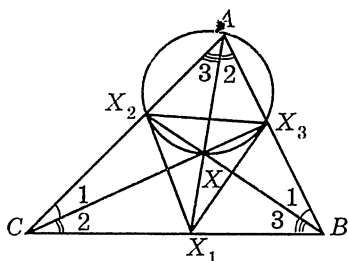


Рис. 62.5

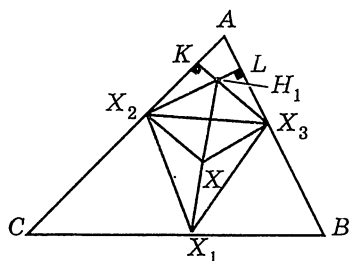


Рис. 62.6

Далі: $\angle X_3X_1X = \angle XX_1X_2$ (за умовою). Навколо чотирикутника XX_1CX_2 також можна описати коло, і тому $\angle XX_1X_2 = \angle X_3CX_2$. У чотирикутнику XX_2CX_1 маємо:

$$\angle X_2XX_1 + \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ.$$

У трикутнику XX_2A кут при вершині X_2 дорівнює 90° . Тоді $\angle 3 + \angle X_2XA = 90^\circ$. Із двох останніх рівностей отримуємо

$$\angle X_2XX_1 + \angle X_2XA + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 270^\circ. \quad (1)$$

Враховуючи, що $2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = A + B + C = 180^\circ$, із рівності (1) отримаємо $\angle X_2XX_1 + \angle X_2XA = 180^\circ$. ●

Задача 6. Довести, що точки, симетричні точці X відносно середин сторін трикутника $X_1X_2X_3$, є ортоцентрами антипедальних трикутників.

● **Доведення.** Позначимо H_1 — ортоцентр трикутника AX_2X_3 , K і L — основи висот, проведених з вершин X_3 і X_2 (рис. 62.6). Тоді чотирикутник $XX_2H_1X_3$ — паралелограм, отже, правильною буде і обернена теорема. ●

Задача 7. Довести, що якщо центри кіл, описаних навколо антипедальних трикутників, належать колу, описаному навколо педального трикутника $X_1X_2X_3$, то точка X збігається з інцентром педального трикутника.

● **Доведення.** Доведемо, що $\angle BXC = 180^\circ - \angle A$. Дійсно (рис. 62.7),

$$\begin{aligned} \angle BXC &= 180^\circ - (\angle XBC + \angle XCB) = 180^\circ - (B - \angle XBX_3 + C - \angle XCX_2) = \\ &= 180^\circ - (180^\circ - A - (\angle XX_1X_3 + \angle XX_1X_2)) = 180^\circ - (180^\circ - A - \angle X_2X_1X_3). \end{aligned}$$

Оскільки чотирикутник $X_2O_1X_3X_1$ вписано в коло, то $\angle X_2X_1X_3 = 180^\circ - \angle X_2O_1X_3 = 180^\circ - 2A$, отже,

$$\angle BXC = 180^\circ - (180^\circ - A - 180^\circ + 2A) = 180^\circ - A.$$

Отже, точка X збігається з ортоцентром трикутника ABC , і ця точка — центр кола, вписаного в трикутник $X_1X_2X_3$ (інцентр). ●

Задача 8. Довести, що якщо точки, симетричні з центром кола, вписаним у трикутник $X_1X_2X_3$, відносно середин сторін

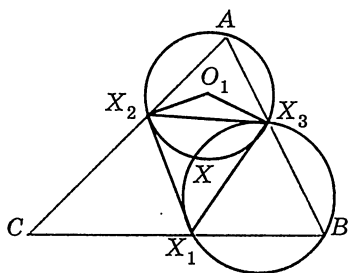


Рис. 62.7

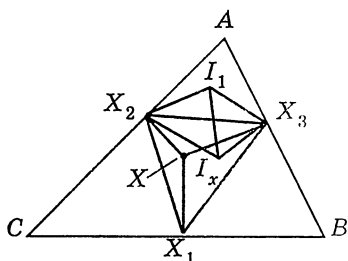


Рис. 62.8

цього трикутника, збігаються з інцентрами антипедальних трикутників, то точка X — ортоцентр педального трикутника $X_1X_2X_3$.

● **Доведення.** Позначимо I_X, I_1 відповідно інцентри трикутників $X_1X_2X_3$ і AX_2X_3 (рис. 62.8). Покажемо, що кути трикутника $X_1X_2X_3$ дорівнюють A, B і C . Дійсно,

$$\angle X_2I_XX_3 = \angle X_2I_1X_3 = 90^\circ + \frac{A}{2}.$$

Але $\angle X_2I_XX_3 = 90^\circ + \frac{\angle X_2X_1X_3}{2}$, отже,

$$90^\circ + \frac{A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle X_2X_1X_3}{2},$$

звідки $\angle X_2X_1X_3 = A$, отже, $\angle X_1X_2X_3 = B$, $\angle X_2X_3X_1 = C$. Але $\angle X_2XX_3 = 180^\circ - A$. А це означає, що $X \equiv H_X$. ●

Задача 9. Довести, що якщо точки, симетричні ортоцентр педального трикутника $X_1X_2X_3$ відносно середин його сторін, є інцентрами антипедальних трикутників, то точка X збігається з центром кола, описаним навколо педального трикутника.

● **Доведення.** Для доведення використаємо рис. 62.8, тільки замість I_X буде точка H_X — ортоцентр $\Delta X_1X_2X_3$. За умовою

$\angle X_2H_XX_3 = \angle X_2I_1X_3$, тоді, $180^\circ - \angle X_2X_1X_3 = 90^\circ + \frac{A}{2}$, звідки

$\angle X_2X_1X_3 = 90^\circ - \frac{A}{2}$. Оскільки $\angle X_2XX_3 = 180^\circ - A$, то $\angle X_2XX_3 = 2 \cdot \angle X_2X_1X_3$, отже, твердження задачі доведено. ●

Задача 10. В антипедальних трикутниках проведено висоти з вершин A, B і C . Довести, що їх продовження перетинаються в одній точці.

● **Доведення.** Опишемо навколо чотирикутника AX_2XX_3 (рис. 62.9). Діаметр AX ізогональний з висотою AP трикутника

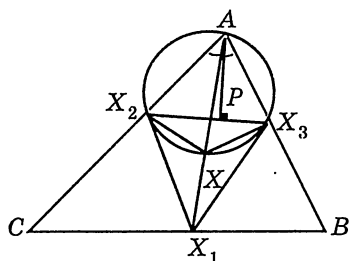


Рис. 62.9

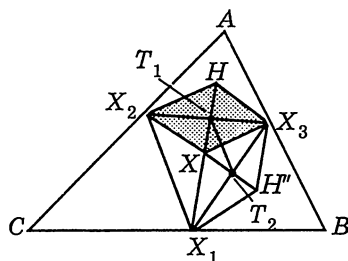


Рис. 62.10

AX_2X_3 . Оскільки для діаметрів кіл, описаних навколо ізогональних трикутників, точка X — спільна, то твердження задачі доведено. ●

Задача 11 (вражає!). Нехай H', H'', H''' — ортоцентри антипедальних трикутників. Довести, що трикутник $H'H''H'''$ дорівнює педальному трикутнику $X_1X_2X_3$.

● Доведення. Оскільки $XX_2H'X_3$ паралелограм, то $H'T_1 = T_1X$ (T_1 — точка перетину діагоналей цього паралелограма) (рис. 62.10). Оскільки $XX_3H''X_1$ — паралелограм, то

$$H''T_2 = T_2X.$$

У трикутнику $XH'H''$ T_1T_2 — середня лінія, тоді $H'H'' = 2T_1T_2$. Але в трикутнику $X_1X_2X_3$ T_1T_2 — також середня лінія, тому $2T_1T_2 = X_1X_2$. Отже, $H'H'' = X_1X_2$. Аналогічно доводиться, що $H'H''' = X_1X_3$, $H''H''' = X_2X_3$, відповідно, $\Delta H'H''H''' = \Delta X_1X_2X_3$. ●

Глава 63

ІМПРОВІЗАЦІЯ З ПАРАЛЕЛЯМИ

Геометрична ситуація, про яку йтиметься далі, асоціюється у мене з джазом. Як у джазі імпровізація сягає вершин виразності й віртуозності, так і геометрія завдяки імпровізації може подарувати незрівнянні миті захоплення і радості.

Починалося все, очевидно, так...

Задача 1. На стороні BC трикутника ABC взяли довільну точку X . Через цю точку провели прямі, паралельні до сторін AB і AC . Ці прямі перетинають AC і AB в точках D і E відповідно. Площі трикутників XEB і XDC рівні, відповідно, S_1 і S_2 . Знайти площу трикутника ABC .

● Нехай $XB = m$; $XC = n$ (рис. 63.1). Оскільки трикутники EXB , DCX і ACB подібні, то

$$\frac{S_1}{S} = \frac{m^2}{a^2}; \quad \frac{S_2}{S} = \frac{n^2}{a^2}$$

(S — площа трикутника ABC , $a = BC$). Звідси

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{m+n}{a} = 1,$$

або $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$, відповідно, $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. •

Потім точку X «підняли» всередину трикутника і отримали нову задачу.

Задача 2. Через точку X , що лежить всередині трикутника ABC , проведено прямі, паралельні до сторін. Ці прямі утворюють зі сторонами три трикутники, площі яких S_1, S_2, S_3 . Знайти площу трикутника ABC .

• Нехай сторона BC ділиться на частини, що дорівнюють k, m, n (рис. 63.2), тобто $k + m + n = BC = a$. Оскільки трикутники з площами S_1, S_2, S_3 подібні до трикутника ABC , то

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{m}{a}; \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{k}{a}; \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{n}{a},$$

звідки $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$, $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. •

Задача 3. Позначимо t_1, t_2, t_3 спільні сторони кожного з «маленьких» трикутників з відповідною стороною трикутника ABC . Довести, що $\frac{t_1}{a} + \frac{t_2}{b} + \frac{t_3}{c} = 1$.

• Трикутник XKE подібний до трикутника ABC (рис. 63.3), отже, $\frac{t_1}{a} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$. Аналогічно $\frac{t_2}{b} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$; $\frac{t_3}{c} = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}$. Відповідно,

$$\frac{t_1}{a} + \frac{t_2}{b} + \frac{t_3}{c} = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = 1. \bullet$$

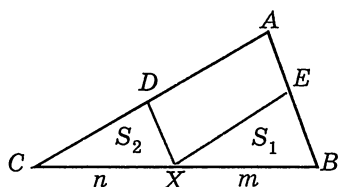


Рис. 63.1

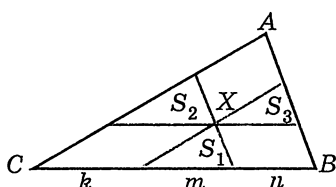


Рис. 63.2

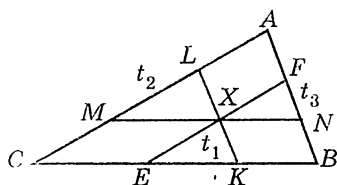


Рис. 63.3

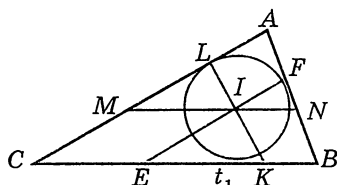


Рис. 63.4

Задача 4. Якщо точка X збігається з інцентром I , то

$$t_1 : t_2 : t_3 = a^2 : b^2 : c^2.$$

● **Доведення.** Нехай r — радіус вписаного кола (рис. 63.4):

$$\frac{EK}{BC} = \frac{t_1}{a} = \frac{r}{h_a}. \text{ Але } \frac{r}{h_a} = \frac{r \cdot a}{2S} = \frac{r \cdot a}{2r \cdot p} = \frac{a}{2p}. \text{ Отже, } \frac{t_1}{a} = \frac{a}{2p}, \text{ звідки}$$

$$t_1 = \frac{a^2}{2p}. \text{ Аналогічно, } t_2 = \frac{b^2}{2p}; \quad t_3 = \frac{c^2}{2p}. \text{ Отже,}$$

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{a^2}{2p} : \frac{b^2}{2p} : \frac{c^2}{2p} = a^2 : b^2 : c^2. \bullet$$

Задача 5. У даній конфігурації розгляньте три паралелограми $ALXF$, $BNXK$, $CEXM$ (рис. 63.5). Довести, що добуток площ паралелограмів у вісім разів більший за добуток площ трикутників EKK , LXM , FXN .

● **Доведення.** Позначимо площі паралелограмів Q_1, Q_2, Q_3 , а трикутників — S_1, S_2, S_3 (рис. 63.5). Нехай пряма, паралельна до BC , перетинає сторони AC і AB в точках M і N відповідно. Розглянемо трикутник AMN . Враховуючи задачу 1, маємо

$$S_{AMN} = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2, \text{ звідки}$$

$$Q_1 = S_{AMN} - S_2 - S_3 = 2\sqrt{S_2 S_3}.$$

$$\text{Аналогічно, } Q_2 = 2\sqrt{S_1 S_3}; \quad Q_3 = 2\sqrt{S_1 S_2}. \text{ Відповідно,}$$

$$Q_1 Q_2 Q_3 = 8 S_1 S_2 S_3. \bullet$$

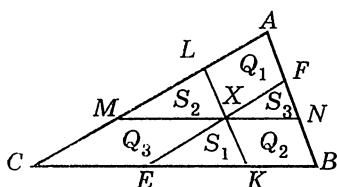


Рис. 63.5

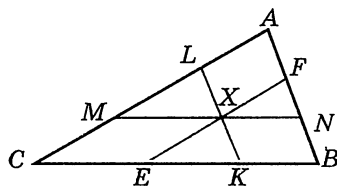


Рис. 63.6

Задача 6. Довести, що $l = l_1 + l_2 + l_3$, де l — деякий лінійний елемент у трикутнику ABC , l_1, l_2, l_3 — відповідно лінійні елементи в трикутниках з площами S_1, S_2, S_3 .

• **Доведення.** Маємо $\frac{l_1}{l} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$; $\frac{l_2}{l} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$; $\frac{l_3}{l} = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}$, отже,

$$\frac{l_1 + l_2 + l_3}{l} = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = 1, \text{ звідки } l_1 + l_2 + l_3 = l. \bullet$$

Відрізки a_1, b_1, c_1

Відрізки MN, EF і KL , паралельні до сторін трикутника ABC , перетинають його сторони (рис. 63.6). Позначимо їх a_1, b_1, c_1 .

Задача 7. Довести співвідношення $\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 2$.

• **Доведення.** *Перший спосіб.* Нехай $CE = k, EK = m, BK = n$. Тоді $MX = k, NX = n$, тобто $a_1 = k + n$. Із подібності трикутників

BEF і BCA маємо: $\frac{b_1}{b} = \frac{m+n}{a}$. Аналогічно, $\frac{c_1}{c} = \frac{k+m}{a}$. Відповідно,

маємо:

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = \frac{k+n}{a} + \frac{m+n}{a} + \frac{k+m}{a} = \frac{2(k+m+n)}{a} = 2.$$

Другий спосіб. За першою задачею $S_{AMN} = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. Отже,

$$\frac{MN}{a} = \frac{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}. \text{ Аналогічно } \frac{EF}{b} = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}; \frac{LK}{c} = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}.$$

$$\text{Маємо: } \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = \frac{2(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})}{\sqrt{S}} = 2.$$

Третій спосіб (теорема Жергона). Нехай три відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в точці X (рис. 63.7). Маємо співвідношення (теорема Жергона):

$$\frac{AX}{AA_1} + \frac{BX}{BB_1} + \frac{CX}{CC_1} = 2.$$

У нашому випадку (рис. 63.8): $\frac{MN}{BC} = \frac{AX}{AA_1}$.

$$\text{Отже, } \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = \frac{AX}{AA_1} + \frac{BX}{BB_1} + \frac{CX}{CC_1} = 2. \bullet$$

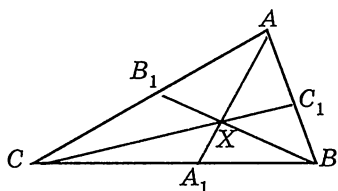


Рис. 63.7

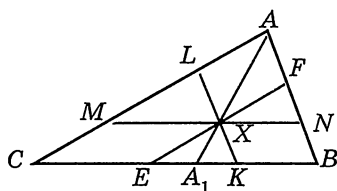


Рис. 63.8

Задача 8. Довести, що сума периметрів трикутників AMN , BEF , CLK дорівнює подвоєному периметру трикутника ABC .

● **Доведення.** $\frac{MN}{a} = \frac{p_1}{p}$ (p_1 — периметр трикутника AMN).

Позначимо p_2 і p_3 — периметри трикутників BEF , CLK . Тоді

$$\frac{MN}{a} + \frac{EF}{b} + \frac{LK}{c} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{p} = 2, \text{ або } p_1 + p_2 + p_3 = 2p, \text{ що й потрібно}$$

було довести. ●

Задача 9. Позначимо відрізки, на які розбито сторони трикутника ABC , заданими прямими так, як показано на рисунку 63.9. Довести, що $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2 = a_3 b_3 c_3$.

● **Доведення.** Трикутники XML , KEX і NXF подібні, тому

$$\frac{XE}{ML} = \frac{EK}{XM}; \frac{FN}{XL} = \frac{XN}{XM}, \text{ тобто } \frac{b_3}{b_2} = \frac{a_2}{a_1}; \frac{c_2}{c_3} = \frac{a_3}{a_1}.$$
 Відповідно,

$$\frac{a_3 c_3}{c_2} = a_1 = \frac{a_2 b_2}{b_3}, \text{ звідки } a_2 b_2 c_2 = a_3 b_3 c_3. \text{ Аналогічно покажемо, що}$$

$$a_1 b_1 c_1 = a_3 b_3 c_3, \text{ отже, твердження задачі доведено. } \bullet$$

Задача 10. Нехай точка X є центроїдом трикутника ABC . Довести, що:

- 1) кожна сторона трикутника розбивається заданими прямими на три рівні частини;
- 2) відрізки прямих, що лежать всередині трикутника, точкою X діляться навпіл;
- 3) трикутники, утворені прямими й сторонами, рівні між собою.

● **Доведення.** Оскільки за умовою відрізок AX лежить на медіані до сторони BC , а $MN \parallel BC$, то $MX = XN$, отже,

$$a_1 = a_3. \quad (1)$$

Відповідно, друге твердження доведено. Але точка X — центроїд трикутника, тому

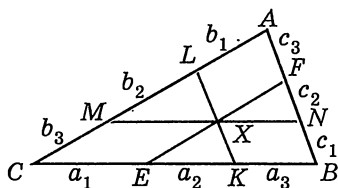


Рис. 63.9

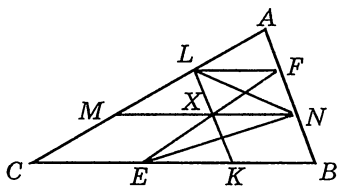


Рис. 63.10

$$\frac{CE}{BE} = \frac{1}{2},$$

отже,

$$2a_1 = a_2 + a_3. \quad (2)$$

Із рівностей (1) і (2) маємо, що $a_1 = a_2 = a_3$, аналогічно $b_1 = b_2 = b_3$, $c_1 = c_2 = c_3$. Відповідно, і перше твердження доведено. Рівність трикутників XEK , LMX і FXN за трьома сторонами виходить із перших двох тверджень. ●

Задача 11. Нехай точка X є центроїдом трикутника ABC . Довести, що тоді вона є центроїдом трикутників ELN і MFK , і що ці трикутники рівні між собою.

● **Доведення.** За попередньою задачею (рис. 63.10):

$$AF = \frac{1}{3} AB; AL = \frac{1}{3} AC.$$

Тому $LF \parallel BC$, звідки виходить, що чотирикутник $FLXN$ — паралелограм ($XN \parallel BC$, $XL \parallel FN$). Тоді відрізок XF , а відповідно, і пряма EX , пройде через середину відрізка LN , отже, точка X належить медіані трикутника ELN , яку проведено до сторони LN . Аналогічно доводиться, що вона належить двом іншим медіанам цього трикутника. Відповідно, точка X є центроїдом трикутника ELN . Для трикутника MFK доведення аналогічне. Перше твердження доведено.

Далі, чотирикутник $LFKE$ — паралелограм, оскільки за попередньою задачею $LF = BK = KE$ і $LF \parallel EK$. Відповідно, $LE = FK$. Розмірковуючи логічно, отримаємо: трикутники ELN і FKM рівні за трьома сторонами, що й потрібно було довести. ●

Нерівності

Задача 12. Довести, що $S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{3} S$.

● **Доведення.** Маємо

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2 = S_1 + S_2 + S_3 + 2\sqrt{S_1 S_2} + 2\sqrt{S_1 S_3} + 2\sqrt{S_2 S_3} \leq S_1 + S_2 + S_3 + (S_1 + S_2) + (S_1 + S_3) + (S_2 + S_3) = 3(S_1 + S_2 + S_3),$$

$$S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{3} S. \bullet$$

Задача 13. Довести, що $\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} \geq \frac{9}{\sqrt{S}}$.

● Доведення. За нерівністю Коші:

$$(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}) \left(\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} \right) \geq 9.$$

Але

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S},$$

звідси випливає, що задана нерівність правильна. ●

Задача 14. Довести, що $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{27}{S}$.

● Доведення. Скористаємося нерівністю

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2.$$

$$\text{Тоді } \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} \right)^2 \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{81}{S} = \frac{27}{S}. \bullet$$

Імпровізація імпровізації

Через точку X всередині трикутника ABC проведено три довільні прямі. Ці прямі, перетинаючись зі сторонами, утворюють три трикутники, площі яких позначимо S_1, S_2, S_3 (рис. 63.11). Нехай S — площа трикутника ABC .

Задача 15. Довести, що $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} > \frac{18}{S}$.

● Доведення. З'єднаємо кінці відрізків MN, EF, LK , як показано на рисунку 63.12. Позначимо площі отриманих трикутників T_1, T_2, T_3 . Доведемо, що

$$S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3. \quad (*)$$

Дійсно,

$$\frac{S_1}{T_1} = \frac{XE \cdot XK}{XL \cdot XF}; \quad \frac{S_2}{T_2} = \frac{XM \cdot XL}{XN \cdot XK}; \quad \frac{S_3}{T_3} = \frac{XN \cdot XF}{XM \cdot XE}.$$

Перемножимо ці рівності і отримаємо вираз (*). Звідси за нерівністю Коші:

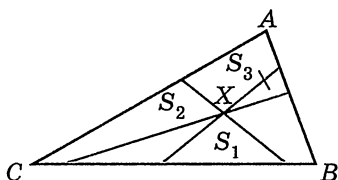


Рис. 63.11

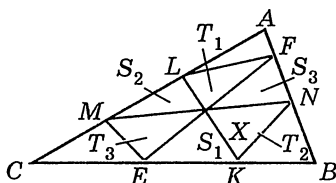


Рис. 63.12

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{S_1 S_2 S_3}} = \frac{3}{\sqrt[6]{S_1 S_2 S_3 T_1 T_2 T_3}} \geq \frac{3 \cdot 6}{S_1 + S_2 + S_3 + T_1 + T_2 + T_3} > \frac{18}{S}.$$

Нерівність доведено. ●

Задача 16. Довести, що $\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} > \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{S}}$.

● **Доведення.** За нерівністю Коші із формули (*) (див. попередню):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{\sqrt{S_1} \cdot \sqrt{S_2} \cdot \sqrt{S_3}}} = \frac{3}{\sqrt[6]{S_1 S_2 S_3}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt[6]{S_1 S_2 S_3 T_1 T_2 T_3}} \geq \frac{3}{\sqrt{\frac{S_1 + S_2 + S_3 + T_1 + T_2 + T_3}{6}}} > \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{S}}, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести. ●

Далі...

Розглянемо довільну точку X всередині трикутника ABC і три довільних трикутника, кожен з яких має вершину X , а основа лежить на одній зі сторін трикутника ABC (рис. 63.13). Нехай площі цих трикутників — S_1, S_2, S_3 , а S — площа трикутника ABC .

Задача 17. Довести, що

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{9}{S}.$$

● **Доведення.** За нерівністю Коші маємо:

$$\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \right) (S_1 + S_2 + S_3) \geq 9.$$

Але $S_1 + S_2 + S_3 \leq S$, відповідно, нерівність доведено. ●

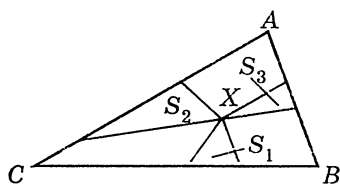


Рис. 63.13

Задача 18. Через точку X всередині тетраедра проведемо площини, паралельні до граней тетраедра. При цьому утворилося чотири тетраедри, в кожному з яких однією з вершин є точка X , а інші вершини лежать на відповідних гранях тетраедра $DABC$. Позначимо об'єм тетраедра $DABC$ як V , а об'єми утворених тетраедрів V_1, V_2, V_3, V_4 . Довести, що

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}.$$

● **Доведення.** Площини, що проходять через точку X , утворюють перерізи, паралельні до площин CAB, DAB, CDB і CAD (рис. 63.14). Маємо чотири тетраедри $XA_4B_4C_4, XA_3B_3S_3, XB_2C_2S_2, XA_1C_1S_1$. Усі вони подібні до тетраедра $DABC$.

Отже, $\frac{\sqrt[3]{V_1}}{\sqrt[3]{V}} = \frac{t_1}{h_1}$, де t_1, h_1 — відповідні висоти тетраедрів $XA_1C_1S_1, DABC$, опущені на основи $S_1A_1C_1$ і DAC .

Аналогічно $\frac{\sqrt[3]{V_2}}{\sqrt[3]{V}} = \frac{t_2}{h_2}$, де t_2, h_2 — відповідні висоти тетраедрів $XB_2C_2S_2, DABC$, опущені на основи $B_2C_2S_2$ і CDB .

Далі $\frac{\sqrt[3]{V_3}}{\sqrt[3]{V}} = \frac{t_3}{h_3}$, де t_3, h_3 — відповідні висоти тетраедрів $XA_3B_3S_3$ і $DABC$, опущені на основи $A_3B_3S_3$ і ABD .

Нарешті, $\frac{\sqrt[3]{V_4}}{\sqrt[3]{V}} = \frac{t_4}{h_4}$, де t_4, h_4 — відповідні висоти тетраедрів $XA_4B_4C_4$ і $DABC$, опущені на основи $A_4B_4C_4$ і ABC .

Маємо

$$\frac{\sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}}{\sqrt[3]{V}} = \frac{t_1}{h_1} + \frac{t_2}{h_2} + \frac{t_3}{h_3} + \frac{t_4}{h_4}.$$

Доведемо, що

$$\frac{t_1}{h_1} + \frac{t_2}{h_2} + \frac{t_3}{h_3} + \frac{t_4}{h_4} = 1. \quad (1)$$

Дійсно, позначимо об'єми тетраедрів $XABC, XDBC, XADC, XADB$ як Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 (рис. 63.15).

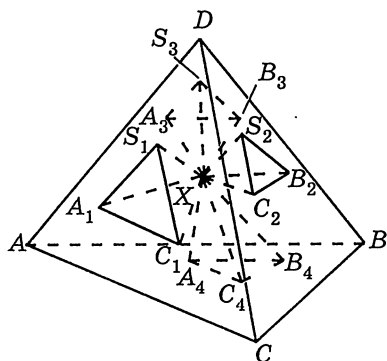


Рис. 63.14

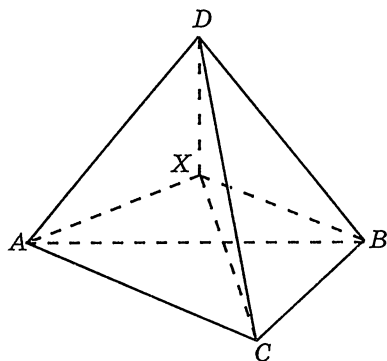


Рис. 63.15

$$\text{Маємо: } \frac{Q_1}{V} = \frac{\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot t_1}{\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h_1} = \frac{t_1}{h_1}. \text{ Аналогічно}$$

$$\frac{Q_2}{V} = \frac{t_2}{h_2}; \frac{Q_3}{V} = \frac{t_3}{h_3}; \frac{Q_4}{V} = \frac{t_4}{h_4}.$$

Звідки $\frac{t_1}{h_1} + \frac{t_2}{h_2} + \frac{t_3}{h_3} + \frac{t_4}{h_4} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{V} = 1$, отже, доведено рівність (1) і

$$\sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4} = \sqrt[3]{V}. \bullet$$

Глава 64

ЩЕ РАЗ ПРО ФЕНОМЕН ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ

Знайдено вид обернених задач, які змушують говорити знову про феномен «пряма задача — дрібничка, обернена — підвищеної складності».

Емоційність задачі Штейнера–Лемуса в першу чергу визнається несподіваною, непередбачуваною складністю доведення «невинної», на перший погляд, оберненої задачі: якщо дві бісектриси рівні, то трикутник рівнобедрений. Нікому невідомий Лемус запропонував її Штейнеру і тим увійшов в історію математики.

Такого контрасту між доведенням прямої та оберненої теореми елементарна геометрія не знає.

Доведення пропонуваніх задач не дуже яскраві, проте в них є хвилююча несподіваність як у формулюванні оберненої задачі,

так і в нетривіальному доведенні. Вражає, що досі жоден задачник з геометрії, жоден підручник не «прикрашають» ознаки паралелограма і трапеції, *зібрані воедино*. Від цієї миті Ви, шановний читачу, володієте цією унікальною колекцією. Насолоджуйтесь!

Задача 1. Довести, що якщо середня лінія чотирикутника, відповідна одній парі протилежних сторін, дорівнює півсумі двох інших його сторін, то цей чотирикутник — трапеція (або — паралелограм).

● **Доведення.** Припустимо, що чотирикутник $ABCD$ — не трапеція (рис. 64.1). Проведемо в ньому діагональ BD і середню лінію MN . Нехай E — середина цієї діагоналі. За умовою:

$$MN = \frac{AB + CD}{2}. \quad (1)$$

Із трикутника ABD : $ME = \frac{1}{2}AB$. Із трикутника BDC :

$$EN = \frac{1}{2}DC. \text{ Із трикутника } MEN: MN < ME + EN = \frac{AB + CD}{2}, \text{ або}$$

$$MN < \frac{AB + CD}{2}. \quad (2)$$

Порівнюючи вирази (1) і (2), переконуємося, що отримали протиріччя, отже, чотирикутник $ABCD$ — трапеція (або — паралелограм). ●

Задача 2. У чотирикутнику $ABCD$ кути A і C рівні, а діагональ BD ділиться другою діагоналлю навпіл. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

● **Доведення.** Здійснимо симетрію точки C відносно точки O — точки перетину діагоналей. Тоді чотирикутник $BCDC_1$ — паралелограм і $\angle BC_1D = \angle BCD$ (рис. 64.2). Але $\angle BC_1D > \angle A = \angle C$ — тоді точка A збігається з точкою C_1 . ●

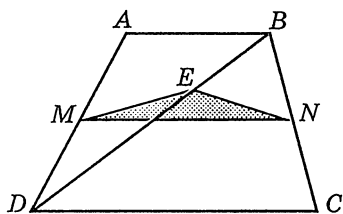


Рис. 64.1

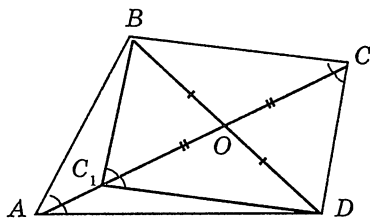


Рис. 64.2

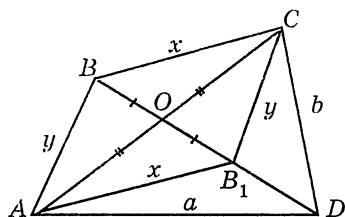


Рис. 64.3

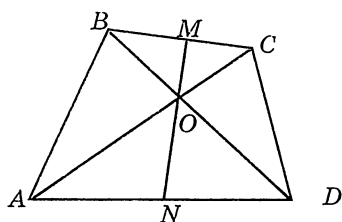


Рис. 64.4

Задача 3. Довести, що якщо діагональ чотирикутника ділить його периметр навпіл і сама діагональ при цьому ділиться другою діагоналлю навпіл, то чотирикутник — паралелограм.

● **Доведення.** За умовою $x + y = a + b$ (рис. 64.3). Нехай B_1 симетрична B відносно O . Тоді $ABCB_1$ — паралелограм і $AB_1 = x$, $B_1C = y$. Але $x + y < a + b$, отже, точки B_1 і D збігаються. ●

Задача 4. Кожна діагональ випуклого чотирикутника $ABCD$ ділить його на дві частини рівного периметра. Довести, що $ABCD$ — паралелограм.

● **Доведення.** Нехай сторони чотирикутника a, b, c, d . За умовою $a + b = b + c$. Звідси $a = c$, відповідно $b = d$. Отже, вимогу задачі виконано. ●

Задача 5. Довести, що якщо в чотирикутнику середня лінія проходить через точку перетину діагоналей і ділиться нею навпіл, то чотирикутник — паралелограм.

● **Доведення.** Трикутники BOC і AOD рівні за медіаною ($OM = ON$) і кутами, які ця медіана утворює зі сторонами, що мають з нею спільну вершину (ця рівність трикутників доводиться подвоєнням медіани) (рис. 64.4). Із рівності трикутників випливає паралельність і рівність протилежних сторін чотирикутника. Отже, $ABCD$ — паралелограм. ●

Задача 6. Довести, що якщо пряма, яка проходить через середини двох протилежних сторін випуклого чотирикутника, проходить через точку перетину діагоналей, то чотирикутник — трапеція (або паралелограм).

● **Доведення.** Припустимо, що сторона DC не паралельна до сторони AB (рис. 64.5). Нехай точки M і N — середини сторін AB і CD

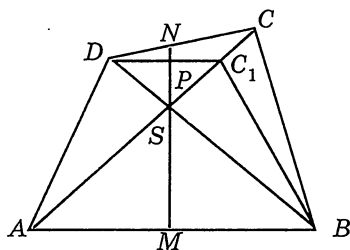


Рис. 64.5

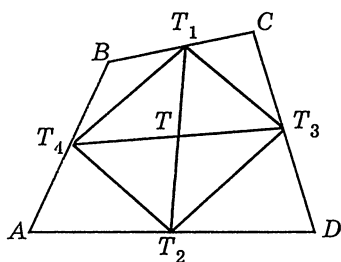


Рис. 64.6

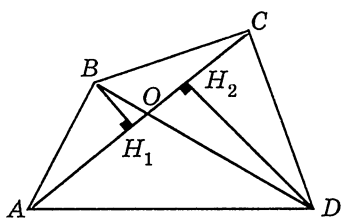


Рис. 64.7

відповідно, S — точка перетину діагоналей. За умовою, точки M, N, S належать одній прямій. Проведемо $DC_1 \parallel AB$ ($C_1 \in AC$). Пряма MN перетинає відрізок DC_1 в його середині, точці P

(оскільки $\frac{PD}{MB} = \frac{PS}{SM} = \frac{PC_1}{AM}$ і $AM = BM$, то $DP = PC_1$). Отже,

NP — середня лінія в трикутнику DCC_1 , тобто $NP \parallel CC_1$, що неможливо (оскільки $S \in NP$, $S \in CC_1$). ●

Задача 7. Довести, що якщо перша і друга середні лінії розділяють чотирикутник на чотири рівновеликі фігури, то цей чотирикутник — паралелограм.

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник. Чотирикутник $T_1T_3T_2T_4$ — паралелограм, і точка T — точка перетину його діагоналей (рис. 64.6).

Оскільки $S_{TT_1T_3} = S_{T_2TT_3}$, то $S_{T_1CT_3} = S_{T_2T_3D}$.

Але в цих трикутниках $CT_3 = T_3D$, тоді висоти, опущені з вершин T_1 і T_2 , рівні. Отже, $CD \parallel T_1T_2$. Аналогічно доведемо, що $AB \parallel T_1T_2$, отже, $AB \parallel CD$, аналогічно $BC \parallel AD$, тоді $ABCD$ — паралелограм. ●

Задача 8. Довести, що якщо кожна діагональ чотирикутника $ABCD$ ділить його на два рівновеликих трикутники, то цей чотирикутник — паралелограм.

● **Доведення.** У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 64.7) розглянемо рівновеликі (за умовою) трикутники ABC і ACD . Оскільки сторона AC — спільна, то висоти DH_2 і BH_1 рівні між собою і рівними будуть прямокутні трикутники BH_1O і DH_2O , отже, $BO = OD$. Аналогічно доведемо, що $AO = CO$, тобто $ABCD$ — паралелограм. ●

Задача 9. Нехай у випуклому чотирикутнику $ABCD$ сторони AB, CD — паралельні й $AB + BC = CD + AD$. Довести, що $ABCD$ — паралелограм.

● **Доведення.** Доведемо, що $AB = CD$ (рис. 64.8). Припустимо, що це не так, тобто $AB \neq CD$. Тоді виберемо на стороні AB таку точку E , щоб чотирикутник $AECD$ був паралелограмом. Отримаємо

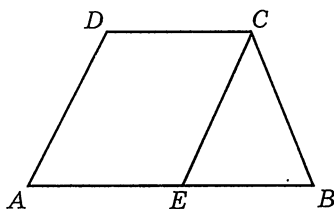


Рис. 64.8

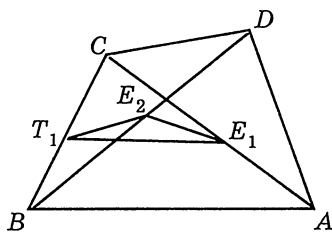


Рис. 64.9

$$EC = AD = AE + EB + BC - CD = EB + BC,$$

а це суперечить нерівності трикутника, оскільки точка E не належить відрізку BC . ●

Задача 10. Якщо в чотирикутнику відрізок, кінці якого збігаються з серединами діагоналей, дорівнює піврізниці протилежних сторін, то цей чотирикутник — трапеція.

● **Доведення.** Позначимо в чотирикутнику $ABCD$ (рис. 64.9) $AB = a$, $CD = b$; середини діагоналей AC і BD як E_1 і E_2 відповідно. За умовою

$$E_1E_2 = \frac{a-b}{2}; \quad T_1E_1 = \frac{a}{2}, \quad T_1E_2 = \frac{b}{2}$$

(T_1 — середина BC). $T_1E_1 - T_1E_2 = \frac{a-b}{2}$, отже, точка E_2 належить відрізку T_1E_1 . Тоді, точки T_1, E_1, E_2 належать одній прямій. Але $T_1E_2 \parallel DC$, $T_1E_1 \parallel AB$, відповідно, $DC \parallel AB$, отже, чотирикутник $ABCD$ — трапеція. ●

Задача 11. Якщо в чотирикутнику сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін, то цей чотирикутник — паралелограм або трапеція.

● **Доведення.** Нехай в чотирикутнику $ABCD$ (рис. 64.10)

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2. \quad (1)$$

Припустимо, що цей чотирикутник не паралелограм. Тоді побудуємо два паралелограми зі спільною діагоналлю AC (O — середина AC).

