

Ісаак Кушнір

101

задача
на побудову

ІСААК КУШНІР

101 ЗАДАЧА НА ПОБУДОВУ



Київ • 2007

УДК 514
ББК 22.151
К 96

ISBN 966-359-136-6

© І. Кушнір, 2007
© Дизайн, макет.
«Факт», 2007

ПЕРЕДМОВА

Задачам на побудову стільки років, скільки самій геометрії, тобто більше двадцяти століть. Думаю, що весь цей час вони не залишали байдужими нікого, хто хоч скільки-небудь знайомий із геометрією.

У 1866 році у Копенгагені вийшла книга Юлія Петерсона «Методи і теорія для розв'язання геометричних задач на побудову», майже одночасно зі скасуванням кріпосного права. У передмові автора читаємо:

«...дехто вважає розв'язання геометричних задач на побудову до певної міри загадками, справиться з якими вдається тільки поодиноким, від природи особливо обдарованим,

особам. В наслідок такого погляду геометричні задачі на побудову ввійшли тільки почасти в систему шкільного викладання, тоді як саме в школах і повинно бути їх справжнє місце, бо ніякі задачі не сприяють так розвитку в учнях спостережливості, правильності мислення, ставлячи в той же час для них і найбільшу привабливість, як геометричні задачі на побудову»¹.

Тут ані відняти ані додати, хіба що подивуватися сучасності автора, особливо сьогодні, коли геометрія тріумфально повертається у школу. З безлічі задач вибрана всього 101. На думку автора — сто одна краща. Тому що до «родоводу» кожної задачі входять її умова, її популярність і, звичайно ж, розв'язання. Представлені основні типи задач на побудову і, звичайно ж, методи розв'язань: базисні трикутники, сегмент, який вміщує даний кут, перетворення, а також застосування спеціальних

¹ Цитується за книгою: Петерсон Ю. Методи і теорії для розв'язання геометричних задач на побудову. — К.: Радянська школа, 1940.

теорем планіметрії. В окремому розділі, який має назву «10 елітних задач», зібрані задачі, які вирізняються особливою оригінальністю і дотепністю як умов, так і розв'язань. У книзі також розглянуті позиційні задачі.

Розрахована на учнів 7—11-х класів, студентів, учителів. Вивчайте, колекціонуйте, насолоджуйтесь.

ПРИЙНЯТІ ПОЗНАЧЕННЯ

Трикутник ABC :

A, B, C — вершини трикутника (рис. 1);

a, b, c — сторони BC, AC, AB ;

$\angle A, \angle B, \angle C$ — кути BAC, ABC, ACB ;

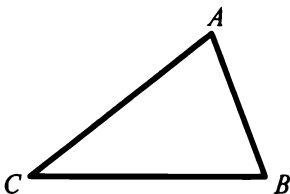


Рис. 1

H_1, H_2, H_3 — основи висот (рис. 2);

h_a, h_b, h_c — висоти AH_1, BH_2, CH_3 ;

H — точка перетину висот, ортоцентр;

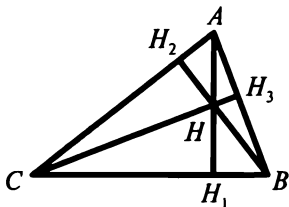


Рис. 2

M_1, M_2, M_3 — середини сторін BC, AC, AB (рис. 3);

m_a, m_b, m_c — медіани AM_1, BM_2, CM_3 ;

M — точка перетину медіан (центроїд, центр ваги);

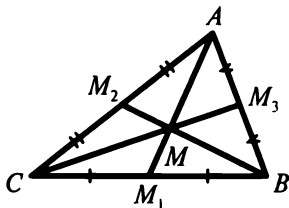


Рис. 3

L_1, L_2, L_3 — основи бісектрис трикутника ABC
(рис. 4);

l_a, l_b, l_c — бісектриси AL_1, BL_2, CL_3 ;

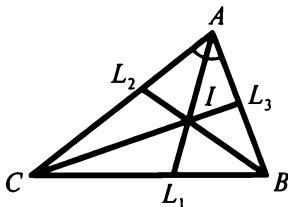


Рис. 4

I — точка перетину бісектрис (інцентр, центр
вписаного у трикутник ABC кола) (рис. 5);

r — радіус вписаного у трикутник ABC кола;

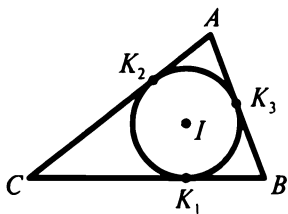


Рис. 5

O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC ;

R — радіус описаного навколо трикутника ABC кола;

$2p$ — периметр трикутника ABC ;

S — площа трикутника ABC ;

W_1, W_2, W_3 — чудові точки перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника з описаним колом (рис. 6);

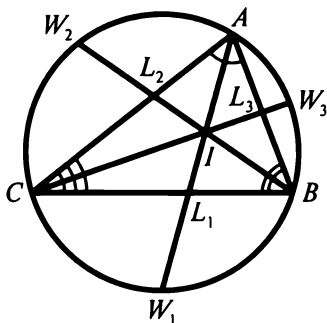


Рис. 6

I_a, I_b, I_c — центри зовнівписаних кіл, які дотикаються відповідно сторін BC , AC , AB (рис. 7).

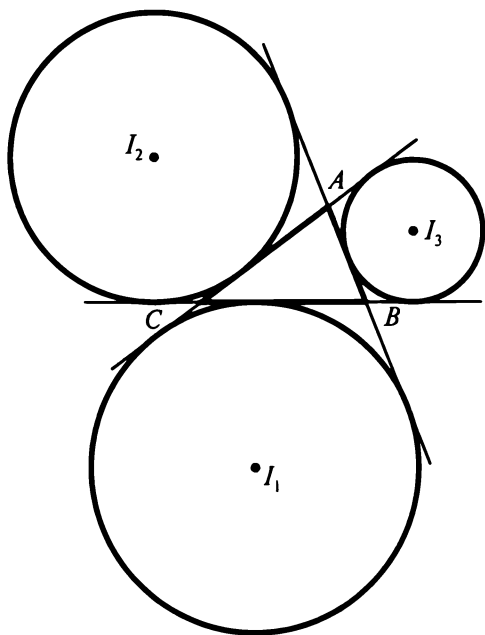


Рис. 7

1

**ЗАСТОСУВАННЯ
ДЕЯКИХ ТЕОРЕМ
ГЕОМЕТРІЇ
ТРИКУТНИКА**

№ 1 **Задача 1-1¹.** На колі γ , описаному навколо трикутника, задана точка A , а точка X належить колу. Побудувати трикутник ABC , вписаний у коло γ , щоб точка X була:

- 1) інцентром трикутника ABC ;
- 2) ортоцентром трикутника ABC .

Розв'язання

1) Скористаємося «теоремою трилисника»:

$$W_1 I = W_1 B = W_1 C$$

[6, с. 45] (рис. 1).

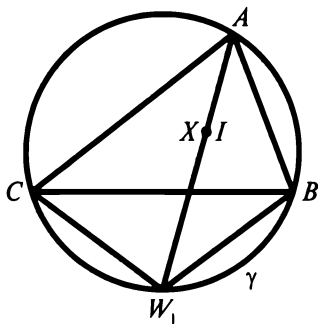


Рис. 1

¹ У запропонованих задачах дослідження кількості розв'язків не передбачається.

(У квадратних дужках наведено номер посилення зі списку літератури (див. наприкінці книжки) та відповідна сторінка.)

Отже, пряма AH перетне коло γ у точці W_1 , з якої радіусом W_1X робимо засічки на цьому колі. Отримаємо точки B і C .

2) Скористаємося властивістю ортоцентра H : пряма AH перетинає коло γ у точці N , що

$$HN_1 = H_1N$$

[6, с. 10] (рис. 2). Пряма AH перетне коло γ у точці N . Проведемо серединний перпендикуляр до відрізка XN . Отримаємо точки B і C .

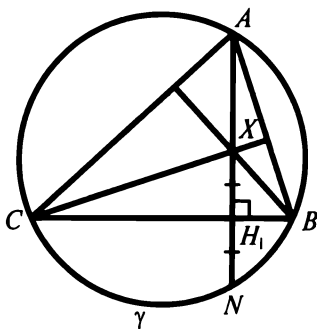


Рис. 2

- № 2 **Задача 1-2.** Побудувати трикутник ABC за радіусом описаного кола R , радіусом вписаного кола r і стороною $BC = a$.

Розв'язання

Цю задачу можна розв'язати декількома способами з використанням різних формул:

$$1) W_1 B = W_1 I = W_1 C$$

«теорема трилисника» [6, с. 45];

$$2) \angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

[6, с. 40];

$$3) OI^2 = R^2 - 2Rr$$

формула Леонарда Ейлера [6, с. 53].

- № 3 **Задача 1-3.** У даний гострокутний трикутник вписати трикутник найменшого периметра.

Розв'язання

Скористаємося теоремою: зі всіх трикутників, вписаних у даний гострокутний трикутник, найменший периметр має ортоцентричний трикутник [6, с. 16].

Задача 1-4. Побудувати трикутник ABC № 4 за точками M_1, M_2, H .

Розв'язання

Точка D , симетрична точці H відносно середини сторони трикутника, належить колу, описаному навколо трикутника ABC [6, с. 19].

Побудуємо точку D_1 , симетричну точці H відносно M_1 (рис. 3). Оскільки AD_1 — діаметр кола, описаного навколо трикутника ABC , то $\angle M_2CD_1 = 90^\circ$, і точка C належить колу γ_1 , діаметр якого — відрізок M_2D_1 . Аналогічно будемо точку D_2 , симетричну точці H відносно M_2 і коло γ_2 на діаметрі M_1D_2 . Перетин кіл γ_1 і γ_2 дасть точку C . Оскільки

$$CM_2 = M_2A$$

$$\text{і } CM_1 = M_1B,$$

то будемо точки A і B .

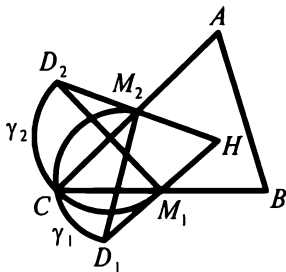


Рис. 3

№ 5 **Задача 1-5.** Побудувати трикутник ABC за стороною BC , точкам L_1 і H_1 .

Розв'язання

Скористаємося геометричним місцем точок, відстані яких до двох даних точок відносяться як $m:n$ (коло Аполлонія) [5, с. 165].

Оскільки AL_1 бісектриса кута BAC (рис. 4), то тоді

$$\frac{BL_1}{CL_1} = \frac{AB}{AC}.$$

Отже, точка A належить колу Аполлонія і прямій t , перпендикулярній BC в точці H_1 .

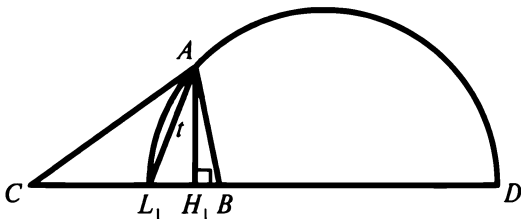


Рис. 4

Задача 1-6. Побудувати трикутник ABC , № 6
знаючи положення центрів I_a, I_b, I_c зовнівписаних кіл.

Розв'язання

Скористаємося теоремою: трикутник ABC є ортоцентричним трикутником трикутника $I_a I_b I_c$ [6, с. 70].

Будуємо трикутник $I_a I_b I_c$. Основи висот — вершини трикутника ABC .

Задача 1-7. У площині трикутника побудувати точку, сума квадратів відстаней до якої від вершин трикутника має найменше значення. № 7

Розв'язання

Скористаємося теоремою Лейбниця [6, с. 21]. Нехай X — шукана точка. За теоремою Лейбниця

$$\begin{aligned} &XA^2 + XB^2 + XC^2 = \\ &= AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3XM^2 = \\ &= \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + 3XM^2. \end{aligned}$$

Вираз у дужках не залежить від точки X .

Отже, вираз $XA^2 + XB^2 + XC^2$ буде найменшим, якщо $XM^2 = 0$, тобто якщо точки X і M збігаються. Тому для знаходження точки X потрібно провести медіани трикутника ABC .

№ 8 Задача 1-8. Побудувати трикутник ABC за серединою M_1 сторони BC , основою висоти (H_1) і прямою Ейлера.

Розв'язання

Скористаємося властивістю прямої Ейлера: $2OM = MH$ [6, с. 5]. Через точки M_1 і H_1 проводимо пряму (рис. 5). З точки H_1 до прямої BC проведемо перпендикуляр до перетину з прямою Ейлера (l_E), отримаємо точку H .

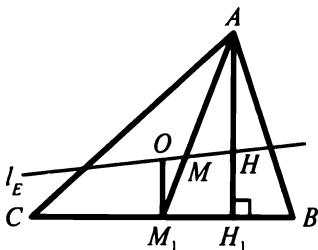


Рис. 5

Таким же чином отримаємо точку O . Поділивши відрізок OH у відношенні 1:2, знайдемо точку M (центроїд). Перетин прямих M_1M і H_1H дає точку A . Маючи радіус OA , отримаємо точки B і C .

Задача 1-9. Через точку D , яка знахо- № 9
диться всередині кута, провести пряму так, щоб трикутник, який відсікається від сторін кута, був заданого периметра $2p$.

Розв'язання

Скористаємося теоремою: відстань від точок дотику зовнівписаного кола, які належать продовженню двох сторін трикутника ABC , до спільної вершини цих сторін дорівнює півпериметру p трикутника ABC [6, с. 67].