За прямою теоремою:

$$\begin{aligned} AC^2 + 4OB^2 &= 2AB^2 + 2BC^2, \\ AC^2 + 4OD^2 &= 2CD^2 + 2AD^2. \end{aligned} \quad .$$

Додамо дві рівності:

$$\begin{aligned} AC^2 + 2(OB^2 + OD^2) &= \\ &= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2. \end{aligned} \quad (2)$$

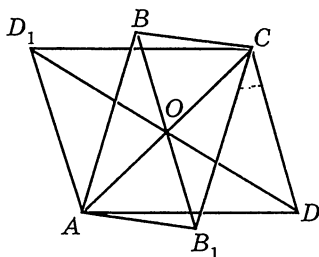


Рис. 64.10

Порівнюючи рівності (1) і (2), отримаємо

$$BD^2 = 2(OB^2 + OD^2). \quad (3)$$

Розглянемо трикутник OBD . Він тупокутний, оскільки $BD^2 > OB^2 + OD^2$. Введемо позначення: $\angle BOD = \alpha$,

$$-1 < \cos \alpha < 0.$$

За теоремою косинусів з урахуванням рівності (3) маємо

$$-\cos \alpha = \frac{OB^2 + OD^2}{2OB \cdot OD}.$$

Але $OB^2 + OD^2 \geq 2\sqrt{OB^2 \cdot OD^2} = 2OB \cdot OD$, отже,

$$-\cos \alpha \geq \frac{OB^2 + OD^2}{OB^2 + OD^2}$$

або $\cos \alpha \leq -1$, що неможливо. Тоді точки B, O, D належать одній прямій, і $ABCD$ — паралелограм. ●

Зазначимо, що розв'язання задачі значно спрощується, якщо застосувати формулу Ейлера:

$$E_1 E_2^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2),$$

де a, b, c, d — довжини сторін, e і f — довжини цих діагоналей, E_1, E_2 — середини діагоналей.

Задача 12 (Математична Олімпіада Югославії, 1973 р.).

Довести, що сума відстаней між серединами протилежних сторін чотирикутника дорівнює його півпериметру тоді й лише тоді, коли цей чотирикутник паралелограм.

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник (рис. 64.11). T_1, T_2, T_3, T_4 — середини сторін AB, CD, BC, AD , E_1 і E_2 — середини діагоналей. Із трикутника $E_1 T_3 T_4$:

$$T_3 T_4 \leq \frac{1}{2}(AB + CD). \text{ Аналогічно } T_1 T_2 \leq \frac{1}{2}(BC + AD), \text{ рівність пра-}$$

вильна, коли $ABCD$ — паралелограм, що доводить твердження задачі. ●

Задача 13. Середня лінія чотирикутника перетинає його діагоналі в точках P і Q . Довести, що якщо $T_1 P = T_2 Q$, то чотирикутник — трапеція.

● **Доведення.** Припустимо протилежне і проведемо через вершини C і D відрізки CC_1 і DD_1 , паралельні $T_1 T_2$ (рис. 64.12). Тоді $CC_1 = 2T_1 P$ і $DD_1 = 2Q T_2$. Оскільки за умовою $T_1 P = Q T_2$, то $CC_1 = DD_1$ і чотирикутник $CC_1 DD_1$ — паралелограм. Але тоді дві його інші паралельні сторони мають спільну точку O , а цього бути не може. Відповідно, $CD \parallel T_1 T_2$, отже, $CD \parallel AB$. ●

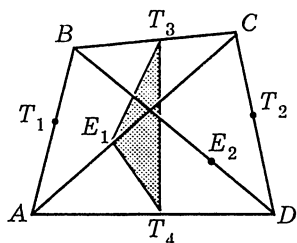


Рис. 64.11

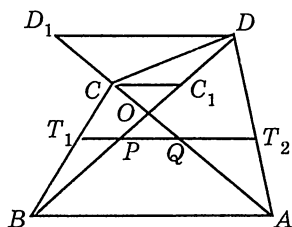


Рис. 64.12

Задача 14. Через точку O перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$ проведено пряму, паралельну до однієї з його сторін. Довести, що якщо відрізок цієї прямої, який лежить всередині чотирикутника, ділиться точкою O , то $ABCD$ — трапеція (або паралелограм).

• **Доведення.** Нехай пряма, яка проходить через точку O , паралельна до сторони AB , перетинає сторони BC і AD в точках N і M (рис. 64.13).

Тоді $\frac{AB}{MO} = \frac{BD}{OD}$; $\frac{AB}{NO} = \frac{AC}{OC}$ і, оскільки $NO = MO$, $\frac{BD}{OD} = \frac{AC}{OC}$,

звідки $\frac{BO + OD}{OD} = \frac{AO + OC}{OC}$, $\frac{BO}{OD} = \frac{AO}{OC}$, отже, $AB \parallel CD$. •

Задача 15. У випуклому чотирикутнику радіуси кіл, вписаних у чотири трикутники, утворені внаслідок перетину діагоналей, рівні. Довести, що даний чотирикутник — ромб.

• **Доведення.** Доведемо спочатку, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм (рис. 64.14). Нехай O — точка перетину діагоналей і $AO \geq CO$, а $DO \geq BO$. Розглянемо трикутник OB_1C_1 , симетричний трикутнику OBC відносно точки O . Очевидно, що радіус кола, вписаного в трикутник B_1OC_1 , менший за радіус кола, вписаного в трикутник AOD , а за умовою вони рівні. Отже, точка O — середина обох діагоналей.

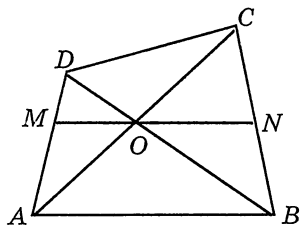


Рис. 64.13

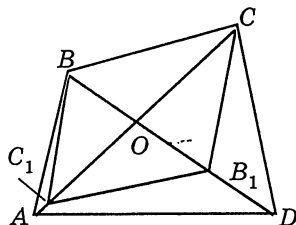


Рис. 64.14

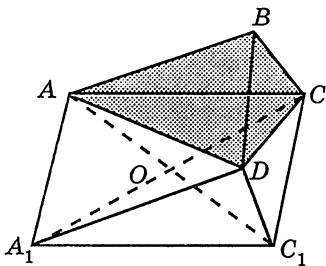


Рис. 64.15

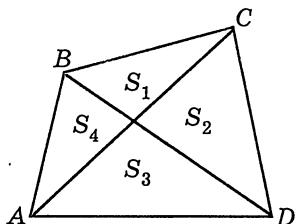


Рис. 64.16

Доведемо рівність сторін чотирикутника $ABCD$. Використаємо формулу $S = pr$.

Оскільки у трикутників AOB і BOC площі рівні, рівні радіуси вписаних кіл, то рівними будуть і периметри цих трикутників. Отже, $AB = BC$, а це означає, що $AB = BC = CD = AD$, і чотирикутник $ABCD$ — ромб. ●

Задача 16. Діагоналі чотирикутника розбивають його на чотири трикутника рівних периметрів. Довести, що даний чотирикутник — ромб.

Вказівка. Задача аналогічна до попередньої.

Задача 17. Про чотирикутник $ABCD$ відомо, що радіуси кіл, вписаних у трикутники ABC , BCD , CDA , DAB , рівні. Довести, що $ABCD$ — прямокутник.

Вказівка. Нехай $ABCD$ — заданий чотирикутник (рис. 64.15). Побудувати паралелограм AA_1C_1C , у якого паралельні сторони дорівнюють діагоналі BD . Довести рівність пар трикутників і що ACC_1A_1 — ромб.

Задача 18. Добуток площ трикутників, на які чотирикутник розбивається однією зі своїх діагоналей, дорівнює добутку площ трикутників, на які він розбивається іншою діагоналлю. Довести, що чотирикутник — трапеція або паралелограм.

● **Доведення.** Нехай S_1, S_2, S_3, S_4 — площі трикутників, на які діагоналі розбили чотирикутник (рис. 64.16):

$$(S_1 + S_2)(S_3 + S_4) = (S_1 + S_4)(S_2 + S_3).$$

Розкриємо дужки і згрупуємо:

$$S_1S_3 + S_1S_4 + S_2S_3 + S_2S_4 - S_1S_2 - S_1S_3 - S_2S_4 - S_3S_4 = 0,$$

або

$$(S_1 - S_3)(S_2 - S_4) = 0.$$

Звідси робимо висновок, що якщо один із множників дорівнює нулю, то чотирикутник — трапеція. Якщо обидва — паралелограм.

Вказівка до другого способу доведення: установити, що

$$\sin A \cdot \sin C = \sin B \cdot \sin D.$$

Враховуючи, що $\angle D = 360^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C)$, отримаємо рівність $\sin(A + B)\sin(B + C) = 0$. ●

Задача 19. Довести, що якщо в трапеції $ABCD$ AD і BC — основи ($AD > BC$) і $AB + BD = AC + CD$, то трапеція рівнобедрена.

● **Доведення.** Ця задача заслуговує на особливу увагу як через її умову, так і через два різних способи доведення.

Перший спосіб. Нехай $BD = d_1$, $AC = d_2$, $AD = b$, $AB = a_1$, $BC = a$, $CD = a_2$ (рис. 64.17). Враховуючи умову, можна стверджувати, що периметри трикутників ABD і ACD рівні. Позначимо їх $2p$.

Оскільки $S_{ABD} = S_{ACD}$, то

$$p(p - a_1)(p - d_1)(p - b) = p(p - a_2)(p - d_2)(p - b),$$

отже,

$$p^2 - (a_1 + d_1)p + a_1d_1 = p^2 - (a_2 + d_2)p + a_2d_2,$$

звідки

$$a_1d_1 = a_2d_2.$$

За умовою

$$a_1 + d_1 = a_2 + d_2. \quad (1)$$

Тому $\frac{a_2d_2}{d_1} + d_1 = a_2 + d_2$, звідки $\frac{a_2}{d_1}(d_2 - d_1) = d_2 - d_1$.

Оскільки $a_2 \neq d_1$, то $d_1 = d_2$. Тоді з (1) маємо $a_1 = a_2$, що й потрібно було довести. ●

Другий спосіб доведення винесено в главу «Свято, яке завжди».

На десерт! Неперевершена ілюстрація «ефекту оберненої задачі».

Задача. Довести, що якщо $\angle M_2BM_3 = \angle M_3CM_2$, то трикутник ABC — рівнобедрений.

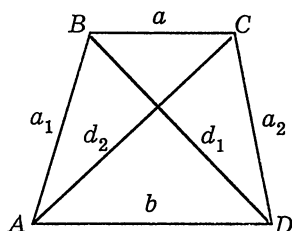


Рис. 64.17

КОНКУРЕНТОЗДАТНІ ВІДРІЗКИ

Чудові точки... Чудові прямі... Чудові відрізки! Чомусь про відрізки як про явище чудове не поставало питання у геометрії. Та й не дивно. Висота, медіана, бісектриса гідно і непорушно зайняли місце на троні трикутника. Знайти три відрізки, властивості яких змогли б «конкурувати» з ними, дуже складно. Але ж...

Розглянемо три досить відомі відрізки: $p - a$; $p - b$; $p - c$ (a, b, c — сторони трикутника ABC , p — півпериметр). Сподіваємося, що читач зустрічався з ними як у формулі Герона, так і на сторонах трикутника, в який вписано коло (рис. 65.1). Постараємося довести, що ці три відрізки можуть «конкурувати» з трійкою чудових відрізків.

У особливих випадках замість слова «задача» будемо використовувати слово «конкуренція», а відрізки $p - a$, $p - b$, $p - c$ будемо називати **конкурентоздатними**.

Про розташування конкурентоздатних відрізків

Конкуренція 1. Кожну сторону трикутника можна подати як суму двох конкурентоздатних відрізків.

Дійсно, наприклад,

$$(p - b) + (p - c) = 2p - (b + c) = a.$$

Наслідок. Якщо на стороні BC відкласти від однієї з вершин відрізок $p - b$, то та частина сторони, що залишилася, буде відрізком $p - c$.

Чудова антикомутативність конкурентоздатних відрізків

Хоча сума двох конкурентоздатних відрізків стала, їх спільна точка на стороні трикутника — одна і та ж.

Точка K_i ($i = 1; 2; 3$)

Розглянемо відрізки $p - a$, $p - b$, $p - c$. Якщо кінець конкурентоздатного відрізка збігається з відповідною від'ємнику вершиною ($p - a$ з A , $p - b$ з B , $p - c$ з C), то спільною точкою двох відрізків буде точка дотику вписаного в трикутник кола (рис. 65.1)

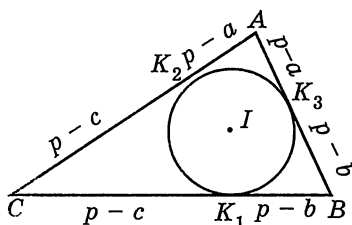


Рис. 65.1

Конкуренція 2. Прямі AK_1 , BK_2 , CK_3 перетинаються в одній точці (точка Жергона). Довести це нескладно за допомогою теореми Чеві.

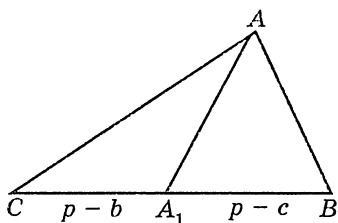


Рис. 65.2

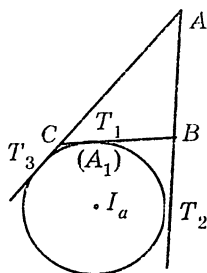


Рис. 65.3

Точки A_1, B_1, C_1

Якщо кінець конкурентоздатного відрізка не збігається з відповідною від'ємнику вершиною (наприклад, $p - b$ з C , $p - c$ з B), то спільною точкою двох відрізків буде точка, яка ділить периметр трикутника навпіл (рис. 65.2). Цю точку будемо позначати відповідно до вершини A_1, B_1 або C_1 .

Способи побудови півпериметричної точки

Про перший спосіб уже йшлося: щоб отримати, наприклад, точку A_1 , потрібно від вершини B відкласти відрізок $p - c$ (або від вершини C відкласти відрізок $p - b$).

Другий спосіб. Щоб отримати точку A_1 , потрібно побудувати зовнішнє коло, яке дотикається до сторони BC .

● **Доведення.** Нехай зовнішнє коло з центром I_a дотикається до продовження сторін трикутника ABC в точках T_2 і T_3 , а сторони BC в точці T_1 (рис. 65.3).

Позначимо $CT_1 = x$; $T_1B = y$. Тоді $AT_2 = c + y$; $AT_3 = b + x$ і

$$2p = a + b + c = x + y + b + c = b + x + c + y = AT_2 + AT_3.$$

Але $AT_2 = AT_3$, тоді $2AT_2 = 2p$, звідки $AT_2 = AT_3 = p$. Оскільки $CT_1 = CT_3$, то $AC + CT_1 = p$, отже, T_1 — півпериметрична точка, яка збігається з точкою A_1 . ●

Третій спосіб (конкурентна теорема). Якщо пряма AH ($H \in BC$) паралельна до відрізка IM_1 , то вона півпериметрична пряма (I — інцентр, M_1 — середина BC) (рис. 65.4).

● **Доведення.** Введемо позначення: $BX = x$, AN_1 — висота трикутника ABC , $XN_1 = y$; $N_1B = t$. Знайдемо відрізок t :

$$c^2 - t^2 = b^2 - (a - t)^2;$$

$$c^2 - t^2 = b^2 - a^2 + 2at - t^2;$$

$$2at = c^2 + a^2 - b^2;$$

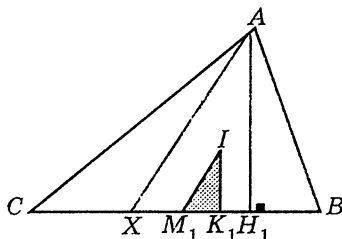


Рис. 65.4

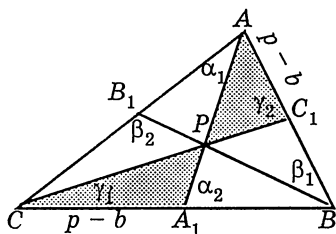


Рис. 65.5

$$t = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Трикутник IM_1K_1 подібний до трикутника AHH_1 :

$$\frac{XH_1}{M_1K_1} = \frac{AH_1}{IK_1}.$$

Оскільки

$$M_1K_1 = \frac{a}{2} - (p - b) = \frac{b - c}{2},$$

то $\frac{2y}{b - c} = \frac{2S \cdot p}{a \cdot S}$. $XH_1 = y = \frac{p(b - c)}{a}$; $BX = x = t + y$,

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2 + c^2 - b^2 + (a + b + c)(b - c)}{2a} = \\ &= \frac{a^2 + c^2 - b^2 + ab + b^2 + bc - ac - bc - c^2}{2a} = \\ &= \frac{a^2 + ab - ac}{2a} = \frac{a(a + b - c)}{2a} = \frac{a + b - c}{2} = p - c, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. ●

Півпериметричні точки і доведення алгебраїчних нерівностей

1⁰. Точки A і H_1

Для визначеності вважатимемо, що $a > b > c$. Нескладно геометрично довести, що $H_1B < A_1B$. Це означає, що потрібно довести нерівність

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} < p - c,$$

або

$$a^2 + c^2 - b^2 - a^2 - ab + ac < 0,$$

або

$$(c - b)(c + b) + a(c - b) < 0,$$

або

$$(c - b)(c + b + a) < 0.$$

Оскільки $a + b + c > 0$, то отримали правильну нерівність $b > c$, а це означає, що вихідну нерівність доведено.

2⁰. Точки A_1 і M_1

Доведемо, що за умови $a > b > c$ точка M_1 ближча до B , ніж до A_1 .

Дійсно, $\frac{a}{2} - \frac{a+b-c}{2} < 0$, або $b - c > 0$.

3°. Точки L_1 і A_1 (L_1 — основи бісектрис l_a).

Відомо, що $L_1B = \frac{ac}{b+c}$. Порівняємо $p - c$ і $\frac{ac}{b+c}$. Доведемо,

що $\frac{ac}{b+c} < \frac{a+b-c}{2}$. Маємо $2ac - ab - ac - b^2 - bc + bc + c^2 < 0$,
 $c^2 - b^2 + a(c - b) < 0$, $(c - b)(c + b + a) < 0$. Оскільки $b > c$, то
 нерівність доведено.

Конкуренція 3. Якщо $b > c > a$, то $BL_1 < p - c < AL_2$.
 Довести.

• Доведення. 1) Доведемо, що $AL_2 > p - c$, або

$$\frac{bc}{a+c} > \frac{a+b-c}{2}.$$

Ця нерівність рівносильна нерівності:

$$2bc > (a+c)(a+b-c),$$

звідки $bc > a^2 + ab - c^2$; $c^2 - a^2 + bc - ab > 0$,

$$(c-a)(c+a) + b(c-a) > 0,$$

отже, $(c-a)(a+b+c) > 0$. Оскільки $c > a$, то нерівність доведено.

2) Нерівність $p - c > BL_1$, або $\frac{a+b-c}{2} > \frac{ac}{b+c}$ доводиться
 аналогічно. •

Теорема синусів для двох півпериметричних прямих

Нехай пряма AA_1 утворює кут α_1 зі стороною, що має з нею
 спільну вершину, і кут α_2 зі стороною, що протилежна цій
 вершині (рис. 65.5) Аналогічно пряма BB_1 утворює кути β_1 і β_2 ,
 пряма CC_1 — кути γ_1 і γ_2 . Маємо рівності:

$$\frac{\sin(A - \alpha_1)}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}, \quad \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin(B - \beta_1)}{\sin \beta_2}.$$

Дійсно, в трикутниках APC_1 і A_1PC : $AC_1 = A_1C$ і $\angle APC_1 = \angle A_1PC$,
 значить, рівні радіуси описаних навколо них кіл, відповідно

$$\frac{\sin(A - \alpha_1)}{\sin \alpha_2} = \frac{PC_1}{PC}. \quad (1)$$

Розглянемо трикутники BPC_1 і B_1PC :

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{PC_1}{PC}. \quad (2)$$

Порівнюючи рівності (1) і (2), маємо $\frac{\sin(A - \alpha_1)}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}$.

Друга пропорція доводиться аналогічно. За теоремою Жергона маємо рівність

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2} + \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_1 + \sin \beta_2} + \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2} = 1.$$

Півпериметричний трикутник (ΔP)

Чи можна утворити трикутник із трьох висот? Не завжди. А із конкурентоздатних відрізків? Спробуємо дослідити це.

Щоб такий трикутник існував, повинно бути:

$$(p - a) + (p - b) > p - c,$$

або

$$p - a - b > -c,$$

або $3c > a + b$, $c > \frac{a+b}{3}$. Аналогічно $a > \frac{b+c}{3}$ і $b > \frac{a+c}{3}$.

Отже, трикутник зі сторонами $(p - a)$, $(p - b)$, $(p - c)$ існує тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a > \frac{b+c}{3} \\ b > \frac{a+c}{3} \\ c > \frac{a+b}{3} \end{cases}$$

Задача-жарт (конкуренція). Додамо ці нерівності:

$$3(a + b + c) > \frac{2(a + b + c)}{3},$$

отримали правильну нерівність. Та чи означає це, що ΔP існує за будь-яких a, b, c ?

Відповідь: ні.

Зустрічне запитання — а чому?

Трикутник P (ΔP)

1. Периметр ($2P_p$) дорівнює половині периметра ΔABC :

$$P_p = \frac{P}{2}.$$

Доведення очевидне.

Позначимо відрізки $p - a, p - b, p - c$ як t_1, t_2, t_3 .

Знайдемо $P_p - t_1$.

$$P_p - t_1 = \frac{p}{2} - (p - a) = \frac{-(p - a - a)}{2} = \frac{1}{2}(a - t_1).$$

$$\text{Аналогічно } P_p - t_2 = \frac{1}{2}(b - t_2); \quad P_p - t_3 = \frac{1}{2}(c - t_3).$$

$$S_p^2 = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{8}(a - t_1)(b - t_2)(c - t_3), \quad S_p = \frac{1}{4}\sqrt{p(a - t_1)(b - t_2)(c - t_3)}.$$

Рівняння зв'язку

Позначимо $S_1 = p - a + p - b + p - c = 3p - 2p = p$, отже,

$$S_1 = p$$

$$S_3 = (p - a)(p - b)(p - c) = \frac{S^2}{p}; \quad S_3 = \frac{S^2}{p},$$

$$\begin{aligned} S_2 &= (p - a)(p - b) + (p - a)(p - c) + (p - b)(p - c) = p^2 - pb - ap + \\ &+ ab + p^2 - pc - pb + bc + p^2 - pc - pa + ac = 3p^2 - 2p(a + b + c) + \\ &+ ab + ac + bc = 3p^2 - 4p^2 + ab + ac + bc = -p^2 + (ab + ac + bc). \end{aligned}$$

$$S_2 = -p^2 + (ab + ac + bc).$$

За теоремою Вієта для кубічного рівняння з коренями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ маємо:

$$x^3 - x^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Для півпериметричного трикутника:

$$x^3 - x^2p + x(-p^2 + ab + ac + bc) - \frac{S^2}{p} = 0,$$

або остаточно

$$px^3 - p^2x^2 - x(p^3 - p(ab + ac + bc)) - S^2 = 0.$$

Конкурентне рівняння (двійник формули Герона)

$$\frac{1}{(p - a)(p - b)} + \frac{1}{(p - b)(p - c)} + \frac{1}{(p - a)(p - c)} = \frac{1}{r^2}. \quad (*)$$

Доведемо її. Перетворимо ліву частину рівності:

$$\frac{p - c + p - b + p - c}{(p - a)(p - b)(p - c)} = \frac{p}{(p - a)(p - b)(p - c)} = \frac{p^2}{S^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Рівність (*) еквівалентна формулі Герона:

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c).$$

Конкурентія: тригонометричний аналог формули (*):

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1.$$

Вправи

1. Довести, що $\frac{p-c}{p} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}$.

2. $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$.

3. $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$.

4. $S = (p-a)^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$.

5. $r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = p$.

Ще раз формула Герона

Маємо

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2},$$

або $r(p-a+p-b+p-c) = r^3(p-a)(p-b)(p-c)$.

Враховуючи формулу $S = r \cdot p$, отримаємо формулу Герона.

Нерівності з конкурентоздатними відрізками

І тут «пригоди»

У «Сборнике задач по специальному курсу элементарной математики» (М.: Высш. шк., 1960) я зустрів задачу (гл. XVII, № 132):

Довести для трикутника співвідношення $2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq a$.

Доведення очевидне: оскільки $a = (p-b) + (p-c)$, то за співвідношенням між середнім геометричним і середнім арифметичним:

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{p-b+p-c}{2}, \text{ або } 2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq a,$$

що й потрібно було довести. ●

Виявляється! Виявляється, що ця нерівність приводить до знаменитої нерівності $R \geq 2r$.

Дійсно,

$$2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq a, \quad 2\sqrt{(p-a)(p-c)} \leq b, \quad 2\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq c,$$

звідси $8(p-a)(p-b)(p-c) \leq abc$, або $8S^2 \leq abc \cdot p$, або $2S \leq Rp$ ($S = r \cdot p$), $2r \leq R$.

Задача. Довести, що $16S_p \leq p^2$ (S_p — площа ΔP).

Доведення. Оскільки

$$S_p = \frac{1}{4} \sqrt{(p-a-t_1)(b-t_2)(c-t_3)}^2 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{p-t_1-t_2-t_3+2p}{4} \right)^2 = \frac{p^2}{16},$$

отже $16S \leq p^2$. ●

Конкуренція 4. Довести, що $t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 \in S^2$.

● Доведення. Маємо $S^2 = (t_1 + t_2 + t_3)t_1t_2t_3$. Також маємо нерівність $t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 \geq \underbrace{t_1t_2t_3(t_1 + t_2 + t_3)}_{S^2} = S^2$. ●

Конкуренція 5. Довести, що $S \geq 3\sqrt{3}r^2$. Доведемо за допомогою нерівності (*). Маємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} &= \frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} \geq \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{p^2}{p^2(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{p^2}{S^4}},\end{aligned}$$

$$\frac{1}{r^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{r^2S^2}}, \text{ або } \frac{1}{r^6} \geq 27 \frac{1}{r^2S^2}, \text{ або } S \geq 3\sqrt{3}r^2.$$

Для самостійного розв'язання

Побудувати трикутник за

- | | |
|-------------------------------|----------------------------|
| 1) $t_1; t_2; t_3$; | 4) $p - a; b; \angle A$; |
| 2) $p - a; p - c; \angle A$; | 5) $p - a; AI; R$; |
| 3) $p - a; b + c; \angle A$; | 6) $p - c; AI; \angle A$. |

Глава 66

ЄДИНА І НЕПОВТОРНА

Як ви, звісно, здогадалися, мова піде знову про задачу. Спробую пояснити, чим вона заслуговувала таку честь.

Справді, з'явившись на Міжнародній математичній Олімпіаді в 1978 р., вона й досі обговорюється.

Для її розв'язання використовується геометрія, допоміжне коло, тригонометрія, лема Архімеда, теорема Кезі, теорема Паскаля, формула Ейлера. Ну яка задача зможе похвалитися таким списком?

Почнемо з того, що початкова умова задачі, запропонована на Міжнародній олімпіаді, була перевантажена — слово «рівнобедрений» було зайвим. Але саме таку умову опублікував вперше журнал «Квант» (М. 537).

Коло внутрішньо дотикається до кола, описаного навколо **рівнобедреного** трикутника ABC , а також рівних сторін AB і AC цього трикутника в точках P , Q відповідно. Доведіть, що середина відрізка PQ є центром кола, вписаного в трикутник ABC .

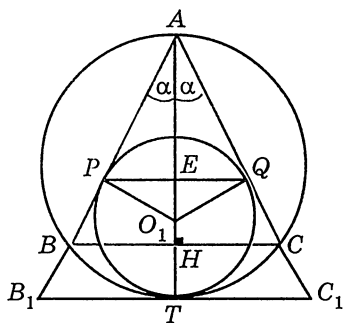


Рис. 66.1

Наведемо доведення відомого московського математика, співробітника журналу «Квант» М. Васильєва.

● Нехай AH — висота трикутника ABC , E — середина відрізка PQ , O_1 — центр даного кола, T — точка перетину даного кола з описаним навколо трикутника (рис. 66.1). Очевидно, що точки E і T належать прямій AH .

Проведемо через точку T дотичну до даного кола (отже, і до кола,

описаного навколо трикутника ABC). Нехай вона перетинатиме прямі AB і AC в точках B_1 і C_1 відповідно. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ гомотетичні з центром гомотетії в точці A і деяким

коефіцієнтом k . Очевидно, що $k = \frac{AH}{AT}$. Із прямокутних три-

кутників AHB і ATB маємо, що $AH = AB \cos \alpha$, $AT = \frac{AB}{\cos \alpha}$ ($\alpha = \angle BAH = \angle CAH$), отже,

$$k = \cos^2 \alpha.$$

Аналогічно, із прямокутних трикутників AEP і AO_1 :

$$\frac{AE}{AO_1} = \cos^2 \alpha.$$

Тому при гомотетії точка E перейде в точку O_1 , а оскільки точка O_1 — центр вписаного в трикутник AB_1C_1 кола, то точка E буде інцентром трикутника ABC ! ●

Тепер наведемо розв'язання удосконаленої задачі, забравши слово «рівнобедрений»:

Коло дотикається до сторін AB і AC трикутника ABC в точках P і Q відповідно, а також внутрішньо дотикається до кола, описаного навколо цього трикутника. Довести, що інцентр I трикутника ABC збігається з серединою відрізка PQ .

Перший спосіб (за допомогою тригонометрії).

● Щоб довести, що точка E , середина відрізка PQ , є інцентром трикутника ABC , достатньо показати, що

$$AE = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}, \quad (1)$$

де r — радіус кола, вписаного в трикутник ABC .

Дійсно, оскільки $AP = AQ$, $AO_1 \perp PQ$ (O_1 — центр даного кола), а точка E належить прямій AO_1 (рис. 66.2). Оскільки інцентр також належить прямій AO_1 (бісектрисі кута A), то щоб довести, що точки E і I збігаються, достатньо показати, що $AE = AI$.

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}},$$

отже, потрібно довести, що $AE = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$.

Позначимо r_1 — радіус кола, заданого в умові: $O_1Q = r_1$. Із трикутників O_1EQ і AEQ маємо:

$$r_1 = \frac{EQ}{\cos \angle EQO_1} = \frac{AE \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = AE \cdot \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}}.$$

Звідки $AE = \frac{r_1 \cos^2 \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$. Отже, для доведення формули (1)

достатньо показати, що

$$r_1 \cos^2 \frac{A}{2} = r. \quad (2)$$

Тут доречно буде провести аналогію з тригонометричним доведенням формули Ейлера ($OI^2 = R^2 - 2Rr$) (див. книгу «Треугольник и тетраэдр в задачах»).

Оскільки задане коло и коло, описане навколо трикутника, дотикаються, то $OO_1 = R - r_1$, де R — радіус описаного кола. Точка O_1 належить бісектрисі кута A , тому

$$\angle OAO_1 = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

(вважаємо, що $\angle B > \angle C$). Застосуємо теорему косинусів до трикутника AOO_1 :

$$AO = R, \quad AO_1 = \frac{r_1}{\sin \frac{A}{2}},$$

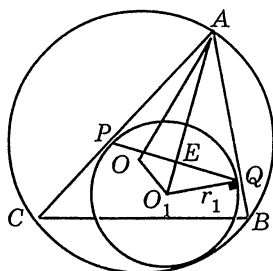


Рис. 66.2

отже,

$$(R - r_1)^2 = R^2 - 2R \cdot \frac{r_1}{\sin \frac{A}{2}} \cos \frac{B-C}{2} + \frac{r_1^2}{\sin^2 \frac{A}{2}},$$

$$r_1 \sin^2 \frac{A}{2} - r_1 = -2R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} + 2R \sin^2 \frac{A}{2},$$

$$r_1 \cos^2 \frac{A}{2} = 2R \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{A}{2} \right),$$

$$r_1 \cos^2 \frac{A}{2} = 2R \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right),$$

$$r_1 \cos^2 \frac{A}{2} = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Оскільки за відомою формулою права частина рівності дорівнює r , то

$$r_1 \cos^2 \frac{A}{2} = r,$$

тоді формулу (2), отже, і саму задачу, доведено. ●

Для доведення іншими способами нам знадобиться *лема Архімеда*.

Лема Архімеда

Якщо деяке коло дотикається до заданого кола і його хорди, то пряма, що з'єднує точки дотику, проходить через середину дуги, що стягується хордою.

● *Доведення. Перший спосіб.* Нехай O, O_1 — центри даних кіл, T_1, T_2 — точки дотику кіл і хорди BC більшого кола, A — точка перетину прямої T_1T_2 з більшим колом. Трикутники $O_1T_1T_2$ і OT_1A — рівнобедрені, тому $\angle O_1T_2T_1 = \angle O_1T_1T_2 = \angle OT_1A = \angle OAT_1$, звідки $O_1T_2 \parallel OA$. Але $O_1T_2 \perp BC$, відповідно, $OA \perp BC$ і тому

$$\cup AB = \cup AC.$$

Другий спосіб. Розглянемо гомоте-
тію з центром в точці T_1 і коефіцієн-

том $\frac{R}{r}$, де R і r — радіуси великого і
малого кіл (рис. 66.4). При такій го-
мотетії менше коло перейде в більше,

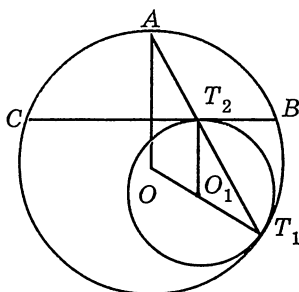


Рис. 66.3

а хорда BC — в дотичну t до більшого кола в точці A , при цьому $t \parallel BC$. Оскільки в такому випадку $\cup AB = \cup AC$, то лему Архімеда доведено. ●

Другий спосіб (за допомогою леми Архімеда і допоміжного кола)

● Збережемо всі позначення із «тригонометричного способу». Нехай T — точка дотику заданого кола і кола, описаного навколо трикутника ABC (рис. 66.5). Проведемо бісектрису кута BTC . Нехай вона перетинатиме відрізок PQ у деякій точці D . Доведемо, що

$$\angle PCD = \frac{1}{2} \angle ACB. \quad (3)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \angle CPD + \angle CTD &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) + \frac{1}{2} \angle CTB = \\ &= 90^\circ + \frac{A}{2} + \frac{1}{2} (180^\circ - A) = 180^\circ. \end{aligned}$$

Відповідно, чотирикутник $CPDT$ — вписаний, тому $\angle PTD = \angle PCD$.

Скористаємося лемою Архімеда. Нехай пряма PT перетинає більше коло в точці F . Тоді $\cup CF = \cup AF = \frac{1}{2} \cup AC$.

Маємо обчислення: $\angle CTD = \angle CTF + \angle FTD = \frac{\angle ABC}{2} + \angle ACD$.

З іншого боку:

$$\angle CTD = \frac{1}{2} \angle CTB = \frac{1}{2} (180^\circ - A) = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

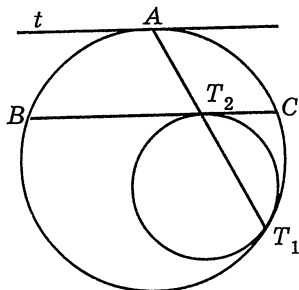


Рис. 66.4

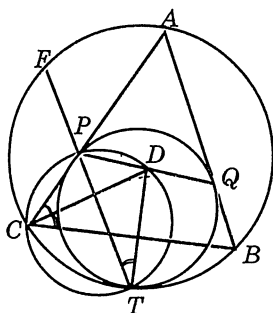


Рис. 66.5

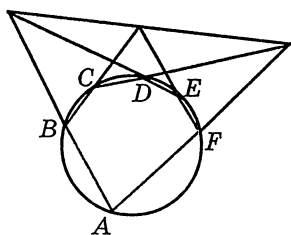


Рис. 66.6

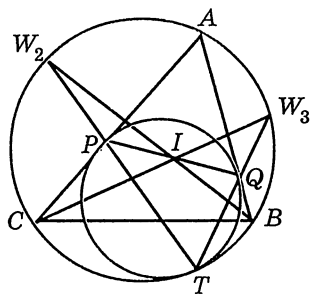


Рис. 66.7

відповідно,

$$90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} = \frac{\angle ABC}{2} + \angle ACD, \angle ACD = \frac{\angle ACB}{2}.$$

Рівність (3) доведено, відповідно, CD — бісектриса кута ACB .

Аналогічно доводиться, що BD — бісектриса кута ABC , тоді точка D — інцентр I трикутника ABC , отже, D — середина PQ ($AP = AQ$). ●

Третій спосіб (теорема Кезі — доведена і може застосовуватися до даної задачі)

Теорема Паскаля

Якщо шестикутник $ABCDEF$ вписано в коло і протилежні його сторони (AB і DE , BC і EF , CD і FA) не паралельні, то точки перетину продовжень цих сторін лежать на одній прямій (рис. 66.6).

Четвертий спосіб (застосування теореми Паскаля і леми Архімеда)¹

● **Доведення.** За лемою Архімеда пряма PT перетинає дугу AC в її середині — точці W_2 (рис. 66.7).

Аналогічно пряма TQ перетинає дугу AB в точці W_3 . Перетин прямих BW_2 і CW_3 — є інцентром I трикутника ABC .

Доведемо, що він належить відрізку PQ .

Розглянемо шестикутник TCW_2AW_3B . Точки перетину його протилежних сторін (P , I , Q) належать одній прямій PQ . ●

Гадаю, що застосування знаменитих теорем для доведення запропонованої задачі цим не обмежиться. Подивимось!

¹ Доведення задачі взято з книги Лейфура В. М., Мітельман Ш. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Задачі міжнародних математичних олімпіад. — Львів, 1999.

СВЯТО, ЯКЕ ЗАВЖДИ

Ефект оберненої задачі досить часто підсилюється несподіванкою. Здавалося, що трапеція, а особливо трапеція рівнобедрена, досліджена вздовж і впоперек. А все ж... Все ж одна із обернених задач не залишала мене в спокої:

Довести, що якщо в трапеції $ABCD$, де AD і BC — основи ($AD > BC$), $AB + BD = AC + CD$, то трапеція рівнобедрена (Методи розв'язання задач з геометрії. — К.: Абрис, 1994).

Її розв'язання (алгебраїчне) мені не подобалося, бо було надто громіздким. Та що поробиш, якщо іншого немає...

Аж якось... а «якось» це розтягнулося на цілих вісім років — вдалося! Ось інше розв'язання:

● Оскільки $AB + BD = AC + CD$, то периметр трикутника $ABD(2p_2)$ дорівнює периметру трикутника $ACD(2p_1)$ (сторона AD у них спільна) (рис. 67.1). Але трикутники ACD і ABD рівновеликі, а оскільки периметри в них рівні, то рівними будуть і радіуси вписаних кіл (I_1 і I_2 — їх центри) (рис. 67.2).