На сторонах кута MAN (рис. 6) відкладемо рівні відрізки

$$AT_1 = AT_2 = p.$$

Побудуємо коло, яке дотикається до сторін кута в точках T_1 і T_2 , і через точку D проведемо до нього дотичну. Трикутник ABC шуканий.

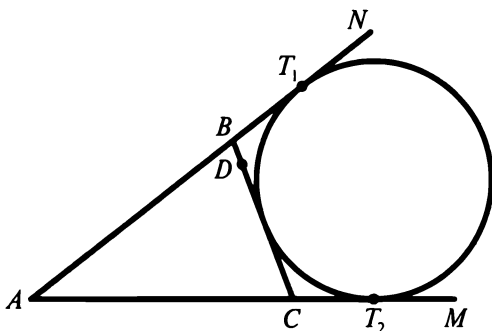


Рис. 6

№ 10 **Задача 1-10.** Побудувати всередині трикутника ABC спільну точку рівнокутних прямих.

Розв'язання

Насамперед нагадаємо, що рівнокутними називаються три прямі, кожній з яких належить одна з вершин трикутника, та які перетинають відповідні вершинам сторони під рівними кутами.

Вони перетинаються в одній точці, яку ми позначимо Q .

Можна також довести [5, с. 151], що

$$\angle BQC = 180^\circ - A,$$

$$\angle AQB = 180^\circ - B,$$

$$\angle AQC = 180^\circ - C.$$

Тому, щоб побудувати точку Q , потрібно описати на кожній зі сторін трикутника сегменти, що містять відповідні кути: $180^\circ - A$ (на стороні AB), $180^\circ - B$ (на стороні BC) та $180^\circ - C$ (на стороні AC) (рис. 7).

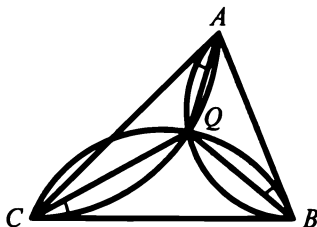


Рис. 7

Задача 1-11. Побудувати трикутник ABC № 11 за серединою сторони BC (точкою M_1), інцентром I , основою висоти H_1 .

Розв'язання

Скористаємося теоремою [5, с. 444]:

нехай пряма M_1I
перетинає висоту AH_1
у точці E . Тоді $AE = r$.

Через точки M_1 і H_1 проведемо пряму (рис. 8). Із точки I опустимо перпендикуляр IK_1 на цю пряму. З точки H_1 проведемо пряму h , паралельну прямій IK_1 . Далі проведемо пряму M_1I до перетину з прямою h у точці E . Відкладемо на прямій h відрізок $EA = IK_1$.

Отримаємо точку A ($AE = r$). Побудуємо коло з центром у точці I радіуса r . Із точки A проведемо до цього кола дотичні AB і AC .

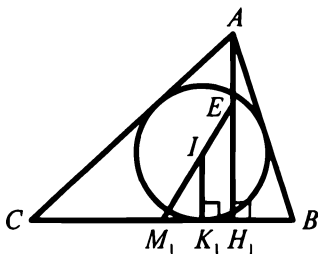


Рис. 8

Задача 1-12. Задана пряма і дві точки, що № 12 лежать по різні боки від неї. Побудувати гострокутний трикутник, для якого дані точки були б основами двох висот, а третя висота лежала б на заданій прямій.

Розв'язання

Скористаємося властивістю бісектрис ортоцентричного трикутника [6, с. 13]. Позначимо дані точки H_2 і H_3 , а пряму — l (рис. 9).

Побудуємо точку H_1 , яка належить прямій l , як вершину ортоцентричного трикутника $H_1H_2H_3$.

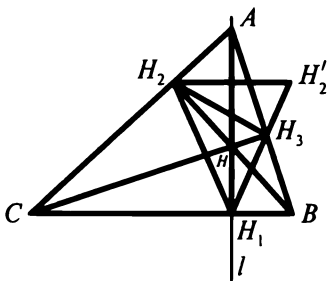


Рис. 9

Оскільки пряма l є бісектрисою кута $H_2H_1H_3$, то будуємо точку H'_2 , симетричну H_2 відносно прямої l .

Сполучимо точки H'_2 і H_3 , проведемо через них пряму до перетину з l , отримаємо точку H_1 . Тепер можна побудувати трикутник $H_1H_2H_3$, а отже, і трикутник ABC .

2

**ПІДВИЩЕННЯ
СКЛАДНОСТІ**

№ 13. **Задача 2-1.** Побудуйте трикутник ABC , якщо задані сторони AC і AB і кут $\varphi = B - C$.

Розв'язання

Припустимо, що трикутник ABC побудований (рис. 1).

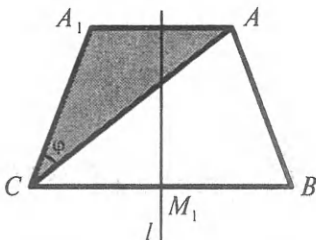


Рис. 1

Нехай A_1 — точка, симетрична точці A відносно серединного перпендикуляра l . Трикутник A_1AC — базисний¹:

$$A_1C = AB \text{ і } \angle A_1CA = \varphi.$$

Його можна побудувати, а отже, можна легко побудувати і трикутник ABC .

¹ Тобто такий, який легко побудувати, а потім використати для решти побудов.

Задача 2-2. Побудувати трикутник ABC , № 14 якщо відомі висоти h_a , h_b і медіана m_a (Друга міжнародна математична олімпіада, Угорщина).

Розв'язання

Припустимо, трикутник ABC побудований (рис. 2). Подвоїмо медіану AM_1 — отримаємо паралелограм $ABEC$ ($AE = 2m_a$).

Оскільки $AC \parallel BE$, то відрізок AD , перпендикулярний прямій BE , дорівнює $BH_2 = h_b$. Трикутники AM_1H_1 і ADE — базисні, їх можна

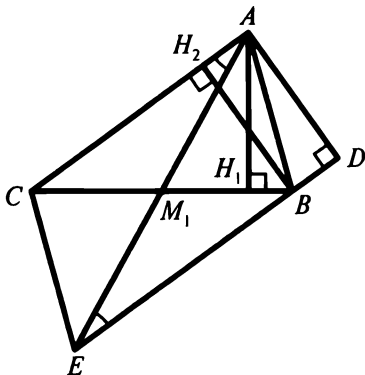


Рис. 2

побудувати за катетом і гіпотенузою: дізнаємося кути AM_1C і DEA , а відтак, і M_1AC . Побудуємо трикутник AM_1C за стороною AM і двома кутами, а отже, і трикутник ABC .

№ 15 **Задача 2-3.** Побудувати трикутник за трьома висотами.

Розв'язання

Припустимо, що трикутник ABC побудований. Має місце рівність

$$ah_a = bh_b = ch_c,$$

або
$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c \cdot h_c}{h_a \cdot h_b}.$$

Отже,
$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}}.$$

Із цієї рівності випливає, що сторони шуканого трикутника ABC пропорційні сторонам трикутника MNP , які виражені величинами $h_b, h_a, \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$.

Нехай H_1 і L_1 — основи висоти h_a і бісектриси l_a . У базисному трикутнику AL_1H_1

$$\angle L_1AH_1 = \frac{1}{2}(B-C) = \varphi.$$

Проведемо вісь симетрії $l = M_1F$ відрізка BC і побудуємо точку A_1 , симетричну точці A відносно прямої l . У трикутнику BAA_1 відомий кут ABA_1 , який дорівнює 2φ , висота BD і медіана BF , оскільки остання є гіпотенузою прямокутного трикутника, катети якого

$$BD = h_a \quad \text{і} \quad DF = \frac{1}{2}a.$$

Трикутник ABA_1 можна побудувати за кутом, висотою і медіаною, які мають із цим кутом спільну вершину, а отже, і трикутник ABC .

№ 17 Задача 2-5. Побудувати трикутник за двома кутами і сумою трьох однойменних лінійних елементів.

Розв'язання

За кутами, які дорівнюють кутам трикутника ABC , будуємо трикутник $A_1B_1C_1$, подібний

до трикутника ABC . Має місце таке співвідношення:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{l_1}{l'_1} = \frac{l_2}{l'_2} = \frac{l_3}{l'_3}$$

(a_1 — сторона трикутника $A_1B_1C_1$; l_1, l_2, l_3 і l'_1, l'_2, l'_3 — відповідні лінійні елементи трикутників ABC і $A_1B_1C_1$). Звідси

$$\frac{a}{a_1} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{l'_1 + l'_2 + l'_3}.$$

Із цієї пропорції знаходимо сторону a , а отже, можна побудувати $\triangle ABC$.

Задача 2-6. Побудувати трикутник ABC № 18 за точкою дотику вписаного кола зі стороною AB і точками перетину цього кола з медіаною, проведеною з вершини A .

Розв'язання

Припустимо, що трикутник ABC побудований (рис. 4). Вписане коло перетинає медіану AM_1 у точках T і P , сторони AB дотикається в точці K_3 . Маючи три точки: K_3, T, P , — будуємо коло.

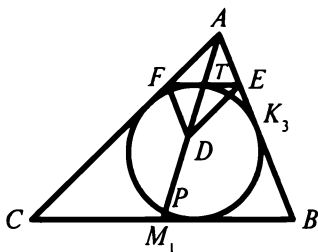


Рис. 4

Через точку K_3 проводимо дотичну, отримаємо пряму AB . Перетин прямих AB і TP дасть точку A . Провівши дотичну з точки A , відмінну від AB , отримаємо пряму AC .

Відкладемо від точки T на прямій AP відрізок TD , рівний AT . Побудуємо паралелограм $AEDF$ ($E \in AB$, $F \in AC$). Оскільки T — точка перетину діагоналей паралелограма, то $ET = AF$ і AT належить медіані AM_1 .

Провівши дотичну, паралельну EF , у перетині з прямими AB і AC , отримаємо точки B і C .

Задача 2-7. Побудувати трикутник за стороною a , медіаною m_a , бісектрисою l_a . № 19

Розв'язання

Для розв'язання задачі застосуємо формули (див., напр., [6, с. 20, 37])

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}; \quad (1)$$

$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}; \quad (2)$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (3)$$

Перетворимо формулу (3):

$$1 + \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1,$$

або
$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc}. \quad (4)$$

Піднесемо обидві частини формули (2) до квадрата і скористаємося формулою (4):

$$l_a^2 = \frac{4b^2c^2((b + c)^2 - a^2)}{(b + c)^2 4bc},$$

$$\text{або} \quad l_a^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} \left((b+c)^2 - a^2 \right). \quad (5)$$

Зробимо заміну:

$$b+c=x, \quad bc=y.$$

Тоді

$$b^2+c^2=x^2-2y.$$

Запишемо формулу (1) і (5) за допомогою x і y . Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{2(x^2-2y)-a^2}{4} \\ l_a^2 = \frac{y}{x^2}(x^2-a^2). \end{cases}$$

Знайдемо x^2 із другого рівняння і підставимо у перше:

$$x^2 = \frac{a^2 y}{y-l_a^2}, \quad 4m_a^2 = 2 \left(\frac{a^2 y}{y-l_a^2} - 2y \right) - a^2,$$

отримуємо квадратне рівняння

$$4y^2 - (4l_a^2 - 4m_a^2 + a^2)y - 4l_a^2 m_a - a^2 l_a^2 = 0.$$

Із цього рівняння знаходимо y , потім x , отже, сторони $\triangle ABC$.

3

**ПОБУДОВА
В ТРИКУТНИКУ**

- № 20 **Задача 3-1.** Всередині трикутника ABC знайти точку, з якої сторони трикутника видно під рівними кутами.

Розв'язання

Нехай X — шукана точка (рис. 1). Тоді
 $\angle BXC = \angle AXB = \angle AXC = 360^\circ : 3 = 120^\circ$.

Таким чином, на сторонах BC і AC (чи AB) будуємо сегменти, які вміщують кут 120° . Їх перетин дасть точку X .

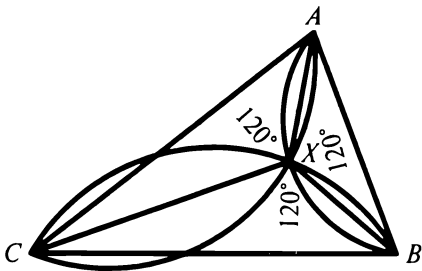


Рис. 1

- № 21 **Задача 3-2.** Дано трикутник ABC , причому $AB < BC$. Побудуйте на стороні AC точку D так, щоб периметр трикутника ABD дорівнював довжині сторони BC .

Розв'язання

Припустимо, що трикутник ABC побудований (рис. 2). Позначимо $AD = x$; $BD = y$. За умовою $c + x + y = a$, отже, $x + y = a - c$, і задача звелася до задачі: побудувати трикутник за стороною, прилеглим кутом і сумою двох інших сторін.

Вказівка: «спрямити» одну зі сторін, побудувати базисний трикутник і до отриманої сторони провести серединний перпендикуляр.

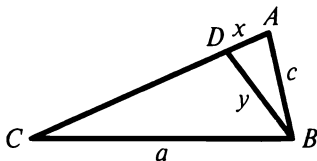


Рис. 2

Задача 3-3. На стороні трикутника побудуйте точку, сума відстаней від якої до двох інших сторін дорівнює даному відрізку. № 22

Розв'язання

Проведемо пряму l , паралельну BC , на відстані від неї, рівній заданій. Пряма l перетне

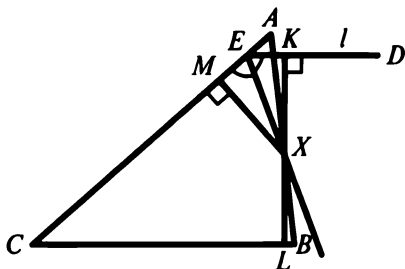


Рис. 3

сторону AC у точці E . Проведемо бісектрису кута DEC (рис. 3). Бісектриса перетне AB у точці X : $XL + XK = KL$ (задана відстань).

№ 23 **Задача 3-4.** У трикутнику ABC знайти таку точку X , щоб відстані від неї до сторін трикутника знаходилися в даному співвідношенні $m : n : p$.

Розв'язання

Будуємо пряму l_1 , паралельну стороні BC , яка знаходиться від неї на відстані m (рис. 4).

Будуємо пряму l_2 , паралельну AC , яка знаходиться від неї на відстані n . Позначимо

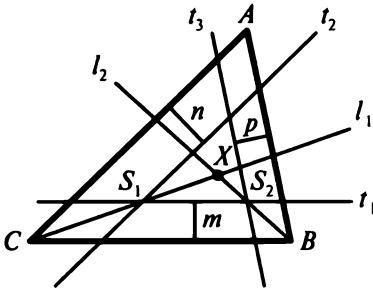


Рис. 4

S_1 — точку перетину прямих t_1 і t_2 . Відмітимо, що відношення відстаней від точки S_1 до сторін BC і AC дорівнює $m : n$.

Через точки C і S_1 проводимо пряму l_1 , яка є геометричним місцем точок, відстані яких до сторін BC і AC мають одне й те ж відношення $m : n$.

Будуємо пряму t_3 , паралельну стороні AB , яка знаходиться від неї на відстані p . Позначимо S_2 — точку перетину прямих t_1 і t_3 (відношення відстаней від точки S_2 до прямих BC і AB дорівнює $m : p$). Через точки B і S_2 проводимо пряму l_2 , яка є геометричним місцем точок, відстані яких до сторін BC і AB відносяться як $m : p$.

Перетин прямих l_1 і l_2 дасть шукану точку X : якщо її відстань до сторін BC , AB і AC позначити d_1 , d_2 , d_3 , то $d_1 : d_2 : d_3 = m : n : p$.

№ 24 **Задача 3-5.** Через точку провести пряму, яка ділить площу трикутника навпіл. Розглянути три випадки:

- 1) точка належить стороні трикутника;
- 2) точка лежить всередині трикутника, але не належить стороні;
- 3) точка лежить ззовні трикутника.

Розв'язання

1) Точка X належить стороні трикутника (рис. 5).

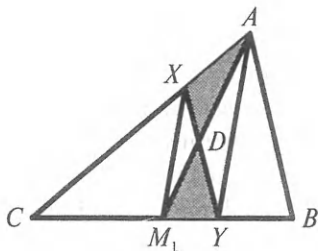


Рис. 5

Проведемо медіану AM_1 , сполучимо точки X і M_1 і проведемо пряму AY , паралельну XM_1 ($Y \in BC$). Отримаємо трапецію, у якої трикутники XDA і YDM_1 рівновеликі (доведіть!).

Оскільки

$$S_{AM_1B} = S_{AM_1C} \quad \text{і} \quad S_{XDA} = S_{YDM_1},$$

то

$$S_{XYC} = S_{XYBA}.$$

2) Точка X всередині трикутника (рис. 6).

Нехай UV — шукана пряма, якій належить точка X , d_1 і d_2 — перпендикуляри, опущені з точки X на сторони AC і BC . Нехай $CU = x$, $CV = y$.

Складемо перше рівняння:

$$2(d_1x + d_2y) = a \cdot h_a.$$

Складемо друге рівняння:

$$2xy = ab.$$

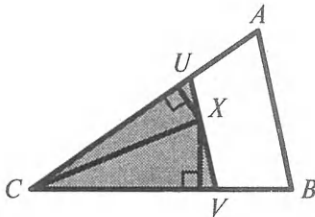


Рис. 6

Таким чином,

$$2d_1x^2 - ah_ax + abd_2 = 0.$$

Знайшовши x , отримаємо точку U і пряму UV .

3) Точка X ззовні трикутника. Маємо (рис. 7):

$$\frac{1}{2}d_2y - \frac{1}{2}d_1x = \frac{1}{4}a \cdot h_a,$$

або
$$2(d_2y - d_1x) = a \cdot h_a.$$

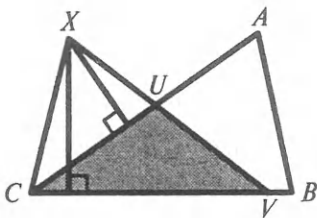


Рис. 7

№ 25 **Задача 3-6.** Вершини трикутника ABC недоступні. Побудувати:

1) центроїд M трикутника ABC (M — точка перетину медіан);

2) інцентр I (центр вписаного у трикутник кола);

- 3) центр O описаного кола;
- 4) ортоцентр H ;
- 5) центр I_o зовнішнього кола, яке дотикається сторони BC ;
- 6) точку W_1 (точку перетину бісектриси l_o і описаного навколо трикутника ABC кола).

Розв'язання

1) Аналіз показує, що коли у трикутнику провести прямі, паралельні, наприклад, BC , то отримаємо відрізки KN і K_1N_1 (рис. 8), середини T_1 і T_2 яких належать медіані AM_1 .

Аналогічно будуюмо пряму T_3T_4 , що містить відрізок BM_2 . Перетин прямих T_1T_2 і T_3T_4 дає точку M — центроїд трикутника ABC .

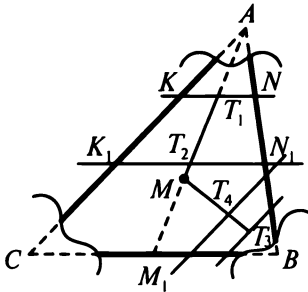


Рис. 8

2) Побудуємо пряму AL_1 (рис. 9). Довільною прямою перетнемо сторони AC і AB трикутника ABC у точках K_1 і N_1 . Побудуємо бісектриси кутів AK_1N_1 і AN_1K_1 . Нехай I_1 — їх точка перетину. Оскільки I_1 — інцентр трикутника AK_1N_1 , то I_1 належить прямій AL_1 . Проведемо аналогічні побудови у трикутнику AK_2N_2 , отримаємо інцентр I_2 трикутника AK_2N_2 . Отже, пряма I_1I_2 — шукана пряма AL_1 .

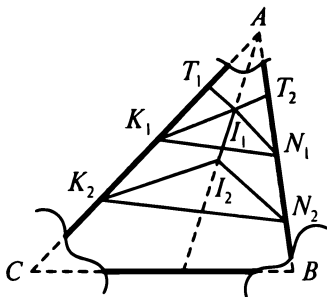


Рис. 9

3) Побудуємо точку O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC . Для цього побудуємо спочатку точку M_1 — середину BC (див. пункт 1) (рис. 10). Аналогічно будуються

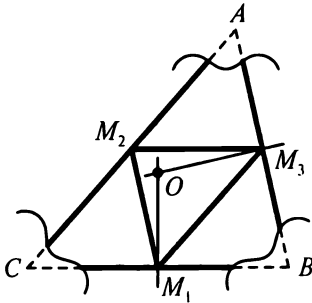


Рис. 10

точки M_2 і M_3 . Потім проведемо перпендикуляри до сторін трикутника ABC у точках M_1, M_2, M_3 . Їх перетин дасть точку O .

4) Побудуємо точку H — ортоцентр трикутника ABC (рис. 11). Проведемо пряму, паралельну BC , яка перетне AC і AB у точках C_1 і B_1 відповідно. У трикутнику AB_1C_1 проведемо висоти B_1K і C_1L .

Нехай Q — точка їх перетину (ортоцентр трикутника AB_1C_1). Опустимо перпендикуляр QM на B_1C_1 . Пряма QM містить висоту AM трикутника AB_1C_1 , а отже, і висоту AH_1 .

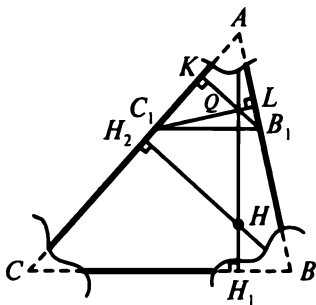


Рис. 11

Аналогічно будуємо пряму BH_2 , яка містить висоту трикутника ABC . Точка перетину цих прямих — ортоцентр H .

5)–6) Випадки 5 і 6 об'єднаємо в один — побудову точки W_1 (рис. 12). Точку W_1 легко побудувати, так як були побудовані точки M_1 і I .

Враховуючи, що

$$I_a W_1 = W_1 I$$

[6, с. 68], задачі 5 і 6 — розв'язані.

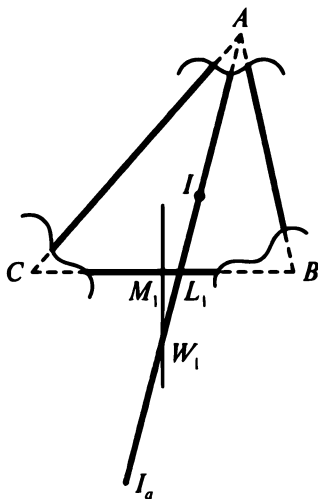


Рис. 12

Зауваження.

Застосування властивостей прямої Ейлера може полегшити знаходження точок O , M і H (якщо знайдені дві з трьох).

- № 26 **Задача 3-7.** Побудуйте на стороні BC даного трикутника ABC таку точку, щоб пряма, яка з'єднує основи перпендикулярів, опущених із цієї точки на сторони AB і AC , була паралельна BC .

Розв'язання

Із точок B і C опустимо перпендикуляри на прямі AB і AC . Вони перетнуться в точці D . Точка перетину прямих BC і AD (точка X) — шукана (рис. 13). Дійсно, $\triangle AMN \sim \triangle ACB$ (II ознака), отже, $MN \parallel CB$.

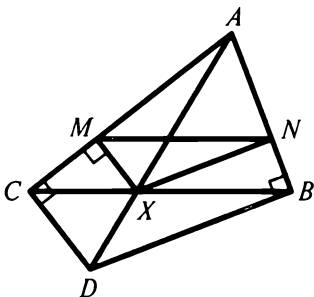


Рис. 13

Задача 3-8. На стороні AB трикутника ABC № 27 знайти таку точку D , щоб кола, вписані у трикутники ACD і BCD , були рівними.

Розв'язання

Нехай I_1 і I_2 — інцентри трикутників ACD і BCD (рис. 14), K_1 і K_2 — точки дотику рівних кіл та прямої CD . Оскільки прямокутні трикутники I_1K_1T і I_2K_2T рівні (T — точка перетину прямих I_1I_2 і CD), то

$$I_1T = I_2T,$$

тобто точка T — середина відрізка I_1I_2 .

Перейдемо до побудови точки D (рис. 15).

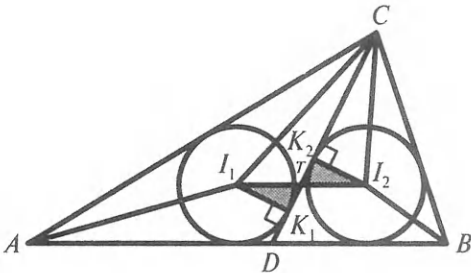


Рис. 14

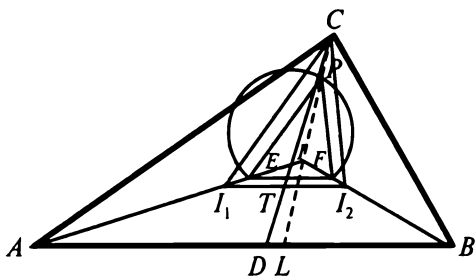


Рис. 15

Побудуємо відрізок EF , паралельний AB ($E \in AI, F \in BI$). Оскільки у трикутнику I_1CI_2 ,

$$\angle I_1 C I_2 = \frac{C}{2},$$

то на відріжку EF будемо сегмент, який вміщує кут $\frac{1}{2}C$. Його перетин із бісектрисою l_c

дасть точку P . Через точку C проведемо прямі, паралельні сторонам EP і FP . Отримаємо точки I_1 і I_2 . Середина відрізка I_1I_2 дасть точку T . Пряма CT перетне сторону AB у точці D .

4

**ПОБУДОВА
КОЛА**

№ 28 **Задача 4-1.** За даною дугою кола накреслити саме коло.

Розв'язання

Припустимо, що задача розв'язана, і дуга AmB доповнена до кола γ (рис. 1). Візьмемо на дузі AmB довільну точку і навколо трикутника ACB опишемо коло. Воно буде шуканим.

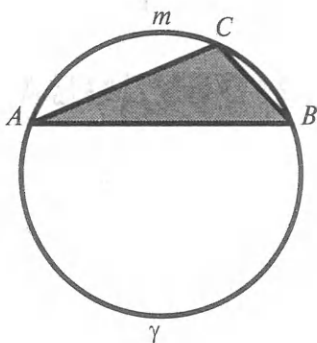


Рис. 1

№ 29 **Задача 4-2.** Описати коло, яке проходило б через дві задані точки A і B і дотикалося прямої l , паралельної AB .