Позначимо K_1 і K_1' точки дотику цих кіл з боковими сторонами трапеції. Оскільки $CK_1 = p_1 - AD$, а $BK_1' = p_2 - AD$, і $p_1 = p_2$, то $CK_1 = BK_1'$, тоді $\angle I_1CK_1 = \angle I_2BK_1'$, або $\angle ACD = \angle ABD$, звідси стало очевидним, що трапеція рівнобедрена. ●

Навіть більше!

Маємо нову **обернену** задачу:

Якщо в трапеції $ABCD$ периметр трикутника ABO дорівнює периметру трикутника COD (O — точка перетину діагоналей), то трапеція рівнобедрена.

● Оскільки трикутники ABO і COD рівновеликі, то доведення аналогічне до попередньої задачі. ●

Але не будемо поспішати зі святковим феєрверком, який, мабуть, заслужений! Свято триває: його нам подарують кути ABD і ACD (рис. 67.1)! Для мене досить очевидним був факт, що

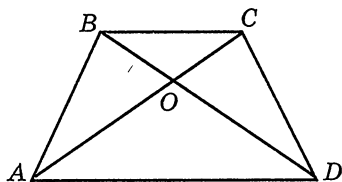


Рис. 67.1

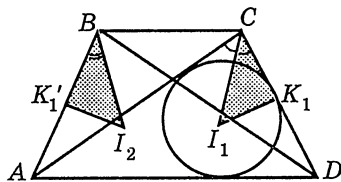


Рис. 67.2

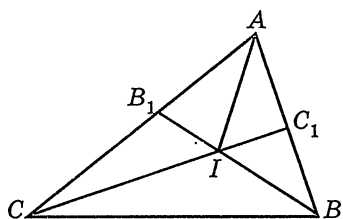


Рис. 67.3

із рівності цих кутів маємо рівність відрізків AB і CD .

Дійсно, оскільки кути рівні, то точки A, B, C, D належать колу, а трапеція, вписана в коло, рівнобедрена. Отже, очевидний на перший погляд факт рівності бічних сторін потрібно доводити за допомогою кола. Факт цей ще більш чудовий тому, що рівність «аналогічних» кутів (наприклад BAD і CDA) не потребує «допоміжного» кола для доведення рівнобедреності трапеції. Може, існує інше доведення?

Існує!

Але перед тим, як з ним ознайомитися, спробуйте довести самостійно.

Отже, трикутник ABD дорівнює трикутнику ACD за... стороною, протилежному куту, висоті, опущеній на цю сторону (a, A, h_a).

Рівність таких трикутників спробуйте довести самі, а якщо не вийде — див. «Метод ланцюжка» в «Методах розв'язання задач з геометрії».

І, на завершення, про «вишукану» рівність трикутників, яку не завадило б і запам'ятати.

Доведення задачі Штейнера-Лемуса: якщо бісектриса l_c дорівнює бісектрисі l_b , то $b = c$ (рис. 67.3). Трикутники ABV_1 і ACC_1 рівні (трикутники Паппа) за a, A, l_a . Ще раз — фейерверк! Свято на славу геометрії!

І на десерт...

Задача. Нехай M_1 — середина основи AD трапеції $ABCD$. Довести, що якщо $AB + BM_1 = CD + CM_1$, то трапеція рівнобедрена.

Задача. Нехай E_1 і E_2 — середини сторін AB і CD трапеції $ABCD$. Якщо периметри трикутників AE_1D і AE_2D рівні, то трапеція $ABCD$ — рівнобедрена. Довести.

ЧАСТИНА II

СТЕРЕОМЕТРІЯ

Глава 68

СТРИБНУТИ ВИЩЕ ГОЛОВИ

Використати формулу об'єму піраміди $V = \frac{1}{6} a_1 a_2 d \sin \varphi$

для школяра — неабиякий стрибок, тому що вона, ця формула, «не за програмою». А довести цю формулу у новий спосіб, який не має нічого спільного з відомим, який ніде не був опублікованим — це стрибок ще «крутіший» за перший, стрибок, яким можна гордитися.

● Отже, спосіб перший (традиційний): a_1, a_2 — довжини мимобіжних ребер тетраедра, що перехрещуються, d — відстань між ними, φ — кут між ними. Нехай B_1ABD — заданий тетраедр. $BB_1 = a_1, AD = a_2$. Доповнимо його до паралелепіпеда (рис. 68.1). Позначимо V_T і V_{Π} відповідно об'єми тетраедра і паралелепіпеда.

Тоді $V_T = \frac{1}{6} V_{\Pi}$, оскільки

$$V_T = \frac{1}{3} H \cdot S_{ABD} = \frac{1}{3} H \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{6} H S_{ABCD} = \frac{1}{6} V_{\Pi}.$$

Оскільки відстань d дорівнює відстані між гранями AA_1D_1D і BB_1C_1C , то $V_{\Pi} = d \cdot S_{BB_1C_1C}$.

Але $S_{BB_1C_1C} = BB_1 \cdot BC \sin \angle B_1BC$.

Оскільки $BC = AD$, $\angle B_1BC = \varphi$, то $S_{BB_1C_1C} = BB_1 \cdot AD \sin \varphi$, формулу $V = \frac{1}{6} a_1 a_2 d \sin \varphi$ доведено. ●

А тепер... Спосіб другий!

Доведення по-новому!

● Розглянемо тетраедр $SABC$ (рис. 68.2). Проведемо переріз FBC через ребро BC і відрізок FE , перпендикулярний до ребер AS і BC . Зрозуміло, що $FE = d$.

Розглянемо тетраедр $SFCB$. Проведемо через точку F пряму t , паралельну до BC , і опустимо перпендикуляр SH_1 на неї. Доведемо, що SH_1 — висота цього тетраедра. Для цього доведемо,

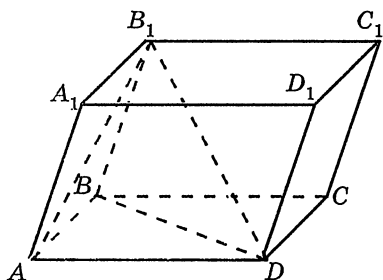


Рис. 68.1

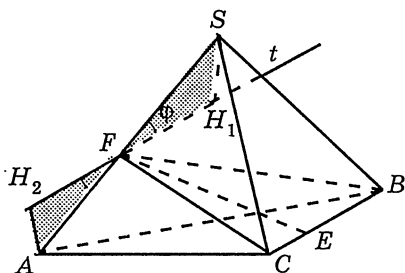


Рис. 68.2

що відрізок FE перпендикулярний до площини Sft . Дійсно, оскільки пряма t паралельна до BC , пряма FE перпендикулярна до SF і FE перпендикулярна до t , то відрізок перпендикулярний до площини FSH_1 , відповідно, SH_1 перпендикулярний до FE .

Отже, $SH_1 \perp FE$ і $SH_1 \perp t$, відповідно, відрізок SH_1 перпендикулярний до площини FBC , або SH_1 — висота піраміди $SFBC$.

Позначимо V — об'єм тетраедра $SABC$, V_1 — об'єм тетраедра $SFBC$, V_2 — об'єм тетраедра $AFBC$, Q — площа перерізу FBC . Із точки A опустимо на пряму t перпендикуляр AH_2 . Аналогічно доводиться, що AH_2 — висота тетраедра $AFBC$.

$$AH_2 = FA \sin \angle AFH_2 = AF \sin \varphi.$$

Маємо

$$V_1 = \frac{1}{3} SH_1 \cdot Q = \frac{1}{3} FS \cdot \sin \varphi \cdot Q, \quad V_2 = \frac{1}{3} AH_2 \cdot Q = \frac{1}{3} FA \cdot \sin \varphi \cdot Q.$$

Оскільки $V = V_1 + V_2$, то

$$V = \frac{1}{3} \sin \varphi \cdot Q (FS + FA) = \frac{1}{6} BC \cdot FE \cdot SA \sin \varphi = \frac{1}{6} a_1 a_2 d \sin \varphi. \quad \bullet$$

От вам і стрибок!

Глава 69

ПОШУК НЕТРИВІАЛЬНИХ КУТІВ У ПРАВИЛЬНІЙ ПІРАМІДІ

Правильна піраміда вже однією своєю назвою настроює на мажор. Досліджена вздовж і впоперек, вона настільки відома, що дає можливість досить швидко знайти шлях для розв'язання більшості задач як «чистої» стереометрії, так і задач геометрії із «застосуванням тригонометрії». Але... Несподіванки можуть з'явитися уже тоді, коли потрібно провести не «звичну» висоту

піраміди із вершини на основу, а із вершини основи на бічну грань. Ніби загіпнотизовані, не лише шкільні підручники, а й посібники для абітурієнтів штампують в умові кут нахилу бічного ребра піраміди до основи. Разом з тим значно цікавішими є *кути нахилу ребер основ до бічних граней піраміди*. Саме про такі кути йтиметься далі. Зовні схожі на загальноприйняті, такі кути дають можливість глибше осягнути суть стереометрії й з подивом зрозуміти, що навіть у правильних пірамідах існують нестандартні ситуації у, здавалося би, зовсім елементарних випадках.

Вивчення почнемо з кутів правильної **трикутної** піраміди.

Правильна трикутна піраміда

Загальна умова: дано плоский кут α при вершині правильної піраміди $SABC$.

▮ **Задача 1.** Знайти кут x між ребром SA і гранню SBC .

● Врахуємо, що вершина A проектується в ортоцентр H_1 грані SBC (рис. 69.1). Застосуємо «формулу трьох косинусів»:

$$\cos \angle ASC = \cos \angle ASH_1 \cdot \cos \angle CSH_1,$$

або

$$\cos \alpha = \cos x \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \cos x = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}. \quad \bullet$$

▮ **Задача 2.** Знайти кут нахилу x ребра основи до бічної грані.

● Знайдемо кут $\angle ACH_1$ (рис. 69.1). Задача аналогічна до попередньої:

$$\cos \angle ACB = \cos \angle H_1CB \cdot \cos \angle ACH_1,$$

$$\cos 60^\circ = \cos \frac{\alpha}{2} \cos x,$$

$$\cos x = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad \bullet$$

▮ **Задача 3.** Знайти кут x між висотою BM основи ABC і бічною гранню SBC .

● Оскільки проекцією вершини A буде ортоцентр H_1 грані SBC , то проекцією точки M (рис. 69.1) буде точка K — середина CH_1 . Знайдемо $\angle CK$:

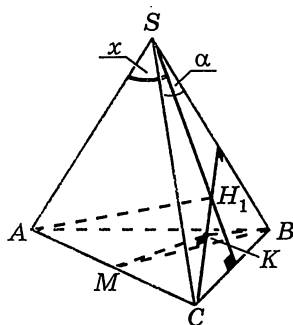


Рис. 69.1

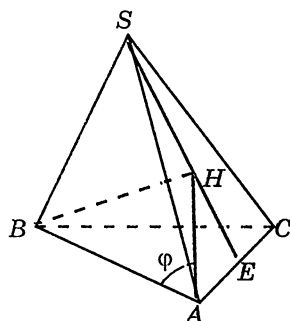


Рис. 69.2

$$CK = \frac{1}{2} CH_1 = \frac{a}{2 \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{ctg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= \frac{a}{4 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Із } \triangle MKS: MK = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$\text{Тоді } \sin x = \frac{MK}{MB} = \frac{\sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}{2\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 4. У правильній трикутній піраміді $SABC$ AB — сторона основи — утворює з площиною SAC кут, що дорівнює φ . Знайти бічну поверхню піраміди, якщо сторона основи дорівнює a .

● Нехай H — проекція вершини B на грань SAC (рис. 69.2). Тоді $\angle BAH = \varphi$, $AH = a \cos \varphi$. Позначимо R — радіус кола, описаного навколо трикутника SAC . Маємо

$$AH = 2R \cos \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Отже, } a \cos \varphi = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ звідки } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2 \cos \varphi}; \quad SE = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$$

$$SE = \frac{a}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2 \cos \varphi}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4 \cos^2 \varphi}}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cos^2 \varphi - 1}};$$

$$S_{\delta} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cos^2 \varphi - 1}} = \frac{3}{8} a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin(60^\circ - \varphi) \sin(60^\circ + \varphi)}}. \quad \bullet$$

Задача 5. Знайти кут між апофемою піраміди SE і гранню ASB , якій вона не належить.

● Із точки C опустимо на грань SAB перпендикуляр CH_1 (рис. 69.3). Оскільки площина CH_1B перпендикулярна до грані ASB , то перпендикуляр EF , опущений із середини сторони BC ,

точки E , на грань ASB , належить площині CH_1B . Шуканий кут — кут ESF ,

(із $\triangle CH_1B$).

$$\sin \angle ESF = \frac{FE}{SE}.$$

Нехай $BC = a$, $SE = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Знайдемо

CH_1 (H_1 — ортоцентр грані SAB). Застосуємо «формулу трьох косинусів»:

$$\cos \angle ABC = \cos \angle H_1BC \cdot \cos \angle H_1BA,$$

$$\cos 60^\circ = \cos x \cdot \cos \frac{\alpha}{2}; \quad \cos x = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$CH_1 = a \sin x = a \sqrt{1 - \cos^2 x} = a \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1};$$

$$FE = \frac{1}{2} CH_1 = \frac{a}{4 \cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}, \quad \sin \angle ESF = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}. \bullet$$

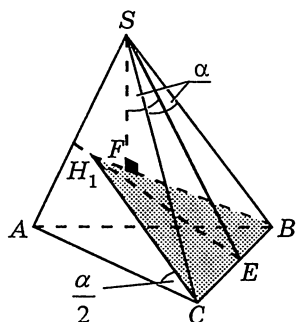


Рис. 69.3

Правильна чотирикутна піраміда

Загальна умова: плоский кут при вершині S правильної чотирикутної піраміди дорівнює α .

Задача 1. Знайти кут нахилу ребра AD до площини SDC .

● Проведемо осьовий переріз SMN (рис. 69.4). Шуканий кут x — це кут MNS : позначимо O — центр основи, a — ребро основи.

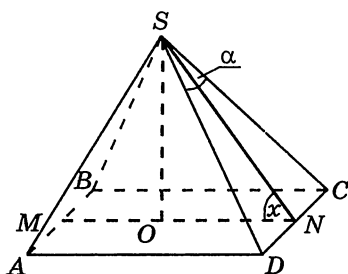


Рис. 69.4

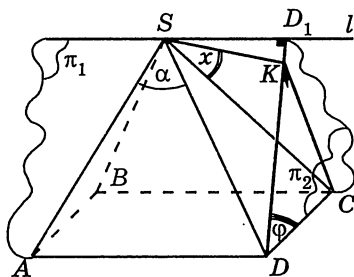


Рис. 69.5

$$\cos x = \frac{ON}{SN} = \frac{a \cdot 2}{2 \cdot a \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \text{ Отже, } \cos x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \bullet$$

Задача 2. Знайти кут нахилу ребра SC до грані SAD .

● Проведемо через точку S пряму l , паралельну до ребра AD (рис. 69.5). Із точки D опускаємо перпендикуляр DD_1 на l . Через DD_1 і l проводимо площину π_1 . Опускаємо перпендикуляр SK на π_1 . Кут KSC — шуканий (угол x). Дійсно, $AD \perp DD_1$ і $AD \perp DC$, отже, ребро AD перпендикулярне до площини D_1DC (площина π_2), тоді площини π_1 і π_2 перпендикулярні. Перпендикуляр KC , який належить площині π_2 , перпендикулярний до площини π_1 , отже, і до грані SAD . Відповідно, кут KSC — шуканий. Знайдемо його. Нехай $\angle KSC = x$. Із $\triangle SKC$:

$$\sin x = \frac{KC}{SC}; \quad SC = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

(a — ребро основи). Введемо позначення: φ — кут KDC . Кут φ — кут нахилу бічної грані піраміди до основи. Із цього маємо:

$$\cos \varphi = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad \text{Тоді } CK = CD \cdot \sin \varphi = a \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \text{ Отже,}$$

$$\sin x = \frac{KC}{SC} = \frac{a \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}. \bullet$$

Задача 3. Знайти лінійний кут двогранного кута між протилежними бічними гранями.

● Знайдемо кут між гранями SAB і SDC (рис. 69.6). Із умови $AB \parallel DC$ випливає, що ребро двогранного кута паралельне до AB і DC . Проведемо апофеми SN і SM . Нехай $\angle MSN = x$. Знайдемо його.

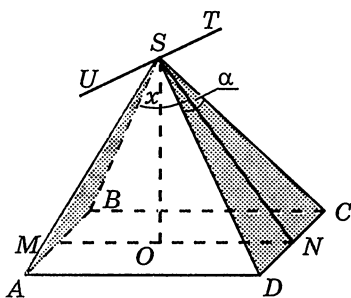


Рис. 69.6

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{ON}{SN} = \frac{a \cdot 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2a}; \quad \sin \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \bullet$$

Задача 4. Знайти кут між апофемою SE грані DSC і грані ASB .

● Проведемо осьовий переріз SKE (цей переріз перпендикулярний до площини SAB , отже, висота EM трикутника SKE буде перпендикуляром до площини ASB (рис. 69.7)).

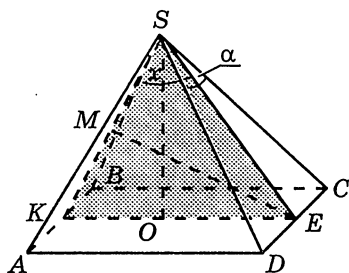


Рис. 69.7

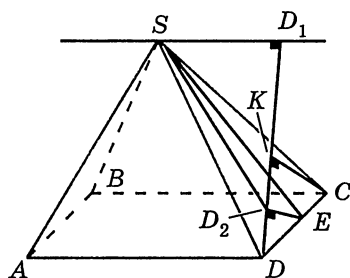


Рис. 69.8

Шуканий кут $KSE = x$. А цей кут знайдено у попередній задачі.

Отже, $\sin \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. ●

Задача 5. Знайти кут між апофемою SE і гранню SAD .

● Задача є наслідком задачі 2: знайти кут між ребром SC і гранню SAD . Це буде кут ESD_2 ($\angle \varphi$), де $ED_2 \perp KD$ (рис. 69.8)

$$\sin \varphi = \frac{D_2E}{SE}; \quad SE = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}; \quad D_2E = \frac{1}{2} CK = \frac{a \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{2};$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{a \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{2}}{\frac{2 \cdot a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad \bullet$$

Глава 70

ЗАПЛАНОВАНІ НЕСПОДІВАНКИ В ПРАВИЛЬНІЙ ПІРАМІДІ

Вивчення рівностей як лінійних, так і кутових елементів плідне в планіметрії (згадайте хоча би задачу Штейнера-Лемуса). Стереометрія не розбалувана подібними ситуаціями, хоча, звісно, окремі задачі зустрічаються в практиці конкурсних екзаменів. Вивчення зв'язку між кутами правильної піраміди необхідне для розв'язання задач. Тому привід вернутися до цього питання закономірний (у цьому і полягає запланованість проблеми). Тим більше, що кожна із задач, сформульована як

рівність пари неодноіменних кутів правильної піраміди, відрізняється одна від одної як за геометричним розв'язанням, так і за отриманими результатами.

І. Правильна трикутна піраміда

Задача 1. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює куту між бічними ребрами і основою. Знайти цей кут.

● У правильній трикутній піраміді $SABC$ (рис. 70.1) точка O — центр основи. За умовою $\angle BSC = \angle SBO$. Позначимо його α . За

формулою трьох косинусів: $\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \alpha \cdot \cos 30^\circ$, або

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ або } 2\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{3} \cos \alpha.$$

$$\text{Тоді } 2(1 - \cos \alpha) = 3\cos^2 \alpha, 3\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 2 = 0,$$

$$\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}, \alpha = \arccos \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}. \bullet$$

Задача 2. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює двогранному куту при ребрі основи. Знайти його.

● У піраміді $SABC$ (рис. 70.2) $\angle BSC = \angle SEO = \alpha$ (E — середина ребра BC). Маємо (покладемо $BC = a$): $SE = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$; $SE = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \alpha}$;

$$\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \alpha}, \text{ отже, } \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha}, \text{ або } \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1}{3 \cdot \cos^2 \alpha}.$$

Нехай $\cos \alpha = y$. Отримали рівняння $3y^3 + 3y^2 + y - 1 = 0$. Шуканий кут — корінь цього рівняння. ●

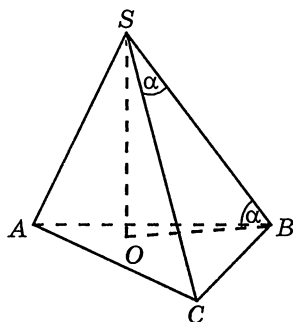


Рис. 70.1

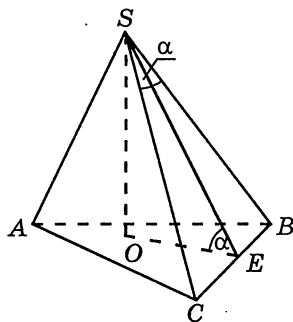


Рис. 70.2

Задача 3. У правильній трикутній піраміді кут нахилу бічного ребра до площини основи дорівнює двогранному куту при ребрі основи. Знайти цей кут.

● За умовою $\angle SBO = \angle SEO$ (E — середина BC). Нехай сторона основи дорівнює a (рис. 70.3). Тоді

$$SO = \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha \text{ і } SO = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha.$$

Отримали протиріччя. За такої умови піраміда не існує. ●

Задача 4. Знайти плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди, якщо він дорівнює двогранному куту при бічному ребрі.

● За умовою $\angle BSC = \angle CDB = \alpha$ (рис. 70.4). Із трикутника DEC :

$$DC = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad (a \text{ — сторона основи}).$$

Із трикутника ADC : $DC = a \sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = a \cos \frac{\alpha}{2}$. Отже,

$$\frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2}; \quad \sin \alpha = 1; \quad \alpha = 90^\circ.$$

За такої умови піраміда прямокутна. ●

Задача 5. Знайти кут нахилу α бічного ребра SA до основи правильної трикутної піраміди $SABC$, якщо він дорівнює двогранному куту при бічному ребрі.

● Нехай O — центр основи ABC піраміди (рис. 70.5), E — середина BC . Тоді $DE = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ ($\triangle CDE$), $DE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$ ($\triangle ADE$).

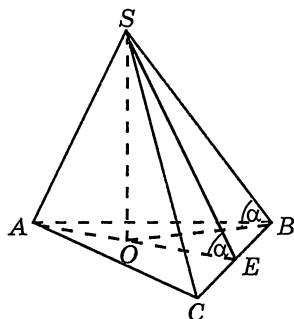


Рис. 70.3

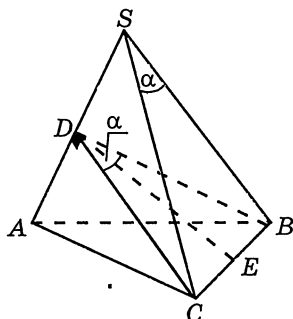


Рис. 70.4

Маємо $\sqrt{3} \sin \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Розв'яжемо рівняння

$$2\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}; \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \alpha = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}}. \bullet$$

Задача 6 (!). Знайти кут нахилу бічного ребра правильної трикутної піраміди до основи, якщо він дорівнює куту нахилу бічного ребра до бічної грані.

● *Перший спосіб.* Нехай AH_1 — висота піраміди (рис. 70.6), $\angle ASH_1 = \angle SBO = \alpha$. Для $\angle ASH_1$ за теоремою трьох синусів:

$$\cos \beta = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\beta}{2} \quad (1)$$

(ввели $\angle \beta$ — плоский кут при вершині піраміди). Для $\angle SBO$ аналогічно

$$\sin \frac{\beta}{2} = \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$$

Виразимо $\cos \alpha$ із рівностей (1) і (2):

$$\cos \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos \frac{\beta}{2}}, \quad (1^1)$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \sin \frac{\beta}{2}}{\sqrt{3}}. \quad (2^1)$$

Порівнюючи (1¹) і (2¹), маємо:

$$\frac{\cos \beta}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\beta}{2},$$

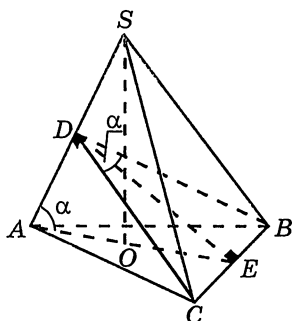


Рис. 70.5

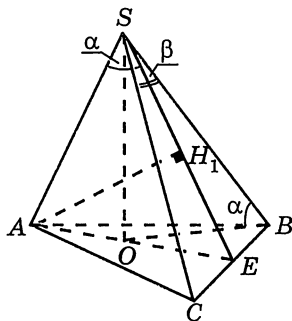


Рис. 70.6

$$\text{або } \operatorname{tg} \beta = \sqrt{3}, \beta = 60^\circ, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отримали правильний тетраедр.

Другий спосіб. Трикутник SBO дорівнює трикутнику ASH_1 : $OB = SH_1$, звідси $\angle BSC = 60^\circ$, отже, тетраедр правильний. ●

Задача 7. Знайти кут нахилу бічного ребра до площини бічної грані правильної трикутної піраміди, якщо він дорівнює двогранному куту при бічному ребрі.

● Нехай CDB — лінійний кут при ребрі AS (рис. 70.7).

Позначимо $\angle ASH_1 = \angle CDB = \alpha$, $\angle BSC = \beta$. Із $\triangle ESC$ (E — середина BC):

$$a = 2SC \sin \frac{\beta}{2}. \quad (1)$$

Із $\triangle DCE$: $a = 2DC \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$. Але $DC = SC \cdot \sin \beta$ ($\triangle SDC$), отже,

$$a = 2SC \sin \beta \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Порівняємо (1) і (2) й отримаємо $\sin \frac{\beta}{2} = \sin \beta \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, або

$$2 \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 1,$$

звідки

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (3)$$

Маємо рівність:

$$\cos \beta = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\beta}{2}. \quad (4)$$

Підставимо (3) в (4). Отримаємо:

$$2 \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 - 1 = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\frac{2 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}; \quad \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

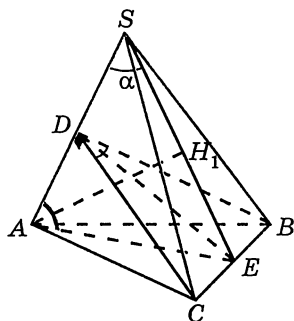


Рис. 70.7

$$\cos \alpha = \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

1) $\cos \alpha = 0$; $\alpha = 90^\circ$; тетраедр прямокутний.

2) $\sin \frac{\alpha}{2} = 1$; $\alpha = 180^\circ$, тетраедр не існує. ●

Задача 8. Знайти кут нахилу бічного ребра до основи правильної трикутної піраміди, якщо він дорівнює куту нахилу ребра основи до бічної грані. $\angle ACH_1 = \angle SBO = \alpha$ (рис. 70.8).

● Введемо $\angle \beta = \angle BSC$. Для кута SBO $\sin \frac{\beta}{2} = \cos \alpha \cdot \cos 30^\circ$, або

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\beta}{2}. \quad (1)$$

Складемо друге рівняння. Із $\triangle AH_1C$: $CH_1 = a \cos \alpha$. Із $\triangle CH_1E$:

$$CH_1 = \frac{a}{2 \cos \frac{\beta}{2}}. \text{ Отже, } a \cos \alpha = \frac{a}{2 \cos \frac{\beta}{2}}.$$

Маємо друге рівняння:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2 \cos \frac{\beta}{2}}. \quad (2)$$

Із рівнянь (1) і (2): $\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\beta}{2}}$, або $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = 60^\circ$.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \bullet$$

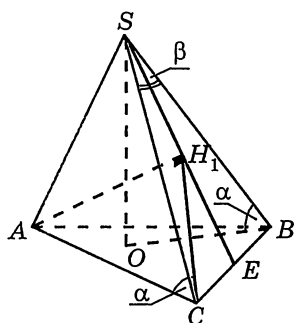


Рис. 70.8

Задача 9. Знайти двогранний кут при ребрі основи правильної трикутної піраміди, якщо він дорівнює куту нахилу ребра основи до бічної грані. Маємо $\angle ACH_1 = \angle SEA = \alpha$.

$$\bullet AH_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \quad (\triangle AH_1E) \text{ (рис. 70.9).}$$

$$AH_1 = a \sin \alpha \quad (\triangle AH_1C),$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = a \sin \alpha,$$

такої піраміди не існує. ●

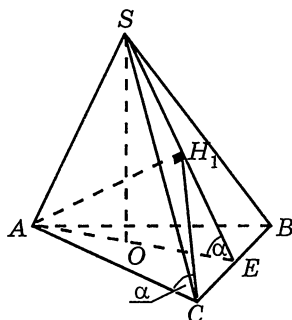


Рис. 70.9

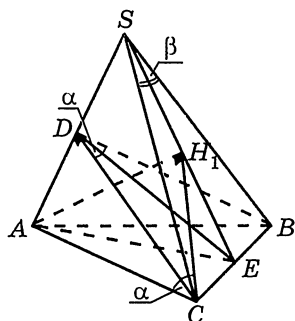


Рис. 70.10

Задача 10(!). У правильній трикутній піраміді двограний кут при бічному ребрі дорівнює куту нахилу ребра основи до бічної грані. Знайти цей кут.

● За умовою $\angle ACH_1 = \angle BDC = \alpha$ (рис. 70.10). Позначимо $\beta = \angle BSC$. За формулою трьох косинусів отримаємо таке:

$$\cos 60^\circ = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\beta}{2}, \text{ або}$$

$$2 \cos \alpha \cdot \cos \frac{\beta}{2} = 1. \quad (1)$$

Складемо друге рівняння. Із трикутника ADB :

$$BD = a \cos \frac{\beta}{2} \quad (a \text{ — сторона основи}).$$

$$\text{Із трикутника } BDE: BD = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \text{ Отже, } \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = a \cos \frac{\beta}{2},$$

або

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} = 1. \quad (2)$$

Маємо систему рівнянь (1) і (2), звідки $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha$ і $\alpha = 60^\circ$.

Отже, $\alpha = 60^\circ$. ●

Задача 11. Знайти кут нахилу бічного ребра правильної трикутної піраміди до бічної грані, якщо він дорівнює куту між стороною основи і бічною гранню.

● *Перший спосіб.* Оскільки $\angle ASH_1 = \angle ACH_1$, то $\triangle ASH_1 = \triangle ACH_1$ (за катетом і гострим кутом) (рис. 70.11). Відповідно,

$$AC = SA, \text{ отже, тетраедр правильний; } \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

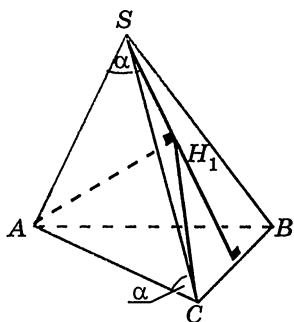


Рис. 70.11

Другий спосіб. Введемо $\angle \beta$ — кут BSC:

$$\angle ASH_1 = \alpha,$$

$$\cos \beta = \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

(теорема трьох косинусів для кута ASC).

$$\sin \frac{\beta}{2} = \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (2)$$

(теорема трьох косинусів для кута ACS).

$$\cos \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos \frac{\beta}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \beta}. \quad \text{Отже, } \frac{\cos \beta}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \beta}, \quad \text{звідси}$$

$$\beta = \frac{\pi}{3}; \quad \left(\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad \bullet$$

Задача 12. Апофема правильної трикутної піраміди утворює з основою той же кут, що і з бічною гранню. Знайти цей кут.

● Позначимо x — шуканий кут. Маємо

$$\sin x = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}},$$

де α — плоский кут при вершині тетраедра.

Позначимо β — кут нахилу апофemi до основи.

Оскільки

$$\cos \beta = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}, \quad \text{то } \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3}}.$$

За умовою $\sin \beta = \sin x$, або

$$\frac{3 - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)}{4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}. \quad (1)$$

Маємо:

$$\frac{3 - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3} = \frac{3 - 4 \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} - 1 \right)}{3} = \frac{7 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (2)$$

Підставимо (2) в (1):

$$\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)}{4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} = \frac{7 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Позначимо $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = y$. Тоді $\frac{(1-y)(4y-1)}{4y^2} = \frac{7y-4}{3y}$, або

$$40y^2 - 31y + 3 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо кут. ●

Задача 13. У правильній трикутній піраміді $SABC$ кут між апофемою SE грані SBC і гранню SAC дорівнює куту між ребром AS і гранню SBC . Знайти плоский кут при вершині піраміди.

● Нехай α — плоский кут при вершині піраміди. Маємо

$$\sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}},$$

або

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)^2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1},$$

$$4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(-4 \cos^4 \frac{\alpha}{2} + 5 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right) = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right).$$

Нехай $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = y$.

Тоді $y_2 = y_3 = \frac{1}{4}$, звідси $\alpha = 60^\circ$.

$$-16y^3 + 20y^2 - 4y = (1-y)(4y-1),$$

$y_1 = 1$ — тетраедр не існує. ●

II. Правильна чотирикутна піраміда

Задача 1. Знайти плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди, якщо він дорівнює куту нахилу бічного ребра до площини основи.

● Позначимо α — плоский кут при вершині піраміди (рис. 70.12) $SABCD$.

Оскільки $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ$, або $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \cos \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, то

$$\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \bullet$$

Задача 2. Знайти плоский кут при вершині піраміди, якщо він дорівнює куту нахилу бічної грані до площини основи.

● Маємо $\angle DSC = \angle SEO$ (рис. 70.13). Із $\triangle SOE$:

$$SE = \frac{a}{2 \cos \alpha}. \text{ Із } \triangle SEC: SE = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}; \frac{a}{2 \cos \alpha} = \frac{a \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2}; \cos \alpha = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ — отримали кубічне рівняння, розв'язавши яке}$$

можна знайти α . ●

Задача 3. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ кут між ребром SA і площиною основи дорівнює куту між ребром SA і площиною SBC . Знайти цей кут.

● За умовою $\sin \beta = \sin x$, де x — кут нахилу ребра SA до грані SBC (рис. 70.14). За формулою $\sin x = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}$, де

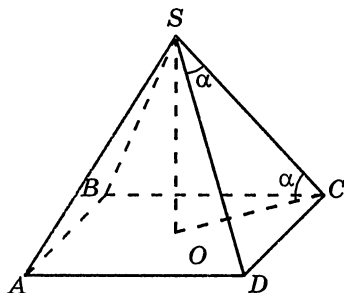


Рис. 70.12

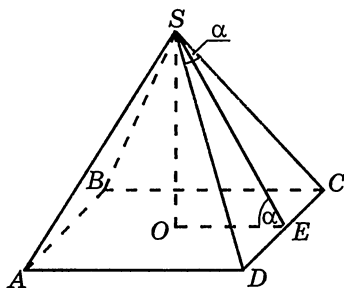


Рис. 70.13

α — плоский кут при вершині S . Оскільки $\cos \beta = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$, отже,

$\sin \beta = \sqrt{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$. Маємо: $1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha$. Позначимо

$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = y$. Отримаємо $1 - 2y = \frac{4y}{1-y} (1-2y)$, або

$$10y^2 - 7y + 1 = 0. \quad y_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{20}, \quad y_1 = \frac{1}{2}; \quad y_2 = \frac{1}{5}.$$

Отже, $\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)_1 = \frac{1}{2}; \quad \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)_2 = \frac{1}{5}$. Знайдемо: $\cos x = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$;

$\cos x_1 = 1$ (для піраміди не має смислу);

$$\cos x_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}; \quad x = \arccos \sqrt{\frac{2}{5}}. \quad \bullet$$

Задача 4. Знайти плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди, якщо він дорівнює двогранному куту при бічному ребрі піраміди.

• Маємо $\angle DSC = \angle BED$ (рис. 70.15). $DE = a \cos \frac{\alpha}{2}$ ($\triangle EDC$);

$$DE = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad (\triangle OED). \quad a \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}; \quad \sin \alpha = \sqrt{2} \text{ — не існує. } \bullet$$

Задача 5. У правильній чотирикутній піраміді двограний кут при основі дорівнює двогранному куту при бічному ребрі піраміди. Знайти цей кут.

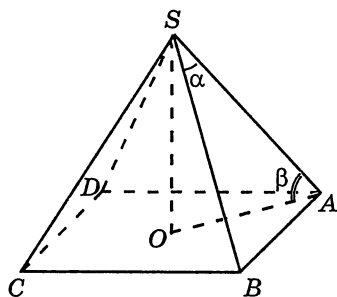


Рис. 70.14

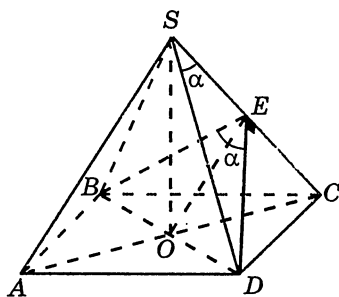


Рис. 70.15

• Маємо $\angle SEO = \angle DFB$ (рис. 70.16).

$$SE = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \quad (\triangle SDE), \quad SE = \frac{a}{2 \cos \alpha} \quad (\triangle SOE).$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

$$FD = \frac{a}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}} \quad (\triangle FDO); \quad FD = a \cos \frac{\beta}{2} \quad (\triangle FDC):$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\beta}{2}.$$

Маємо систему:
$$\begin{cases} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\cos \alpha} \\ \cos \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}} \end{cases}.$$

$$\text{Але } \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \cos^2 \alpha}}.$$

Із другого рівняння системи

$$\frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha}, \quad \text{або} \quad \frac{1}{1 - \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha}; \quad \cos^2 \alpha = -\cos \alpha,$$

звідси $\begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \cos \alpha = -1 \end{cases}$. Такої піраміди не існує. •

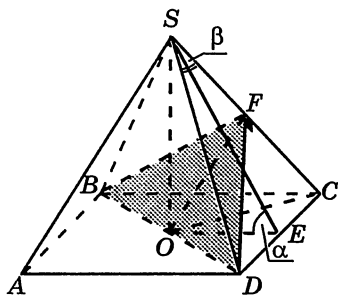


Рис. 70.16

Задача 6. Знайти плоский кут α при вершині правильної чотирикутної піраміди $SABCD$, якщо він дорівнює куту між двома протилежними гранями.

• Скористаємося умовою і формулою: $\sin \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; отже, такої піраміди не існує. •

Задача 7. Плоский кут α при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює куту між апофемою SE грані SDC і гранню SAD . Знайти його.

● Скориставшись умовою і формулою кута, маємо

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{звідки } 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ або } 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}, \quad 4 \cos^6 \frac{\alpha}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1 = 0, \quad 4y^3 - 2y + 1 = 0 —$$

звідси отримуємо: така піраміда не існує. ●

Задача 8. Знайти плоский кут α при вершині правильної чотирикутної піраміди $SABCD$, якщо він дорівнює куту між ребром SC і гранню SAD .

● Оскільки за умовою і формулою: $\sin x = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}$ (x — кут між ребром SC і гранню SAD) $\sin x = \sin \alpha$, маємо

$$\sin \alpha = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}, \text{ або } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\cos \alpha};$$

$$1 + \cos \alpha = 2\sqrt{\cos \alpha}. \quad \cos \alpha = 1, \quad \alpha = 0.$$

Такої піраміди не існує. ●

Глава 71

ПЕРЕРІЗ ЧОТИРЬОХ ОРТОЦЕНТРІВ

«Але ніхто і ніколи...»

Із пісні

Висоти піраміди варті того, аби про них говорити. Тому що звичка — велика сила: звикли до «головної» висоти — із вершини на основу... Як з'ясувалося (див. «Трикутник і тетраедр в задачах»), навіть у правильній трикутній піраміді особливо ніхто й не помічав, що **ортоцентр** бічної грані може бути проекцією вершини основи піраміди.

А що з висотами у правильній чотирикутній піраміді? Про це, м'яко кажучи, писали мало... Або не писали взагалі... Не згадували. Навіть у задачах... Навіть на іспитах...

А дарма! Варто «запустити» задачу: «У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ кут між бічним ребром SD і бічною гранню BSC дорівнює $\alpha...$ », і виникне закономірне запитання: а де проекція вершини D ?

Перед тим, як відповісти на це запитання, доречно згадати про популярну задачу:

Із центра O основи правильної чотирикутної піраміди опущено перпендикуляри OK і OL на суміжні бічні грані. Знайти площу перерізу площиною LOK , якщо $\angle DSC = \alpha$, а сторона основи дорівнює a .

Якщо з точки O в трикутнику SAC провести перпендикуляр OE ($E \in SC$), то переріз BED — шуканий (рис. 71.1).

Оскільки $SC \perp BD$, то ребро SC перпендикулярне до площини трикутника BED , отже, трикутник BED перпендикулярний до граней SBC і SDC . Площині трикутника BED належать чотири ортоцентри: точка H — ортоцентр трикутника BED , точки K і L — ортоцентри граней SDC і SBC і точка O — ортоцентр трикутника SOC . Цій площині також належать висоти піраміди BB_1 і DD_1 , а знаючи це, кути нахилу ребер до бічних граней знайти нескладно. Навіть більше — нескладно знайти кут між діагоналлю BD і бічними гранями піраміди $SABCD$. Звертаємо увагу на розташування точок B_1 і D_1 : $BD_1 = 2BL$, $DB_1 = 2DK$, $BB_1 = 2OK$, $DD_1 = 2OL$ (оскільки $BO = OD$ і $OL \parallel DD_1$, $OK \parallel BB_1$).

І, нарешті, про епіграф. Ніхто і ніколи (принаймні, мені так здається) не звернув увагу на те, що рис. 71.1 — неправильний!!! Чому? Та тому, що... Трикутник BED — **тупокутний** (рис. 71.2). Дійсно, якщо сторона основи дорівнює a , $\angle DSC = \alpha$, то $BD = a\sqrt{2}$;

$$BE = DE = a \cos \frac{\alpha}{2}, \cos \angle BED = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} < 0, \text{ а це означає,}$$

що $\angle BED > 90^\circ$ (і правильним буде рис. 71.2).

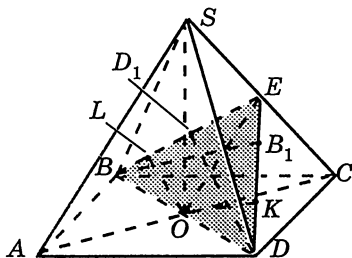


Рис. 71.1

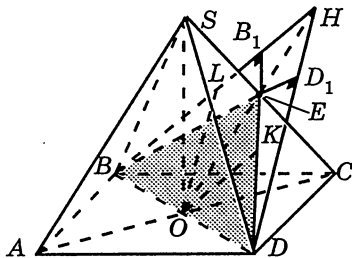


Рис. 71.2

ПОШУКИ І КАВЕРЗИ ДІАГОНАЛІ ОСНОВИ ПРАВИЛЬНОЇ ЧОТИРИКУТНОЇ ПІРАМІДИ

На відміну від правильної трикутної піраміди властивості правильної чотирикутної піраміди вивчені менше. Тому такий компонент, як діагональ основи, якого, звісно, немає в тетраедрі, заслуговує на увагу. Розглянемо деякі власивості діагоналі BD основи $ABCD$ правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ у вигляді задач.

Задача 1. Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди перпендикулярна до ребер, які її не перетинають. Довести.

● Доведення. Дійсно, $BD \perp SC$ за теоремою про три перпендикуляри (узагальненою) (рис. 72.1). ●

Задача 2. Діагональ основи перпендикулярна до осьового перерізу.

● Доведення очевидне. ●

Рівність кутів

Задача 3. Плоский кут при вершині S у правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ дорівнює α . Знайти кут між діагоналлю BD і гранню DSC .

● Із вершини B опустимо перпендикуляр BH на грань SDC (рис. 72.2). Знайдемо кут BDH . Оскільки $SC \perp BD$, то пряма DH перетинатиме пряму SC під прямим кутом (теорема про три перпендикуляри) в точці E . Нехай x — шуканий кут. За формулою трьох косинусів: $\cos \angle BDC = \cos x \cdot \cos \angle EDC$. Оскільки

$$\angle EDC = \frac{\alpha}{2} \text{ (із } \triangle DEC), \text{ то } \cos 45^\circ = \cos x \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}. \bullet$$

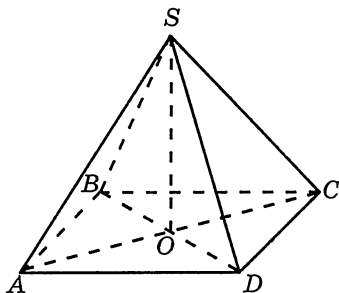


Рис. 72.1

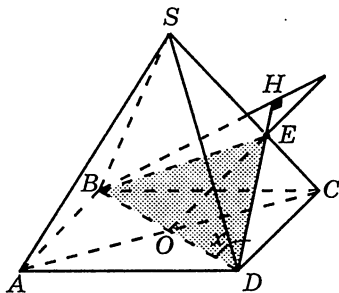


Рис. 72.2

Задача 4. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ кут між ребром SA і гранню SCB дорівнює куту, який утворює діагональ BD з цією гранню. Знайти цей кут.

● Розв'яжемо задачу двома ідейно відмінними способами.

Перший спосіб. За виведеними формулами:

$$\sin x = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}, \quad (1)$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

(x — шуканий кут, α — плоский кут при вершині). Із формули (2):

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}; \\ \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Порівняємо (1) і (3): $\frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$; тоді $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}$ і

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{8}}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Другий спосіб. Доведемо спочатку, що якщо прямі SA і BD , які перетинаються, утворюють рівні кути з площиною SCB , то $SA = BD$ (рис. 72.3).

Дійсно, оскільки $AD \parallel BC$, то пряма AD паралельна до площини SBC і перпендикулярна до AH і DH_1 , які опущено із точок A і D на площину SBC . Очевидно, що прямокутні трикутники BDH_1 і SAH рівні, отже, $SA = BD$. Позначимо рівні за умовою кути ASH і DBH_1 як x .

$$\angle ASH = \angle DBH_1 = x.$$

За формулою трьох косинусів

$$\cos \angle ASB = \cos \angle ASH \cdot \cos \angle BSH. \quad (1)$$

Нехай $\angle ASB = \varphi$, $\angle BSH = y$, $AB = a$. Тоді $BD = AS = SB = a\sqrt{2}$.

Легко визначити, що $\cos \varphi = \frac{3}{4}$, і за формулою (1):

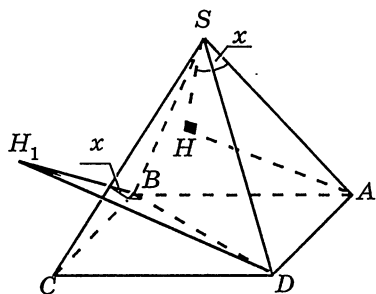


Рис. 72.3

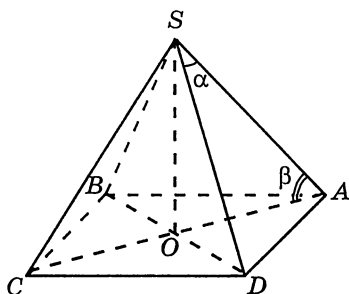


Рис. 72.4

$$\cos \varphi = \cos x \cdot \cos y. \quad (2)$$

Знову використаємо формулу «трьох косинусів»:

$$\cos \angle CSA = \cos \angle CSH \cdot \cos \angle ASH. \quad (3)$$

Оскільки $SC = SA = AC$, $\angle CSA = 60^\circ$, то співвідношення (3) можна записати так:

$$\frac{1}{2} = \cos(\varphi + y) \cdot \cos x.$$

Маємо систему двох рівнянь:
$$\begin{cases} \cos \varphi = \cos x \cdot \cos y \\ 2 \cos x \cdot \cos(\varphi + y) = 1 \end{cases}$$

Оскільки $\cos x \neq 0$, маємо (враховуючи, що $\cos \varphi = \frac{3}{4}$):

$$\cos(\varphi + y) = \frac{2}{3} \cos y; \quad \frac{3}{4} \cos y - \frac{\sqrt{7}}{4} \sin y = \frac{2}{3} \cos y; \quad \operatorname{tg} y = \frac{1}{3\sqrt{7}};$$

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{63}{64}; \quad \cos x = \frac{2}{\sqrt{7}}. \quad \bullet$$

Задача 5. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ кут нахилу бічного ребра до основи піраміди дорівнює куту нахилу діагоналі основи до бічної грані. Знайти цей кут.

● Покажемо, що такої піраміди не існує. Позначимо x кут нахилу діагоналі BD до грані ASD (рис. 72.4). $\angle DSA = \alpha$; $\angle SAO = \beta$. Можна показати, що

$$\cos \beta = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Маємо } \cos x = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos x = \cos \beta, \quad \text{отже, } \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}},$$

або $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha = 90^\circ$, а цього бути не може. Геометричне доведення цього факту наведено в наступній задачі. ●

Задача 6. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює куту нахилу діагоналі основи до бічної грані. Знайти цей кут.

● Нехай β — лінійний кут двогранного кута DC (рис. 72.5). Нескладно показати, що

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

(α — плоский кут при вершині). Нехай x — кут нахилу діагоналі BD до бічної грані. Тоді

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

За умовою $\cos \beta = \cos x$, або $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$, звідки $\alpha = 90^\circ$,

а цього бути не може.

Дійсно, якщо $\alpha = 90^\circ$, то $SE = DE = OE$, тобто в трикутнику SOE катет OE дорівнює гіпотенузі SE . Отже, піраміди з такими кутами не існує. ●

Увага! Пастка!

Одна з дивовижних задач цього типу: «підступність» її полягає в тому, що розв'язання абсолютно очевидне, але... така піраміда не існує! Отже...

Задача 7. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при бічному ребрі дорівнює куту між діагоналлю основи і бічною гранню. Знайти його.

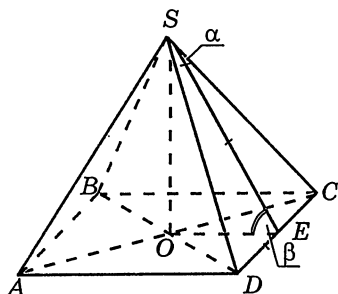


Рис. 72.5

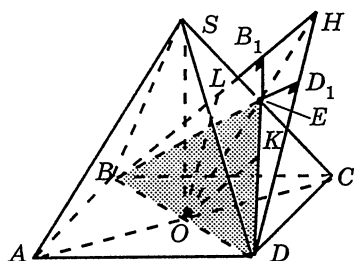


Рис. 72.6

● Очевидно, що за такої умови $\triangle DEB$ (рис. 72.6) рівносторонній, тобто шуканий кут x дорівнює 60° . Проте! У прямокутному трикутнику BEC має бути $BC > BE$. Але $BE = BD > BC$ — протиріччя. Отже, такої піраміди не існує. ●

Задача 8. Чи існує правильна чотирикутна піраміда, у якої:
1) кут нахилу діагоналі основи до бічної грані дорівнює плоскому куту при вершині;

2) кут нахилу діагоналі основи до бічної грані дорівнює куту між ребром DC і гранню SBC ?

Відповідь: 1) існує; 2) не існує.

Глава 73

ФОРМУЛА КУТА МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

Мимобіжні прямі — одна з найцікавіших тем стереометрії. Вона не має аналога в планіметрії.

Відстань d між цими прямими ми вираховували за формулою

$$V = \frac{1}{6} a_1 a_2 d \sin \varphi$$

(a_1 і a_2 — мимобіжні прямі, d — відстань між ними, φ — кут між ними). Кут між мимобіжними прямими вираховувався довільно. На щастя, у задачах, які розглядалися, це не викликало ускладнень. Нижче розглянемо формулу, яка дозволить знаходити формально (від слова «формула») і кут між мимобіжними прямими.

Доведення формули пов'язано з середньою лінією тетраедра:

Середня лінія тетраедра — це відрізок, який з'єднує середини двох мимобіжних ребер.

Задача-теорема. Середня лінія тетраедра $DABC$ вираховується за формулою:

$$T_1 T_2^2 = \frac{1}{4} (b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2),$$

де T_1 і T_2 — середини ребер BC і AD , a, a_1, b, b_1, c, c_1 — мимобіжні ребра тетраедра.

● Доведення. У тетраедрі $DABC$ (рис. 73.1) розглянемо медіани трикутників $DBC, ABC, AT_1 D$. За формулою медіани

$$DT_1^2 = \frac{2(b_1^2 + c_1^2) - a^2}{4},$$

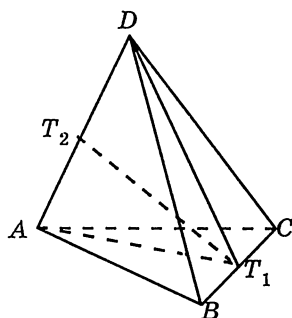


Рис. 73.1

$$AT_1^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

$$\begin{aligned} T_1 T_2^2 &= \frac{2(AT_1^2 + DT_1^2) - a_1^2}{4} = \\ &= \frac{b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2}{4}. \bullet \end{aligned}$$

Доведемо, що кут φ між мимобіжними ребрами тетраедра a і a_1 , обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{|b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2|}{2aa_1}. \quad (*)$$

● Доведення. У тетраедрі $DABC$ (рис. 73.2) P , M , N — середини ребер AC , DC , AB . Знайдемо кут φ між AD і BC . Із трикутника PMN маємо:

$$MN^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a_1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cos \varphi.$$

Враховуючи задачу-теорему:

$$MN^2 = \frac{1}{4} \left(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2 \right).$$

Отже, $\cos \varphi = \frac{|b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2|}{2a_1 a}. \bullet$

Покажемо застосування формули (*):

Задача 1. Довести, що якщо ребро a перпендикулярне до ребра a_1 , а ребро b перпендикулярне до ребра b_1 , то ребро c перпендикулярне до ребра c_1 .

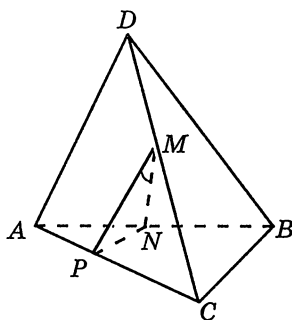


Рис. 73.2

● Доведення. Якщо $a \perp a_1$, то $\cos \varphi = 0$, і з формули (*) випливає, що $b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$. Із умови $b \perp b_1$ випливає, що $a^2 + a_1^2 = c^2 + c_1^2$. Відповідно, $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2$, а це означає, що $\cos(c, c_1) = 0$ або $c \perp c_1$, що і потрібно було довести. ●

Зазначимо, що якщо

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2,$$

то ребра a і a_1 , b і b_1 , c і c_1 попарно перпендикулярні.

Задача 2. Знайти кут між мимобіжними діагоналями суміжних граней куба.

У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ знайдемо кут між відрізками $A_1 D$ і $D_1 C$ (рис. 73.3). Нехай ребро куба дорівнює a , φ — шуканий кут. Розглянемо тетраедр $A_1 D_1 C D$.

$$\cos \varphi = \left| \frac{DC^2 + A_1 D_1^2 - A_1 C^2 - D D_1^2}{2 A_1 D \cdot D_1 C} \right| = \left| \frac{a^2 + a^2 - 3a^2 - a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}, \varphi = 60^\circ. \bullet$$

Задача 3. O — центр грані $CDD_1 C_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайти кут між прямими $A_1 O$ і BD .

Розглянемо тетраедр $A_1 O B D$. Нехай ребро куба дорівнює a , кут між прямими $A_1 O$ і BD позначимо φ (рис. 73.4).

$$\cos \varphi = \left| \frac{A_1 D^2 + B O^2 - O D^2 - A_1 B^2}{2 A_1 O \cdot B D} \right|.$$

Враховуючи, що BO — висота рівностороннього трикутника

BDC_1 , $BO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Аналогічно $A_1 O = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, маємо

$$\cos \varphi = \left| \frac{(a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2 - \frac{a^2}{2}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \varphi = \arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}. \bullet$$

Задача 4(!!). У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\angle A_1 D A = \alpha$, $\angle B_1 A B = \beta$. Знайти кут між діагоналями AB_1 і $A_1 D$.

Позначимо $AD = a$; $AB = b$ (рис. 73.5). Розглянемо кут між ребрами $A_1 D$ і AB_1 тетраедра $DAA_1 B_1$. Позначимо його φ .

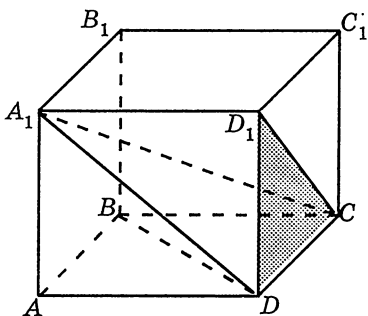


Рис. 73.3

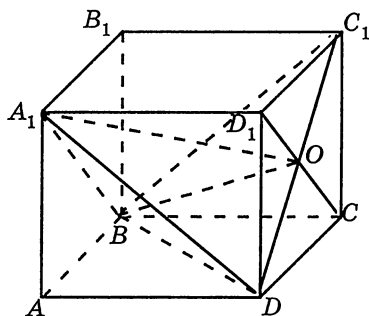


Рис. 73.4

$$\text{Маємо } \cos \varphi = \left| \frac{A_1 B_1^2 + AD^2 - AA_1^2 - B_1 D^2}{2 \cdot AB_1 \cdot A_1 D} \right|.$$

Далі $A_1 B_1 = b$; $AD = a$; $AA_1 = b \cdot \operatorname{tg} \beta$.

$$B_1 D^2 = BD^2 + BB_1^2 = a^2 + b^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \beta; \quad AB_1 = \frac{b}{\cos \beta}; \quad A_1 D = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Зазначимо, що оскільки $a \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \beta$, то $\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$; отже,

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \left| \frac{b^2 + a^2 - b^2 \operatorname{tg}^2 \beta - a^2 - b^2 - b^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{\frac{2ab}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} \right| = \frac{2b^2 \operatorname{tg}^2 \beta \cos \alpha \cos \beta}{2ab} = \\ &= \frac{b \operatorname{tg}^2 \beta \cos \alpha \cos \beta}{a} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cos \alpha \cos \beta = \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

$\varphi = \arccos(\sin \alpha \sin \beta)$. ●

Хочемо попередити читача, що ця задача має декілька способів розв'язання, які можуть видатися «коротшими», «раціональнішими». Порівнювати їх — все одно, що порівнювати, як вимовляють, наприклад, «дім» французи і китайці.

Задача 5. Бічне ребро правильної трикутної піраміди вдвічі більше за сторону основи. Знайти кут між апофемою піраміди і висотою основи, яка не перетинається з апофемою.

● Нехай $SABC$ — задана правильна піраміда. Знайдемо кут між апофемою SE і висотою основи BL . Розглянемо тетраедр $SLEB$ (рис. 73.6). Нехай φ — кут між мимобіжними ребрами SE і BL :

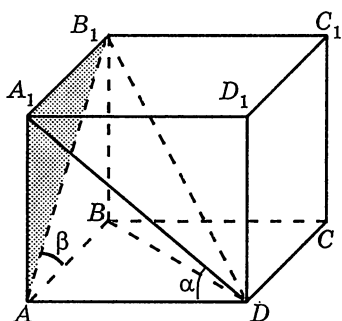


Рис. 73.5

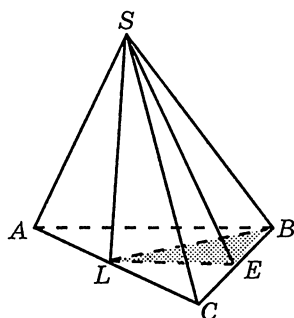


Рис. 73.6

$$\cos \varphi = \frac{|SB^2 + LE^2 - SL^2 - BE^2|}{2SE \cdot BL}.$$

Позначимо a — сторону основи трикутника ABC .

$$SB = 2a; LE = \frac{a}{2}; SL = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{15}; BL = \frac{a\sqrt{3}}{2}; BE = \frac{a}{2};$$

$$SE = SL = \frac{a}{2}\sqrt{15}, \text{ тоді}$$

$$\cos \varphi = \frac{\left|4a^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \cdot 15 - \frac{a^2}{4}\right|}{2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{15} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}; \varphi = \arccos \frac{\sqrt{5}}{30}. \bullet$$

Задача 6. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ знайти кут між ребром SB і ребром AD , якщо $SO = OB$ (O — центр квадрата $ABCD$).

● У піраміді $SABCD$ (рис. 73.7) розглянемо тетраедр $SABD$. Знайдемо кут φ між ребрами SB і AD .

$$\cos \varphi = \frac{|SA^2 + BD^2 - SD^2 - AB^2|}{2SB \cdot AD}.$$

Нехай $AB = a$. Тоді $BO = SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $SA = a = SD = SB$.

$$\cos \varphi = \left| \frac{a^2 + 2a^2 - a^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot a} \right| = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}, \varphi = 60^\circ. \bullet$$

Задача 7. У правильній чотирикутній піраміді $MABCD$ висота MO дорівнює стороні основи. Знайти кут між прямими MC і AB .

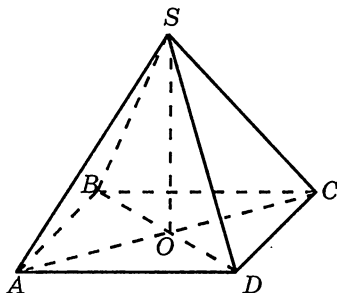


Рис. 73.7

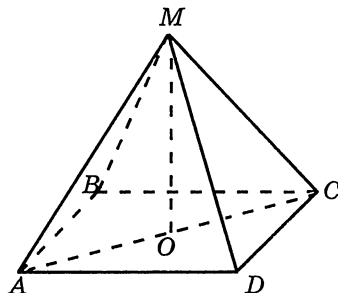


Рис. 73.8

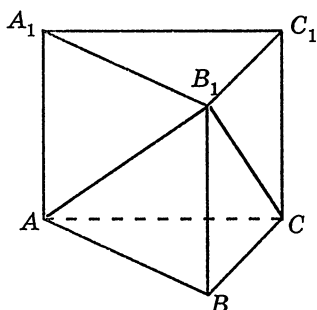


Рис. 73.9

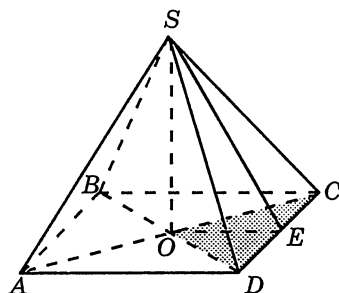


Рис. 73.10

● Позначимо сторону основи a . Розглянемо тетраедр $MAVC$ (рис. 73.8). Нехай x — кут між прямими MC і AB .

$$\cos x = \frac{|MB^2 + AC^2 - AM^2 - BC^2|}{2MC \cdot AB}.$$

Оскільки

$$MC^2 = MO^2 + OC^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{2},$$

$$\text{то } \cos x = \frac{a^2}{2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{6}}. \bullet$$

Задача 8 (Сканаві, №12.080). Бічне ребро правильної трикутної призми дорівнює стороні основи. Знайти кут між стороною основи і діагоналлю бічної грані, що її не перетинає.

● Позначимо a — ребро заданої призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 73.9).

Розглянемо тетраедр B_1ABC . Позначимо x — кут між прямими AB і B_1C .

$$\cos x = \frac{|AB_1^2 + BC^2 - AC^2 - B_1B^2|}{2AB \cdot B_1C} = \frac{2a^2 + a^2 - a^2 - a^2}{2a^2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Отже } x = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}. \bullet$$

Задача 9 (Сканаві, №12.084). Знайти косинус кута між апофемою і діагоналлю основи правильної чотирикутної піраміди, у якій бічне ребро дорівнює стороні основи.

● Позначимо a — сторону основи заданої піраміди $SABCD$ (рис. 73.10), нехай x — кут між апофемою SE і прямою OC . Тоді з тетраедра $SOEC$

$$\cos x = \frac{|SC^2 + OE^2 - SO^2 - EC^2|}{2SE \cdot OC} = \frac{\left| a^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right|}{2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}. \bullet$$

Глава 74

ВІДСТАНЬ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

Знаючи формулу кута між мимобіжними прямими, можна фактично закрити питання про обчислення відстані між ними, застосувавши для цього формулу об'єму тетраедра

$$V = \frac{1}{6} a_1 a_2 d \sin \varphi,$$

де a_1 і a_2 — мимобіжні ребра, φ — кут між ними, d — відстань між мимобіжними прямими.

Як приклад розглянемо популярну задачу.

Задача 1. Ребро куба дорівнює a . Знайти відстань між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.

● Розглянемо тетраедр $A_1 D_1 C D$ (рис. 74.1). У задачі попередньої глави було знайдено косинус кута між прямими $A_1 D$ і $D_1 C$:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60^\circ.$$

Позначимо V — об'єм цього тетраедра, d — відстань між ребрами $A_1 D$ і $D_1 C$. Знайдемо об'єм V двома способами:

$$V = \frac{1}{3} S_{DD_1 C} \cdot A_1 D_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6} \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{6} A_1 D \cdot D_1 C \cdot \sin \varphi \cdot d = \frac{1}{6} (a\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot d. \quad (2)$$

Порівняємо (1) і (2) й отримаємо

$$\frac{a^3}{6} = \frac{1}{6} \cdot 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} d; \quad d = \frac{\sqrt{3}a}{3}. \bullet$$

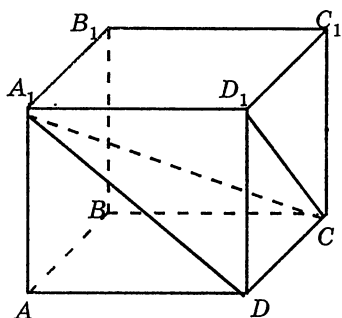


Рис. 74.1

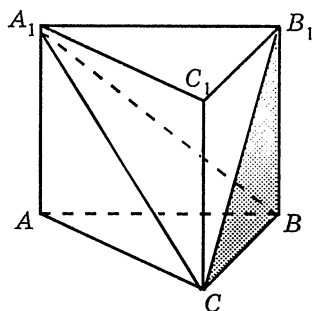


Рис. 74.2

Задача 2. Усі ребра правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнюють a . Знайти кут і відстань між прямими A_1B і B_1C .
 Розглянемо тетраедр A_1B_1BC (рис. 74.2). Позначимо x — кут між ребрами тетраедра B_1C і BA_1 .

$$\cos x = \frac{|A_1C^2 + BB_1^2 - BC^2 - A_1B_1^2|}{2A_1B \cdot B_1C} = \frac{2a^2 + a^2 - a^2 - a^2}{2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{4}; \quad x = \arccos \frac{1}{4}.$$

Щоб знайти відстань між прямими A_1B і B_1C , скористаємося формулою:

$$V_1 = \frac{1}{6} A_1B \cdot B_1C \cdot d \sin x \quad (1)$$

(V_1 — об'єм тетраедра A_1B_1BC).

Знайдемо V_1 :

$$V_1 = V - V_2 - V_3,$$

де V — об'єм призми, V_2 — об'єм піраміди A_1ABC , V_3 — об'єм піраміди $A_1B_1C_1C$.

Отже,

$$V = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}, \quad V_2 = \frac{1}{3} a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} = V_3,$$

$$V_1 = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} - \frac{2a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Порівняємо з формулою (1) і, враховуючи, що $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

маємо:

$$\frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{6} (a\sqrt{2})^2 \cdot d \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \text{звідси } d = \frac{a\sqrt{5}}{5}. \quad \bullet$$

Задача 3. Знайти відстань між мимобіжними висотами DD_1 і AA_1 граней правильного тетраедра $DABC$, ребро якого дорівнює a .

● Знайдемо кут φ між прямими DD_1 і AA_1 (рис. 74.3). Розглянемо тетраедр DAD_1A_1 .

$$\cos \varphi = \frac{|AD^2 \cdot D_1A_1^2 - AD_1^2 - DA_1^2|}{2AA_1 \cdot DD_1} = \frac{\left| a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right|}{2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{6}.$$

Знайдемо об'єм Q тетраедра DAD_1A_1 традиційно:

$$DH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad S_{AD_1A_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

Отже,

$$Q = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{48} \sqrt{2}. \quad (1)$$

З іншого боку, враховуючи, що

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6},$$

маємо

$$Q = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot d \cdot \frac{\sqrt{35}}{6}. \quad (2)$$

Порівнюючи вирази (1) і (2), отримаємо $d = \frac{a^3\sqrt{2}}{a^2\sqrt{35}} = a\sqrt{\frac{2}{35}}$. ●

Задача 4. Основа піраміди $DABC$ — прямокутний трикутник ABC з прямим кутом B . Кут CAB дорівнює α . Кожне бічне ребро нахилено до площини основи під кутом β . Знайти відстань між прямими DB і AC , якщо $AC = a$.

● Оскільки вершину D можна спроектувати на середину гіпотенузи AC (рис. 74.4), то

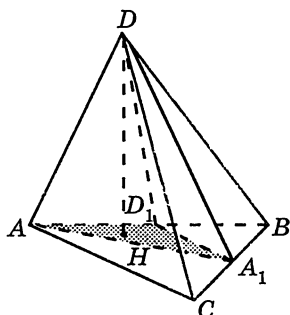


Рис. 74.3

$$DH = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta; \quad AB = a \cos \alpha; \quad BC = a \sin \alpha;$$

$$AD = \frac{a}{2 \cos \beta}; \quad DC = \frac{a}{2 \cos \beta}; \quad BD = \frac{a}{2 \cos \beta}.$$

Нехай φ — кут між прямими DB і AC .

$$\cos \varphi = \frac{\left[\left(\frac{a}{2 \cos \beta} \right)^2 + a^2 \sin^2 \alpha - \left(\frac{a}{2 \cos \beta} \right)^2 - a^2 \cos^2 \alpha \right]}{2 \cdot \frac{a}{2 \cos \beta} \cdot a} = |\cos 2\alpha \cos \beta|.$$

Позначимо V — об'єм заданого тетраедра. Тоді

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta. \quad (1)$$

З іншого боку,

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{2 \cos \beta} \cdot a \cdot d \sin \varphi.$$

Оскільки $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha \cos^2 \beta}$, маємо

$$\frac{a^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta}{24} = \frac{a^2}{12 \cos \beta} \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha \cos^2 \beta} \cdot d, \quad d = \frac{a \sin 2\alpha \sin \beta}{2 \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha \cos^2 \beta}}. \bullet$$

Задача 5. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро $AA_1 = a$, ребро $AD = b$. Знайти відстань від діагоналі паралелепіпеда до ребра основи, з яким вона не перетинається.

● Знайдемо відстань від діагоналі $B_1 D$ до ребра AB . Розглянемо тетраедр $B_1 B D A$ (рис. 74.5).

Введемо параметр t — довжину ребра AB . Позначимо φ — кут між прямими AB і $B_1 D$.

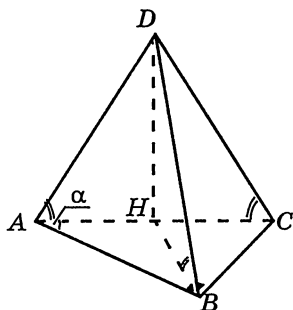


Рис. 74.4

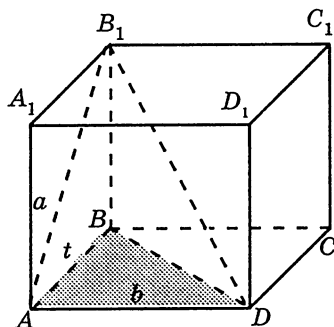


Рис. 74.5

$$\cos \varphi = \left| \frac{BB_1^2 + AD^2 - AB_1^2 - BD^2}{2AB \cdot B_1D} \right|.$$

$$\cos \varphi = \left| \frac{a^2 + b^2 - t^2 - a^2 - t^2 - b^2}{2t \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + t^2}} \right| = \left| \frac{-2t^2}{2t\sqrt{a^2 + b^2 + t^2}} \right|,$$

$$\cos \varphi = \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2 + t^2}}.$$

Позначимо V — об'єм тетраедра B_1ABD .

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{tba}{2} = \frac{1}{6}abt. \quad (1)$$

З іншого боку,

$$V = \frac{1}{6}t \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + t^2} \cdot d \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2 + b^2 + t^2}},$$

або

$$V = \frac{1}{6}t\sqrt{a^2 + b^2} \cdot d. \quad (2)$$

Порівняємо вирази (1) і (2) і отримаємо $\frac{1}{6}abt = \frac{1}{6}t\sqrt{a^2 + b^2} \cdot d$,

звідки $d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \bullet$

Задача 6. У прямокутному паралелепіпеді a, b, c — його виміри. Знайти відстань між діагоналями двох суміжних бічних граней.

● Розглянемо тетраедр DA_1B_1A (рис. 74.6), d — відстань між A_1D і AB_1 . Знайдемо кут φ , що дорівнює куту між прямими A_1D і DC_1 , тобто $\angle A_1DC_1$. Маємо:

$$A_1D = \sqrt{a^2 + c^2}, \quad DC_1 = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad A_1C_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

За теоремою косинусів із трикутника A_1DC_1 отримаємо:

$$\cos \varphi = \frac{a^2 + c^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b^2}{2\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}},$$

звідки

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{c^4}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Знайдемо об'єм V тетраедра DAA_1B_1 :

$$V = \frac{1}{6} \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot d \sin \varphi; \quad V = \frac{1}{6} b \cdot c \cdot a,$$

звідки

$$\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot d \cdot \sin \varphi = abc.$$

Отже,

$$d = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}. \quad \bullet$$

Задача 7. У прямокутному паралелепіпеді a, b, c — його виміри. Знайти відстань від діагоналі паралелепіпеда до діагоналей граней, що її не перетинають.

● Позначимо φ — кут між прямими B_1D і A_1B (рис. 74.7). Розглянемо тетраедр DA_1BB_1 :

$$\cos \varphi = \frac{|a^2 + a^2 + c^2 - b^2 - b^2 - c^2|}{2\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|a^2 - b^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Позначимо V — об'єм тетраедра DA_1B_1B .

$$V = \frac{1}{3} c \cdot \frac{ab}{2} = \frac{1}{6} abc. \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{6} \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot d \cdot \sqrt{1 - \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2)}}. \quad (2)$$

Порівнюючи (1) і (2), отримаємо

$$d = \frac{abc}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2}}; \quad d = \frac{abc}{\sqrt{4a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}. \quad \bullet$$

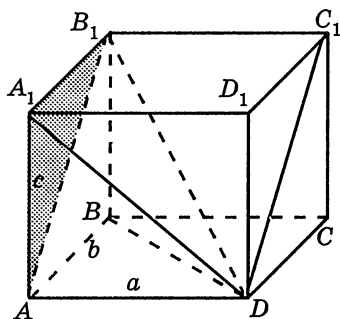


Рис. 74.6

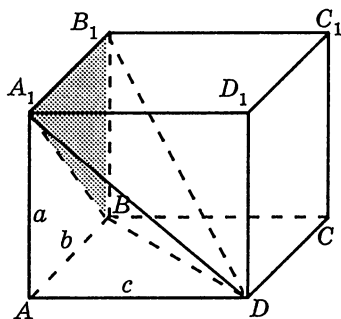


Рис. 74.7

ЧИ ІСНУЄ «ПРОСТОРОВА» ТЕОРЕМА ПІФАГОРА?

У планіметрії ми настільки звикли до теореми Піфагора, що не маємо сумнівів щодо існування її аналога у просторі.

Проте... У жодному з відомих мені курсів стереометрії «просторової» теореми Піфагора немає:

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия: Ч. II. — М., 1958.

2. Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии: Ч. II. — М., 1949.

3. Энциклопедия элементарной математики: Геометрия. — Т. IV, V. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1953.

У популярних шкільних підручниках теореми з такою назвою немає:

1. Погорелов О. В. Геометрия: Підруч. для 10—11 кл. — К.: Освіта, 2001.

2. Атанасян Л. С. и др. Геометрия: Учеб. для 10—11 кл. — М.: Просвещение.

3. Клопський В. М., Скопец З. А., Ягодовський М. І. Геометрия. — К.: Рад. школа, 1979.

4. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия: Учеб. для 10—11 кл. — М., 1992.

А, можливо, просторової теореми Піфагора немає зовсім?

У книзі В. В. Прасолова і І. Ф. Шаригіна «Задачи по стереометрии» (М., Наука, 1989) є розділ «Теорема Пифагора в пространстве» (§ 5, с. 20).

Автори не зазначають, яку саме теорему вони мають на увазі, але, можливо, перша задача параграфа ототожнюється у них із просторовою теоремою Піфагора?

«1. 21. Прямая l утворює з трьома попарно перпендикулярними прямими кути α , β і γ . Доведіть, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Ця рівність чомусь не асоціюється зі звичною планіметричною теоремою Піфагора.

Далі. У книзі В. О. Тадєєва «Геометрия. Основы стереометрии. Многогранники» для 10 кл. (Тернопіль: Навч. книга — Богдан, 2003) на с. 195 читаємо:

«Теорема (про діагональ прямокутного паралелепіпеда)

Квадрат будь якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх трьох його вимірів...

Теорему про діагональ прямокутного паралелепіпеда інколи називають **просторовою теоремою Піфагора**. Підставою для цього є те, що саму теорему Піфагора можна сформулювати так:

Квадрат діагоналі прямокутника дорівнює сумі квадратів його вимірів.»

То це вона і є — невловима просторова теорема Піфагора?

Але зовсім по-іншому думають Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. М. Владимиров, Н. Г. Владимирова. У їхньому підручнику «Геометрія» для 10—11 кл. (К.: Освіта, 2000) на с. 50 читаємо:

«Теорема 21 (просторова теорема Піфагора): Квадрат довжини будь-якого відрізка дорівнює сумі квадратів довжин його проєкцій на три взаємно перпендикулярні прямі».

То де ж істина? Звернемося до історії (з книги Г. Вілейтнера «История математики от Декарта до середины XIX столетия» (М.: Гостехиздат, 1960)).