Розв'язання

Нехай пряма l паралельна відрітку AB (рис. 2). Через середину AB , точку E , проведемо перпендикуляр CE до прямої l . Коло, описане навколо трикутника ABC — шукане.

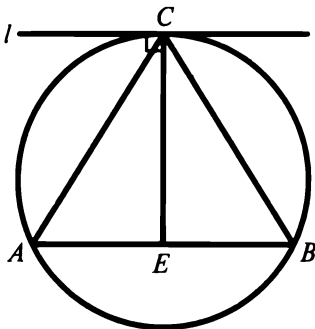


Рис. 2

Задача 4-3. Побудувати коло, яке проходить через задану точку A і дотикається даної прямої у заданій на ній точці B .

Розв'язання

Із точки A проведемо перпендикуляр n до даної прямої l (рис. 3).

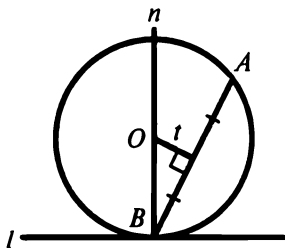


Рис. 3

З'єднаємо точки A і B і проведемо серединний перпендикуляр t до відрізка AB , який перетне пряму n у точці O , центрі шуканого кола. Радіус кола дорівнює OA .

- № 31 **Задача 4-4.** Задано кут і дві точки A і B . Побудуйте коло, яке проходить через ці точки і висікає на сторонах кута рівні відрізки.

Розв'язання

Центр кола O (рис. 4) належить бісектрисі кута S і осі симетрії відрізка AB .

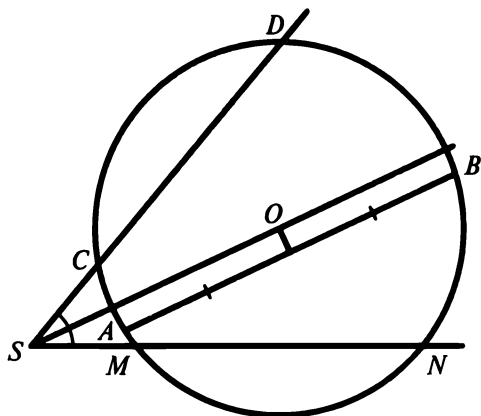


Рис. 4

Задача 4-5. Побудувати коло, яке проходить через дві задані точки і дотикається:

- 1) заданої прямої;
- 2) заданого кола.

Розв'язання

1) Нехай шукане коло проходить через задані точки A і B і дотикається прямої l у точці P (рис. 5). Позначимо S точку перетину прямої AB і прямої l .

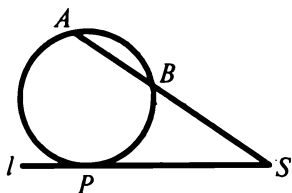


Рис. 5

Оскільки

$$AS \cdot BS = PS^2,$$

то побудова відрізка PS очевидна, а отже, і знаходження третьої точки кола (точки P).

2) Нехай коло γ_1 і точки M і N задані. Проведемо через ці точки коло γ_2 . Воно перетне коло γ_1 у точках A і B (рис. 6). Позначимо S точку перетину прямих MN і AB . Проведемо через точку S дотичні SK і SP до кола γ_1 . Коло, яке проходить через точки M , N і K — шукане (як і те, яке проходить через M , N , P). Дійсно, нехай побудоване коло γ_3 не дотикається до прямої SK у точці K , а перетинає її (крім точки K) ще у деякій точці K_1 (відмінній від K). Тоді

$$SK^2 = SA \cdot SB = SN \cdot SM = SK \cdot SK_1 —$$

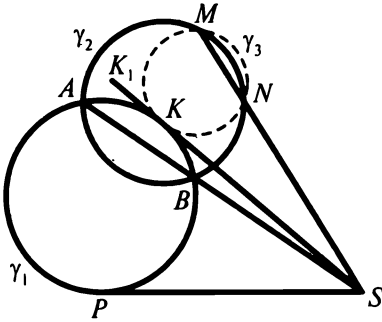


Рис. 6

отримали суперечність. Отже, кола γ_1 та γ_3 дотикаються до прямої SK в одній точці K , а тому дотичні одне до одного.

Задача 4-6. Задані три точки A, B і C . Про- № 33
вести коло через точку A так, щоб дотичні до неї з точок B і C були заданої довжини a і b .

Розв'язання

Припустимо, що шукане коло побудовано (рис. 7). Позначимо T_1 і T_2 точки дотику, M і N — точки перетину кола з січними AB і AC ,

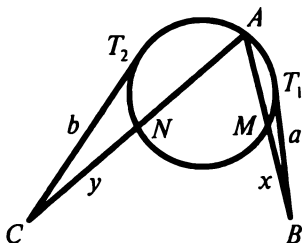


Рис. 7

$BM = x$; $CN = y$. За теоремою про січну і дотичну

$$BT_1^2 = AB \cdot MB, \quad \text{або} \quad a^2 = x \cdot AB,$$

$x = \frac{a^2}{AB}$ — можна побудувати.

Аналогічно $y = \frac{b^2}{AC}$. Через точки A , M та

N — будуємо коло.

5

**ПОБУДОВИ
У КОЛІ**

- № 34 **Задача 5-1.** Через точку, задану всередині кола, провести хорду, яка ділилася б даною хордою MN навпіл.

Розв'язання

Нехай A — задана точка (рис. 1), а O — центр кола. На AO , як на діаметрі, опишемо коло, яке перетне MN у точках X і X' . Хорди BC і B_1C_1 , проведені через A та X і X' , будуть шуканими.

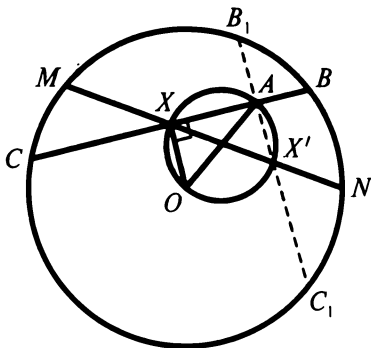


Рис. 1

- № 35 **Задача 5-2.** Із точки A провести пряму, яка відсікла б на колі дугу, рівну дузі BC , заданій на цьому колі.

Розв'язання

Із точки O опускаємо перпендикуляр OK на хорду BC (рис. 2). Проводимо радіусом OK концентричне коло і з точки A — до нього дотичну: хорда XU дорівнює хорді BC , а отже, дуга BC — дузі XU .

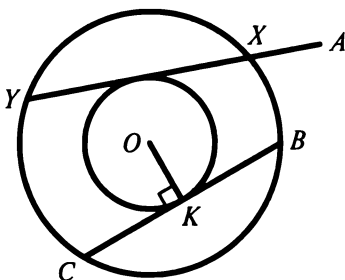


Рис. 2

Задача 5-3. Провести у крузі хорду даної № 36 довжини, яка ділилася б навпіл іншою хордою AB цього круга.

Розв'язання

У даному крузі з центром O проведемо довільну хорду CD заданої довжини (рис. 3). Із центра O опустимо перпендикуляр OE

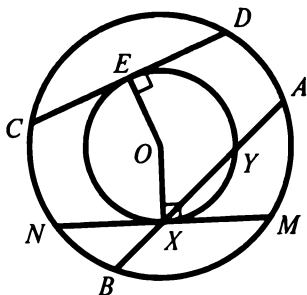


Рис. 3

на хорду CD . Радіусом OE опишемо коло з центром у точці O , яке перетне хорду AB у точках X та Y . Хорда MN , яка проходить через X перпендикулярно OX , — шукана (як і $M_1N_1 \perp OY$).

Доведення очевидне: $EO = OX$ і $MX = XN$.

- № 37 **Задача 5-4.** Через задану точку A у крузі провести хорду так, щоб різниця її відрізків, які визначаються цією точкою, була заданою.

Розв'язання

Опишемо концентричне коло γ_2 радіусом OA і проведемо в ньому хорду AB , рівну заданій різниці (рис. 4). Подовжимо AB до перетину

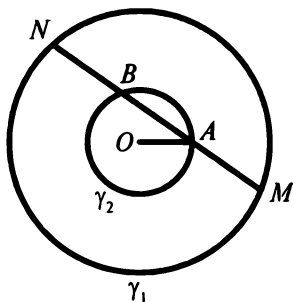


Рис. 4

з колом γ_1 у точках M і N . Хорда MN — шукана. Дійсно, оскільки $AM = NB$, то

$$AN - AM = AN - NB = AB$$

(задана різниця).

Задача 5-5. У колі задані хорди AB і CD . № 38
Знайти на колі таку точку X , щоб хорди AX і BX висікали на хорді CD відрізок FG заданої довжини t .

Розв'язання

Нехай FG — відрізок довжини t . Аналіз показує, що якщо перенести паралельно відрізок FG у точку A (рис. 5), то чотирикутник $AFGE$ —

Розв'язання

У заданому колі γ точка O — центр, AB — діаметр. Проведемо дотичну у точці A (рис. 6). Відкладемо $AC = AB$, сполучимо відрізком прямої точки C і O . Пряма CO перетне коло γ у точці X . Дотична в цій точці перетне пряму AB у шуканій точці Y . Дійсно, трикутники OCA і OMD рівні і $YX = AC = AB$.

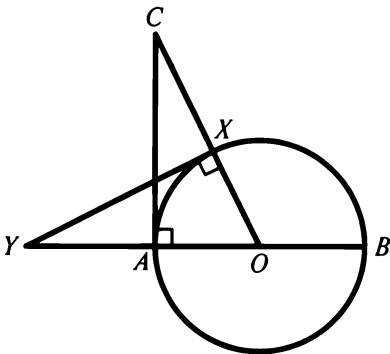


Рис. 6

Задача 5-7. У крузі проведені два радіуси. № 40
Провести хорду так, щоб вона ділилася радіусами на три рівні частини.

Розв'язання

Нехай O — центр заданого кола (рис. 7). Відкладемо на радіусах OA і OB рівні відрізки OE і OF . На прямій EF відрізки $NE = EF = FL$ і проведемо відрізки OCN і ODL . Хорда CD — шукана.

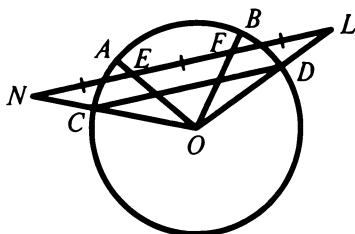


Рис. 7

- № 41 **Задача 5-8.** Задані два концентричних кола. Проведіть пряму, на якій ці кола висікають три рівних відрізки.

Розв'язання

Нехай O — центр кіл (рис. 8). Нехай $AB = BC = CD$. Трикутник AOC — базисний. Його можна побудувати за двома сторонами (AO і OC) і медіаною третьої сторони (OB).

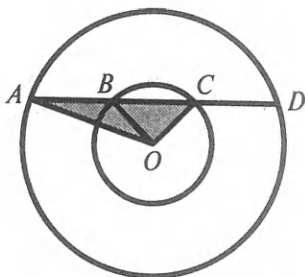


Рис. 8

Задача 5-9. Вписати у дане коло трикут- № 42
ник із заданим кутом, щоб дві задані точки
всередині круга (A і B) належали сторонам
цього трикутника.

Розв'язання

Нехай XYZ — шуканий трикутник: $A \in XY$,
 $B \in ZY$ (рис. 9).

Побудуємо кут EDF , рівний заданому α .
Тепер задача полягає в тому, щоб через точку
 B провести хорду ZY , рівну EF . Тоді $\cup ZEY$
дорівнюватиме дузі EYF і кут ZXY дорівню-
ватиме куту EDF . Хорди ці будуть рівні,
якщо будуть рівновіддалені від центра O .

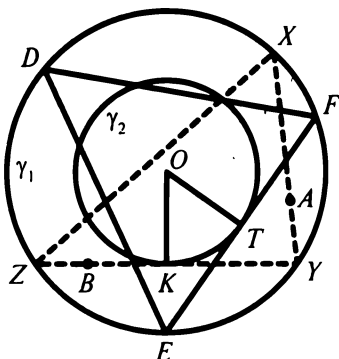


Рис. 9

Ось чому виникає коло γ_2 і до нього проводяться дотичні (одна за побудовою $(OT \perp EF)$, друга — через точку B).

Побудова

- 1) Будуємо кут EDF , отримуємо хорду EF .
Із середини T будуємо коло γ_2 (O ; OT).
- 2) Через точку B проводимо дотичну до γ_2 .
Вона перетне коло γ_1 у точках Z і Y .
- 3) Проводимо пряму YA — отримуємо точку X .

Задача 5-10. Через задану точку A так про- № 43
вести січну до двох концентричних кіл, щоб
частина її між колами була заданої довжини.

Розв'язання

Нехай O — центр концентричних кіл γ_1 і γ_2
(рис. 10). Візьмемо на колі γ_1 довільну точку B
і зробимо засічку на колі γ_2 радіусом $BC = \frac{1}{2}l$
(де l — задана довжина). Із центра O на пряму
 BC опустимо перпендикуляр OE ($OE \perp BC$).

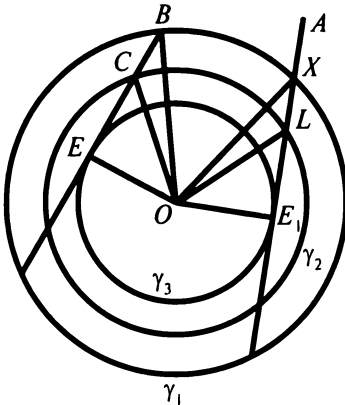


Рис. 10

Із центром O побудуємо третє концентричне коло γ_3 радіуса EO . Із заданої точки A проведемо до кола γ_3 дотичну AE_1 , яка перетне коло γ_1 у точці X , а коло γ_2 у точці L . Доведемо, що $XL = BC = \frac{1}{2}l$.