«Теорему о том, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, где α , β и γ — углы, образуемые некоторой плоскостью с тремя взаимно перпендикулярными координатными плоскостями, установил Тенсо (1780). Отсюда он вывел также обобщение теоремы Пифагора на трехмерное пространство (виділено мною — Авт.), а именно доказал, что квадрат какого-либо куска плоскости равен сумме квадратов его проєкций на три координатные плоскости.

Де-Гюа в 1783 г. заявил претензию на то, что в более простом виде, когда куском плоскости является треугольник, дополняющий прямой трехгранный угол до тетраэдра, он доказал эту теорему более чем на двадцать лет ранее. Но эта более простая теорема встречалась еще в записях Декарта от 1619–1621 гг. Для случая трех равных взаимно перпендикулярных ребер ее впервые опубликовал Фаульгабер («Арифметические чудеса», Аусбург, 1622). Де-Гюа распространил теорему на произвольный тетраэдр».

Ведучи мову про відкриття стереометрії, Г. Вілейтнер, перераховуючи відкриття Декарта, Ейлера, Ферма, зазначає: **«О так называемой пространственной теореме Пифагора мы уже говорили выше на с. 255».**

Як бачите, шановний читачу, у просторі теорема Піфагора отримала титул «так звана». А ким звана? Самими математиками? Істориками математики? Невідомо.

У будь-якому випадку, отримавши рівність суми трьох квадратів з четвертим, не поспішайте називати її, цю рівність, «просторовою теоремою Піфагора».

І все ж, як на мене, просторова теорема Піфагора є! Лише називається вона: **«Просторова теорема Піфагора для прямокутного тетраедра».**

Зверніть увагу на аналогію як умови, так і доведення. Чи можна бажати більшого? Тетраедр, у якого кожний кут при одній з вершин прямий, називається прямокутним (рис. 75.1). Грань, яка лежить навпроти прямого тригранного кута, назвемо

гранню-гіпотенузою ABC , а всі інші — гранями-катетами: DAB , DAC , DBC .

Просторова теорема Піфагора для прямокутного тетраедра виглядає так:

$$S_{DBC}^2 + S_{DAB}^2 + S_{DAC}^2 = S_{ABC}^2$$

(сума квадратів площ граней-катетів дорівнює квадрату площі грані-гіпотенузи).

Доведення також аналогічне доведенню теореми Піфагора на площині.

Доведемо спочатку, що $S_{DBC}^2 = S_{ABC} \cdot S_{BHC}$ (H — ортоцентр трикутника ABC).

Дійсно, оскільки точка D як вершина проектується в ортоцентр грані ABC , то кут між гранями DBC і ABC є кутом α між висотами трикутників DBC і ABC , $\angle AED = \alpha$.

Розглянемо тетраедр $DHBC$:

$$S_{DBC} = \frac{S_{BHC}}{\cos \alpha}.$$

Розглянемо тетраедр $DABC$:

$$S_{DBC} = S_{ABC} \cdot \cos \alpha.$$

Отже,

$$S_{DBC}^2 = S_{BHC} \cdot S_{ABC}.$$

Аналогічно,

$$S_{DAB}^2 = S_{BHA} \cdot S_{ABC}, \quad S_{DAC}^2 = S_{AHC} \cdot S_{ABC}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} S_{DBC}^2 + S_{DAC}^2 + S_{DAB}^2 &= S_{BHC} \cdot S_{ABC} + S_{BHA} \cdot S_{ABC} + S_{AHC} \cdot S_{ABC} = \\ &= S_{ABC}(S_{BHC} + S_{BHA} + S_{AHC}) = S_{ABC}^2. \end{aligned}$$

Постало питання: можливо, існує і непрямокутний тетраедр, в якому сума квадратів площ трьох граней дорівнює квадрату площі четвертої грані? Цим доведемо або спростуємо обернену теорему. Розглянемо такий тетраедр $DABC$ з рівними двограними кутами α при ребрах основи (рис. 75.2). Очевидно, що вершина D проектується в інцентр I . Позначимо r — радіус вписаного в трикутник ABC кола. Тоді

$$S_{DBC} = \frac{S_{BIC}}{\cos \alpha} = \frac{ar}{2 \cos \alpha};$$

$$S_{DAC} = \frac{br}{2 \cos \alpha}; \quad S_{DAB} = \frac{cr}{2 \cos \alpha}.$$

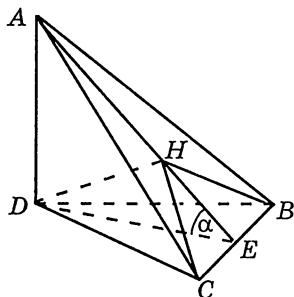


Рис. 75.1

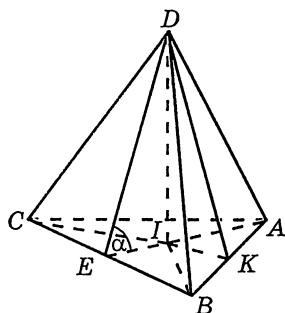


Рис. 75.2

$$S_{ABC} = r \cdot p; \left(p = \frac{a+b+c}{2} \right).$$

Маємо

$$S^2_{DBC} + S^2_{DAC} + S^2_{DBA} = \frac{r^2(a^2 + b^2 + c^2)}{4 \cos^2 \alpha},$$

$$S^2_{ABC} = \frac{r^2}{4} (a+b+c)^2.$$

Маємо

$$\frac{r^2}{4} (a+b+c)^2 = \frac{r^2(a^2 + b^2 + c^2)}{4 \cos^2 \alpha},$$

звідки $\cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a+b+c}.$

Отже, в тетраедрі з рівними двограними кутами при основі

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a+b+c}.$$

У цього тетраедра є властивість: сума квадратів площ бічних граней дорівнює квадрату четвертої бічної грані: просторова теорема Піфагора для прямокутного тетраедра оберненої не має! А шкода...

Глава 76

ВДАЛИЙ ПОШУК ЧИ ПОШУК УДАЧІ?

Умова задачі, про яку йтиметься далі, не провіщала ніяких несподіванок — рівні кути бічного ребра паралелепіпеда зі сторонами основи, очевидно, «виводять» на відому стандартну ситуацію (рис. 76.1): точки бічного ребра проектується у цьому випадку на бісектрису між двома іншими ребрами основи. Але... спочатку повна умова задачі:

Задача. У паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основа — квадрат зі стороною a . Ребро AA_1 дорівнює a і утворює з ребрами AB і AD гострі кути α . Знайти кут між прямими AC і BD_1 .

● Достатньо яскраве, переконливе і просте знаходження діагоналі BD_1 за допомогою векторів; введемо базис (рис. 76.2):

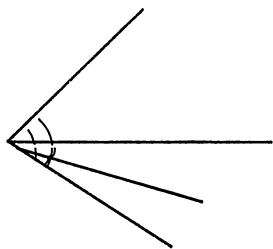


Рис. 76.1

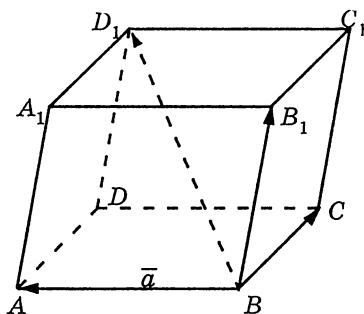


Рис. 76.2

$\overline{BA} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$, $\overline{BB_1} = \vec{c}$, тоді $\overline{BD_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$,

$$|\overline{BD_1}| = \sqrt{(a+b+c)^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 + (\vec{c})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}} = \\ = \sqrt{3a^2 + 0 + 2a^2 \cos \alpha - 2a^2 \cos \alpha} = a\sqrt{3}.$$

Відсутність у відповіді BD_1 кута α насторожило: як знайти діагональ BD_1 без застосування векторів?

Якщо для знаходження діагоналі A_1C «спрацьовують» рівні кути α (основа висоти паралелепіпеда попадає на діагональ AC), то із нерівності кутів, наприклад, ABB_1 і B_1BC позиція іншої висоти невизначена.

Що таїти? Векторне розв'язання, за допомогою якого було знайдено діагональ BD_1 , наштовхнуло на думку: чотирикутник BDD_1B_1 — прямокутник!

Нехай O і O_1 — центри основ (рис. 76.3). Проведемо діагональний переріз AA_1C_1C . Оскільки $\angle A_1AB = \angle A_1AD$, то висота A_1H належить цьому перерізу. Проведемо висоту O_1H_1 . За теоремою про три перпендикуляри $OO_1 \perp OB$, отже, DD_1B_1B — прямокутник. Діагональ цього прямокутника знайти нескладно:

$$BD_1 = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}.$$

Повернемося до задачі. Знайдемо кут φ між прямими AC і BD_1 . Розглянемо тетраедр D_1ABC .

$$\cos \varphi = \left| \frac{AD_1^2 + BC^2 - D_1C^2 - AB^2}{2BD_1 \cdot AC} \right|.$$

Маємо з $\triangle AD_1D$: $AD_1 = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$; із $\triangle D_1DC$: $D_1C = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$.

$AB = a$; Отже, $BD_1 = a\sqrt{3}$; $AC = a\sqrt{2}$.

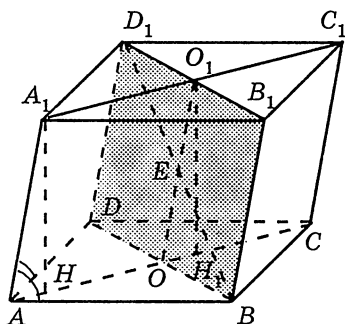


Рис. 76.3

Отже,

$$\cos \varphi = \frac{\left(2a \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 + a^2 - \left(2a \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 - a^2}{2a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{4a^2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{2a^2\sqrt{6}} = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \alpha;$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \cos \alpha \right). \bullet$$

Як ми переконалися, у знайомій стандартній ситуації є ще одна властивість — один з діагональних перерізів може бути прямокутником! І у цьому таємниця розв'язання!

Глава 77

ПРЯМОКУТНИЙ ТЕТРАЕДР ЯК КЛОНДАЙК АНАЛОГІЙ

Читачі, знайомі з книгами автора, напевне, помітили «полювання на аналогії». Не буду наводити знову слова Штефана Банаха «Математик — це той...». Скажу тільки, що звернення до аналогії цілком природне — це шлях у наукових дослідженнях і в методиці викладання математики. Сам дивуюся, що досі не звернув заслужено уваги на аналогію між прямокутним трикутником і прямокутним тетраедром. Особлива увага — на просторову теорему Піфагора. Але, як кажуть, по порядку.

Задача 1. У прямокутному трикутнику $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$, де α і β — гострі кути трикутника.

• Доведення очевидне. •

Задача 1⁰. У прямокутному тетраедрі $DABC$ грані DAB , DBC , DAC утворюють з основами ABC кути α , β , γ . Довести, що $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

• Доведення. *Лема.* Нехай α , β , γ — кути, утворені прямою d з трьома взаємно перпендикулярними прямими. Довести, що $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Дійсно, якщо на цих трьох взаємно перпендикулярних прямих побудувати прямокутний паралелепіпед з ребрами a , b , c , то його діагональ d — $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Але $a = d \cos \alpha$; $b = d \cos \beta$; $c = d \cos \gamma$.

Отже,

$$d^2 = d^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma),$$

або

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Перейдемо до задачі 1⁰ (рис. 77.1).

Оскільки точка D проектується в ортоцентр H грані ABC , то лінійні кути двограних кутів при основі утворюються висотами відповідних граней, наприклад, $\angle DEC = \gamma$. Оскільки $\angle EDC = 90^\circ$, то

$$\angle HDC = \angle DEC = \gamma.$$

Отже, два інші аналогічні лінійні кути дорівнюють β ($\angle HDB$) і α ($\angle HDA$). Висота DH утворює з трьома перпендикулярними прямими DA , DB , DC кути α , β , γ . За лемою

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \bullet$$

Задача 2. Площа прямокутного трикутника з катетами a і b дорівнює $\frac{1}{2}ab$.

Задача 2⁰. Об'єм прямокутного тетраедра дорівнює $\frac{1}{6}abc$ (a , b , c — ребра при вершині D).

Вказівка. Застосувати формулу $V = \frac{1}{6}a_1a_2d \sin \varphi$ (a_1 і a_2 — мимобіжні ребра тетраедра, d — відстані між ними, φ — кут між ними).

Задача 3. У прямокутному трикутнику з катетами a і b маємо рівність $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ (h — висота, опущена із вершини прямого кута).

• **Доведення.** Перший спосіб (рис. 77.2). Нехай $\angle CBA = \alpha$.

Тоді $a = \frac{h}{\sin \alpha}$, $b = \frac{h}{\cos \alpha}$ і

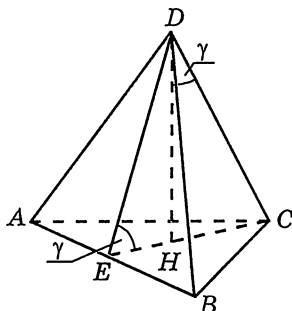


Рис. 77.1

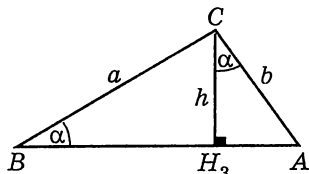


Рис. 77.2

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{h^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Другий спосіб.

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{4S^2} = \frac{1}{h^2}. \bullet$$

Задача 3⁰. У прямокутному тетраедрі $DABC$ бічні ребра дорівнюють a, b, c . Висота $DH = h$. Довести, що

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

• **Доведення. Перший спосіб.** Позначимо кути між висотою DH і ребрами DA, DB, DC (рис. 77.1) як α, β, γ відповідно. Тоді

$$\cos \alpha = \frac{DH}{DA} = \frac{h}{a}; \quad \cos \beta = \frac{h}{b}; \quad \cos \gamma = \frac{h}{c}. \quad \text{За лемою:}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \text{ або } \frac{h^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1, \text{ звідки}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Другий спосіб. Маємо:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}{a^2 b^2 c^2} = \frac{4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}{36V^2} = \frac{S^2}{9V^2} = \frac{1}{h^2}.$$

(використали просторову теорему Піфагора:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2). \bullet$$

Задача 4. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$).

$$BC = \sqrt{AB \cdot BH_3}.$$

Задача 4⁰. У прямокутному тетраедрі $SCAB$

$$S_{SAB} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{AHB}}.$$

• **Доведення.** За теоремою про площу проекції плоскої фігури (рис. 77.3):

$$S_{SAB} = \frac{S_{AHB}}{\cos \varphi} \quad (1)$$

(φ — кут між гранями CAB і SAB).

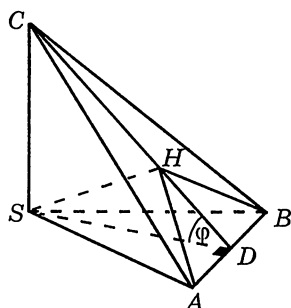


Рис. 77.3

$$\cos \varphi = \frac{S_{SAB}}{S_{ABC}}. \quad (2)$$

Підставимо (2) в (1): $S_{SAB} = \frac{S_{AHB} \cdot S_{ABC}}{S_{SBA}}$, звідки

$$S_{SAB}^2 = S_{ABC} \cdot S_{AHB}.$$

Теорема Піфагора. Перший спосіб. Нехай

$$S_{QAC} = S_2, S_{QBC} = S_1, S_{QAB} = S_3, S_{ABC} = S$$

(Q — вершина прямокутного тетраедра $QABC$) (рис. 77.4). Потрібно довести, що $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$.

● Доведення. Позначимо $QA = a$; $QC = c$; $QB = b$. Маємо:

$$AC^2 = a^2 + c^2; CB^2 = c^2 + b^2; BA^2 = b^2 + a^2.$$

Далі

$$S_3 = \frac{ab}{2}; S_2 = \frac{ac}{2}; S_1 = \frac{bc}{2}.$$

Позначимо $\varphi = \angle ACB$:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot \sin \varphi. \quad (1)$$

$$\cos \varphi = \frac{a^2 + c^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b^2}{2\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}} = \frac{c^2}{\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}}.$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sqrt{1 - \frac{c^4}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}} = \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 + c^4 - c^4}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}} = \\ &= \sqrt{\frac{4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}{AC^2 \cdot CB^2}}, \end{aligned}$$

звідси (за формулою (1))

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot 2 \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{AC \cdot CB} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2},$$

що й потрібно було довести.

Другий спосіб.

$$S = \frac{S_1}{\cos \alpha}; S = \frac{S_2}{\cos \beta}; S = \frac{S_3}{\cos \gamma};$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{S} = 1. \quad \bullet$$

Задача 5. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Задача 5⁰. Радіус описаної навколо прямокутного тетраедра сфери дорівнює

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Вказівка. Доповнити тетраедр до паралелепіпеда.

У прямокутному трикутнику найбільша сторона — гіпотенуза. У прямокутному тетраедрі найбільшу площу має грань-гіпотенуза: в тетраедрі $DABC$ — грань ABC .

Порівняємо, наприклад, площі граней ABC і DBC (рис. 77.5). Маємо: $S_{ABC} \cdot \cos \angle DEA = S_{DBC}$. Отже, $S_{ABC} > S_{DBC}$.

Зазначимо, що для доведення можна застосувати просторову теорему Піфагора.

Задача 6. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $c^3 > a^3 + b^3$.

● Доведення. Маємо $c > a$ і $c > b$. Першу нерівність помножимо на a^2 , другу — на b^2 і додамо:

$$c \cdot a^2 > a \cdot a^2; c \cdot b^2 > b \cdot b^2;$$

$$c(a^2 + b^2) > a^3 + b^3, \text{ або } c^3 > a^3 + b^3. \bullet$$

Задача 6⁰. Довести, що в прямокутному тетраедрі

$$S^3 > S_1^3 + S_2^3 + S_3^3.$$

● Доведення. За аналогією з прямокутним трикутником $S > S_1, S > S_2, S > S_3$ або $S \cdot S_1^2 > S_1^3, S \cdot S_2^2 > S_2^3, S \cdot S_3^2 > S_3^3$. Отже,

$$S(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) > S_1^3 + S_2^3 + S_3^3.$$

Оскільки $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$, то $S^3 > S_1^3 + S_2^3 + S_3^3$, що й потрібно було довести. ●

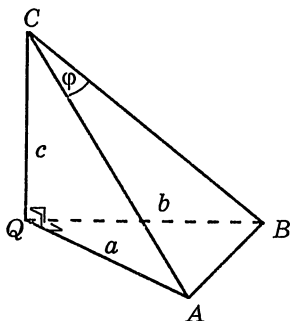


Рис. 77.4

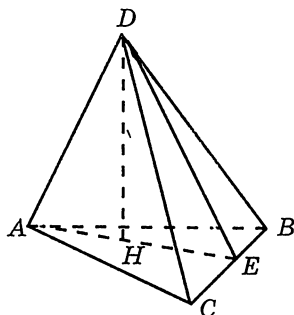


Рис. 77.5

ПРЯМА ЕЙЛЕРА І СТЕРЕОМЕТРІЯ

Застосування планіметрії в стереометрії не просто звичне, а вже обов'язкове. Здивувати досвідченого читача дуже складно. Нелегка справа — застосувати стереометрію для доведення планіметричних теорем! Такі випадки можна перерахувати на пальцях. Тому кожне нове застосування — подія для тих, хто цікавиться геометрією. Тим більше, коли це стосується прямої Ейлера. Попередньо розглянемо декілька задач.

Задача 1. Нехай O — центр сфери, O_1 — центр перерізу сфери. Довести, що відрізок OO_1 — перпендикулярний до площини цього перерізу.

● **Доведення.** У перерізі проведемо два діаметри AB і CD (рис. 78.1). Трикутники OAB і OCD — рівнобедрені, а OO_1 — медіана, проведена до основи цих трикутників. Оскільки $OO_1 \perp AB$ і $OO_1 \perp CD$, то відрізок OO_1 перпендикулярний до перерізу. ●

Задача 2. У трикутній піраміді $SABC$ плоскі кути при вершині S прямі. Довести, що мимобіжні ребра перпендикулярні.

● **Доведення.** Дійсно, оскільки $SC \perp SA$ і $SC \perp SB$ (рис. 78.2), то ребро SC перпендикулярне до грані SAB , отже, $SC \perp AB$. ●

Задача 3. У трикутній піраміді $SABC$ плоскі кути при вершині S — прямі. Довести, що вершина S , точка M — центроїд основи ABC і центр O описаної навколо піраміди сфери належать одній прямій.

● **Доведення.** У трикутнику ABC (рис. 78.3) проведемо медіани AK і CP . Оскільки $\angle ASB = 90^\circ$, то точка P є центром кола, описаного навколо трикутника ASB , отже, за задачею 1

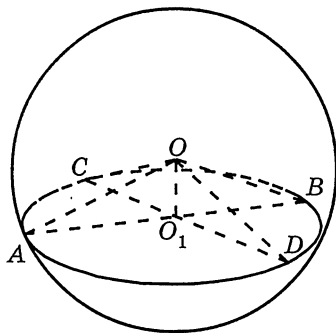


Рис. 78.1

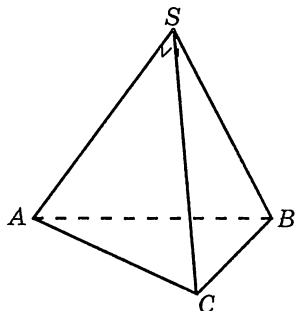


Рис. 78.2

відрізок PO перпендикулярний до площини ASB . За задачею 2 ребро SC перпендикулярне до площини ASB . Так, відрізки PO і SC — паралельні, і точки P, O, S, C належать одній площині.

Аналогічно доводиться, що точки O, K, S, A належать одній площині. У цих площин є дві спільні точки S і O , які не збігаються, тому пряма SO — лінія перетину цих площин.

Першій площині належить медіана CP , другій — медіана AK , отже, точка M — точка перетину цих медіан — належить двом площинам, тобто перетину SO цих площин, що і потрібно було довести. ●

Задача 4. Якщо в трикутній піраміді $SABC$ плоскі кути при вершині S прямі (прямокутний тетраедр), то центроїд G тетраедра належить прямій SO .

● Дійсно, це так, тому що точка G належить прямій SM — медіані тетраедра. ●

Стереометричне доведення теореми про пряму Ейлера

Розглянемо прямокутний тетраедр $SABC$. Позначимо H — ортоцентр трикутника ABC , M — центроїд трикутника ABC , O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC , Q — центр сфери, описаної навколо прямокутного тетраедра $SABC$. Здійснимо ортогональну проекцію точки S на основу ABC . Тоді вона спроектується в ортоцентр H , а точка Q — в точку O (рис. 78.4).

Оскільки QO перпендикулярна до площини ABC (задача 1), то $SH \parallel QO$. Проведемо через точки S, H, Q, O площину. Вона перетинатиме площину ABC по прямій HO . Точка M належить прямій SQ і площині ABC , отже, і прямій HO . Так, точки H, M, O належать одній прямій — прямій Ейлера.

Доведемо, що $2OM = MH$ (знову ж за допомогою стереометрії). Розглянемо подібні трикутники SHM і QOM :

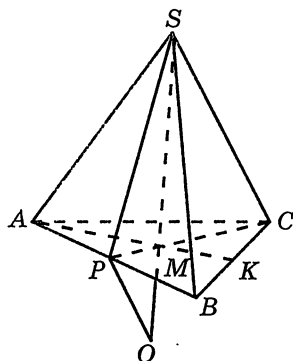


Рис. 78.3

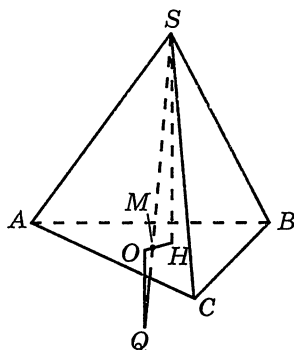


Рис. 78.4

$$\frac{OM}{MH} = \frac{QM}{MS}. \quad (1)$$

Будуємо допоміжний паралелепіпед з основою AA_1BS (рис. 78.5), F — точка перетину діагоналей прямокутника AA_1BS . Оскільки трикутники ECM і SFM подібні, то

$$\frac{SF}{EC} = \frac{FM}{MC} = \frac{MS}{EM}.$$

Оскільки $\frac{FS}{EC} = \frac{1}{2}$, то M —

центроїд трикутника ABC , і $\frac{MS}{EM} = \frac{1}{2}$. Оскільки Q — центр сфери, описаної навколо паралелепіпеда, то $EQ = QS$. Звідси

$$EM = 2QM + MS.$$

Тоді $\frac{EM}{MS} = \frac{2QM + MS}{MS} = 2$, або $\frac{2QM}{MS} + 1 = 2$, або $2QM = MS$.

Враховуючи рівність (1), отримаємо

$$2OM = HM.$$

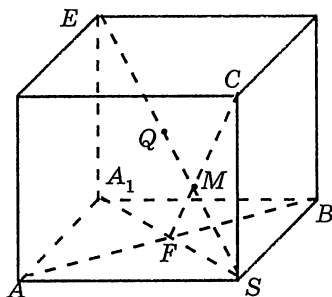


Рис. 78.5

Глава 79

ЛАНЦЮЖОК АНАЛОГІЙ З ТРИКУТНИКОМ НАЙМЕНШОГО ПЕРИМЕТРУ

Трикутник найменшого периметру із багатьох запропонованих викликав і викликає цікавість як дослідників, так і укладачів конкурсних і олімпіадних задач. Не припиняється потік доведень мінімальності периметру ортоцентричного трикутника, серед яких за правом «перше місце» займає доведення за допомогою формули

$$S = R \cdot P_H$$

(S — площа трикутника ABC , R — радіус кола, описаного навколо трикутника ABC , P_H — напівпериметр ортоцентричного трикутника).

У цій главі звертаємо увагу на аналогію доведення за допомогою симетрії, яка «переїздить» і в стереометрію.

Задача 1. По одну сторону від прямої MN розташовані точки A і B . Знайти на прямій MN таку точку X , щоб трикутник XAB був найменшого периметру.

● Будуємо точку B_1 , симетричну B відносно прямої MN (рис. 79.1). З'єднуємо прямою точки A і B_1 , яка перетинатиме пряму MN в шуканій точці X . Очевидно, що

$$P_{ABX} < P_{ABY}$$

(Y — точка прямої MN , яка не збігається з точкою X). ●

Задача 2. У заданий гострий кут BAC вписати трикутник найменшого периметру з вершиною у заданій точці M всередині кута.

● Задача аналогічна до попередньої: будуємо точки M_1 і M_2 , симетричні точці M відносно сторін AB і AC (рис. 79.2). Пряма M_1M_2 перетинає ці сторони в точках X і Y . Трикутник MXY — шуканий: його периметр дорівнює довжині відрізка M_1M_2 . ●

Задача 3. Із трикутників зі спільним кутом при вершині і з даною сумою бічних сторін знайти трикутник з найменшим периметром.

● За даної умови знайдемо трикутник з найменшою третьою стороною. Нехай рівнобедрений трикутник ABC і довільний трикутник AEF (рис. 79.3) задовольняють умові задачі (тобто суми бічних сторін у них рівні). Доведемо, що $BE = CF$.

Дійсно, враховуючи умову, маємо

$$BE + EA + AC = EA + AC + CF,$$

відповідно, $BE = CF$. Побудуємо точку F_1 , симетричну точці F відносно BC . З'єднаємо точки E і F_1 . Оскільки $\angle F_1CN = \angle B$, то $EF_1 = BC$. Покажемо, що $EF_1 < EF$. Дійсно, $EF_1 < ED + DF_1$.

Але $DF_1 = DF$, отже,

$$EF_1 < ED + DF,$$

або $EF_1 < EF$, остаточно $BC < EF$. ●

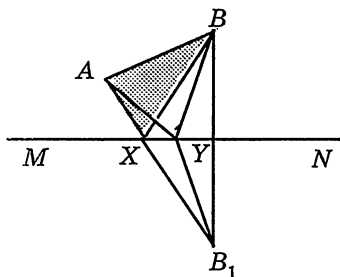


Рис. 79.1

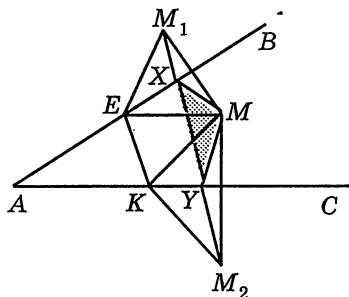


Рис. 79.2

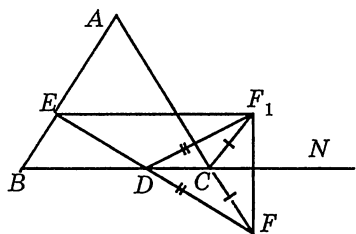


Рис. 79.3

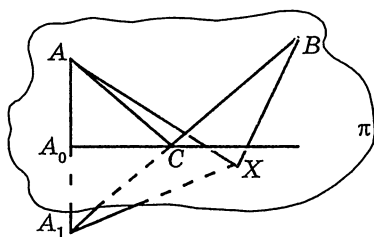


Рис. 79.4

Задача 4. У гострокутний трикутник вписано напівколо. F_1 і F_2 — точки дотику його до сторін AC і AB , D_1D_2 — діаметр напівкола, H_1 — основа висоти, проведеної з вершини A . Розглянемо трикутники зі спільною стороною F_1F_2 і з третьою вершиною, яка належить діаметру D_1D_2 . Довести, що серед таких трикутників трикутник $H_1F_1F_2$ має найменший периметр.

● Доведення див. «Трикутник і тетраедр в задачах». ●

Задача 5. Дано відрізок AB , який не перетинає площину π . Знайти на цій площині таку точку C , щоб периметр трикутника ABC був найменшим.

● Опустимо із точки A перпендикуляр AA_0 на площину π (рис. 79.4). На продовженні відрізка AA_0 відкладемо відрізок $A_0A_1 = AA_0$. Нехай X — довільна точка площини π . Тоді сума $AX + BX = A_1X + BX$, оскільки $AX = A_1X$. Із трикутника A_1BX виходить, що $A_1X + BX > A_1B$. Очевидно, що сума $AX + BX$ буде найменшою, якщо точка X буде належати відрізку A_1B . Такою точкою є точка C , в якій пряма A_1B перетинає площину π . Дійсно, $AC + BC = A_1C + CB = A_1B$. ●

Задача 6. Дано пряму MN і відрізок AB , який не лежить на одній площині з прямою. На прямій MN знайти таку точку C , щоб периметр трикутника ABC був найменшим.

● Через пряму MN і точку A проведемо площину α . Із точки B на пряму MN опустимо перпендикуляр BH (рис. 79.5). Із точки H в площині α проведемо пряму l , перпендикулярну до MN , і відкладемо відрізок B_1H , що дорівнює BH . З'єднаємо точки B_1 і A . Пряма B_1A перетинатиме MN в шуканій точці C . Доведемо це.

Прямокутні трикутники CBH і CB_1H рівні за двома катетами, тому $CB = CB_1$. Твердження доведено, оскільки AB_1 — пряма (на відміну від ламаної AC_1B_1). ●

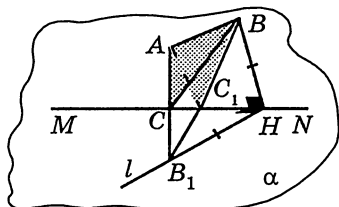


Рис. 79.5

HAPPY END ОДНІЄЇ ІСТОРІЇ

Перша зустріч з цією задачею відбулася у моїх учнів на Математичній олімпіаді Київського університету:

Дано замкнуту ламану $ABCD$. Доведіть, що якщо відрізки AB , BC , CD і DA дотикаються до сфери, то точки дотику належать одній площині.

Зацікавившись цією задачею у 60-х роках минулого століття, я простежив, мабуть, неповну її історію.

Задачу опублікували в 1954 році у відомій книзі: Шклярський Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики: Ч. 3. Геометрия (стереометрия). — М.: Гостехиздат, 1954.

Для порівняння наведу її умову і розв'язання:

Просторовий чотирикутник описано навколо сфери. Довести, що чотири точки дотику лежать в одній площині.

● Доведення. Нехай чотирикутник $ABCD$ описано навколо сфери і K , L , M та N — точки дотику прямих AB , BC , CD і DA відповідно (рис. 80.1). За властивістю дотичних до кулі маємо

$$AK = AN, BK = BL, CL = CM, DM = DN.$$

Проведемо через точки K , L , M площину δ (рис. 80.2). Площина δ , очевидно, перетинає відрізок AD у деякій точці N' , бо точки A і D лежать від неї по різні сторони. Як відомо, рівні похилі, проведені з однієї точки, утворюють з площиною рівні кути, а більша похила утворює менший кут. Позначимо кут між AB і δ як φ ; тоді кут між BC і δ також дорівнює φ із рівності $BK = BL$; так само кут між CD і δ дорівнює φ (бо $CL = CM$).

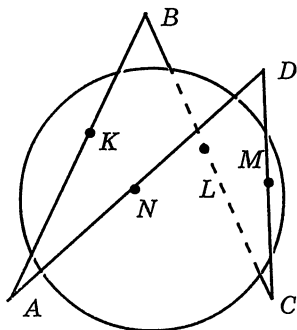


Рис. 80.1

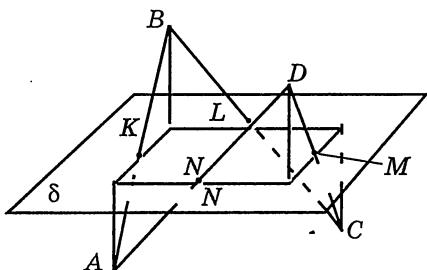


Рис. 80.2

Покажемо тепер, що точка N' збігається з N . Припустимо, що це не так; нехай, наприклад, $AN' < AN$ і, відповідно, $DN' > DN$. Тоді з порівняння AK і AN' отримаємо, що кут AD з площиною δ більший за φ . З іншого боку, із порівняння DM і DN' робимо висновок, що цей кут менший за φ . Так само прийдемо до протиріччя, якщо припустимо, що $AN' > AN$.

Відповідно, площина LMK перетинає AD саме в точці N і, таким чином, точки K, L, M і N лежать в одній площині, що й потрібно було довести. ●

Через двадцять три роки (!) задача та її розв'язання з'явилися в книзі А. І. Фетисова «Геометрия в задачах» (М.: Просвещение, 1977). На жаль, розв'язання, запропоноване автором, не вносило суттєвих змін (розв'язання приводилося у згаданій книзі без креслення):

Нехай $ABCD$ — даний просторовий чотирикутник: із кожної його вершини виходять дві сторони, які дотикаються до сфери. Точки дотику сфери з прямими AB, BC, CD, DA позначимо буквами P, Q, R, T відповідно. Проведемо через дві такі дотичні з однієї вершини площину, яка перетинатиме сферу по колу; ті ж дотичні будуть дотичними і до кола, тому вони конгруентні одна з одною і симетричні відносно прямої, що з'єднує задану вершину з центром отриманого кола. Разом з тим вони симетричні й відносно площини, що проходить через цю пряму і центр сфери. Оскільки це дає і для всіх інших вершин чотирикутника, то ми можемо так само і для описаного чотирикутника на площині довести, що і у цього чотирикутника суми довжин протилежних сторін рівні між собою:

$$AB + CD = BC + DA. \quad (1)$$

Спочатку припустимо, що не всі сторони конгруентні одна з одною — нехай $AB > DC$; тоді $CD < DA$. Відкладемо на прямій BA від точки B $BM = BC$, а на DA від точки D — $DN = DC$. Тоді з (1) отримаємо: $AM = AN$. Точки M і C лежать на симетричних дотичних, і тому їхня площина симетрії проходить через центр сфери.

Так само пройдуть через центр сфери площини симетрії пар точок C і N, M і N . Ті ж площини є і площинами симетрії вершин трикутника MNC ; відповідно всі вони проходять через одну й ту ж пряму l , що проходить через центр сфери і перпендикулярна до площини MNC . Тоді через конгруентність відрізків дотичних отримаємо $PT \parallel MN, PQ \parallel MC, RT \parallel NC$, звідки і виходить, що точки P, Q, R, T належать одній площині, яка паралельна до площини MNC .

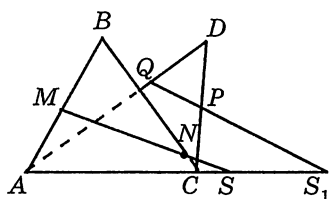


Рис. 80.3

Ось таке доведення... Зазначу, що термінологія відповідає шкільній програмі тих часів. Будемо сподіватися, що читач розбереться у цьому доведенні.

Знову 1977 рік. У школу приходить нова геометрія: вектори, «конгруентність» — підручники за редакцією видатного геометра профе-

сора З. А. Скопця. А в серії «Бібліотека вчителя математики» виходить «Сборник задач по геометрии» Герасімова І. С. та ін. (9–10 кл.; М.: Просвещение) і наша задача знову (!!). І є доведення... лишень п'ять рядочків! Але, заради правди, можу поспівчувати читачу — пропущено лише один рядок, який робить це доведення недоступним для багатьох: **застосуємо теорему Менелая!!**

Переходимо до щасливого завершення і **розшифруємо** п'ять рядочків розв'язання. Нехай M, N, P, Q — точки дотику сфери, які належать відповідно відрізкам AB, BC, CD, DA (рис. 80.3). Нехай прямі MN і AC перетинаються в точці S . За теоремою Менелая:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1.$$

Оскільки $MB = BN$ (дотичні, проведені до сфери з однієї точки),

$$AM : NC = AS : SC. \quad (1^0)$$

Аналогічно, якщо прямі PQ і AC перетинаються в точці S_1 , то

$$AQ : CP = AS_1 : S_1C. \quad (2^0)$$

Порівнюючи вирази (1^0) і (2^0) , отримуємо: ліві частини пропорцій рівні, отже, рівні й праві, тобто $S = S_1$ (обидві точки лежать поза відрізком AC). Happy end!

Глава 81

СЕРЕДИНИ РЕБЕР ТЕТРАЕДРА

Як і в кубі, середини ребер тетраедра є компонентами умов багатьох задач. Такі точки можна сміливо називати чудовими точками тетраедра, і в цьому нескладно переконатися, вивчивши їхні властивості.

Задача 1. Довести, що середини чотирьох ребер тетраедра належать одній площині.

● Доведення. Дійсно, середини T_1, T_2, T_3, T_4 (рис. 81.1) є вершинами паралелограма¹. ●

Відрізок, який з'єднує середини двох мимобіжних ребер тетраедра, називається середньою лінією тетраедра. У тетраедрі три середні лінії: T_1T_3, T_2T_4, T_5T_6 .

Задача 2. Довести, що дві середні лінії тетраедра перетинаються.

● Доведення очевидне, оскільки чотирикутник $T_1T_2T_3T_4$ — паралелограм. ●

Задача 3. Довести, що три середніх лінії тетраедра перетинаються в одній точці.