1. Розглянемо трикутники OBE і XOE_1 . Вони рівні, отже,

$$\angle BOE = \angle XOE.$$

2. Далі розглянемо трикутники COE і LOE_1 . Вони рівні, отже, $\angle COE = \angle LOE_1$.

3. Розглянемо трикутники BOC і XOL . Оскільки

$$\angle BOC = \angle BOE - \angle COE,$$

$$\text{а } \angle XOL = \angle XOE_1 - \angle LOE_1,$$

то $\angle COB = \angle XOL$ і $\triangle BOC = \triangle XOL$,

отже, $BC = XL = \frac{1}{2}l$.

Тепер зрозуміла побудова: будуємо коло γ_3 і до нього з точки A проводимо дотичну AE_1 . Точки X і L — шукані.

6

**ПОБУДОВА
ЗА ДОПОМОГОЮ
ДОПОМІЖНОГО
КОЛА**

- № 44 **Задача 6-1.** Побудувати трикутник ABC за $a + b$; $b + c$; $c + a$.

Розв'язання

Будуємо трикутник MNE зі сторонами $a + b$; $b + c$; $c + a$ (рис. 1). Вписуємо в нього коло, яке дотикається сторін у точках F_1 , F_2 , F_3 . Тоді відрізки MF_2 , NF_1 , EF_3 дорівнюють a , b і c .

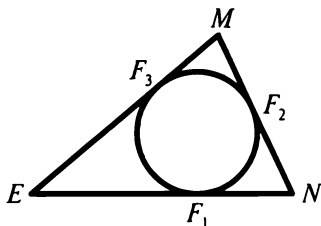


Рис. 1

- № 45 **Задача 6-2.** Побудувати трикутник за висотою, медіаною і бісектрисою, проведеними з однієї вершини.

Розв'язання

Припустимо, що трикутник ABC побудований (рис. 2). У ньому проведена висота AH_1 , бісектриса AL_1 , медіана AM_1 .

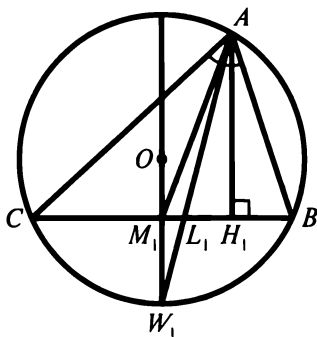


Рис. 2

Доведемо спочатку, що у різносторонньому трикутнику ABC $m_a > l_a > h_a$. Опишемо коло навколо трикутника ABC із центром кола — точкою O . Продовжимо бісектрису AL_1 до перетину з цим колом у точці W_1 . Проекція точки W_1 на сторону BC (точка M_1) може знаходитися тільки лівіше точки L_1 .

Перейдемо до побудови: будуємо базисні трикутники AH_1L_1 , AH_1M_1 . Бісектрису AL_1 продовжимо до перетину з віссю симетрії відрізка BC , отримаємо точку W_1 . Знайдемо центр кола — точку O . Ця точка — перетин

серединних перпендикулярів, проведених до відрізків BC , AW_1 . Радіусом OA будемо коло, яке перетне пряму L_1H_1 (або L_1M_1) у точках B і C .

- № 46 **Задача 6-3.** Задані відрізки AB і CD . Знайти таку точку X , щоб трикутники AXB і CXD були подібними.

Розв'язання

Оскільки

$$\frac{XA}{XC} = \frac{XB}{XD} = \frac{AB}{CD},$$

то шукана точка X належить двом колам Аполлонія, діаметри яких лежать на прямих AC і BD .

- № 47 **Задача 6-4.** Побудувати коло, яке проходить через дві точки і дотикається заданого кола.

Розв'язання

Припустимо, що коло γ_x із центром O_x — шукане коло, яке проходить через задані точки A і B (рис. 3). Побудуємо допоміжне коло γ_1 , яке проходить через точки A і B . Воно перетне задане коло у точках C і D .

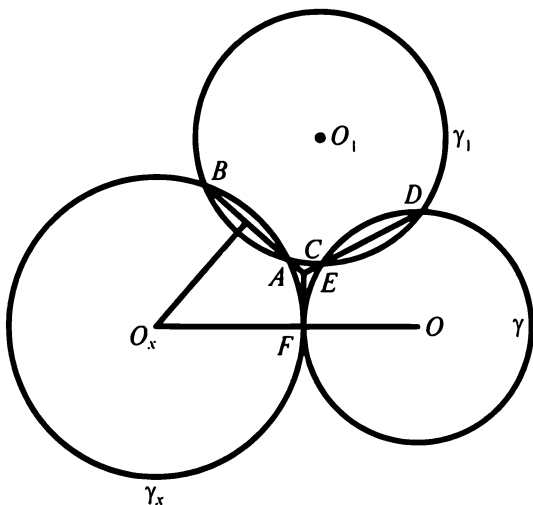


Рис. 3

Продовжимо пряму CD до перетину з AB у точці E . З точки E проведемо дотичну EF до кола γ (F — точка дотику).

Продовжимо OF до перетину з серединним перпендикуляром до відрізка AB . Їх точка перетину — (точка O_x) — шукана.

Доведемо це.

З $\triangle O_xBE$:

$$O_xE^2 = BE^2 + O_xB^2 - BE \cdot AB. \quad (1)$$

З $\triangle O_xEF$:

$$O_xE^2 = O_xF^2 + EF^2 = O_xF^2 + AE \cdot BE \quad (2)$$

(оскільки $EF^2 = AE \cdot BE$).

Із рівностей (1) і (2):

$$BE^2 + O_xB^2 - BE \cdot AB = O_xF^2 + AE \cdot BE,$$

$$\text{або} \quad BE^2 + O_xB^2 = O_xF^2 + BE(AE + AB),$$

$$\text{звідки} \quad O_xB^2 = O_xF^2, \text{ або } O_xB = O_xF.$$

№ 48 Задача 6-5. На стороні BC трикутника ABC знайти таку точку D , щоб величина AD була середнім геометричним величин BD і CD .

Розв'язання

Задача стала широко відомою після Шістнадцятої міжнародної олімпіади, проведеної в 1974 році у Німеччині (запропонована Фінляндією).

Нехай O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC (рис. 4).

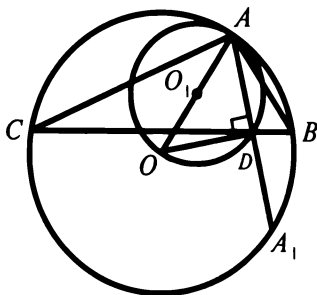


Рис. 4

На радіусі OA як на діаметрі побудуємо коло, яке перетне хорду BC у шуканій точці D .

Дійсно, проведемо хорду AA_1 , якій належить точка D . Оскільки $OD \perp AA_1$, то $AD = DA_1$ і $AD \cdot DA_1 = BD \cdot DC$, або $AD^2 = BD \cdot DC$.

Задача 6-6. Провести січну до двох концен- № 49
тричних кіл так, щоб хорда більшого круга була вдвічі більшою за хорду меншого круга.

Розв'язання

Нехай O — центр кіл γ_1 і γ_2 (рис. 5). У колі γ_1 продовжимо радіус OA і відкладемо відрізок

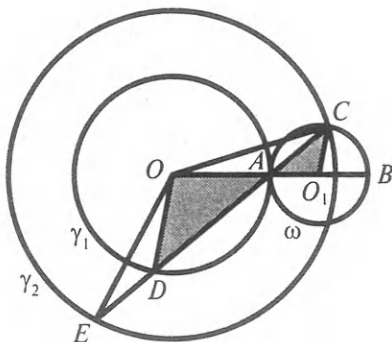


Рис. 5

$AB = OA$. На ньому як на діаметрі опишемо коло ω , яке перетне коло γ_2 у точці C . Січна CA — шукана. Доведемо, що $AD = \frac{1}{2}CE$.

Дійсно, оскільки $O_1C = O_1A$, а $OA = OD$ і $\angle CAO_1 = \angle OAD$, то трикутники CO_1A і ODA подібні. Але

$$AO_1 = \frac{1}{2}OA, \text{ отже, } AC = \frac{1}{2}AD.$$

Оскільки $AC = DE$ (доведіть!), то $AD = \frac{1}{2}CE$.

Задача 6-7. Побудувати квадрат за чотирма точками, кожна з яких належить одній зі сторін квадрата.

Розв'язання

Позначимо T_1, T_2, T_3, T_4 задані точки (рис. 6). Аналіз задачі показує, що відрізки T_1T_2 і T_3T_4 є діаметрами півкіл, яким належать кінці діагоналі BD .

Окрім того, точки X і Y , які є серединами дуг T_1XT_2 та T_1YT_4 , теж належать цій діагоналі. Таким чином, провівши пряму XY до перетину з двома побудованими колами, знайдемо діагональ квадрата, а отже, побудуємо квадрат.

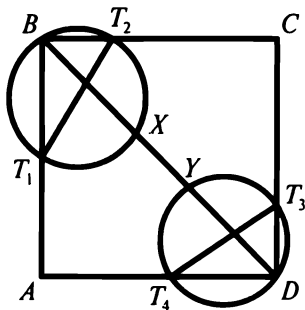


Рис. 6

- № 51 **Задача 6-8.** Накресліть прямокутник, у якого сторони (або їх продовження) проходили б через чотири точки A, B, C і D , і одна зі сторін була заданої довжини a .

Розв'язання

На відрізку AB , як на діаметрі, опишемо півколо γ (рис. 7). Із точки B радіусом a зробимо засічку на дузі γ — точку E . З точки B проведемо пряму BL , паралельну AE , а з точок C і D перпендикуляри CK і DH до AE . Отримаємо шуканий прямокутник $XYUZ$.

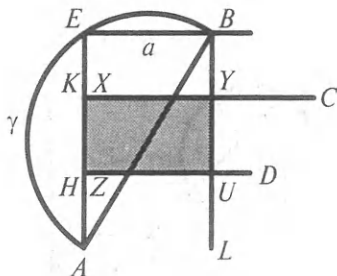


Рис. 7

7

**ДВА І БІЛЬШЕ
КОЛА**

- № 52 **Задача 7-1.** Побудувати коло, яке дотикається двох даних кіл і одного з них у заданій на ньому точці A .

Розв'язання

Позначимо O_1 і O_2 центри заданих кіл (рис. 1). O_x — центр шуканого кола, r_1, r, x — радіуси цих кіл. Трикутник $O_1O_2O_x$ — базисний. Його можна побудувати за стороною O_1O_2 , кутом AO_2O_1 і різницею двох інших сторін ($O_2O_x - O_1O_x = r_2 - r_1$).

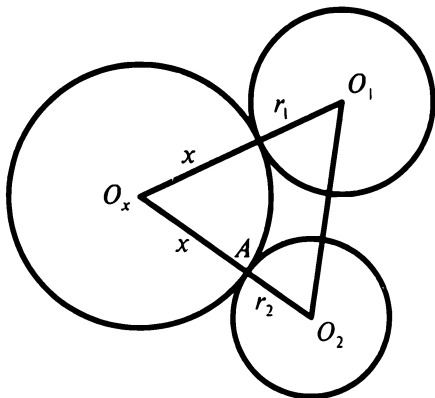


Рис. 1

Задача 7-2. З даної точки A описати коло, № 53 яке поділило б навпіл дане коло γ .

Розв'язання

Сполучимо центр O кола γ із точкою A (рис. 2), і на відрізок AO опустимо перпендикуляр, який перетне коло γ у точках M і N . Радіусом AM (або AN) і центром A будемо шукане коло.

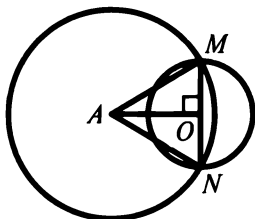


Рис. 2

Задача 7-3. Побудувати коло, яке дотика- № 54 ється даного кола γ у заданій на ньому точці A і проходить через точку B , яка не належить колу γ .

Розв'язання

Нехай O — центр кола γ (рис. 3). Через середину відрізка AB проведемо перпендикуляр l ,

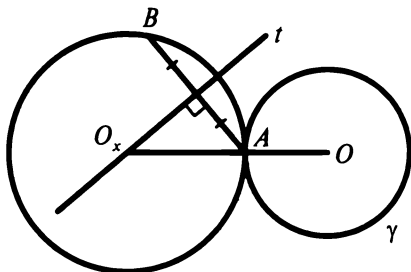


Рис. 3

який перетне пряму OA в шуканій точці O_x — центрі кола, радіус якого OA .

- № 55 **Задача 7-4.** Побудувати коло, яке дотикається даної прямої у заданій на ній точці і даного кола.

Розв'язання

Нехай коло з центром O_1 — задане (рис. 4). Коло з центром O_x — шукане, дотикається прямої MN у точці S . Позначимо радіуси кіл через r_1 і r_x . Доведемо, що трикутник SO_1O_x можна побудувати. Дійсно: оскільки задані точки S і O_1 , то заданий відрізок SO_1 . Оскільки $\angle O_xSN = 90^\circ$,

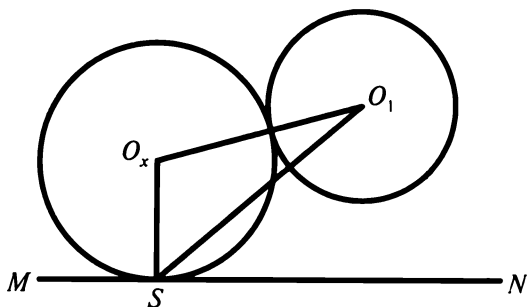


Рис. 4

то $\angle O_x S O_1$ заданий, він дорівнює $90^\circ - \angle O_1 S N$ (останній кут теж задано). І, нарешті, різниця

$$O_1 O_x - S O_x = r_1 + r_x - r_x = r_1$$

теж задана.

Отже, трикутник $S O_x O_1$ — базисний, його можна побудувати за стороною, прилеглим кутом і різницею двох інших сторін.

Задача 7-5. Побудувати коло, яке дотика- № 56
ється даного кола в заданій на ньому точці і даної прямої.

Розв'язання

Нехай O_1 — центр заданого кола γ , O_x — центр шуканого кола (рис. 5), S — точка на заданому колі. Проведемо дотичну до заданого кола γ через точку S . Вона перетне пряму MN у точці K . Центр O_x належить прямій O_1S і бісектрисі кута SKM .

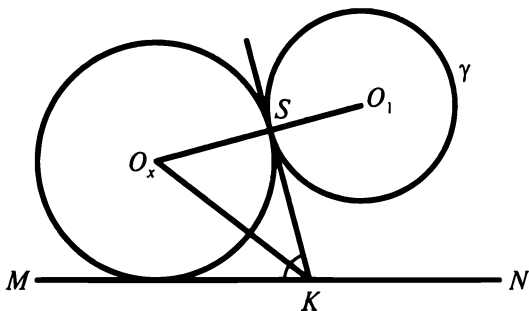


Рис. 5

- № 57 **Задача 7-6.** Прийняти вершини трикутника ABC за центри кіл, які слід побудувати так, щоб вони дотикалися по два.

Розв'язання

Позначимо радіуси кіл із центрами A , B і C як x , y , z . Позначимо точки дотику кіл через K_1 , K_2 , K_3 (рис. 6). Тоді $x = c - y$ і $x = b - z$, звідки

$$2x = b + c - (y + z) = b + c - a.$$

Отже, $x = p - a$. Звідси випливає, що точки K_1 , K_2 , K_3 — точки дотику вписаного в трикутник ABC кола.

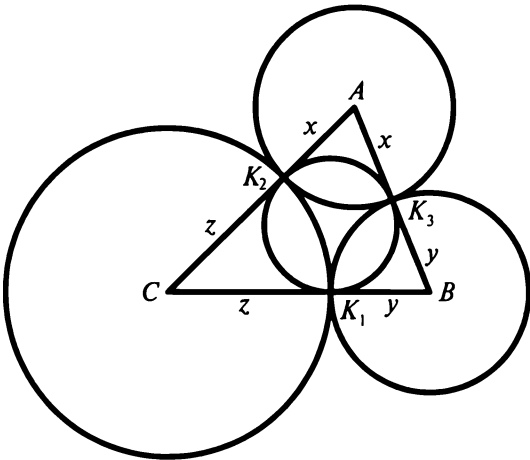


Рис. 6

Таким чином, для розв'язання поставленої задачі треба вписати коло в трикутник ABC , отримати точки K_1 , K_2 і K_3 і радіусами AK_2 , BK_3 і CK_1 описати з центрів A , B і C кола.

№ 58 **Задача 7-7.** Побудувати коло, яке дотикається даного кола і двох непаралельних прямих a і b .

Розв'язання

Позначимо A точку перетину прямих a і b (рис. 7). Нехай γ — задане коло з центром O .

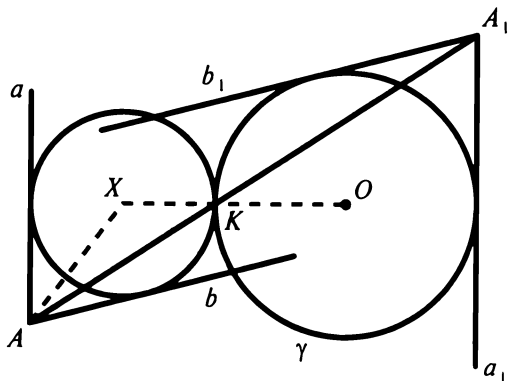


Рис. 7

Шукане коло гомотетичне колу γ відносно їх точки дотику. Гомотетія відображає прямі a і b на прямі a_1 і b_1 , паралельні їм і дотичні до кола γ . Нехай A_1 — точка перетину прямих a_1 і b_1 . Отже, пряма AA_1 проходить через центр гомотетії точку K . Центр X знаходиться на бісектрисі кута A і прямій KO .

Задача 7-8. Задана пряма MN і з одного її № 59 боку два кола. Знайти на цій прямій таку точку, щоб дотичні, проведені з цієї точки до двох даних кіл, склали рівні кути з прямою MN .

Розв'язання

Позначимо два заданих кола γ_1 і γ_2 , їх центрами O і Q відповідно (рис. 8). Побудуємо коло ω , симетричне колу γ_1 відносно MN . Дотичні до кіл γ_2 і ω перетнуть пряму MN у шуканих точках A_0, B_0, C_0, D_0 .

Доведемо це. Пряма AA' є зовнішньою дотичною до кіл γ_2 і ω . Зрозуміло, що

$$\angle AA_0M = \angle A'A_0N. \quad (1)$$

Оскільки кола γ_1 і ω симетричні відносно MN , то

$$\angle A_1 A_0 N = \angle A' A_0 N. \quad (2)$$

З (1) і (2) знаходимо, що $\angle A A_0 M = \angle A_1 A_0 N$.

Аналогічно

$$\begin{aligned} \angle B B_0 M &= \angle B_1 B_0 N, & \angle C C_0 M &= \angle C_1 C_0 N, \\ \angle D D_0 M &= \angle D_1 D_0 N. \end{aligned}$$

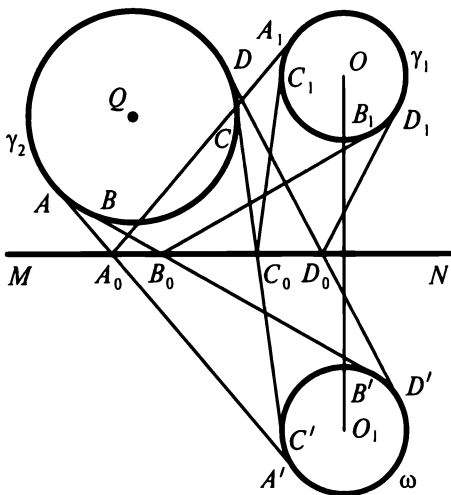


Рис. 8

8

**ЗАСТОСУВАННЯ
ФОРМУЛ**

№ 60 **Задача 8-1.** Побудувати трикутник за кутом A , медіаною m_a і радіусом r вписаного кола.

Розв'язання

Застосуємо формули [6, с. 20, 53]:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Перетворимо першу з формул:

$$\begin{aligned} 4m_a^2 &= 4R^2 \cos^2 B + 4R^2 \cos^2 C - 4R^2 \cos^2 A = \\ &= 4R^2 (-\cos 2B - \cos 2C + 1 + \cos^2 A) = \\ &= 4R^2 (1 + \cos^2 A + 2 \cos A \cos(B-C)). \end{aligned}$$

Перетворимо другу формулу:

$$r^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{A}{2} \right)^2.$$

Позначимо

$$\cos \frac{B-C}{2} = x.$$

Отримаємо рівняння

$$\frac{4m_a^2}{r^2} = \frac{4x^2 \cos A + (1 - \cos A)^2}{x^2 \sin^2 \frac{A}{2} - 2x \sin^3 \frac{A}{2} + \sin^4 \frac{A}{2}}.$$

Розв'язуючи це рівняння, маємо:

$$x = \cos \frac{B-C}{2} = \frac{m_a^2 \sin \frac{A}{2} + r \sqrt{m_a^2 \cos^2 \frac{A}{2} - r^2 \cos A}}{m_a^2 + 2r^2 - r^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{A}{2}}.$$

Отже, можна знайти $B-C$.

Позначимо $B-C=t$. Оскільки

$$B+C = \pi - A, \text{ то } B = \frac{\pi - A + t}{2}.$$

Тепер можна побудувати трикутник за двома кутами і медіаною (див. задачу 9-5 (№ 70)).

Задача 8-2. Побудувати трикутник за стороною a , висотою h_a і радіусом r_a зовнівписаного кола, яке дотикається сторони BC трикутника ABC .

Розв'язання

Оскільки

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{ah_a}{2p-2a},$$

отже,
$$p = a \left(1 + \frac{h_a}{2r_a} \right).$$

Знайдемо r :

$$r = \frac{ah_a}{2p} = \frac{ah_a}{2a \left(1 + \frac{h_a}{2r_a} \right)} = \frac{h_a r_a}{h_a + 2r_a}.$$

Знайшовши $p-a$ та маючи r , скористаємося формулою

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$$

[6, с. 53]. Отримавши кут A , будуємо $\triangle ABC$.

№ 62 **Задача 8-3.** Побудувати трикутник за R , r , h_a .

Розв'язання

Позначимо K_1 — точку дотику вписаного кола і сторони BC (рис. 1). Оскільки $IK_1 \parallel AH_1$,

то

$$\frac{IL_1}{IA} = \frac{r}{h_a - r}.$$

Але

$$\frac{IL_1}{IA} = \frac{a}{b+c}.$$

Отже,

$$\frac{b+c-a}{a} = \frac{h_a - r}{r},$$

або

$$\frac{p-a}{2a} = \frac{h_a - 2r}{2r}.$$

Має місце формула

$$r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (p-a) \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

(пропонується довести самостійно) і

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{a}{4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}.$$

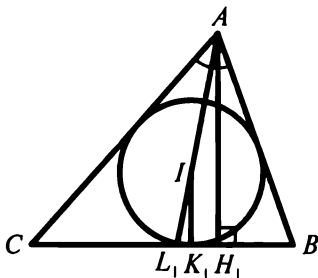


Рис. 1

Звідси

$$\frac{r}{R} = \frac{h-2r}{2r} \cdot 4 \sin^2 \frac{A}{2}.$$

Отже,

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{r}{\sqrt{2R(h-2r)}}.$$

Знайшовши кут A , трикутник ABC побудувати неважко (наприклад, звести до задачі a, A, h_a).

№ 63 **Задача 8-4.** Побудувати трикутник ABC за висотою h_a , висотою h_b і бісектрисою l_c .

Розв'язання

Із точки L_3 опустимо перпендикуляр L_3D на відрізок BC (рис. 2). Позначимо $L_3D = d$.
Маємо

$$\frac{h_a}{d} = \frac{AB}{L_3B}. \quad (1)$$

За властивістю бісектриси

$$\frac{AL_3}{L_3B} = \frac{b}{a}, \quad \text{або} \quad \frac{AL_3 + L_3B}{L_3B} = \frac{b+a}{a}.$$

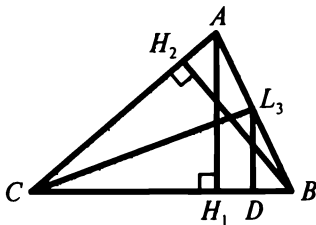


Рис. 2

Отже,
$$\frac{AB}{L_3B} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}.$$

Вираз (1) запишемо як

$$\frac{h_a}{d} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{h_a}{h_b},$$

отже,
$$d = \frac{h_a \cdot h_b}{h_a + h_b}.$$

За гіпотенузою l_c і катетом d будемо трикутник L_3DC , знаходимо кут L_3CB , який дорівнює $\frac{1}{2}C$. Далі за катетом h_a і кутом $ACB = C$ будемо трикутник AH_1C , знаходимо сторону b ,

потім — трикутник ACL_3 — знаходимо кут A і, маючи b , A , C — будемо трикутник ABC .

№ 64 **Задача 8-5.** Побудувати чотирикутник, рівновеликий трикутнику, щоб у нього можна було вписати коло.

Розв'язання

Опишемо навколо трикутника ABC коло і побудуємо точку W_1 (середину дуги BC) (рис. 3). Із точки L_1 опустимо перпендикуляри L_1M і L_1N на сторони AC і AB .

Чотирикутник AMW_1N — шуканий: скористаємося авторською формулою [6, с. 155]

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AW_1 \cdot MN.$$

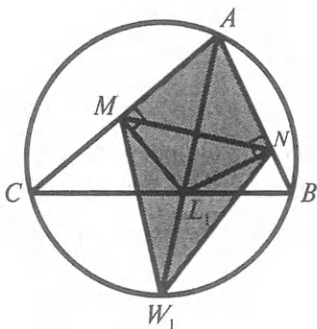


Рис. 3

Оскільки цей чотирикутник — дельтоїд, то в нього можна вписати круг.

Задача 8-6. Побудувати трикутник ABC № 65 за r , AI , AH (I — інцентр, H — ортоцентр).