● Доведення. Оскільки $T_1T_2T_3T_4$ — паралелограм і $T_1T_6T_3T_5$ — паралелограм, то діагоналі цих паралелограмів мають спільну точку M , а це означає, що середні лінії T_1T_3, T_2T_4, T_5T_6 мають спільну точку, що і потрібно було довести. ●

Задача 4. Спільна точка M середніх ліній ділить кожен з них навпіл.

● Це випливає із попередньої задачі. ●

Задача 5. Довести, що точка перетину середніх ліній тетраедра збігається з точкою перетину медіан тетраедра.

● Доведення. Нехай M — точка перетину середніх ліній тетраедра $DABC$ (рис. 81.2): $MT_3 = MT_1$. Нехай E — центроїд трикутника DBC : $T_3E : EC = 1 : 2$. Доведемо, що точка M належить відрізку AE . Розглянемо трикутник AT_3C . Нехай AM перетинає T_3C в точці E' . Доведемо, що точки E' і E збігаються (рис. 81.3).

Оскільки $T_3M = MT_1$, то за відомою задачею (див. «Повернення втраченої геометрії», «Двадцять два способи розв'язання однієї задачі», с. 72),

$$T_3E' : E'C = 1 : 2.$$

Отже, $E' \equiv E$, а точка M — точка перетину медіан тетраедра $DABC$. ●

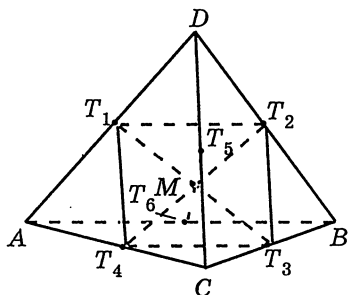


Рис. 81.1

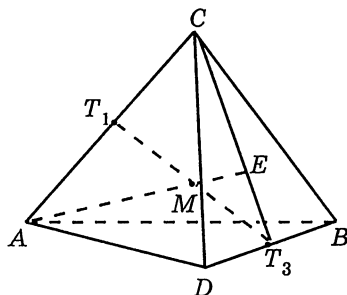


Рис. 81.2

¹ Цей паралелограм називають паралелограмом Вариньона.

Задача 6. Довести, що $t_1 + t_2 + t_3 < p$, де t_1, t_2, t_3 — середні лінії тетраедра, p — півсума ребер тетраедра.

● **Доведення.** Нехай $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ — ребра тетраедра (рис. 81.5), $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ — середини цих ребер. Оскільки

$$T_1T_6 = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}b_1, \quad T_1T_5 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}b_2, \quad \text{то } t_1 < \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \text{ (із } \Delta T_6T_5T_1).$$

Аналогічно, $t_2 < \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$, $t_3 < \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Додамо і отримаємо необхідне. ●

Задача-теорема. У тетраедрі $SABC$ через середини T і Q двох мимобіжних ребер, наприклад SA і BC , проведено пряму. Через пряму TQ проведено площину, яка перетинає ребро AB в точці X , а ребро SC — в точці Y . Довести, що відрізок XY поділиться навпіл відрізком TQ .

● **Доведення.** У тетраедрі $SABC$ розглянемо мимобіжні ребра AC і SB й пару паралельних площин p_1 і p_2 , яким ці ребра належать (рис. 81.5). Оскільки точки Q і T рівновіддалені від площин p_1 і p_2 , то відрізок QT лежить в площині, паралельній цим площинам і також розташований від них на рівній відстані. Тому відрізок YX , перетинаючись з відрізком QT , поділиться точкою перетину навпіл. ●

Популярна задача

Задача 7. Довести, що будь-яка площина, яка проходить через середини двох протилежних ребер тетраедра, ділить цей тетраедр на дві рівновеликі частини.

● **Доведення.** Нехай T і Q — середини ребер AC і SB тетраедра $SABC$ (рис. 81.6). Через відрізок TQ проведемо площину $TYQX$. Оскільки $AT = TC$, то площина STB розбиває заданий тетраедр на рівновеликі тетраедри $STAB$ і $STCB$. Заштрихований переріз $TYQX$ «змушує» розглядати рівновеликість

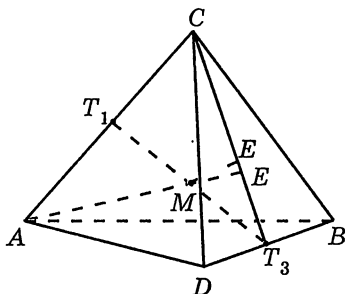


Рис. 81.3

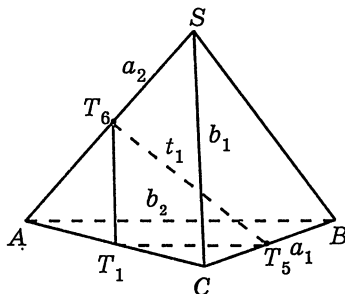


Рис. 81.4

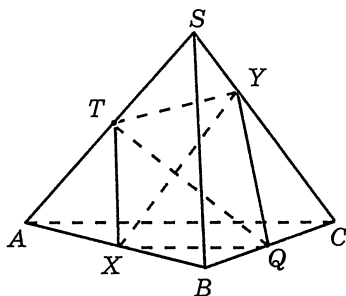


Рис. 81.5

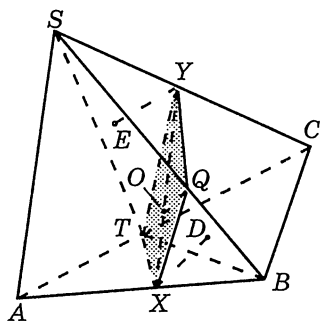


Рис. 81.6

двох тетраедрів $XTQB$ і $YQTS$. Оскільки TQ — медіана трикутника STB , то трикутники BTQ і STQ — рівновеликі. Доведемо, що рівні висоти пірамід: XD і YE . Це стає очевидним, якщо використати задачу-теорему ($XO = OY$). ●

Задача 8. У тетраедрі через середини двох протилежних ребер провести площину так, щоб отриманий в перерізі чотирикутник мав найменшу площу.

● Нехай T і Q — середини ребер SA і BC тетраедра $SABC$ (рис. 81.7). $TYQX$ — довільний переріз, проведений через відрізок TQ . YE і XL — перпендикуляри, опущені з точок X і Y на діагональ TQ отриманого чотирикутника. Тоді площа перерізу (S_x) дорівнює:

$$S_x = \frac{1}{2} YE \cdot TQ + \frac{1}{2} XL \cdot TQ = \frac{1}{2} TQ (XL + YE).$$

Очевидно, що площа S_x буде найменшою, коли сума $YE + XL$ буде найменшою, оскільки множник $\frac{1}{2} TQ$ заданий.

Доведемо, що шукана площина проходить через відрізок TQ перпендикулярно до паралелограма Вариньона $TRQP$ (рис. 81.7). Дійсно, якщо площина $TYQX$ перпендикулярна до площини $TRQP$, то перпендикуляри XL і YE , проведені до TQ , дорівнюють відстаням від прямих AB і SC до паралелограма $TRQP$ (R і P — середини AC і SB).

Якщо взяти будь-яку іншу площину $TY'QX'$, то відстані від точок Y' та X' до прямої TQ будуть похилими до площини паралелограма Вариньона, отже, будуть більшими за XL і YE . ●

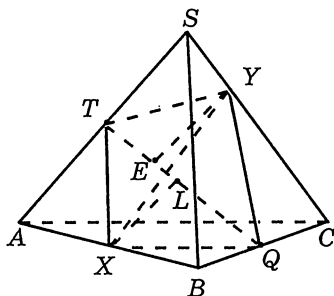


Рис. 81.7

ЗАЛІЗНА МАСКА ТЕТРАЕДРА

Їх, виявляється, три

Пам'ятаєте історію залізної маски? Народилося два близнюки: два майбутніх королі Франції... Багато! Одного приховали, закувавши, щоб ніхто не побачив обличчя, в залізну маску.

Визнаною «королевою» тетраедра є його висота. Досі в шкільній геометрії не акцентується, що таких висот у тетраедрі — чотири! Запам'ятаємо цей факт!

Я свідомо скористався такою історією, щоб підкреслити: у тетраедрі є не просто аналог висот, а їх близнюк: відрізок d — відстань між парою ребер, що не перетинаються. Покажемо, що цей відрізок має право називатися «залізною маскою». Для початку: таких відрізків три!

Право на трон: формула об'єму

Як і королева — висота тетраедра, відрізок d — компонента формули об'єму тетраедра (рис. 82.1):

$$V = \frac{1}{6} a_1 a_2 d \sin \varphi$$

(a_1 і a_2 — мимобіжні ребра тетраедра, φ — кут між ними, d_1 — відстань між цими ребрами).

Сімейна таємниця: три дорівнює чотирьом!

Виявляється, чотири висоти й три відрізки d пов'язані «кровними зв'язками»:

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} = \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2}.$$

Починаємо слідство!

Шлюб кутів

Шлюб — це возз'єднання двох, утворення сім'ї і народження дитини.

«З'єднаємо» два вагомих кута: двогранний кут α між гранями SAB й SAC і кут φ між ребрами $SA = a_1$, $BC = a_2$. Проведемо через точку S площину π , перпендикулярну до ребра SA (рис. 82.1).

Ну а де ж весілля?

А ось воно: здійснимо ортогональну проекцію тетраедра $SABC$ на площину π : проекцією ребра SA буде точка P . Проекцією ребер SB і SC будуть відрізки PM і PC , які

дорівнюють висотам трикутників $SAB(h_2^0)$ і $SAC(h_1^0)$ відповідно. Отримали трикутник зі сторонами

$$\frac{2S_1}{a_1}; \frac{2S_2}{a_1} \text{ і кутом } \angle CPM = \alpha.$$

Проекцією точки B на площину π буде точка M . Оскільки $BM \parallel SA$, то кут MBC — це кут між ребрами SA і BC , тобто $\angle MBC = \varphi$. Отже вам і весілля: з'єдналися два кути α і φ .
Із $\triangle CBM$:

$$CM = a_2 \sin \varphi.$$

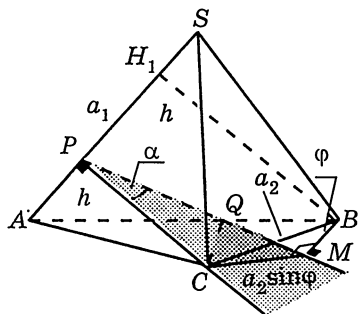


Рис. 82.1

Народження дитини!

Із трикутника PMC за теоремою косинусів:

$$\frac{4S_1^2}{a_1^2} + \frac{4S_2^2}{a_1^2} - \frac{8S_1S_2}{a_1^2} \cos \alpha = a_2^2 \sin^2 \varphi,$$

або

$$\frac{a_1^2 a_2^2 \sin^2 \varphi_1}{4} = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cos \alpha \quad (\varphi_1 = \varphi). \quad (1)$$

Аналогічно для ще двох пар мимобіжних ребер:

$$\frac{a_3^2 a_4^2 \sin^2 \varphi_2}{4} = S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3 \cos \beta, \quad (2)$$

$$\frac{a_5^2 a_6^2 \sin^2 \varphi_3}{4} = S_1^2 + S_4^2 - 2S_1S_4 \cos \gamma. \quad (3)$$

Додамо ліві частини рівностей (1), (2) і (3):

$$\left(\frac{3V}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{3V}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{3V}{d_3}\right)^2 = 3S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 -$$

$$- 2S_1(S_2 \cos \alpha + S_3 \cos \beta + S_4 \cos \gamma) = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2.$$

(вираз у дужках є сумою проекцій граней SAB , SBC і ABC на грань SAC — тобто площа грані SAB). Остаточнo

$$\left(\frac{3V}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{3V}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{3V}{d_3}\right)^2 = \left(\frac{3V}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{3V}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{3V}{h_3}\right)^2 + \left(\frac{3V}{h_4}\right)^2,$$

або

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} = \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2}.$$

Задача 1. Довести нерівність

$$V \geq \frac{1}{3} d_1 d_2 d_3.$$

• Доведення. Доповнимо тетраедр $DABC$ до паралелепіпеда $APCEMBND$ (рис. 82.2). Позначимо V_n — об'єм паралелепіпеда. Позначимо висоти паралелограма $APCE$, опущені на сторони AP і PC , через h_1 і h_2 (на рисунку показано висоту $EH_1 = h_1$). Зрозуміло, що висоти паралелепіпеда дорівнюють d_1, d_2, d_3 . Маємо

$$S_{APCE} = \frac{h_1 h_2}{\sin \angle PAE}, \quad V_n = d_1 \cdot \frac{h_1 h_2}{\sin \angle PAE}.$$

Проведемо висоту паралелепіпеда $EH = d_2$. Із прямокутного трикутника EH_1H h_1 і d_2 . Аналогічно h_2 і d_3 .

Отже, $h_1 \cdot h_2 \geq d_2 \cdot d_3$ і $\frac{h_1 h_2}{\sin \angle PAE} \geq d_2 d_3$. Тому

$$V_n \geq d_1 d_2 d_3; \quad V \geq \frac{1}{3} d_1 d_2 d_3. \bullet$$

Задача 2. Довести, що $V_x \geq \frac{1}{3} d^3$, де V_x — об'єм правильної трикутної піраміди, d — відстань між мимобіжними ребрами.

• Доведення виходить із попередньої задачі. •

Задача 3. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α , відстань між двома мимобіжними ребрами дорівнює l . Знайти об'єм піраміди.

• У піраміді $DABC$ (рис. 82.3) проведемо висоту DO і висоту основи AA_1 . Отримаємо трикутник DAA_1 . У ньому висота A_1E буде відстанню між ребрами BC і AD . Маємо

$$\angle BDC = \alpha, \quad \angle DAO = \varphi,$$

$$\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\alpha}{2}$$

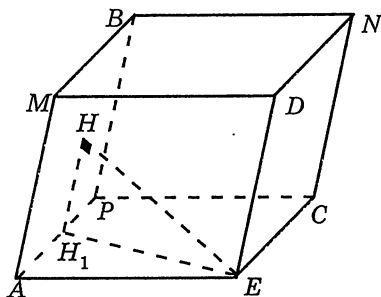


Рис. 82.2

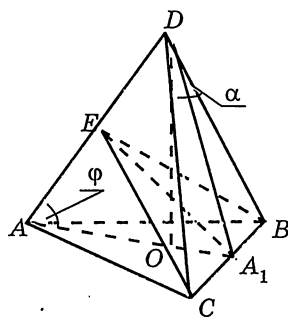


Рис. 82.3

(доведіть самостійно). Із трикутника AA_1E маємо:

$$AA_1 = \frac{l}{\sin \varphi}; \quad AA_1 = \frac{BC \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Позначимо BC як a . Тоді $a = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{\sin \varphi} \cdot \sqrt{3}$.

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{l^2}{\sqrt{3} \sin^2 \varphi}; \quad DO = AO \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{2l}{3 \cos \varphi}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{\sqrt{3} \sin^2 \varphi} \cdot \frac{2l}{3 \cos \varphi} = \frac{2l^3}{9 \sin^2 \varphi \cos \varphi \sqrt{3}}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{3 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(3 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\sin \frac{3\alpha}{2}}{3 \sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$V = \frac{2l^3 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3}}{9 \sqrt{3} \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{3} l^3 \operatorname{cosec} \frac{3\alpha}{2}. \bullet$$

Глава 83

ЗВ'ЯЗКИ МІЖ КУТАМИ ДВОХ ПРАВИЛЬНИХ ПІРАМІД

Залежність між кутами в правильних многогранниках популярна в шкільній математиці. Вивченню задач цього виду присвячені книги і статті (див. Ушаков Р. П. Кути у стереометрії. — К.: Техніка, 1997). Уміння знаходити зв'язок між різними кутами в правильній трикутній піраміді, чотирикутній піраміді є основою техніки розв'язання стереометричних задач із застосуванням тригонометрії. На жаль, задач, які можна розглянути на не дуже тривалому уроці, небагато. Зазвичай вони громіздкі і незручні для роботи в класі.

Запропоновані задачі, що досі ще не розглядалися в методичній літературі, позбавлені цієї вади. У них вивчаються зв'язки між кутами не однієї, а двох правильних пірамід. Переваги таких задач очевидні. Для зручності введемо такі позначення (рис. 83.1).

Правильна трикутна піраміда

- α_1 — плоский кут при вершині;
- α_2 — кут між бічним ребром і основою піраміди;
- α_3 — кут між бічною гранню і основою піраміди;
- α_4 — кут між бічними гранями;
- α_5 — кут між бічним ребром і бічною гранню.

Наведемо відомі співвідношення між різними кутами α_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).

Зв'язок між кутами в правильній трикутній піраміді

1. $\sin \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha_2$
3. $\sin \frac{\alpha_4}{2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha_1}{2}}$
2. $\cos \alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$
4. $\cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\cos \alpha_5 + \sqrt{\cos^2 \alpha_5 + 8}}{2}$
5. $a \operatorname{tg} \alpha_1 = b \operatorname{tg} \alpha_5$ (a і b — ребро основи, бічне ребро)

Правильна чотирикутна піраміда

Уведемо такі позначення (рис. 83.2):

- β_1 — плоский кут при вершині;
- β_2 — кут між бічним ребром і площиною основи піраміди;
- β_3 — кут між бічною гранню і основою піраміди;
- β_4 — кут між бічними гранями;
- β_5 — кут між бічним ребром і бічною гранню.

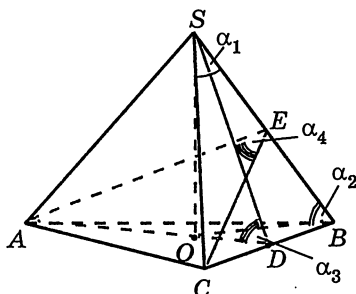


Рис. 83.1

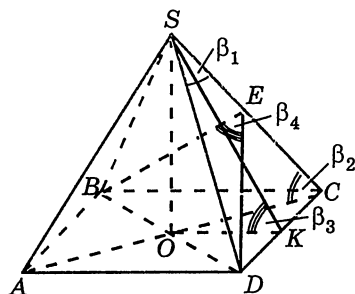


Рис. 83.2

Зв'язок між кутами в правильній чотирикутній піраміді

$$1. \sin \frac{\beta_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta_2$$

$$3. \sqrt{2} \cos \frac{\beta_1}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\beta_4}{2}}$$

$$2. \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} = \cos \beta_3$$

$$4. \sin \beta_5 = 2 \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \sqrt{\cos \beta_1}$$

Розглянемо задачу.

Перша група

Задача 1. Якщо $\alpha_1 = \beta_1$, то $\frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{3}}$. Довести.

● Доведення. $\sin \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha_2$. $\sin \frac{\beta_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta_2$. Оскільки за умовою $\alpha_1 = \beta_1$, то $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta_2$, або

$$\frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{3}}. \bullet$$

Задача 2. $\alpha_1 = \beta_1$. Який кут більший — α_2 чи β_2 ?

● Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta_2$, то $\cos \alpha_2 < \cos \beta_2$, відповідно, $\alpha_2 > \beta_2$. ●

Задача 3. Якщо $\sin \frac{\alpha_1}{2}$ дорівнює $\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}$, то який з кутів більший — α_2 чи β_3 ?

● Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha_2 = \cos \beta_3$, то $\cos \alpha_2 > \cos \beta_3$, $\alpha_2 < \beta_3$. ●

Задача 4. Якщо $\alpha_1 = \beta_1$, то $\frac{\cos \alpha_3}{\cos \beta_3} = \operatorname{tg} 30^\circ$. Довести.

● Доведення. Оскільки $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{3} \cos \alpha_3$, а $\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} = \cos \beta_3$, то

$$\cos \beta_3 = \sqrt{3} \cos \alpha_3, \text{ чи } \frac{\cos \alpha_3}{\cos \beta_3} = \operatorname{tg} 30^\circ. \bullet$$

Задача 5. Якщо кут α_1 дорівнює β_1 , то який кут більший — α_3 чи β_3 ?

• Оскільки $\cos \beta_3 = \sqrt{3} \cos \alpha_3$, то $\cos \alpha_3 < \cos \beta_3$, $\alpha_3 > \beta_3$. •

Задача 6. Якщо $\alpha_1 = \beta_1$, то $\frac{\sin \frac{\alpha_4}{2}}{\sin \frac{\beta_4}{2}} = \sin 45^\circ$. Довести.

• Доведення. Оскільки $\cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha_4}{2}}$, а $\cos \frac{\beta_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{\beta_4}{2}}$,

$$\text{то } \frac{\sin \frac{\alpha_4}{2}}{\sin \frac{\beta_4}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ. \bullet$$

Задача 7. Якщо $\alpha_1 = \beta_1$, то який кут більший — α_4 чи β_4 ?
Відповідь: $\alpha_4 < \beta_4$.

Задача 8. Якщо $\alpha_2 = \beta_3$, а $\beta_1 = \frac{\pi}{3}$, то $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$. Довести.

• Доведення. Оскільки $\cos \beta_3 = \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}$, то $\cos \beta_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

З іншого боку, $\cos \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\alpha_1}{2}$. Оскільки $\alpha_2 = \beta_3$, то

$$\cos \beta_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\alpha_1}{2}. \text{ Звідки } \alpha_1 = \frac{\pi}{3}. \bullet$$

Задача 9. Дано $\alpha_3 = \beta_3$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, знайти α_3 .

• За умовою $\operatorname{tg} \alpha_3 = \operatorname{tg} \beta_3$. Виразимо $\operatorname{tg} \alpha_3$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$. Маємо

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_3}}{\cos \alpha_3} = \frac{3 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_1}{2}}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}}.$$

Оскільки $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, то $\operatorname{tg} \alpha_3 = \sqrt{9 - 2\sqrt{2}}$. ●

Друга група (три кути)

Задача 10. Дано $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1$. Знайти β_2 .

● Оскільки $\alpha_1 = \alpha_2$, то $2\sin \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{3} \cos \alpha_1$. Маємо

$$2\sin \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{3} \left(1 - 2\sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \right).$$

Значить,

$$2\sqrt{3} \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} + 2\sin \frac{\alpha_1}{2} - \sqrt{3} = 0, \quad \sin \frac{\alpha_1}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{4\sqrt{3}}; \quad \sin \frac{\alpha_1}{2} = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2\sqrt{3}}.$$

Знайдемо $\frac{\alpha_1}{2}$, отримаємо β_2 . ●

Задача 11. Знайти кут α_1 , якщо $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2$.

● Задача розв'язується аналогічно. ●

Задача 12. Знайти α_1 , якщо $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2} = \beta_2$.

● Маємо $\sin \frac{\beta_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta_2$. За умовою $\sin \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha_1$, або

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \bullet$$

Задача 13. Довести, що якщо $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_5$, то трикутна піраміда не існує.

● Маємо $\sin \beta_5 = 2 \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \cdot \sqrt{\cos \beta_1}$. Враховуючи умову, маємо

$$\sin \alpha_1 = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \sqrt{\cos \alpha_1}, \quad \text{звідки } \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{\cos \alpha_1}, \quad \text{маємо}$$

$$1 + \cos \alpha_1 = 2\sqrt{\cos \alpha_1},$$

значить $\cos \alpha_1 = 1$, $\alpha = 0$ а цього бути не може. ●

Задача 14. Знайти α_1 , якщо $\alpha_1 = \frac{1}{2} \beta_1 = \beta_3$.

● Маємо $\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} = \cos \beta_3$. За умовою

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \cos \alpha_1, \sin \alpha_1 = \cos^2 \alpha_1, \sin^2 \alpha_1 + \sin \alpha_1 - 1 = 0;$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \alpha_1 = \arcsin \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \bullet$$

Задача 15. Якщо $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_4$, то правильної трикутної піраміди не існує. Довести.

• **Доведення.** Маємо $\sqrt{2} \cos \frac{\beta_1}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\beta_4}{2}}$. За умовою

$$\sqrt{2} \cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\alpha_1}{2}}, \text{ звідки } \sin \alpha_1 = \sqrt{2}, \text{ значить, кута } \alpha_1 \text{ не існує. } \bullet$$

Третя група (дві пари кутів)

Задача 16. Якщо $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$, то трикутної (чотирикутної) піраміди не існує. Довести.

• **Доведення.** Маємо $\sin \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha_2$. За умовою

$$\sin \frac{\beta_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta_2. \text{ Але } \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta_2 = \sin \frac{\beta_1}{2}, \text{ або } \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta_2, \text{ а цього бути не може. } \bullet$$

Задача 17. Якщо $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_3$, то трикутної (чотирикутної) піраміди не існує. Довести.

• **Доведення.** Маємо $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{3} \cos \alpha_3$, значить (за умовою),

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} = \sqrt{3} \cos \beta_3. \text{ Але } \cos \beta_3 = \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}, \text{ відповідно, } \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}, \text{ що неможливо. } \bullet$$

Задача 18. Дано $\alpha_1 = \beta_2, \alpha_2 = \beta_3$. Знайти залежність між α_3 і β_1 .

• Маємо $\cos \alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2}$. Але

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta_2}{1 + \cos \beta_2}} \text{ і } \cos \beta_2 = \sqrt{2} \sin \frac{\beta_1}{2}.$$

$$\text{Значить, } \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2} \sin \frac{\beta_1}{2}}{1 + \sqrt{2} \sin \frac{\beta_1}{2}}}. \text{ Отже, } \cos \alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{\left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{\beta_1}{2}\right)^2}{1 - 2 \sin^2 \frac{\beta_1}{2}}},$$

$$\text{відповідно, } \cos \alpha_3 = \frac{1 - \sqrt{2} \sin \frac{\beta_1}{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\cos \beta_1}}. \bullet$$

Задача 19. Знайти кути $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_3$, якщо $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_3 = 2\beta_3$.

● Оскільки $\alpha_1 = \beta_1$, то $\sqrt{3} \cos \alpha_3 = \cos \beta_3$. Підставляємо $\alpha_3 = 2\beta_3$, маємо $\sqrt{3} \cos 2\beta_3 = \cos \beta_3$. Нехай $\cos \beta_3 = x$. Тоді маємо $\sqrt{3}(2x^2 - 1) = x$, або $2\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} = 0$.

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 \text{ — не підходить; } x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \beta_3 = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Отже, } \beta_3 = \frac{\pi}{6}; \alpha_3 = \frac{\pi}{3}; \alpha_1 = \beta_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (скориставшись}$$

співвідношенням $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{3} \cos \alpha_3$). ●

Задача 20. Довести, що якщо $\alpha_1 = \beta_3, \alpha_2 = \beta_2$, то

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} + 3 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} = 1.$$

● Доведення. Враховуючи умову, маємо

$$\sin \frac{\beta_3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta_2 \text{ і } \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} = \cos \beta_3.$$

$$\text{Але } \cos^2 \frac{\beta_3}{2} = \frac{\cos \beta_3 + 1}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} + 1}{2}. \text{ Оскільки } \sin^2 \frac{\beta_3}{2} = \frac{3}{4} \cos^2 \beta_2, \text{ то}$$

$$\cos^2 \frac{\beta_3}{2} + \sin^2 \frac{\beta_3}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} + 1}{2} + \frac{3}{4} \cos^2 \beta_2 = 1,$$

або

$$2 \left(\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} + 1 \right) + 3 \cos^2 \beta_2 = 4.$$

$$\text{Оскільки } \cos \beta_2 = \sqrt{2} \sin \frac{\beta_1}{2}, \text{ то } 2 \left(\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} + 1 \right) + 3 \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{\beta_1}{2} = 4,$$

звідки

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} + 1 + 3 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} = 2,$$

або

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} + 3 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} = 1. \bullet$$

Задача 21. Знайти кут α_1 , якщо $\alpha_1 = \beta_5$; $\alpha_3 = \beta_3$ і $\beta_1 = \frac{\pi}{3}$.

• Маємо $\sin \beta_5 = 2 \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \sqrt{\cos \beta_1}$, або

$$\sin \alpha_1 = 2 \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \sqrt{\cos \beta_1}. \quad (1)$$

Але $\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} = \cos \beta_3 = \cos \alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$. Рівність (1) буде такою:

$$\sin \alpha_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \sqrt{\cos \beta_1}. \quad (2)$$

Оскільки за умовою $\beta_1 = \frac{\pi}{3}$, то $\sqrt{\cos \beta_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значить, рівність

(2) виглядатиме так:

$$\cos^2 \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ або } \cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}. \quad \alpha_1 = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt[4]{6}}. \bullet$$

Задача 22. Якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \cos \alpha_3 = \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \cos \beta_3$, то $\frac{\cos \alpha_3}{\cos \beta_3} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}$.

Довести.

• Доведення. Оскільки

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{3} \cos \alpha_3, \text{ а } \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} = \cos \beta_3,$$

то задану рівність можна переписати так:

$$\sqrt{3} \cos^2 \alpha_3 = \cos^2 \beta_3, \text{ або } \frac{\cos^2 \alpha_3}{\cos^2 \beta_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6},$$

або

$$\frac{\cos \alpha_3}{\cos \beta_3} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}. \bullet$$

Задача 23 (!). Знайти кути $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3$, якщо $\alpha_3 = \beta_3$, $\alpha_1 = 1,5\beta_1$.

● Оскільки $\alpha_3 = \beta_3$, то, як було показано раніше, $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}$.

Нехай $\beta_1 = 4x$. Тоді $\alpha_1 = 1,5\beta_1 = 6x$, і маємо:

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3} \operatorname{tg} 2x.$$

Враховуючи, що $\operatorname{tg} x \uparrow 0$, і замінюючи $\operatorname{tg}^2 x = u$, отримаємо

$$\frac{3-u}{1-3u} = \frac{2\sqrt{3}}{1-u},$$

$$\text{або } 3 - 4u + u^2 = 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3}u, \quad u^2 - (4 - 6\sqrt{3})u + 3 - 2\sqrt{3} = 0.$$

Знайдемо дискримінант D :

$$\begin{aligned} D &= (4 - 6\sqrt{3})^2 - 4(3 - 2\sqrt{3}) = 112 - 40\sqrt{3} = 4(28 - 10\sqrt{3}) = \\ &= 4(25 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 3) = 4(5 - \sqrt{3})^2. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } u_{1,2} = \frac{4 - 6\sqrt{3} \pm 2(5 - \sqrt{3})}{2}, \quad u_1 = -3 - 2\sqrt{3} \text{ — не підходить,}$$

$$u_2 = 7 - 4\sqrt{3} = 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3 = (2 - \sqrt{3})^2,$$

звідси $\operatorname{tg}^2 x = (2 - \sqrt{3})^2$ (кут x — гострий):

$$\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}; \quad x = \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}).$$

Нескладно показати, що $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$, значить, $x = \frac{\pi}{12}$, а

$$\beta_1 = \frac{\pi}{3}; \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Враховуючи, що $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{3} \cos \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$. Отже,

$$\beta_1 = \frac{\pi}{3}; \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_3 = \alpha_3 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \bullet$$

Задача 24 (!). Знайти кути α_1 і β_1 , α_2 і β_2 , якщо $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = 1,5\beta_2$.

● Оскільки $\alpha_1 = \beta_1$, то

$$\sqrt{2} \cos \beta_2 = \sqrt{3} \cos \alpha_2. \quad (1)$$

Нехай $\beta_2 = 2x$. Тоді $\alpha_2 = 1,5\beta_2 = 3x$ і

$$\sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{3} \cos 3x, \quad (2)$$

або

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3x,$$

звідки $\cos^{\circ}45 \cdot \cos 2x = \cos^{\circ}30 \cdot \cos 3x$.

Очевидно, $x = \frac{\pi}{12}$. Отримаємо цей результат.

Нехай $\cos x = t$, тоді $\cos 2x = 2t^2 - 1$ і $\cos 3x = 4t^3 - 3t$, при цьому оскільки $x = \frac{1}{3}\alpha_2$, а $\alpha_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$, значить,

$t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$, і рівняння (2) матиме вигляд:

$$\sqrt{2}(2t^2 - 1) = \sqrt{3}(4t^3 - 3t).$$

Або після перетворень:

$$4\sqrt{3}t^3 - 2\sqrt{2}t^2 - 3\sqrt{3}t + \sqrt{2} = 0. \quad (3)$$

Щоб отримати наведене рівняння, домножимо (3) на $3\sqrt{2}$:

$$12\sqrt{6}t^3 - 12t^2 - 9\sqrt{6}t + 6 = 0. \text{ Нехай } \sqrt{6}t = u:$$

$$2u^3 - 2u^2 - 9u + 6 = 0.$$

Домножимо рівняння на 4, щоб вийшло наведене:

$$8u^3 - 8u^2 - 36u + 24 = 0.$$

Нехай $2u = v$. Маємо

$$v^3 - 2v^2 - 18v + 24 = 0.$$

Тоді

$$(v + 4)(v^2 - 6v + 6) = 0.$$

Маємо $v_1 = -4$; $v_{2,3} = 3 \pm \sqrt{3}$.

1) Якщо $v = -4$, то $u = \frac{v}{2} = -2$; $t = \frac{v}{\sqrt{6}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} < 0$ — не під-

ходить, оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} < t < 1$.

2) Якщо $v = 3 - \sqrt{3}$, то $u = \frac{v}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$, $t = \frac{v}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2}$, не

підходить.

3) Якщо $v = 3 + \sqrt{3}$, то $u = \frac{v}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$, $t_3 = \frac{u}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$, звідки

$$x = \arccos \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}.$$

Нескладно показати, що $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$, тобто $x = \frac{\pi}{12}$.

Отже, $\beta_2 = \frac{\pi}{6}$; $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$;

$$\beta_1 = \alpha_1 = 2 \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha_2 \right) = 2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}. \bullet$$

Задача 25 (!!!). Знайти кути α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , якщо $\alpha_2 = \beta_2$;
 $\beta_1 = 0,75\alpha_1$.

● Оскільки $\alpha_2 = \beta_2$, то

$$\sqrt{2} \sin \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{3} \cos \frac{\beta_1}{2}. \quad (1)$$

Нехай $\alpha_1 = 8x$, тоді $\beta_1 = 6x$, при цьому оскільки $\alpha_1 \in (0; \pi)$

то $x \in \left(0; \frac{\pi}{8}\right)$. Рівняння (1) виглядатиме так:

$$\sqrt{2} \sin 4x = \sqrt{3} \sin 3x. \quad (2)$$

Рівняння (2) можна записати так:

$$\sin \frac{\pi}{4} \sin 4x = \sin \frac{\pi}{3} \sin 3x.$$

Очевидно, що $x = \frac{\pi}{12}$. Знайдемо це значення x . Маємо

$$\sqrt{2} \cdot 2(2 \sin x \cos x) \cdot \cos 2x = \sqrt{3} \sin x (3 - 4 \sin^2 x).$$

Враховуючи, що $\sin x \neq 0$, отримаємо

$$4\sqrt{2} \cos x \cos 2x = \sqrt{3}(3 - 4 \sin^2 x). \quad (3)$$

Нехай $\cos x = t$. Тоді рівняння (3) матиме вигляд:

$$4\sqrt{2}t(2t^2 - 1) = \sqrt{3}(4t^2 - 1),$$

$$\text{або } 8\sqrt{2}t^3 - 4\sqrt{3}t^2 - 4\sqrt{2}t + \sqrt{3} = 0.$$

Нехай $\sqrt{2}t = u$. Тоді $4u^3 - 2\sqrt{3}u^2 - 4u + \sqrt{3} = 0$. Домножимо отримане рівняння на $2(\sqrt{3})^3$, щоб отримати наведене:

$$8(\sqrt{3})^3 u^3 - 4(\sqrt{3})^4 u^2 - 8(\sqrt{3})^3 u + 2(\sqrt{3})^4 = 0.$$

Нехай $2\sqrt{3}u = v$. Маємо $v^3 - 3v^2 - 12v + 18 = 0$. Тоді
 $(v+3)(v^2 - 6v + 6) = 0$. $v_{2,3} = 3 \pm \sqrt{3}$.

1) Нехай $v = -3$. Тоді

$$u = \frac{v}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ звідси } t = \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < 0 \text{ — не підходить.}$$

$$2) v = 3 - \sqrt{3}, \quad u = \frac{v}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \text{ звідси } t = \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \text{ зна-}$$

чить, $\cos x = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2}$, $x > \frac{\pi}{3}$ — не підходить (нагадаємо, що

$$x \in \left(0; \frac{\pi}{8}\right).$$

$$3) v = 3 + \sqrt{3}, \quad u = \frac{v}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad t = \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \text{ звідси}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad x = \frac{\pi}{12}.$$

Отже, $x = \frac{\pi}{12}$, $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$, а цього бути не може, значить, відповідь не підходить. ●

Відповідь: піраміди, які б задовольняли умові задачі, не існують.

Глава 84

ПОШУК АНАЛОГІЙ І АНАЛОГІЯ В ПОШУКУ

Геометрична ситуація для трикутника досить тривіальна: те, що збігаються центр описаного навколо трикутника кола та інцентр, підштовхує до легко прогнозованого висновку — трикутник буде рівностороннім.

Аналогія з тетраедром: якщо збігаються центри описаної і вписаної сфер — припущення, що тетраедр — правильна піраміда або ж правильний тетраедр буде правильним, але... частковим.

Пошук точнішої аналогії підштовхує до сміливішого припущення, яке ми доведемо: тетраедр буде рівногранним! Смілива аналогія! Неочевидна аналогія!

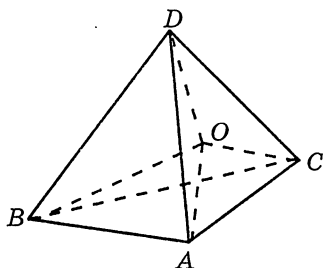


Рис. 84.1

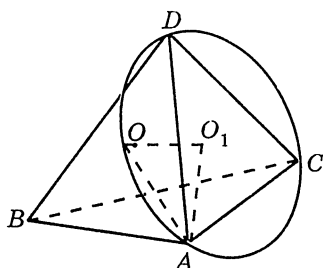


Рис. 84.2

Саме завдяки їй постає питання: які властивості характерні для будь-якої піраміди, у якій збігаються центри вписаної і описаної сфер. Ось чому від тетраедра ми перейдемо до піраміди, навколо якої можна описати кулю і в яку можна вписати сферу, тобто до правильної! Але — по порядку.

Теорема. Тетраедр, у якого збігаються центри описаної і вписаної кулі, — рівногранний.

● **Доведення.** Нехай $DABC$ (рис. 84.1) тетраедр, у якого збігаються центри описаної і вписаної кулі.

З'єднаємо центр O з вершинами D, A, B, C і тим самим розіб'ємо тетраедр $DABC$ на чотири тетраедри, у яких за основи візьмемо грані даного тетраедра. У цих тетраедрів висоти рівні (радіуси вписаної кулі); бічні ребра тетраедрів також рівні (радіуси описаної кулі).

Із рівності бічних ребер малих тетраедрів: у кожному з них спільна вершина O проектується в центр O_i ($i = 1, 2, 3, 4$) кіл, описаних навколо граней тетраедра $DABC$ (рис. 84.2). Оскільки $OO_1 = OO_2 = OO_3 = OO_4$ і $OA = OB = OC = OD$, то радіуси цих кіл рівні (як сторони рівних трикутників).