Розв'язання

Скористаємося формулами [6, с. 5, 53]:

$$OM_1 = \frac{1}{2}AH \quad \text{і} \quad OI^2 = R^2 - 2Rr,$$

і побудуємо базисний трикутник AIK (K — точка дотику вписаного кола і сторони AB) (рис. 4). Отримаємо кут IAK , причому

$$\angle IAK = \frac{1}{2}A.$$

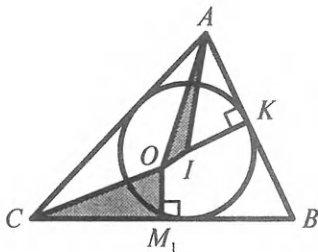


Рис. 4

Потім побудуємо трикутник OM_1C , оскільки

$$OM_1 = \frac{1}{2}AH \quad \text{і} \quad \angle M_1OC = A,$$

отримаємо $OC = R$. Тепер можна побудувати вписане коло і через точки C і K провести до нього дотичні.

9

**СЕГМЕНТ,
ЯКИЙ ВМІЩУЄ
ДАНИЙ КУТ**

№ 66 **Задача 9-1.** Побудувати паралелограм за:

- 1) двома діагоналями і кутом між сторонами;
- 2) за двома сторонами і кутом між діагоналями.

Розв'язання

1) Припустимо, задача розв'язана і паралелограм $ABCD$ побудований (рис. 1). Оскільки $BO = OD$, то відрізок AO буде медіаною у трикутнику BAD , який можна побудувати за заданою стороною BD , куту BAD (заданому) і медіаною AO .

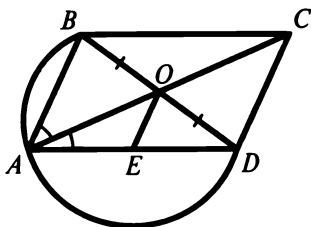


Рис. 1

- 2) Трикутник AOD можна побудувати, враховуючи, що точка O — центр симетрії

паралелограма. Медіана OE трикутника AOD дорівнює половині сторони AB . Задача розв'язується аналогічно попередній.

Задача 9-2. Побудувати трикутник за $\angle A$, № 67 h_a, m_a .

Розв'язання

За катетом і гіпотенузою (h_a і m_a) будуюмо трикутник AH_1M_1 (рис. 2). «Подвоїмо» медіану AM_1 , отримаємо точку D . У паралелограмі $ABDC$

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - A.$$

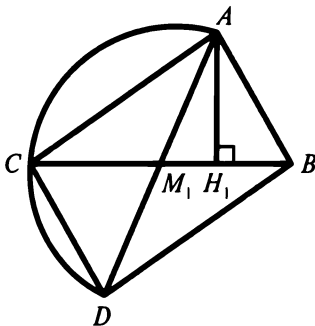


Рис. 2

Отже, на відрізку AD , рівному $2m_a$, будують сегмент, який вміщує кут $180^\circ - A$, а, провівши пряму M_1H_1 до перетину з сегментом, отримаємо точку C . Оскільки $M_1B = M_1C$, то можна побудувати трикутник ABC .

№ 68 **Задача 9-3.** Побудувати трикутник за a , $\angle A$, m_b .

Розв'язання

Подвоїмо заданий відрізок BM_2 , рівний m_b (рис. 3). Отримаємо точку D . У паралелограмі $ABCD$ $BC = AD$. Будуємо на відрізку BM_2 сегмент, який вміщує кут A і з точки D , як із центра кола, робимо на сегменті засічку радіусом, рівним a . Отримаємо вершину A трикутника ABM_2 , а отже, і трикутник ABC .

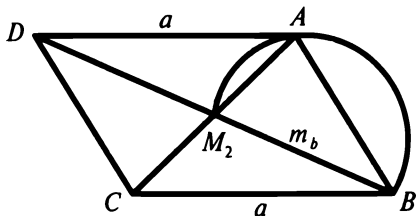


Рис. 3

Задача 9-4. Побудувати трикутник за $\angle A$, № 69 m_b, m_c .

Розв'язання

«Подвоїмо» медіану CM_3 . Отримаємо точку D (рис. 4). Розглянемо паралелограм $ADBC$: $\angle M_3BD = \angle BAC$, а точка B віддалена від точки M на відстань $\frac{2}{3}m_b$. Отже, на відрізку M_3D будемо сегмент, який вміщує кут BAC , продовжуємо відрізок DM_3 на одну третину його довжини, отримуємо точку M , з якої, як із центра, проводимо дугу радіусом $\frac{2}{3}m_b$. Вона перетне сегмент у точці B . Побудувавши трикутник DBM , можемо побудувати трикутник ABC .

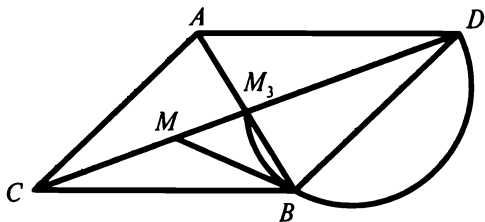


Рис. 4

№ 70 **Задача 9-5.** Побудувати трикутник за двома кутами і медіаною.

Розв'язання

Візьмемо для визначеності у трикутнику ABC кути A , B і медіану m_b . Подвоїмо її (рис. 5). На відрізку $BM_2 = m_b$ будуємо сегмент γ_1 , який вміщує кут A , а на відрізку DM_2 — сегмент γ_2 , який вміщує кут M_2AD , рівний куту $C = 180^\circ - (A + B)$. Перетин сегментів γ_1 і γ_2 дає точку A , трикутник AM_2B , а отже, і трикутник ABC .

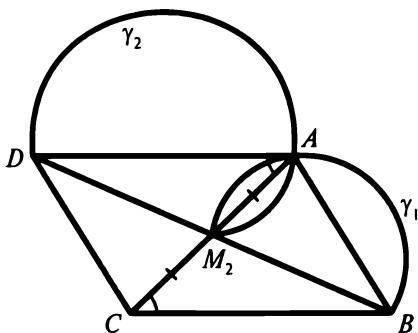


Рис. 5

Задача 9-6. Побудувати трикутник за $\angle A$, $\# 71$
 $h_a, 2p$.

Розв'язання

«Розгорнемо» сторони AC і AB трикутника ABC (рис. 6). Отримаємо трикутник ADE ($ED = 2p$). Розглянемо кут EAD :

$$\begin{aligned}\angle EAD &= A + \frac{1}{2}(B + C) = \\ &= A + \frac{1}{2}(180^\circ - A) = 90^\circ + \frac{A}{2}.\end{aligned}$$

Отже, на відрізку ED будуюмо сегмент, який вміщує кут $90^\circ + \frac{A}{2}$, і, на відстані h_a від цього відрізка, проводимо пряму l , паралельну BC , яка перетне дугу сегмента у вершині трикутника ABC .

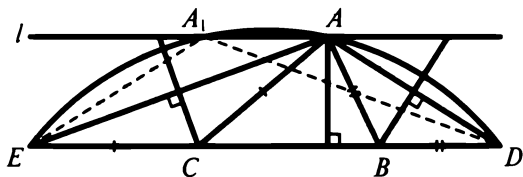


Рис. 6

№ 72 **Задача 9-7.** У задане коло вписати трапецію, якщо відома її бічна сторона і відстань від центра O до точки E перетину діагоналей.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ — шукана трапеція (рис. 7), заданий відрізок CD рівний AB . Оскільки коло, описане навколо трапеції $ABCD$ задане, то можна побудувати кут CBD , а отже, і кут CED , рівний $2\angle CBD$ (E — точка перетину діагоналей). Таким чином, точка E належить сегменту, який вміщує кут CED , і дузі кола радіуса OE .

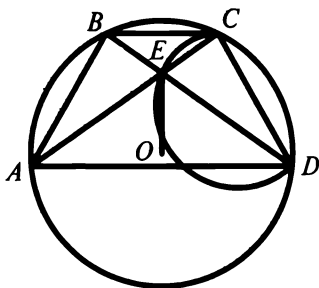


Рис. 7

10

**ДЕСЯТЬ
ЕЛІТНИХ
ЗАДАЧ**

№ 73 **Задача 10-1.** На стороні $AУ$ прямого кута $ХАУ$ дані дві точки B і C . Знайти на іншій стороні таку точку M , щоб кут BMC був удвічі більший за кут BCM .

Розв'язання

Припустимо, задача розв'язана і точка M знайдена (рис. 1). Проведемо бісектрису MN кута BMC . Тоді

$$CM : BM = CN : BN. \quad (1)$$

Із подібності трикутників BMC і BNM :

$$BM : BN = BC : BM,$$

або $BM^2 = BN \cdot BC. \quad (2)$

Із $\triangle MCN$ маємо:

$$CM^2 = NM^2 + CN^2 + 2CN \cdot AM. \quad (3)$$

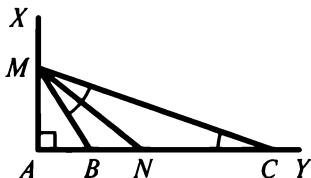


Рис. 1

Оскільки $\angle NMC = \angle MCN$, то $CN = MN$ і рівність (3) запишемо у вигляді:

$$CM^2 = 2CN^2 + 2CN \cdot AN = 2CN(CN + AN),$$

або $CM^2 = 2CN \cdot AC.$ (4)

Розділимо почленно рівність (2) на рівність (4)

$$\frac{BM^2}{CM^2} = \frac{BN \cdot BC}{2CN \cdot AC}.$$

Останню рівність помножимо на рівність (1)

$$\frac{BM^2 \cdot CM}{CM^2 \cdot BM} = \frac{BN \cdot BC \cdot CN}{2CN \cdot AC \cdot BN}.$$

Маємо: $BM : CM = BC : 2 AC.$

Оскільки точки B і C задані, то задане співвідношення $BM : CM$ (коло Аполлонія) і точка M лежить на перетині прямої AX і кола Аполлонія.

Задача 10-2. На колі задані три різні точки № 74 A, B і C . Побудуйте на колі четверту точку D так, щоб у побудований чотирикутник можна було вписати коло.

Розв'язання

Розглянемо опуклий чотирикутник $ABDC$ (рис. 2). У такий чотирикутник можна вписати коло, якщо

$$AB + DC = AC + BD. \quad (1)$$

Оскільки $\angle BAC = A$, то

$$\angle BDC = 180^\circ - A,$$

і розв'язання задачі зводиться до побудови трикутника BCD за кутом $180^\circ - A$, $BC = a$ і різницею $BD - DC$ (із рівності (1) випливає, що ця різниця задана).

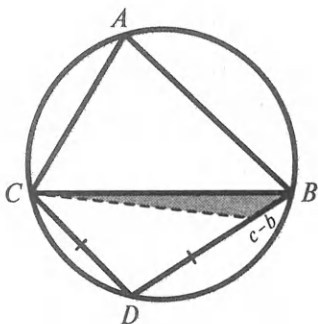


Рис. 2

Задача 10-3. Побудувати трикутник за бісектрисою l_a , кутом $\angle AL_1B$ і відношенням сторін $AB:AC = m:n$; використавши це, розв'язати задачу про кут і пряму Ейлера.

Розв'язання

Довільний відрізок B_1C_1 точкою (назвемо її L_1) ділимо внутрішнім чином у відношенні $m:n$ (рис. 3): $C_1L_1:L_1B_1 = m:n$. Точкою D ділимо відрізок B_1C_1 у відношенні $m:n$ зовнішнім чином. На відрізку L_1D , як на діаметрі, будемо коло Аполлонія. З точки L_1 під кутом $\varphi = \angle AL_1B$ проведемо промінь, який перетне коло Аполлонія у точці A_1 .

На прямій L_1A_1 відкладемо відрізок L_1A і проведемо прямі $AB \parallel A_1B_1$ і $AC \parallel A_1C_1$, отримаємо шуканий трикутник ABC .

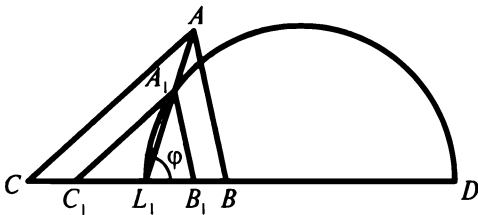


Рис. 3

Перейдемо до задачі про кут BAC і пряму Ейлера: відновити трикутник за кутом і прямою Ейлера (l_E).

Припустимо, що бісектриса l_a перетинає пряму Ейлера у точці K (рис. 4). Нехай H — ортоцентр трикутника ABC .

Але $\angle HAK = \angle KAO$, отже,

$$\frac{HK}{KO} = \frac{AH}{AO} = \frac{2R|\cos A|}{R} = 2|\cos A|.$$

Оскільки кут A задано, то, як ми могли пересвідчитися, задане співвідношення $HK:KO$. Оскільки відрізок AK відомий, то за допомогою кола Аполлонія можна побудувати $\triangle AHO$, а отже, і центр O , і радіус R . Залишається провести з точки O коло радіуса R і отримати точки B і C .

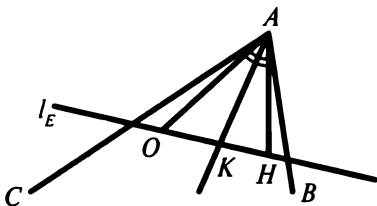


Рис. 4

Задача 10-4 (задача Паппа). Побудувати три- кутник за a, A, l_a^1 . № 76

Розв'язання

Опишемо на стороні BC дугу сегмента, який вміщує кут A , і доповнимо його до кола (рис. 5). Продовжимо бісектрису AL_1 до перетину з цим колом у точці W_1 .

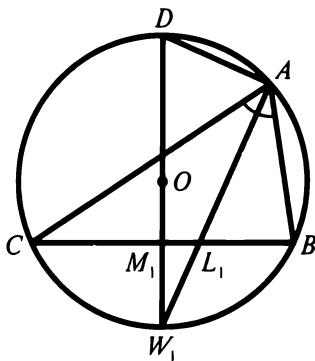


Рис. 5

¹ Задача зустрічається у вигляді: побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і бісектрисою прямого кута.