Доведемо, що плоскі кути будь-якої з вершин тетраедра дорівнюють відповідно кутам протилежної грані. Дійсно, розглянемо, наприклад, кути при вершині D . Зазначимо, що $\angle ADB = \angle ACB$. Уведемо позначення:

$$\begin{aligned} \angle BAC = \angle BDC = \alpha, \angle ABC = \angle ADC = \beta, \angle ACB = \angle ADB = \gamma, \\ \angle ACD = \angle ABD = \alpha_1, \angle BCD = \angle BAD = \beta_1, \angle DAC = \angle DBC = \gamma_1. \end{aligned}$$

Тоді маємо:

$$\text{із } \triangle ABC: \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ; \quad (1)$$

$$\text{із } \triangle ABD: \alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 180^\circ; \quad (2)$$

$$\text{із } \triangle ACD: \alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180^\circ; \quad (3)$$

$$\text{із } \triangle BDC: \alpha + \beta_1 + \gamma_1 = 180^\circ; \quad (4)$$

$$\text{із (1) і (2): } \alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta; \quad (5)$$

$$\text{із (3) й (4): } \alpha_1 - \beta_1 = \alpha - \beta. \quad (6)$$

Із (5) та (6): $\alpha_1 = \alpha$; $\beta_1 = \beta$, звідси $\gamma_1 = \gamma$, а значить,

$$\triangle ABC = \triangle ADC = \triangle ABD = \triangle BDC,$$

при цьому $AB = DC$, $AC = BD$, $BC = AD$, тобто грані — рівні трикутники, і протилежні ребра тетраедра попарно рівні. ●

Властивості n -кутної піраміди, у якої збігаються центри вписаної та описаної куль¹

Перша властивість. Сума плоских кутів при вершині піраміди Π^0_I дорівнює 180° .

Перед доведенням звернемо увагу на теорему:

Якщо з центра кулі, описаної навколо многогранника опустити перпендикуляр на його грань, то основа цього перпендикуляра буде центром кола, описаного навколо многокутника, який є відповідною гранню цього многогранника.

Довести самостійно.

Переходимо до доведення властивості (рис. 84.3).

● Нехай K — центр сфер. Якщо KN — перпендикуляр, то $AN = BN = NS$ як радіуси кола, описаного навколо грані ASB . Прямокутні трикутники AOK , ANK рівні, відповідно, $AO = AN$ (*).

$$\text{Аналогічно: } BO = BN, \angle AOB = \angle ANB = \frac{360^\circ}{n}.$$

Але кут ASB — вписаний, він опирається на ту ж дугу, що і центральний кут ANB , тому $\angle ASB = \frac{1}{2} \angle ANB$; тобто

$$\angle ASB = \frac{180^\circ}{n}. \quad \bullet$$

Друга властивість. Апофема піраміди Π^0_I дорівнює сумі радіусів кіл, вписаного й описаного навколо многокутника, що лежить в основі піраміди.

● Доведення. Нехай M — середина відрізка AB (рис. 84.3). Оскільки $\triangle AOB = \triangle ANB$, то $NM = OM = r$ (r — радіус кола, вписаного в основу Π^0_I):

$$AO = AN = NS = R$$

(R — радіус описаної сфери).

Значить, $SM = SN + NM = R + r$. ●

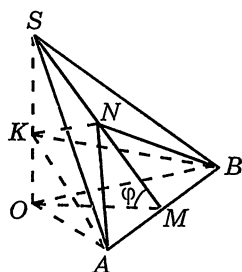


Рис. 84.3

¹ Таку піраміду позначатимемо Π^0_I .

Третя властивість. Нехай φ — двограний кут при основі піраміди Π^0_I (рис. 84.3). Тоді

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}}{\operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{n}}.$$

● Доведення. Із $\triangle ASM$: $SM = AM \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{n}$. Із $\triangle SMO$:

$$SM = \frac{OM}{\cos \varphi}, \text{ звідси}$$

$$1 = \frac{AM}{OM} \cos \varphi \cdot \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{n}. \quad (1)$$

Із $\triangle AOM$:

$$\frac{AM}{OM} = \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}. \quad (2)$$

Враховуючи співвідношення (1) і (2), отримаємо

$$1 = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{n}, \text{ звідси } \cos \varphi = \frac{\operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}}{\operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{n}}.$$

Четверта властивість. Позначимо α — кут нахилу бічного ребра Π^0_I до площини основи. Тоді $\varphi + 2\alpha = 180^\circ$.

● Доведення. У трикутнику OSM KM — бісектриса кута OMS (рис. 84.3). Тому $\frac{OK}{KS} = \frac{OM}{SM}$. Оскільки $KS = AK$, то

$$\frac{OK}{AK} = \frac{OM}{SM}. \quad (3)$$

Із (3) виходить, що

$$\angle OKA = \angle OMS,$$

а значить,

$$180^\circ - 2\alpha = \varphi, \varphi + 2\alpha = 180^\circ. \bullet$$

П'ята властивість. У піраміді Π^0_I :

$$\frac{r}{R} = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{1 + \cos \frac{\pi}{n}}.$$

● Доведення. Маємо $KO = r$; $KS = R$; $\angle AOM = \frac{\pi}{n}$ (рис. 84.3).

За теоремою про бісектрису: $\frac{r}{R} = \frac{OM}{MS} = \cos \varphi$; із трикутника

KAO : $\cos \angle AKO = \frac{r}{R}$, відповідно, $\angle AKO = \varphi$. Із трикутника AOK , AOM і OMK отримаємо

$$\cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{OM}{OA} \cdot \frac{OK}{OM} = \frac{OK}{OA} = \operatorname{ctg} \varphi.$$

$$\text{Значить, } \cos \varphi = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{1 + \cos \frac{\pi}{n}}, \text{ звідки } \frac{r}{R} = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{1 + \cos \frac{\pi}{n}}. \bullet$$

Глава 85

«СМАЧНІ» СТЕРЕОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ З КОМЕНТАРЯМИ

Геометричним нерівностям у планіметрії пощастило значно більше, аніж стереометричним. Вони попросту — популярні. І якщо в шкільній геометрії поява планіметричних нерівностей як задач — справа звична, то стереометричні нерівності для школярів втрачені. Як їх повернути? Та як завжди, просто — їх потрібно самому полюбити, як щось смачненьке. Спробуємо із великої кількості стереометричних нерівностей виділити «найсмачніші». При цьому доцільно було б розглянути дві групи нерівностей: перша — доводиться за допомогою алгебраїчних і тригонометричних співвідношень і друга — «суто геометрична».

1. Застосування алгебраїчних і тригонометричних співвідношень

Розглянемо доведення стереометричних нерівностей за допомогою алгебраїчних нерівностей і тригонометричних формул. Вважаємо, що читач знайомий з нерівністю «трьох квадратів», співвідношенням між середнім арифметичним і тригонометричним двох і більше чисел (нерівність Коші), сумою двох обернених величин.

Нерівність «трьох квадратів» називають нерівністю виду:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc, \quad (1)$$

де a, b, c — будь-які дійсні числа.

Нехай a, b, c — виміри прямокутного паралелепіпеда, тоді нерівність (1) можна перетворити на стереометричну нерівність.

Задача 1. Довести, що в прямокутному паралелепіпеді подвоєний квадрат діагоналі не менший за повну поверхню.

Коментар. Тут і далі будемо використовувати співвідношення: квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів:

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (d — діагональ, a, b, c — виміри паралелепіпеда).

● Доведення.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ і } ab + ac + bc = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{S_n}{2}$$

(S_1, S_2, S_3 — площі граней, S_n — повна поверхня).

Значить,

$$2d^2 \geq S_n. \bullet$$

Задача 2. Із всіх паралелепіпедів за заданою діагоналлю знайти паралелепіпед з найбільшою повною поверхню.

● Із попередньої задачі виходить, що це куб. ●

Задача 3. Довжина діагоналі прямокутного паралелепіпеда d . Яку найбільшу величину може мати об'єм цього паралелепіпеда?

$$\bullet \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \geq 3\sqrt{a^2 b^2 c^2} = 3\sqrt{V^2}.$$

Рівність правильна, якщо

$$a = b = c = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Відповідь: } V = \frac{d^3}{\sqrt{27}}. \bullet$$

Задача 4. Довести, що в прямокутному паралелепіпеді

$d^2 \geq \sqrt{V} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$, де d — діагональ паралелепіпеда, a, b, c — його виміри, V — об'єм.

● Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} d^2 &\geq ab + ac + bc = (\sqrt{ab})^2 + (\sqrt{ac})^2 + (\sqrt{bc})^2 \geq \\ &\geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} = \sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}). \end{aligned}$$

Оскільки $V = abc$, то нерівність доведено. ●

Коментар: тут двічі було застосовано нерівність трьох квадратів — прийом, який ми ще неодноразово використаємо.

Введемо позначення 4ρ — сума всіх ребер паралелепіпеда:

$$\rho = a + b + c.$$

Задача 5. Довести, що в прямокутному паралелепіпеді

$\frac{S_1}{a} + \frac{S_2}{b} + \frac{S_3}{c} \geq \rho$, де S_1, S_2, S_3 — площі граней, які не містять відповідно ребра a, b, c .

Коментар: зверніть увагу на іншу форму запису нерівності трьох квадратів:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c. \quad (2)$$

● **Доведення.** Маємо $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$. Доведемо, що це нерівність трьох квадратів. Дійсно, оскільки $a > 0; b > 0; c > 0$, то, домноживши обидві частини нерівності на abc , отримаємо нерівність трьох квадратів. ●

Задача 6. Довести, що в прямокутному паралелепіпеді $a^4 + b^4 + c^4 \geq V \cdot \rho$.

● **Доведення.**

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &\geq a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2 = \\ &= abc(a + b + c) = V \cdot \rho. \quad \bullet \end{aligned}$$

Задача 7. Довести, що $\rho^2 \geq \frac{3}{2} S_n$.

● **Доведення.** Перепишемо задану нерівність так:

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ac),$$

або

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq 3ab + 3ac + 3bc,$$

або

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac. \quad \bullet$$

Задача 8. Довести, що в прямокутному паралелепіпеді

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{\rho^2}{3}.$$

Коментар: ця нерівність зазвичай подається як умовна нерівність:

$$\text{Дано: } x + y + z = a. \text{ Довести: } x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{a^2}{3}.$$

● Доведемо задану нерівність: $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq \rho^2$.

Але $\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$. Значить,

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

або

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc,$$

отримали нерівність (1). ●

Задача 9. Довести, що в прямокутному паралелепіпеді

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \geq \sqrt{3}Vd.$$

Коментар. Перш ніж перейти до паралелепіпеда, зверніть увагу на тотожність

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz),$$

до якої застосовується нерівність трьох квадратів.

● Доведення. Маємо:

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx).$$

Нехай

$$x = (ab)^2; y = (bc)^2; z = (ac)^2.$$

Отримаємо

$$((ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2)^2 \geq 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) = 3a^2b^2c^2d^2.$$

Нехай a, b, c — виміри прямокутного паралелепіпеда. Тоді

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \geq \sqrt{3}Vd. \bullet$$

Задача 10. Довести, що в прямокутному паралелепіпеді

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{V^3}.$$

● Доводиться аналогічно до попередніх нерівностей. ●

Задача 11. α, β, γ — відповідно величини плоских кутів

тригранного кута. Довести, що $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < \frac{4}{3}\pi^2$.

Коментар. Нерівність обрано тому, що вона доводиться за допомогою нерівності трьох квадратів.

● Доведення. Враховуючи нерівність трьох квадратів, маємо

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

або

$$3\alpha\beta + 3\beta\gamma + 3\gamma\alpha \leq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha.$$

або

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leq \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)^2. \quad (1^0)$$

Оскільки сума плоских кутів тригранного кута менша за 2π , маємо:

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leq \frac{1}{3}(2\pi)^2 = \frac{4}{3}\pi^2. \bullet$$

Задача 12. Серед всіх прямокутних тетраедрів з висотою h знайти тетраедр найменшого об'єму.

Коментар: ця задача доводиться за допомогою нерівності Коші ($n = 3$) і співвідношення $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$, де a, b, c — бічні ребра тетраедра.

● Доведення. Маємо

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{36V^2}}.$$

Але $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$, тому $\frac{1}{h^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{36V^2}}$, або $V \geq \frac{\sqrt{3}}{2}h^3$.

Значить, це буде прямокутний тетраедр з рівними ребрами

($a = h\sqrt{3}$). Його об'єм дорівнюватиме $\frac{\sqrt{3}}{2}h^3$. ●

Задача 13. Довести, що куб діагоналі прямокутного паралелепіпеда більший за суму кубів його вимірів.

Коментар. Нерівність цікава тим, що вона аналогічна до попередньої планіметричної нерівності: $c^3 > a^3 + b^3$, де c, a і b — гіпотенуза і катети прямокутного трикутника. Та й доведення стереометричної нерівності аналогічне до планіметричної.

● Доведення. Нехай a, b, c — виміри прямокутного паралелепіпеда, d — його діагональ. Тоді

$$d^3 = d(a^2 + b^2 + c^2) = a^2d + b^2d + c^2d > a^3 + b^3 + c^3,$$

оскільки $d > a, d > b, d > c$. ●

Задача 14. Довести, що об'єм тетраедра менший за шосту частину кореня квадратного добутку довжин всіх його ребер.

Коментар. Доведення задачі базується на поширеному прийомі: відома формула перетворюється в нерівність, наприклад, площа трикутника S обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C \quad (a, b \text{ — сторони, } C \text{ — кут між ними), оскільки}$$

$$\sin C \leq 1, \text{ маємо } S \leq \frac{ab}{2}.$$

● Доведення. Нехай a і b — сторони основ тетраедра. Тоді

$$S_{\text{осн}} \leq \frac{ab}{2}.$$

Нехай c — бічне ребро тетраедра, h — висота, опущена на основу. Тоді

$$h \leq c \text{ і } V \leq \frac{abc}{6}.$$

Нехай M — вершина тетраедра. Тоді

$$V \leq \frac{AB \cdot AC \cdot MA}{6}; \quad V \leq \frac{AB \cdot BC \cdot MB}{6};$$

$$V \leq \frac{AC \cdot BC \cdot MC}{6}; \quad V \leq \frac{MA \cdot MB \cdot MC}{6}.$$

Перемножимо ці нерівності, отримаємо потрібне. ●

Задача 15. Доведіть, що об'єм правильної піраміди менший за $\frac{3}{7}$ куба довжини бічного ребра l .

● **Доведення.** Опишемо навколо піраміди конус з твірною l і кутом x між твірною і основою конуса.

Тоді $V = \frac{S \cdot H}{3} \leq \frac{\pi l^3}{3} \cos^2 x \sin x$. Але $\cos^2 x \sin x$ маємо

максимальним, якщо $\cos^2 x = \frac{2}{3}$. Тому $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$$V < \frac{\pi l^3}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}} < 0,41l^3 < \frac{3}{7}l^3. \bullet$$

Задача 16. Довести, що площа будь-якої грані тетраедра менша за суму площ трьох інших граней.

Коментар. Для доведення цієї нерівності використовується теорема про площу проєкцій і властивості тригонометричних функцій.

● **Доведення.** Позначимо S — площу основи, S_1, S_2, S_3 — площі бічних граней, α, β, γ — двогранні кути при ребрах основи тетраедра. Тоді

$$S = S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \beta + S_3 \cos \gamma < S_1 + S_2 + S_3. \bullet$$

Задача 17. У тетраедрі S_1, S_2, S_3 — площі бічних граней, h_1, h_2, h_3 — відповідні висоти бічних граней, V — об'єм тетраедра. Довести, що $V \leq \frac{1}{3} \sqrt[3]{S_1 S_2 S_3 h_1 h_2 h_3}$.

Коментар: аналогічно до формули площі трикутника є формула площі тетраедра

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{S_1 \cdot S_2 \sin \varphi}{a},$$

де φ — кут між бічними гранями з площами S_1 і S_2 , a — їхнє спільне ребро. Оскільки $\sin \varphi \leq 1$, то

$$V \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{S_1 \cdot S_2}{a}.$$

● Доведення.

$$V \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{S_1 \cdot S_2}{a}; \quad V \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{S_2 \cdot S_3}{b}; \quad V \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{S_1 \cdot S_3}{c}.$$

$$\begin{aligned} V^3 &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}{abc} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{2S_1 \cdot 2S_2 \cdot 2S_3 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}{abc \cdot 8} = \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{h_1 h_2 h_3 S_1 S_2 S_3}{2^3}, \quad V \leq \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3 S_1 S_2 S_3}. \end{aligned}$$

Задача 18. Якщо діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з площинами його граней кути α , β , γ , то $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma \geq 1,5$. Довести.

Коментар: доведення заданої нерівності зводиться до відомої нерівності

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Доведемо її:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + 3 &\geq \frac{3}{2} + 3, \\ (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) &\geq \frac{9}{2}, \end{aligned}$$

звідки

$$((a+b) + (b+c) + (c+a)) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \geq 9,$$

а ця нерівність доводиться безпосередньо за допомогою нерівності Коші для $n = 3$.

● Доведення. Розглянемо паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

(рис. 85.1). Нехай $\angle BDB_1 = \alpha$. Тоді $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{a^2}{b^2 + c^2}$.

Аналогічно $\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{b^2}{a^2 + c^2}$; $\operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$.

Так, задана нерівність зводиться до нерівності

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{3}{2}. \quad \bullet$$

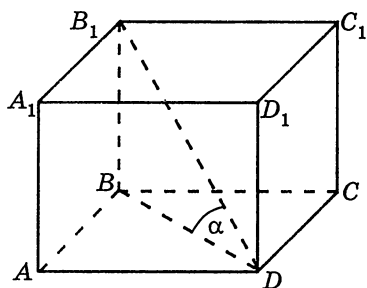


Рис. 85.1

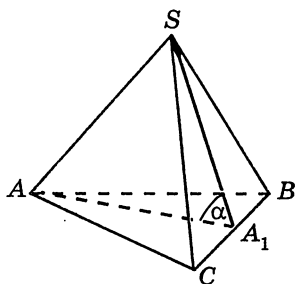


Рис. 85.2

Задача 19. Усі плоскі кути при вершині тетраедра прямі. Грані утворюють з основою піраміди кути α , β , γ . Довести, що

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt{2}.$$

● **Доведення.** Проведемо висоту AA_1 грані ABC (рис. 85.2). Тоді $\angle SA_1A$ — лінійний кут двогранного кута BC (доведіть!), відповідно, $\angle SA_1A = \alpha$. Позначимо $SA = a$; $SB = b$; $SC = c$. Із прямокутного трикутника SBC :

$$SA_1 = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad \text{і} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{SA}{SA_1} = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{bc}.$$

Аналогічно

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b\sqrt{a^2 + c^2}}{ac}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{c\sqrt{b^2 + a^2}}{ab}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{bc} + \frac{b\sqrt{a^2 + c^2}}{ac} + \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} = \\ &= a\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} + b\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}} + c\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}}. \end{aligned}$$

Скористаємося нерівністю Коші

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy} \quad \text{и} \quad x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &\geq a\sqrt{\frac{2}{bc}} + b\sqrt{\frac{2}{ac}} + c\sqrt{\frac{2}{ab}} = \sqrt{2} \left(\frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ac}} + \frac{c}{\sqrt{ab}} \right) \geq \\ &\geq \sqrt{2} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{\sqrt{ab}}} = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{abc}{abc}} = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

«Суто геометричні» нерівності

Задача 20. Доведіть, що можна побудувати трикутник, у якого довжини сторін дорівнюють сумі довжин мимобіжних ребер тетраедра.

Коментар. Використовується «головна» нерівність трикутника. Задача аналогічна цій нерівності.

● Доведення. За нерівністю трикутника (рис. 85.3) $SA < SC + AC$. Аналогічно $SA < SB + AB$; $BC < AB + AC$, $BC < SB + SC$. Додамо ці нерівності і поділимо на 2. Отримаємо $SA + BC < (SB + AC) + (SC + AB)$.

Аналогічно доводиться, що

$$SB + AC < (SA + BC) + (SC + AB)$$

та

$$SC + AB < (SA + BC) + (SB + AC).$$

Сторони шуканого трикутника $(SA + BC)$; $(SB + AC)$; $(SC + AB)$. ●

Задача 21. Доведіть, що площа бічної грані трикутної піраміди менша за суму площ двох інших бічних граней.

● Доведення. Побудуємо площину, перпендикулярну до бічного ребра призми (рис. 85.4). Нехай x, y, z — сторони цього перерізу, d — бічне ребро призми. Маємо $x + y < z$, помножимо на d . Тоді $dx + dy < dz$, або $S_1 + S_2 < S$. ●

Задача 22. Довести, що у прямокутному паралелепіпеді відстань між діагоналями суміжних граней, що перетинаються, не більша за одну третю діагоналі цього тетраедру.

Коментар. Задача споріднена з відомою задачею про відстань між двома мимобіжними діагоналями суміжних граней куба. Звідси й аналогічне доведення.

● Доведення. Проведемо перерізи BC_1D , AB_1D_1 , а також діагональні перерізи AA_1C_1C (рис. 85.5). Можна показати, що відстань між першими діагональними перерізами дорівнює відстані між діагоналями AD_1 і DC_1 .

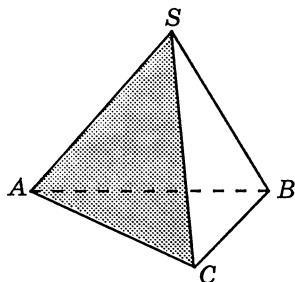


Рис. 85.3

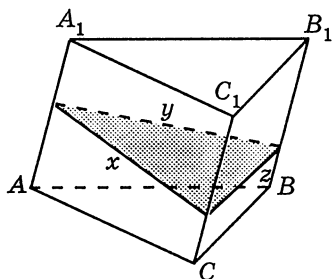


Рис. 85.4

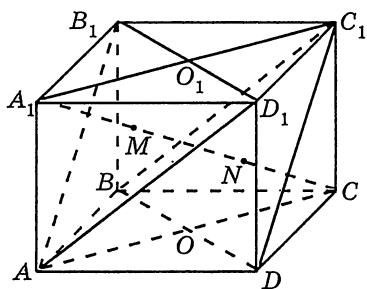


Рис. 85.5

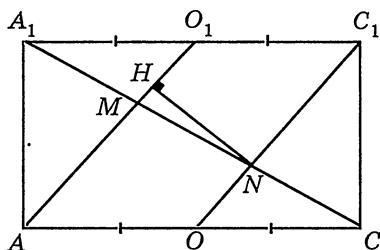


Рис. 85.6

Очевидно, що відрізок MN (рис. 85.6) не менший за відстань між діагональними перерізами. Оскільки M і N — центроїди цих перерізів, то $MN = \frac{1}{3} A_1C$, $NH \leq MN$, де NH — відстань між перерізами, або, що те ж саме, між діагоналями, що перетинаються, — AD_1 і DC_1 .

Задача 23. Радіус описаної навколо тетраедра сфери R , радіус вписаної сфери r . Довести, що $R \geq 3r$.

• **Доведення.** Візьмемо на кожній грані тетраедра по точці. Сфера, що проходить через ці точки, не менша за вписану в тетраедр ($r_1 \geq r$). Якщо ці точки — центроїди граней, то вони — вершини тетраедра, у якого ребра втричі менші за ребра заданого. Тому сфера, якій належать ці точки, втричі менша за сферу, описану навколо заданого тетраедра. Звідси

$$r \leq \frac{R}{3}, \text{ тобто } R \geq 3r. \bullet$$

Глава 86

КОЛИ ІСНУЮТЬ РІВНОРЕБЕРНІ ПІРАМІДИ

Про рівнореберну піраміду багато може сказати сама назва — піраміда з рівними ребрами. Відсутність у класифікації і на практиці зумовлена, мабуть, наявністю правильного тетраедра. Помилково здавалося, що такі піраміди не дуже цікаві. Тому ще несподіваним став отриманий результат: рівнореберні піраміди не завжди існують, і ще дивовижніше — знайдено **критерій існування** рівнореберних пірамід. Почнемо з вивчення чотирикутної піраміди. Припускаємо, що в основі піраміди

лежить ромб. Оскільки бічні ребра цієї піраміди рівні, то основа висоти, опущеної з вершини на основу, буде центром кола, описаного навколо цієї основи. Значить, в основі чотирикутної рівнобедрної піраміди буде квадрат.

Нескладно помітити, що рівнобедрної шестикутної піраміди не існує. Дійсно, розглянемо піраміду $SAB CDEF$ (рис. 86.1). Розглянемо трикутник SAD : у нього сторони $SA = SD = a$ і $AD = 2a$ — а цього бути не може.

А може, існує рівнобедрна п'ятикутна піраміда?

Розглянемо піраміду $SAB CDE$ (рис. 86.2). Оскільки трикутник SAC дорівнює трикутнику ABC , то п'ятикутна рівнобедрна піраміда існує.

Отже, «неприємності» починаються з шестикутної рівнобедрної піраміди. Зручно перевірити факт існування восьмикутної рівнобедрної піраміди (рис. 86.3).

Як і в шестикутній рівнобедрній піраміді, розглянемо існування одного із діагональних перерізів SA_1A_5 .

Позначимо внутрішній кут правильного восьмикутника $A_1A_2A_3\dots A_8$ як α , кут $A_1A_3A_5$ як φ .

Маємо:

$$A_1A_3 = 2a \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (\alpha = 135^\circ). \quad \varphi = \alpha - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\alpha - \pi.$$

$$A_1A_5 = 2A_1A_3 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Має бути: $A_1A_5 < SA_1 + SA_5$, або $4a \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi}{2} < 2a$,

$$\text{або } \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi}{2} < \frac{1}{2}, \quad \text{або } -\sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha < \frac{1}{2}.$$

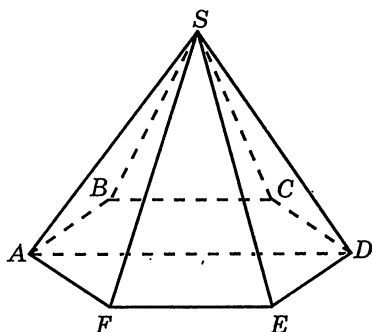


Рис. 86.1

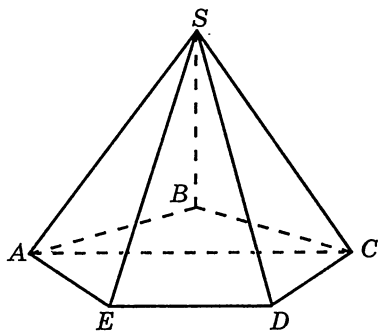


Рис. 86.2

Оскільки $\alpha = 135^\circ$, то $-\sin \frac{135^\circ}{2} \cos 135^\circ > \frac{1}{2}$, тобто $A_1 A_5 > 2a$ — протиріччя. Восьмикутної рівнобедреної піраміди не існує!
 Розглянемо критерій існування рівнобедреної n -кутної піраміди.

Щоб не «шукати» найбільшу діагональ, змінимо методику дослідження: розглянемо існування висоти SO рівнобедреної піраміди (рис. 86.4).

Нехай $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ — правильний n -кутник, внутрішній кут якого α , O — центр основи. Тоді

$$OA_3 = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$SO^2 = a^2 - \frac{a^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = a^2 \left(\frac{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = a^2 \left(\frac{\left(2 \cos \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} + 1 \right)}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Має бути:

$$a^2 \left(\frac{\left(2 \cos \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} + 1 \right)}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) > 0,$$

або $2 \cos \frac{\alpha}{2} - 1 > 0$, або $\cos \frac{\alpha}{2} > \frac{1}{2}$, значить,

$$\alpha < 120^\circ$$

— отримали критерій існування рівнобедреної піраміди.

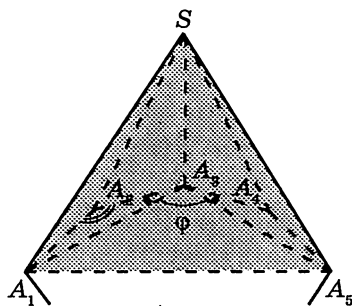


Рис. 86.3

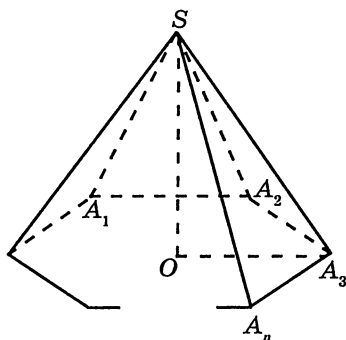


Рис. 86.4

Заради справедливості зазначимо, що застосування теореми про суму плоских кутів тригранного кута дає можливість визначити, що $n < 6$. Дійсно, $\frac{180^\circ(n-2)}{n} < 120^\circ$, або $n < 6$, а значить, $\alpha < 120^\circ$.

Автор вдячний за допомогу в написанні цієї глави учасникам семінару «Як стати суперучителем» Д. Басову і І. Веригиній.

Глава 87

ШАРОВА БЛИСКАВКА

Спілкуючись з учнями, я достатньо часто використовую нескладну, але дуже корисну задачу (назвемо її задачею А):

Сторона BC трикутника ABC є хордою кола, яке перетинає сторони AC і AB в точках A_1 і B_1 . Довести, що трикутник AA_1B_1 подібний до трикутника ABC .

● Доведення. Оскільки чотирикутник A_1B_1BC вписано в коло (рис. 87.1), то

$$\angle CA_1B_1 + \angle B_1BC = 180^\circ.$$

Але

$$\angle AA_1B_1 + \angle CA_1B_1 = 180^\circ,$$

значить,

$$\angle AA_1B_1 = \angle ABC,$$

відповідно, трикутник AA_1B_1 подібний до трикутника ABC . ●

Задача жила своїм життям, з'являлася під час опитування учнів, на заліках і контрольних роботах в 8–9 класах.

Аж ось... Зацікавила своєю короткою і влучною умовою задача про сферу (Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989):

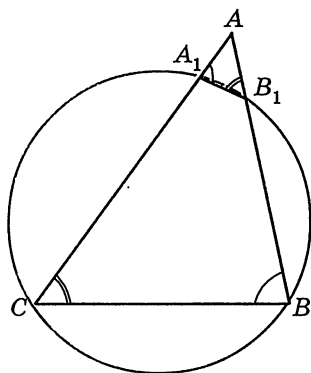


Рис. 87.1

Дано сферу, коло на ній і точку P , яка не належить сфері. Доведіть, що інші точки перетину сфери з прямими, які з'єднують точку P з точками кола, лежать на одному колі.

Стереометрична задача нагадувала задачу А, але стереометрія зумовила ходи в розв'язанні — несподівані, як

блискавки з добрячою долею потрясіння не від однієї, а від декількох спалахів!

Отож, по порядку.

Нехай γ задане коло сфери Γ (рис. 87.2), точки A і B належать колу γ . Прямі PA і PB перетинають сферу Γ другий раз в точках A_1 і B_1 .

Перший сплах: навколо трикутника ABP проведемо коло, і в точці P дотичну MN до неї. Очевидно, що

$$\angle MPA = \angle PBA.$$

Другий сплах: оскільки точки A , A_1 , B , B_1 належать площині PA_1B_1 і сфері Γ , то переріз Γ цією площиною дає ще одне коло, в яке вписано чотирикутник ABB_1A_1 , а значить,

$$\angle AA_1B_1 = \angle PBA,$$

відповідно,

$$\angle PA_1B_1 = \angle MPA_1$$

і

$$A_1B_1 \parallel MN.$$

Третій сплах: пошук площини, на якій розташовані шукані точки.

Через коло γ і точку P побудуємо сферу (зображати її на малюнку немає необхідності). Через точку P проведемо площину π , дотичну до цієї сфери. Очевидно, що дотична MN належить площині π .

Оскільки пряма A_1B_1 паралельна до MN , то вона паралельна до площини π .

Якщо побудувати аналогічні прямі A_1C_1 , A_1D_1 і т. д., то вони будуть паралельні до площини π . Через пару таких прямих (наприклад A_1B_1 і A_1C_1) проведемо площину X .

Нескладно довести, що всі прямі зі спільною точкою A_1 і паралельні до площини π розташовані в площині X .

Дійсно, якщо, наприклад, пряма A_1E_1 не належить площині X , то вона перетинатиме площину X , а значить, і площину π , що суперечить її паралельності до цієї площини.

Отже, шукані точки належать Γ і площині X , а значить, розташовані на колі, що й потрібно було довести.

Справжнісінька шарова блискавка!

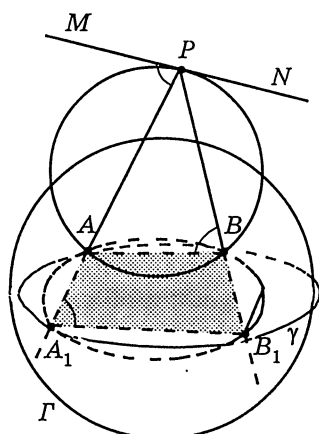


Рис. 87.2

ЧАРІВНА СКРОМНІСТЬ СТЕРЕОМЕТРИЧНОЇ ПЕРЛИНИ

Навіть досвідчений «боєць» може не звернути увагу на задачу із наперед «нудною» умовою:

Повна поверхня конуса в два рази більша за поверхню вписаної в неї кулі. Визначити співвідношення об'єма конуса до об'єму кулі.

Наведемо природне доведення методом від допоміжного елемента. Нехай I — центр кулі, K — точка дотику кулі до основи конуса (рис. 88.1). Позначимо l — твірна конуса, R — радіус основи, r — радіус кулі, S_n — повна поверхня конуса.

$$S_n = \pi R(R + l). \quad (1)$$

Позначимо α — кут IBK . Тоді:

$$R = r \operatorname{ctg} \alpha, \quad l = \frac{R}{\cos 2\alpha} = \frac{r \operatorname{ctg} \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Підставимо ці вирази в (1):

$$S_n = \pi r \operatorname{ctg} \alpha \left(r \operatorname{ctg} \alpha + \frac{r \operatorname{ctg} \alpha}{\cos 2\alpha} \right) = \pi r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} \right).$$

Нехай S_κ — поверхня кулі.

$$S_\kappa = 4\pi r^2.$$

За умовою

$$S_n = 2S_\kappa,$$

значить,

$$\pi r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} \right) = 2 \cdot 4\pi r^2,$$

або

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 8 \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (2)$$

Нехай V_{κ_n}, V_κ — відповідно об'єми конуса і кулі. Маємо

$$V_{\kappa_n} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

(H — висота конуса).

Оскільки $H = R \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$, а

$$V_\kappa = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

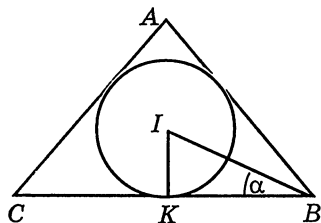


Рис. 88.1

то

$$\frac{V_{\kappa\kappa}}{V_{\kappa}} = \frac{\pi R^2 R \operatorname{tg} 2\alpha}{3 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{4 \operatorname{tg}^3 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{4(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}^3 \alpha} = \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}. \quad (3)$$

Далі скористаємося формулою (2):

$$\begin{aligned} 8 \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} = 1 + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Підставимо в формулу (3):

$$\frac{V_{\kappa\kappa}}{V_{\kappa}} = \frac{4}{8 \operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{4(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = 2,$$

отже, співвідношення об'єма конуса до об'єму кулі дорівнює 2. Під час розв'язання можливі *варіації*.

Перша варіація

Отримавши співвідношення (2), виразимо $\operatorname{tg}^2 \alpha$ через $\cos 2\alpha$.
Маємо

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 8 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha},$$

звідки

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{3}. \quad (1^0)$$

Знайдемо тепер співвідношення об'ємів. Маємо

$$V_{\kappa\kappa} = \frac{\pi r^3}{3} \operatorname{ctg}^3 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha, \quad V_{\kappa} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Перетворимо вираз $\operatorname{ctg}^3 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha$, враховуючи, що $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$:

$$\operatorname{ctg}^3 \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{1}{3} \sin \alpha} = 8.$$

Друга варіація (інтуїція та аналогія!)

Оскільки в умові задачі йдеться про співвідношення між поверхнями і об'ємами, то найперше привертає до себе увагу формула об'єму кулі

$$V_{\kappa} = \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ або } V_{\kappa} = \frac{r}{3} S_{\kappa},$$

тобто формулу об'єму можна виразити за допомогою формули поверхні (S_{κ}). А чи не можна об'єм конуса виразити за допомогою його повної поверхні? За аналогією з формулою площі трикутника $S = rp$ можна визначити, що $V_{\kappa\kappa} = r \cdot x$. Знайдемо x . Оскільки

$$V_{\kappa\kappa} = \frac{1}{3} \pi R^2 H, \text{ то } \frac{1}{3} \pi R^2 H = rx,$$

звідки

$$x = \frac{\pi R^2 H}{3r} = \frac{\pi R^2 \sqrt{l^2 - R^2}}{3r} \left(H = \sqrt{l^2 - R^2} \right). \quad (1)$$

Виразимо r через l і R . За теоремою про бісектрису:

$$\frac{IK}{AI} = \frac{KB}{AB}, \text{ або } \frac{r}{\sqrt{l^2 - R^2} - r} = \frac{R}{l}, \quad rl = R\sqrt{l^2 - R^2} - Rr,$$

звідси

$$r \cdot (l + R) = R\sqrt{l^2 - R^2}, \quad r = R \cdot \frac{\sqrt{l - R}}{l + R}. \quad (2)$$

Підставимо (2) в (1):

$$x = \frac{\pi R^2 \sqrt{l^2 - R^2} \cdot \sqrt{l + R}}{3 \cdot \sqrt{l - R} \cdot R},$$

звідки $x = \frac{\pi}{3} \cdot R(l + R) = \frac{1}{3} S_{n.\kappa}$. Значить,

$$V_{\kappa\kappa} : V_{\kappa} = \frac{r}{3} \cdot S_{n.\kappa} : \frac{r}{3} S_{\kappa} = 2 \text{ (за умовою)}. \quad (3)$$

Отже, знайдено формулу $V_{\kappa\kappa} = \frac{r}{3} \cdot S_{n.\kappa}$.

Тоді запропонована задача розв'язується в один рядок (см. (3)).

Третя варіація («Ретро»)

Прагнення виразити об'єм конуса через радіус вписаної кулі й повну поверхню змусило пригадати лему про об'єм тіл обертання, яку було розглянуто у підручнику А. П. Кисельова і яку вивчають у школі десятиліттями для виведення формул об'єму кулі і її частин:

Якщо трикутник ABC обертається навколо осі, яка лежить у площині трикутника, проходить через його вершину A , але не перетинає сторони BC , то об'єм тіла, отриманого при такому обертанні, дорівнює добутку поверхні, утвореної протилежною стороною BC на одну третю висоти h , опущеної на цю сторону

(Киселев А. П. Геометрия: Ч. II. — М.: Просвещение, 1964. — С. 83).

● Подамо об'єм конуса ABC (рис. 88.2) як суму двох об'ємів: об'єм тіла, отриманого від обертання трикутника AIC (I — центр вписаної в конус кулі) і об'єма конуса CIB .

$$V_{\kappa\kappa} = V_1 + V_2.$$

Об'єм V_2 конуса дорівнює $V_2 = \frac{1}{3} r \cdot S_o$ (S_o — площа основи). А

об'єм тіла обертання V_1 знайдено за лемою: $V_1 = \frac{1}{3} r \cdot S_1$.

Але S_1 — це бічна поверхня конуса ABC , значить,

$$V_{\kappa\kappa} = \frac{1}{3} r \cdot S_1 + \frac{1}{3} r \cdot S_o = \frac{r}{3} (S_1 + S_o) = \frac{r}{3} S_{\text{п.к.}}$$

Далі, як і у попередньому способі. ●

Гіпотетичний фінал

Усі попередні способи підштовхують до гіпотези:

Якщо кулю радіуса r вписано в многогранник і вписано в конус, то

$$\frac{V_{\kappa}}{S_{\kappa}} = \frac{V_{\text{м}}}{S_{\text{м}}} = \frac{V_{\kappa\kappa}}{S_{\kappa\kappa}} = \frac{r}{3}$$

(V_{κ}, S_{κ} — об'єм і поверхня куля, $V_{\text{м}}, S_{\text{м}}$ — об'єм і повна поверхня многогранника, $V_{\kappa\kappa}, S_{\kappa\kappa}$ — об'єм і повна поверхня конуса).

● Доведення. Маємо: $\frac{V_{\kappa}}{S_{\kappa}} = \frac{4\pi r^3}{4 \cdot 3\pi r^2} = \frac{r}{3}$. Скористаємося

формулою $r = \frac{3V_{\text{м}}}{S_{\text{м}}}$. Значить, $\frac{V_{\text{м}}}{S_{\text{м}}} = \frac{r}{3}$. Доведемо, що $\frac{V_{\kappa\kappa}}{S_{\kappa\kappa}} = \frac{r}{3}$.

Перший спосіб. Аналогічний до виведення формули довжини кола або площі круга: нескінченно збільшуючи кількість вершин основи правильної n -кутної піраміди, вписаної в конус, перейдемо до межі.

Для тих, кого не влаштовує такий спосіб, пропонуємо ще два.

Другий спосіб (він фактично дублює розглянутий третій спосіб розв'язання задачі):

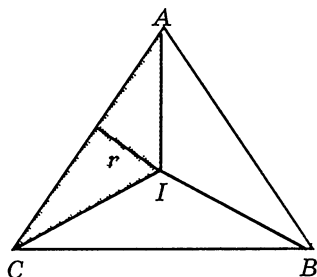


Рис. 88.2

$$\frac{V_{\kappa\kappa}}{S_{\kappa\kappa}} = \frac{\pi R^2 H}{3\pi R(l + R)} = \frac{HR}{3(l + R)} \quad (1^0)$$

(l — твірна конуса, R — радіус основи конуса, r — радіус вписаної кулі).

$$\frac{R}{l} = \frac{r}{H-r}, \quad r = \frac{HR}{l+R}. \quad (2^0)$$

Порівнюючи вирази (2^0) і (1^0) , отримаємо $\frac{V_{\text{кул}}}{S_{\text{кул}}} = \frac{r}{3}$.

Третій спосіб (застосування тригонометрії). Спосіб аналогічний до першого способу розв'язання поставленої задачі: r — радіус кулі, R — радіус основи конуса, α — кут OSB осьового перерізу конуса (рис. 88.3).

$$V_{\text{кул}} = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{ctg} \alpha. \quad V_{\text{к}} = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad r = \frac{R \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

Значить,

$$\frac{V_{\text{кул}}}{V_{\text{к}}} = \frac{\pi R^3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \cdot \frac{4}{3} \pi \frac{R^3 \cos^3 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^3}} = \frac{(1 + \sin \alpha)^3}{4 \cos^2 \alpha \sin \alpha}.$$

$$S_{\text{кул}} = \pi R(R + l) = \pi R \left(R + \frac{R}{\sin \alpha} \right) = \frac{\pi R^2 (\sin \alpha + 1)}{\sin \alpha};$$

$$S_{\text{к}} = 4\pi r^2 = \frac{4\pi R^2 \cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2};$$

$$\frac{S_{\text{кул}}}{S_{\text{к}}} = \frac{\pi R^2 (1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{(1 + \sin \alpha)^2}{4\pi R^2 \cos^2 \alpha} = \frac{(1 + \sin \alpha)^3}{4 \sin \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{V_{\text{кул}}}{V_{\text{к}}}!$$

Перлина, вона і в стереометрії перлина!..

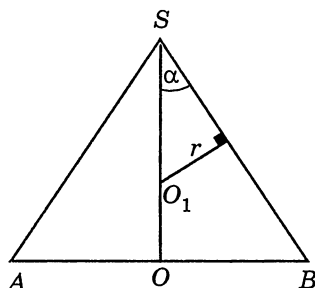


Рис. 88.3

ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА В ПРОСТОРІ

Формула Ейлера про відстані між центрами вписаного в трикутник і описаного навколо нього кола не може не подобатися:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Її характеристики задовольняють навіть найвимогливішого естета геометрії: форма, розмаїття доведень, доступність навіть для восьмикласника і, звісно ж, доведення.

Як часто трапляється, у стереометрії аналог цієї формули довго не був знайдений, якщо не зважати на таку задачу:

У тетраедрі $DABC$ точка O — центр описаної кулі, R — її радіус, точка O_o — центр кола, описаного навколо трикутника ABC , точка I_o — центр вписаного в цей трикутник кола, R_o і r_o — радіуси цих кіл. Довести, що $OI_o^2 = R^2 - 2R_o r_o$.

● Доведення. Оскільки відрізок OO_o перпендикулярний до площини ABC (рис. 89.1), то трикутники OO_oA і OO_oI_o — прямокутні.

Маємо

$$OA^2 = OO_o^2 + AO_o^2, OI_o^2 = OO_o^2 + O_oI_o^2,$$

звідки

$$OI_o^2 = OA^2 - AO_o^2 + O_oI_o^2 = R^2 - R_o^2 + O_oI_o^2.$$

За формулою Ейлера для трикутника ABC

$$O_oI_o^2 = R_o^2 - 2R_o r_o.$$

Відповідно, $OI_o^2 = R^2 - 2R_o r_o$.

Хоча умова задачі не збігається з поставленою метою — знайти формулу OI в просторі, вона все ж дає сподівання, що в шуканій формулі буде фігурувати вираз $R^2 - 2Rr$.

Декілька років тому в журналі «Математика в школі» було опубліковано формулу Дюранда:

У правильній трикутній піраміді

$$OI^2 = (R + r)(R - 3r)$$

(O — центр описаної кулі, R — радіус, I — центр вписаної кулі, r — радіус).

Нескладно показати, що ця формула нагадує формулу Ейлера:

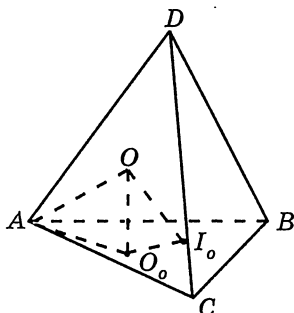


Рис. 89.1

$$(R+r)(R-3r) = R^2 - 3Rr + Rr - 3r^2 = R^2 - 2Rr - 3r^2. \quad (*)$$

В журналі формула доводилася так:

● Доведення. Доведення проведемо для випадку, коли центр описаної кулі лежить всередині піраміди (рис. 89.2). Нехай $SABC$ — правильна трикутна піраміда, H — центр основи ABC , M — середина AC , K — точка дотику вписаної в піраміду сфери з бічною гранню SAC . Тоді SM — висота бічної грані SAC , і $K \in SM$. Очевидно, що

$$OI = |R + r - h|,$$

де $h = SH$ — висота піраміди.

Відповідно,

$$OI^2 = R^2 + r^2 + 2Rr + h^2 - 2h(R+r). \quad (1)$$

Виразимо $h^2 - 2h(R+r)$ через R і r . Нехай $HM = x$ — радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник ABC , тоді $AH = 2x$. Прямокутні трикутники SKI і SHM подібні, звідки

$$\frac{IK}{HM} = \frac{SI}{SM}.$$

Оскільки $SI = h - r$, $IK = r$, а $SM = \sqrt{h^2 + x^2}$ (із прямокутного трикутника SHM), то

$$\frac{r}{x} = \frac{h-r}{\sqrt{h^2 + x^2}},$$

звідки $r^2(h^2 + x^2) = x^2(h-r)^2$, $x^2(h^2 - 2hr) = h^2r^2$, тому

$$x^2 = \frac{hr^2}{h-2r}. \quad (2)$$

Із прямокутного трикутника OHA :

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = R^2 - 4x^2,$$

з іншої сторони, $OH = SH - SO = h - R$.

Відповідно, $(h-R)^2 = R^2 - 4x^2$, звідки

$$4x^2 = 2hR - h^2. \quad (3)$$

Із (2) і (3) маємо:

$$\frac{4hr^2}{h-2r} = 2hR - h^2, \text{ тобто } \frac{4r^2}{h-2r} = 2R - h,$$

$$4r^2 = 2Rh - 4Rr - h^2 + 2rh,$$

звідки

$$h^2 - 2h(R+r) = -4Rr - 4r^2. \quad (4)$$

Підставимо (4) в (1):

$$\begin{aligned} OI^2 &= R^2 + r^2 + 2Rr - 4Rr - 4r^2 = \\ &= R^2 - 2Rr - 3r^2, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести. ●

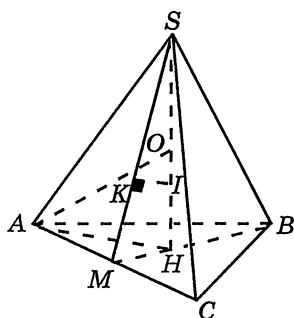


Рис. 89.2

Вважатимемо доведення Дюранда першим способом і доведемо формулу (*) другим способом (за допомогою тригонометрії).

● *Другий спосіб.* Позначимо (рис. 89.3) $\angle HSB = \alpha$, $\angle HSE = \beta$, d — відстань між центрами O і I куль. Очевидно, що

$$SH = R + r \pm d.$$

Позначимо $SH = h$. Маємо $HB = h \operatorname{tg} \alpha$;

$$HE = h \operatorname{tg} \beta = HB \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} HB, \quad h = r + \frac{r}{\sin \beta}. \quad (1)$$

$$h = R + R \cos 2\alpha = 2R \cos^2 \alpha. \quad (2)$$

Порівняємо вирази (1) і (2):

$$2R \cos^2 \alpha = r \left(1 + \frac{1}{\sin \beta} \right). \quad (3)$$

У правильній трикутній піраміді

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \beta \text{ (довести!)}. \quad (1^0)$$

$$\text{Оскільки } d = |R + r - h| = \left| R + r - \left(r + \frac{r}{\sin \beta} \right) \right| = \left| R - \frac{r}{\sin \beta} \right|,$$

$$\text{відповідно, } d^2 = R^2 - \frac{2Rr}{\sin \beta} + \frac{r^2}{\sin^2 \beta} = R^2 - 2Rr + r^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right).$$

Враховуючи співвідношення (1⁰), маємо

$$OI^2 = R^2 - 2Rr + r^2(1 - 4) = R^2 - 2Rr - 3r^2,$$

що й потрібно було довести. ●

Скориставшись аналогією, узагальнимо формулу Дюранда (формулу Ейлера) для n -кутної правильної піраміди:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr - r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}.$$

● *Доведення. Перший спосіб.* Розглянемо «секцію» n -кутної піраміди $SHBA$ (рис. 89.4) ($SH = h$ — висота n -кутної піраміди).

$$OI = |R + r - h|.$$

Відповідно,

$$OI^2 = R^2 + r^2 + 2Rr + h^2 - 2h(R + r). \quad (1)$$

Позначимо $HE = x$; $IK = r$;

$$SE = \sqrt{h^2 + x^2}; \quad SI = h - r.$$

Прямокутні трикутники SIK і SEH подібні:

$$\frac{IK}{HE} = \frac{SI}{SE} \quad \text{або} \quad \frac{r}{x} = \frac{h - r}{\sqrt{h^2 + x^2}},$$

$$r^2(h^2 + x^2) = (h - r)^2 x^2;$$

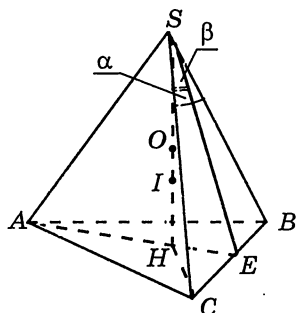


Рис. 89.3

$$x^2(h^2 - 2hr) = h^2r^2;$$

$$x^2 = \frac{hr^2}{h - 2r}. \quad (2)$$

Із $\triangle EHA$

$$HA = \frac{x}{\cos \frac{\pi}{n}}, \quad OH = h - R = \sqrt{R^2 - AH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}},$$

або

$$h^2 - 2hR + R^2 = R^2 - \frac{x^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}. \quad (3)$$

Порівняємо (2) і (3):

$$\frac{hr^2}{h - 2r} = (2Rh - h^2) \cos^2 \frac{\pi}{n}; \quad r^2 = (2Rh - 4Rr - h^2 + 2hr) \cos^2 \frac{\pi}{n};$$

$$-h^2 + 2Rh + 2hr = \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} + 4Rr; \quad h^2 - 2h(R + r) = -\frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - 4Rr.$$

Підставимо цей вираз в (1):

$$\begin{aligned} OI^2 &= R^2 + r^2 + 2Rr + h^2 - 2h(R + r) = R^2 + r^2 + 2Rr - \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - 4Rr = \\ &= R^2 - 2Rr + r^2 \left(1 - \sec^2 \frac{\pi}{n}\right) = R^2 - 2Rr - r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести. ●

Другий спосіб (за допомогою тригонометрії). Позначимо $\angle HSA = \alpha$; $\angle ESH = \beta$ (рис. 89.4), d — відстань між центрами O і I сфер, h — висота піраміди. Тоді

$$h = R + r \pm d$$

(знак d визначається взаємним розташуванням центрів O й I). Маємо:

$$HA = h \operatorname{tg} \alpha; \quad HE = h \operatorname{tg} \beta = HA \cos \frac{\pi}{n},$$

$$\text{звідки виходить, що } \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi}{n}.$$

У трикутнику SHE :

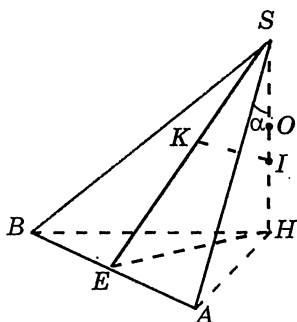


Рис. 89.4

$$h = r + \frac{r}{\sin \beta}.$$

У трикутнику SHA : $h = R + R \cos 2\alpha = 2R \cos^2 \alpha$. Значить,

$$2R \cos^2 \alpha = r \left(1 + \frac{1}{\sin \beta} \right)$$

і до того ж $d = |R + r - h| = \left| R - \frac{r}{\sin \beta} \right|$. Тоді

$$\begin{aligned} d^2 &= R^2 - 2Rr \cdot \frac{1}{\sin \beta} + \frac{r^2}{\sin^2 \beta} = R^2 - 2Rr + 2Rr \left(1 - \frac{1}{\sin \beta} \right) + \frac{r^2}{\sin^2 \beta} = \\ &= R^2 - 2Rr + r^2 \left(\left(1 - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) = R^2 - 2Rr + r^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right), \end{aligned}$$

тобто $d^2 = R^2 - 2Rr + r^2 \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \right)$, звідки й виходить формула,

яку ми доводимо. ●

$$\text{Наслідок: } R \geq r \left(1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \right).$$

Глава 90

НЕ СЛУХАЙТЕ СПІВИ СИРЕН

У грецькій міфології сирени — напівптахи-напівжінки — своїм чарівним співом заманювали моряків, які ставали їхньою здобиччю. Як впоралися з ними Одісей і Орфей, нас сьогодні не цікавить, оскільки мова піде про кулю, а точніше — про одну задачу.

Якщо два взаємно перпендикулярні перерізи мають лише одну спільну точку, то сума площ цих перерізів дорівнює площі великого круга. Довести.

Добре знайомі з аналогією коло — сфера, ми із задоволенням переконуємося, що в площині аналогічне твердження тривіальне (тут і почалися співи сирен).

Дійсно, задачу можна звести до теореми Піфагора (рис. 90.1):

$$AM^2 + AN^2 = MN^2$$

(AM і AN — аналоги стереометричних перерізів сфери, MN — діаметр сфери).

Я запропонував стереометричну задачу в класі і переконався, як легко навіть найсильніші учні стали здобиччю хижих сирен, а якщо точніше — легковажності.

Нехай r_1 і r_2 — радіуси кіл, які отримали в результаті перерізу кулі площинами. За умовою вони мають спільну точку (назвемо її P) і взаємно перпендикулярні. Перефразуємо умову: потрібно довести, що

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2 \quad (r \text{ — радіус кулі}).$$

«Але ж очевидно», — кажуть учні. І продовжують:

— Поставимо із центрів кіл O_1 і O_2 перпендикуляри, які разом з центром сфери — точкою O і точкою P — утворюють прямокутник PO_1OO_2 (рис. 90.2) (за умовою, вважають учні, кут O_2PO_1 дорівнює 90°), а оскільки $OP = r$, то із трикутника OO_2P одразу ж виходить твердження задачі! — ефект сирен вдавня, хижі створіння «з'їли» легковажних мислителів!

А чому?

А тому... Поспішаючи, учні піддалися на ефект аналогії і, по-перше, не обґрунтували кут між перерізами, а по-друге — не довели, що перпендикуляри, проведені з центрів O_1 і O_2 , матимуть спільну точку.

Перейдемо до обґрунтованого доведення пропонованої задачі. Вона складається з двох основних задач-лем.

Задача-лема 1. Два кола, які не лежать в одній площині, дотикаються до прямої l в точці P . Доведіть, що існує єдина сфера, яка містить ці кола.

Застереження! Ця задача зустрічається в деяких задачниках з неповною умовою: без слів «дотикаються до прямої l », а лише

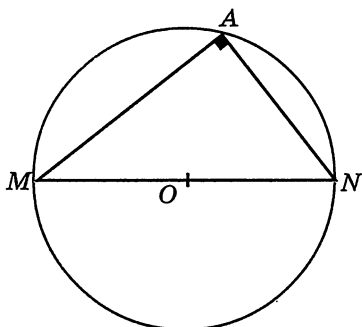


Рис. 90.1

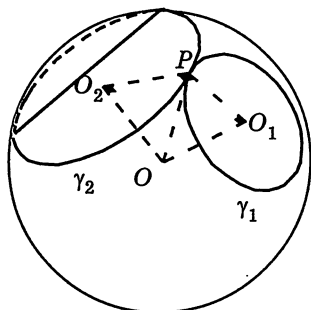


Рис. 90.2

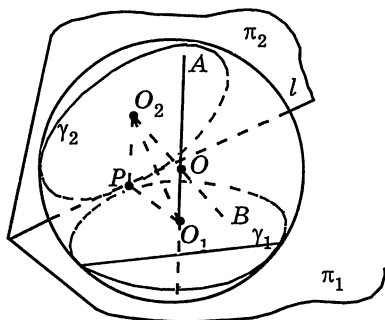


Рис. 90.3

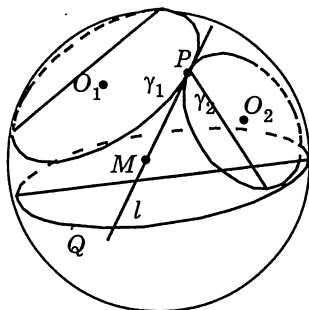


Рис. 90.4

зі словами «мають спільну точку P » (див. Наумович Н. В. Геометрические места в пространстве и задачи на построение. — М.: Учпедгиз, 1962. — С. 71 (№ 93)).

● **Доведення.** Нехай кола γ_1 і γ_2 з центрами O_1 і O_2 й спільною точкою P , яка належить дотичній l , належать площинам π_1 і π_2 відповідно зі спільною прямою l (рис. 90.3). Геометричним місцем центрів сфер, які проходять через задане коло, є пряма, яка перпендикулярна до площини заданого кола і проходить через її центр.

Із точок O_1 і O_2 проведемо перпендикуляри O_1A і O_2B . Доведемо, що вони перетинатимуться і, відповідно, точка їх перетину O буде центром шуканої сфери.

В колах γ_1 і γ_2 проведемо радіуси O_1P і O_2P . Оскільки $l \perp O_1P$ і $l \perp O_2P$, то пряма l буде перпендикулярна площині PO_1O_2 . Відповідно, ця площина буде перпендикулярна до площин π_1 і π_2 , а значить, перпендикуляри O_1A і O_2B будуть належати цій площині, відповідно, вони мають спільну точку — точку O . Твердження задачі доведено. ●

Задача-лема 2. Нехай γ_1 і γ_2 — перерізи сфери Q , які мають тільки одну спільну точку. Довести, що лінія перетину їхніх площин є дотичною до сфери Q .

● **Доведення.** Позначимо лінію перетину площин кіл γ_1 і γ_2 як l , спільну точку цих кіл як P (рис. 90.4). Припустимо, що пряма l перетинатиме сферу Q в точці M . Оскільки точка M належить площині кола γ_1 і сфері Q , то вона, ця точка, лежить на колі γ_1 , оскільки площина перетинає сферу Q по колу γ_1 .

Аналогічно, точка M належить колу γ_2 . Значить, кола γ_1 і γ_2 мають другу точку перетину, що суперечить умові. Відповідно, пряма l — дотична до сфери Q . ●

Переходимо до безпосереднього розв'язання задачі.

● За задачею-лемою 2 площини γ_1 і γ_2 перетинаються по дотичній l (рис. 90.3). За задачею-лемою 1 кут O_1PO_2 дорівнює 90° , а перпендикуляри O_1A і O_2B перетинаються в точці O . Оскільки

$$PO_1 = r_1, \text{ а } PO_2 = r_2 \text{ і } OP = r,$$

то

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2, \text{ або } \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi r^2,$$

що і потрібно було довести. ●

Глава 91

НЕ ОСТАННЯ: ПОСТАВЛЕНО ПРОБЛЕМУ. РОЗВ'ЯЖІТЬ!

Читачеві, знайомому з книгами автора, сполучення слів «різницевий трикутник» скаже багато: трикутник, сторони якого складають арифметичну прогресію. Дивовижні задачі, цікаві властивості, нові дослідження.

Але чому тільки **сторони** — члени арифметичної прогресії?! А якщо до них «додати», наприклад, одну із висот? Одну з медіан... тощо? Чи отримуємо нові цікаві властивості?

У цьому й проблема! Покажемо, що смисл у такій постановці питання є!

Задача. Сторони трикутника і діаметр вписаного кола складають арифметичну прогресію. Довести, що трикутник прямокутний.

● **Доведення.** Нехай

$$a = 2x + y; \quad b = 2x; \quad c = 2x - y.$$

Також $x > y$. Тоді

$$2r = 2x - 2y.$$

Але

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Маємо рівняння:

$$2x - 2y = 2\sqrt{\frac{(x-y)(x+y)}{3}}, \quad x = 2y.$$

Звідси:

$$a : b : c = 5 : 4 : 3$$

— отримали єгипетський трикутник! ●

Самородок знайдено! А може — ціле родовище? Чи печера Аладіна? Думайте.

МАЛЕНЬКИЙ СЮРПРИЗ. ВІВАТ, ДИСТЕРВЕГ!

«А напоследок я скажу...»

Теорема: твердження про те, що $BW_1 = CW_1 = IW_1$ (теорема «трилисника») еквівалентна твердженню, що інцентр I трикутника ABC є ортоцентром трикутника $W_1W_2W_3$.

● **Доведення.** Зазначимо, що будь-яке доведення властивості «трилисника» приводить до твердження, що інцентр I трикутника ABC є ортоцентром трикутника $W_1W_2W_3$. І навпаки, будь-яке доведення твердження, що інцентр I — ортоцентр трикутника $W_1W_2W_3$, стверджує, що

$$BW_1 = CW_1 = IW_1.$$

Перший спосіб. Оскільки (рис. 92.1) $\angle IW_2W_1 = \angle CW_2W_1$, а $\angle IW_1W_2 = \angle CW_1W_2$, то трикутник W_2IW_1 дорівнює трикутнику W_2CW_1 (друга ознака), а значить $IW_1 = CW_1$ — твердження «трилисник» доведено.

Оскільки відрізок W_1E є бісектрисою кута при вершині рівнобедреного трикутника CW_1I , то $\angle IEW_1 = 90^\circ$, а значить W_3E — висота трикутника $W_1W_2W_3$. Аналогічно доводиться, що дві інші сторони належать прямим BW_2 і CW_3 , а значить точка I — ортоцентр трикутника $W_1W_2W_3$.

Другий спосіб. Позначимо пари рівних дуг α, β, γ (рис. 92.1). Очевидно, що $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Тоді $\angle W_2EC$ як кут з вершиною всередині круга дорівнює 90° , а це значить, що I — ортоцентр трикутника $W_1W_2W_3$. Але оскільки $AW_2 \simeq W_2C$ та $\angle IW_1E = \angle CW_1E$, то $CW_1 = IW_1$ — твердження теореми «трилисника» доведено.

Замість епілога: віват, Дистервег!

Натрапив якимось на книгу «Элементарная Геометрия», 1870 р., Санкт-Петербург, з якими, переклад з німецької. Автор — Адольф Дистервег, німецький педагог-математик, який і сьогодні цитується як класик педагогіки математики. Написана за часів кріпосного права, вона багато чим нагадувала би звичний нам підручник з геометрії для загальної школи, якби не «Комментарій кь элементарной геометрии для учителей Адольфа Дистервега».

Сучасність цього документа вражає! Переконайтеся самі: я наведу

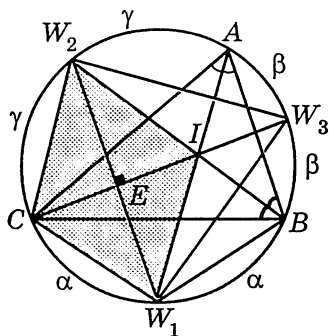


Рис. 92.1

висловлювання видатного педагога. Слово в слово. Щоб нічого не пропустити. Щоб щиро, від усієї геометричної і педагогічної душі сказати: «наша людина!».

I. «Чтобы был успех, преподавание Геометрии должно прежде всего доставлять удовольствие ученикам. Где этого не будет, где оно упадет до того, обратится в принудительный предмет преподавания, там пусть лучше совсем его не будет».

II. «Геометрия... есть средство общего духовного развития разумных существ».

III. «Но да не подумает никто из учителей, что тот, кто умеет доказывать все теоремы и решить все задачи, собранные в этой книжке, может, я бы сказал, *свободно* преподавать Геометрию; нет, далеко нет. С таким знанием учитель едва ли годится для первоначального обучения; если он большего не в состоянии сделать, то он будет связан в своем преподавании, сам не будет свободен, а стало быть и учеников не сделает свободными. Если он хочет достигнуть этого, он должен свободно рассуждать обо всякой теореме, *вертеть* ею, переворачивать ее, искать новых ее изложений, новых постановок и новых решений, трудиться над выработкой для себя новых теорем, именно над постановкою — как и где — теорем обратных входящим в курс — словом, путем всестороннего рассмотрения предмета, сделать себя полным его властелином».

IV. «Истинному, врожденному учителю лучшие мысли приходят во время преподавания. Как далек такой учитель от заносчивой мысли, что он уже знает все нужное, как далек он от страха обнаружить перед учениками свою слабость! Он с радостью встречает новое решение, с радостью сознается, что его ученик нашел такое решение, которого он раньше не знал!»

V. «Образовательный для разума урок Геометрии есть акт духовного освобождения... Геометрия становится часом духовного развития и чистым наслаждением для учеников... Я не знаю более веселого и — для опытных — более легкого предмета преподавания, чем Геометрия, при всякого рода учениках. Этот предмет можно сделать доступным и для самых *тупоголовых*...»

VI. «Передавать мысли других, или даже собственные, не есть искусство. Это может сделать всякий, и учиться этому нечего; это есть словесное обучение; но вызвать непосредственно живое чувственное познание; и тем вызвать в учащемся собственные представления и мысли, словом, воспламенить его к самостоятельности: вот оно — вот искусство быть развивающим, воспитывающим и образующим учителем! Главное — самостоятельный труд!»

А. Дистервег

Наша людина!

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия: Ч. I. — М.: Учпедгиз, 1957. — 607 с.
2. *Адлер А.* Теорія геометрическихъ построений. — Одесса: Mathesis, 1910. — 321 с.
3. *Бевз Г. П.* Геометрія тетраедра. — К.: Рад. школа, 1974. — 108 с.
4. *Билецкий Ю., Филлиповский Г.* Чертежи на песке. — К.: Факт, 2000. — 98 с.
5. *Боравльов А. П., Ленчук І. К.* Аналіз у розв'язуванні задач на побудову. — К.: Вища шк., 2002. — 191 с.
6. *Готман Э. Г., Скопец З. А.* Задача одна — решения разные. — К.: Рад. шк., 1988. — 172 с.
7. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. — М.: Наука, 1960. — 467 с.
8. *Дистервег А.* Комментарій къ элементарной геометріи. — Санкт-Петербургъ, 1870.
9. *Зетель З. И.* Новая геометрия треугольника. — М.: Учпедгиз, 1962. — 150 с.
10. *Киселев А. П.* Элементарная геометрия. — М.: Просвещение, 1980. — 296 с.
11. *Кушнір І. А.* Геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників. — К.: Факт, 2002. — 112 с.
12. *Кушнір І. А.* Задачі з однією підказкою. — К.: Факт, 2003. — 170 с.
13. *Кушнір І. А., Фінкельштейн Л. П.* Навчання у просторі. — К.: Факт, 2003. — 167 с.
14. *Кушнір І. А.* Повернення втраченої геометрії. К.: Факт, 2000. — 280 с.
15. *Кушнір І. А.* Методи розв'язання задач з геометрії. — К.: Абрис, 1994. — 460 с.
16. *Кушнір І. А.* Трикутник і тетраедр у задачах. — К.: Рад. школа, 1991. — 207 с.
17. *Лоповок Л. М.* 1000 проблемных задач по математике. — М.: Просвещение, 1995. — 237 с.
18. *Мавло Д. П.* Середні в геометрії / Математика в школі. — № 9 — 10. — 2004. — 68 с.
19. *Петечук В. М.* Геометрія для 8 класу з поглибленим вивченням математики. — Ужгород, 1992. — 125 с.
20. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии: Ч. I. — М.: Наука, 1991. — 240 с.
21. *Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф.* Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989. — 282 с.
22. *Пржевальский Е.* Собрание геометрических теоремъ. — М, 1901. — 376 с.
23. *Скопец З. А.* Геометрические миниатюры. — М.: Просвещение, 1990. — 223 с.
24. *Скопец З. А., Жаров В. А.* Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия). — М.: Просвещение, 1952. — 102 с.
25. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии, планиметрии. — М.: Наука, 1986. — 221 с.

Передмова	5
-----------------	---

Частина I. ПЛАНІМЕТРІЯ

Глава 1. Назустріч любові	7
Глава 2. Блискавки у рівнобедреному трикутнику (семикласникам та їхнім батькам присвячується)	10
Глава 3. Математик — це той	17
Глава 4. «Золота середина» — в геометрії	19
Глава 5. Як кулю перетворити на снаряд	25
Глава 6. От і все! Найемоційніша теорема геометрії трикутника	26
Глава 7. Мати чи мачуха кола?	30
Глава 8. Здивування тривіальністю	32
Глава 9. — Вертикальні кути? — Антивертикальні!	36
Глава 10. Медіанні кути. Ігри з формулами (виконується вперше!)	42
Глава 11. Далі було. Далі буде	49
Глава 12. Полювання на рівняння	52
Глава 13. Омолодження теореми Ньютона	82
Глава 14. Провокаційна одиниця в обернених задачах	86
Глава 15. Естетика смаку і смак до естетики	91
Глава 16. Непоступливість і аристократизм бісектриси кута трикутника	95
Глава 17. Три богатирі трикутника	98
Глава 18. Найкраща авторська задача, або ж 20 років потому ...	102
Глава 19. Формули-близнюки	109
Глава 20. Пошук подібних трапецій	116
Глава 21. Популярність... задачі	120
Глава 22. Чарівна підступність площі трикутника	122
Глава 23. Задача в мільйон доларів	135
Глава 24. Формула як сюжет для детектива	137
Глава 25. Самодостатність зовнівписаного кола	141
Глава 26. Лемус, Штейнер... хто наступний?	145
Глава 27. Пошуки несподіваних тверджень	147
Глава 28. Формула Карно як зеркало геометрії трикутника ...	152
Глава 29. Доброго дня, пане Кисельов!	154
Глава 30. Про деякі частковості в геометричних формулах ...	156
Глава 31. Геометричне розпізнання тригонометричних об'єктів	167
Глава 32. Модернізація проблеми Штейнера-Лемуса	173
Глава 33. Казкова реальність радіуса напіввписаного кола	175
Глава 34. Дотепне дослідження дотепної задачі	177
Глава 35. Підтвердження пророкувань прямокутного трикутника	179
Глава 36. Теорема Кезі, або узагальнена теорема Птолемея ..	183
Глава 37. Задача як об'єкт колекціонування	191

Глава 38. Захоплення навчанням	192
Глава 39. Катети як висоти. Народження чи виродження?	195
Глава 40. Добридень, пене Карно!	199
Глава 41. Хто з них королева?	202
Глава 42. Про одну задачу В. Проїзволова	212
Глава 43. Кути трикутника як компоненти нерівностей	213
Глава 44. Чевіани. Полювання на аналогію	218
Глава 45. Рівність як фабрика задач	223
Глава 46. Т-конфігурація як скарбниця задач	225
Глава 47. Т-конфігурація. Мурашник радіусів	228
Глава 48. Несподіваний подарунок для медіани	230
Глава 49. Рівноподільна — нова чудова пряма	237
Глава 50. Задача «Японської храмової геометрії»	245
Глава 51. Чудова рівність геометрії трикутника	249
Глава 52. Чудові паралелограми геометрії трикутника	254
Глава 53. Трикутник як «вироджена» трапеція	257
Глава 54. Вчися розв'язувати задачі — якість гарантується	261
Глава 55. Дмитро Мавло, видатний геометр сучасності, у нас в гостях	263
Глава 56. Драма і комедія однієї рівноподільної	270
Глава 57. Про один чудовий трикутник і нерівність Рудольфа Ушакова	271
Глава 58. Властивості відстаней від довільної точки кола до вершин вписаного квадрата й вписаного трикутника	274
Глава 59. Арам Туманян переміг англійців	279
Глава 60. Обернені теореми прямокутного трикутника	281
Глава 61. Дуель на м'ясорубках, або чий спосіб кращий	285
Глава 62. Семикласнику, який хоче знати геометрію. Ігри з точками в педальних і антипедальних трикутниках	287
Глава 63. Імпровізація з паралелями	292
Глава 64. Ще раз про феномен обернених задач	301
Глава 65. Конкурентоздатні відрізки	310
Глава 66. Єдина і неповторна	317
Глава 67. Свято, яке завжди	323

Частина II. СТЕРЕОМЕТРІЯ

Глава 68. Стрибнути вище голови	325
Глава 69. Пошук нетривіальних кутів у правильній піраміді ..	326
Глава 70. Заплановані несподіванки в правильній піраміді	331
Глава 71. Переріз чотирьох ортоцентрів	343
Глава 72. Пошуки і каверзи діагоналі основи правильної чотирикутної піраміді	345
Глава 73. Формула кута між мимобіжними прямими	349
Глава 74. Відстань між мимобіжними прямими	355
Глава 75. Чи існує «просторова» теорема Піфагора?	361
Глава 76. Вдалиий пошук чи пошук удачі?	364
Глава 77. Прямокутний тетраедр як Клондайк аналогій	366
Глава 78. Пряма Ейлера і стереометрія	371

Глава 79. Ланцюжок аналогій з трикутником найменшого периметру	373
Глава 80. Нарпу end однієї історії	376
Глава 81. Середини ребер тетраедра	378
Глава 82. Залізна маска тетраедра	382
Глава 83. Зв'язки між кутами двох правильних пірамід	385
Глава 84. Пошук аналогій і аналогія в пошуку	396
Глава 85. «Смачні» стереометричні нерівності з коментарями	400
Глава 86. Коли існують рівнореберні піраміди	409
Глава 87. Шарова блискавка.....	412
Глава 88. Чарівна скромність стереометричної перлини	414
Глава 89. Формула Ейлера в просторі	419
Глава 90. Не слухайте співи сирен.....	423
Глава 91. Не остання: поставлено проблему. Розв'яжіть!	426
Глава 92. Маленький сюрприз. Віват, Дистерверг!	427
Список літератури	429

Навчальне видання

КУШНІР Ісаак Аркадійович

ТРИУМФ ШКІЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

Переклад	Федорчук Ю. В.
Художній редактор	Мітченко В. С.
Комп'ютерна верстка	Федорчук Ю. В.
Коректура	Тимошенко Ю. М.
Художнє оформлення обкладинки	Бридня Н. П.

Здано до набору 12. 02. 07. Підписано до друку 07. 08. 07. Формат 60х90/16.

Гарнітура Шкільна. Друк офсетний. Папір офсетний.

Ум. друк. арк. 27,00. Ум. фарбо-відб. 54,5. Обл.-вид. арк. 24,38.

Вид. № 46. Зам. № .

«Наш час», 01054, м. Київ, вул. Павлівська, 17.

тел (факс): 8 (044) 518 21 31; 8 (044) 569 10 74,

електронна адреса: iaa_nash_chas@ukr.net; сайт: www.nash-chas.com.ua

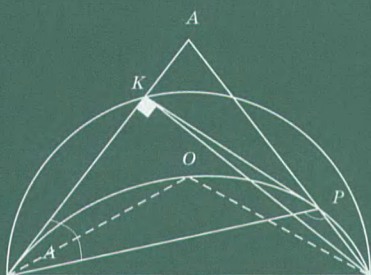
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
ДК № 2086 від 3 лютого 2005 року

Віддруковано з готових діапозитивів ІІІ «МЕДОБОРИ-2006»

(свідоцтво ДК № 867 від 22.03.2002 р.)

32300, Хмельницька обл., м. Кам'янець-Подільський,
вул. Іоаннопредтечинська, 2.

Тел./факс (03849) 2-72-01, 2-20-79



Шановний Ісаак Аркадійович!

...Судячи з Ваших публікацій («Квант», «Математика в школі») у нас з Вами одна і та ж геометрична ідеологія, яку, не без допомоги видатних математиків, було витіснено зі школи і яка, як на мене, не без тріумфа повертається. Хочеться вірити, що у цьому є і частка нашої з Вами «провини». Я міг би довго і хотів би красномовно розповідати про роль Геометрії у вихованні й освіті Людини, але тут це недоречно, оскільки Ви й так однодумець.

Бажаю лише успіхів.

З повагою

І. Шаригін

ISBN 978-966-8174-65-0



9 789668 174650 >