Відрізок W_1M_1 — заданий. Позначимо $W_1M_1 = t$. Проведемо діаметр W_1D . Прямокутні трикутники $W_1M_1L_1$ і W_1AD подібні:

$$\frac{W_1L_1}{W_1D} = \frac{W_1M_1}{W_1A}, \text{ або } \frac{x}{d} = \frac{t}{l_a + x}$$

($W_1L_1 = x$, $W_1D_1 = d$). Маємо:

$$x^2 + xl_a - dt = 0;$$

$$x = -\frac{1}{2}l_a + \sqrt{\frac{l_a^2}{4} + dt}.$$

Із точки W_1 проводимо дугу $l_a + x$, отримуємо точку A .

№ 77 Задача 10-5 (математична олімпіада МФТІ). Побудувати трикутник ABC за кутом A , медіаною m_a , бісектрисою l_a .

Розв'язання

Припустимо, що трикутник ABC побудований (рис. 6). Подвоїмо сторону AC . Отримаємо точку D : $BD = 2m_a$. Проведемо бісектрису AE кута BAD . Нехай L_1 — точка перетину бісектриси кута BAC із прямою BC .

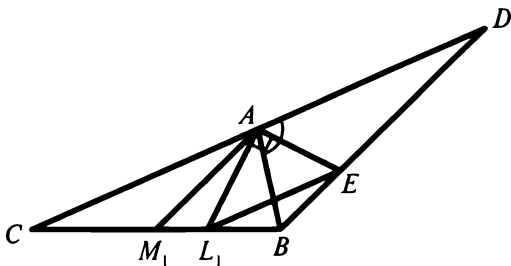


Рис. 6

Доведемо, що

$$\angle AL_1E = \frac{1}{2} A.$$

Дійсно, $L_1E \parallel DC$, так як

$$\begin{aligned} CL_1 : L_1B &= AC : AB, \\ AD : AB &= DE : EB. \end{aligned} \quad (1)$$

Але $AD = AC$, тому вираз (1) запишеться так:

$$AC : AB = DE : EB = CL_1 : L_1B,$$

отже, $L_1E \parallel DC$. Враховуючи, що

$$\angle CAL_1 = \angle AL_1E = \frac{1}{2} A,$$

стверджуємо, що трикутник AL_1E — базисний, його можна побудувати за катетом AL_1 і кутом AL_1E .

Розглянемо «незвичайний» базисний трикутник: $\triangle DAB$. Його можна побудувати за стороною, протилежним кутом і бісектрисою цього кута (задача Паппа!). Після побудови трикутника DAB будемо трикутник ABC .

№ 78 **Задача 10-6.** Побудувати трикутник ABC за кутом A , бісектрисою l_a і периметром $2p$.

Розв'язання

Припустимо, що трикутник ABC побудований (рис. 7). Побудуємо зовнівписане коло, яке дотикається сторони BC , I_a — його центр, T_1 і T_2 точки дотику прямих AC і AB . За властивістю зовнівписаного кола $AT_1 = AT_2 = p$.

На сторонах кута BAC відкладаємо відрізки AT_1 і AT_2 , будемо коло, яке дотикається сторін кута у точках T_1 і T_2 . На бісектрисі кута BAC відкладаємо відрізок AL_1 , рівний l_a і проводимо дотичну через точку L_1 .

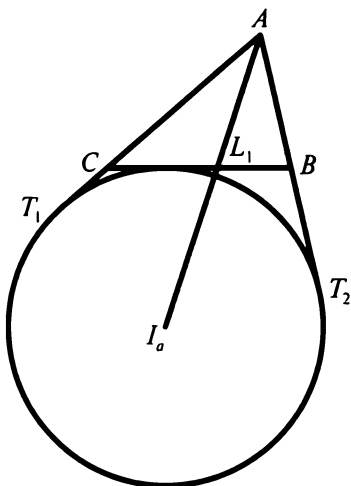


Рис. 7

Задача 10-7. Побудувати трикутник ABC за № 79 сторонами AC і AB та відрізком AI (I — інцентр).

Розв'язання

Припустимо, трикутник ABC побудований (рис. 8). Продовжимо відрізок AI до центра I_a зовнішнього кола, яке дотикається сторони BC .

Розв'язання

«Переформулюємо» задачу: навколо трикутника MNP описати трикутник ABC .

Оскільки довжина відрізка PN задана (рис. 9) і заданий кут NBP , то на відрізку PN можна побудувати сегмент, який вміщує кут ABC і доповнити його до кола γ_1 . Аналогічно можна побудувати на відрізку MN сегмент, який вміщує кут BAC і доповнити його до кола γ_2 .

Тепер задана задача звелася до задачі: через спільну точку N двох кіл, що перетинаються, провести січну так, щоб її відрізок AB , який належить кругам, був заданої довжини (розв'язати самостійно).

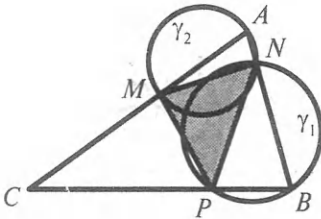


Рис. 9

№ 81 **Задача 10-9.** Точка перетину діагоналей O опуклого чотирикутника $ABCD$ проектується на сторони. За цими точками відновити чотирикутник $ABCD$.

Розв'язання

Позначимо A_1, B_1, C_1, D_1 проєкції точки O на сторони чотирикутника $ABCD$ (рис. 10). Доведемо, що

$$\angle D_1OB_1 = \frac{180^\circ - \angle B_1C_1D_1 - \angle D_1A_1B_1}{2} = \varphi_1. \quad (*)$$

Позначимо T точку перетину прямих AD і BC . Із чотирикутника D_1OB_1T :

$$\angle D_1OB_1 = 180^\circ - \angle BTA.$$

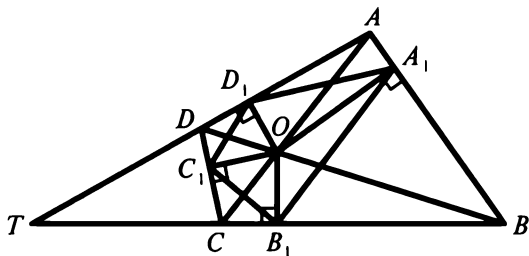


Рис. 10

Із $\triangle ATC$ (зовнішній кут BCA):

$$\angle BTA = \angle BCA - \angle CAT. \quad (1)$$

Із $\triangle BDT$ (зовнішній кут ADB):

$$\angle BTA = \angle ADB - \angle DBT. \quad (2)$$

Складемо (1) і (2), отримаємо:

$$\begin{aligned} \angle BTA = \\ = \frac{\angle BCA + \angle ADB - (\angle CAT + \angle DBT)}{2}. \end{aligned}$$

Оскільки навколо чотирикутника OB_1CC_1 можна описати коло, то $\angle BCA = \angle B_1C_1O$, а $\angle ADB = \angle D_1C_1O$. Сума кутів B_1C_1O і D_1C_1O дасть кут C_1 . Аналогічно доводиться, що сума кутів CAT і DBT дає кут A_1 . Формула (*) доведена. Аналогічно знаходимо кути $\angle A_1OC_1$ та ін.

Тепер побудова очевидна: сполучимо точки A_1, B_1, C_1 і D_1 . На діагоналях цього чотирикутника будуюмо сегменти, як, наприклад, на B_1D_1 будуюмо сегмент, що вміщує кут φ_1 . Точку перетину сегментів (точку O) сполучаємо з точками A_1, B_1, C_1, D_1 і проводимо $AB \perp A_1O$. Чотирикутник $ABCD$ — шуканий і $AD \perp D_1O$, $BC \perp B_1O$, $CD \perp C_1O$.

№ 82 **Задача 10-10.** Побудувати трапецію за двома кутами при основі і двома діагоналями.

Розв'язання

Нехай трапеція $ABCD$ побудована (рис. 11). Зробимо паралельне перенесення у точку C сторони AB і діагоналі BD у точку C . Розглянемо трикутник CFD ($CF \parallel AB$, $\angle CFD = \angle BAD$). Медіана CM цього трикутника буде медіаною трикутника ACE , так як $AF = BC = DE$.

Трикутник CFD можна побудувати з точністю до подібності і в ньому знайти кут φ між медіаною і стороною. Тепер залишається побудувати трикутник ACE за сторонами AC і AE і кутом φ між медіаною CM і стороною AE .

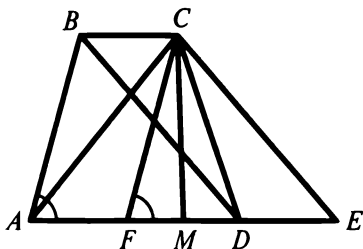


Рис. 11

11

ПОВОРОТ

№ 83 **Задача 11-1.** Задані три паралельні прямі a, b і c . Побудувати рівносторонній трикутник ABC , вершини якого лежать на даних прямих.

Розв'язання

Припустимо, що трикутник ABC побудований (рис. 1). Так як $AB = AC$ і кут BAC дорівнює 60° , то точка C може бути отримана поворотом точки B на 60° (проти руху годинникової стрілки) з центром повороту — точкою A . Зауважимо, що точка B належить прямій b . Тому точка C , яку можна отримати з точки B при повороті повинна належати прямій b' , яку можна отримати з прямої b поворотом навколо A на 60° . Крім того, точка C лежить на прямій c . Тому C є точкою перетину прямих b' і c .

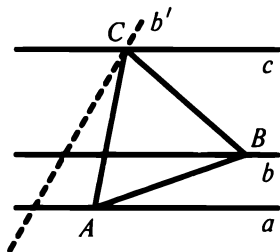


Рис. 1

Задача 11-2. Задані два концентричних № 84
кола. Побудувати квадрат так, щоб його дві
суміжні вершини лежали на одному колі,
а дві інші — на іншому.

Розв'язання

Нехай γ_1 і γ_2 — задані кола (рис. 2). Нехай
вершини A і B квадрата $ABCD$ належать колу
 γ_2 . Тоді якщо точку B повернути навколо точ-
ки A на 90° , то отримаємо точку D . Тому вер-
шина D знаходиться як точка перетину кола
 γ_1 і образу кола γ_2 при повороті на 90° навколо
центра A .

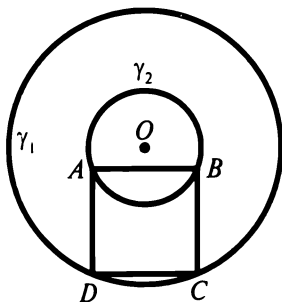


Рис. 2

№ 85 **Задача 11-3.** У даний квадрат вписати рівносторонній трикутник так, щоб одна з його вершин збігалася з точкою M на стороні квадрата.

Розв'язання

Нехай рівносторонній трикутник KEM побудований (рис. 3). Оскільки всі кути трикутника дорівнюють 60° , то якщо повернути сторону KM навколо точки M на 60° , точка K збігатиметься з точкою E . Оскільки точка K належить стороні AB , то при повороті сторони квадрата AB навколо точки M теж на 60° точка K буде збігатися з точкою перетину образу AB і сторони BC .

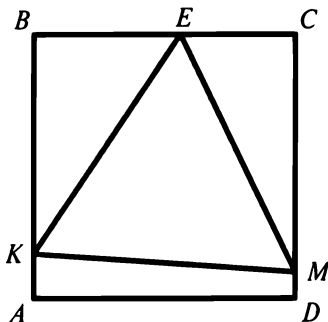


Рис. 3

Задача 11-4. Побудувати коло з центром № 86 у даній точці так, щоб одна з його дуг, які відсікаються двома даними колами, мала задану кутову величину α .

Розв'язання

Нехай коло ω із заданим центром O — шукане, а точки A і B — точки перетину цього кола із заданими γ_1 і γ_2 (рис. 4). Оскільки $OA = OB$ і кут AOB дорівнює α , то шукане коло можна отримати поворотом кола γ_1 (або γ_2) навколо точки O на кут α : $B = R_O^\alpha(\gamma_1) \cap \gamma_2$.

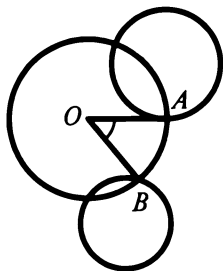


Рис. 4

Задача 11-5. Побудувати правильний шес- № 87 тикутник, центром якого є точка O , а дві суміжні сторони (або їх продовження) проходять через задані точки M_1 і M_2 .

Розв'язання

Нехай точка M_1 належить прямій AB , а точка M_2 — прямій BC (рис. 5). Оскільки відрізки AO та BO рівні і $\angle AOB = 60^\circ$, зробимо поворот прямої BC із центром у точці O на 60° .

Тоді точка M_2 перейде у точку M_3 , тим самим точками M_1 і M_3 визначимо пряму AB . Враховуючи, що $\angle ABC$ дорівнює 120° , проведемо під цим кутом через точку M_2 пряму BC .

Таким чином, визначимо вершину B , а потім і сам шестикутник.

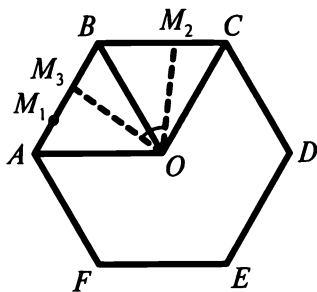


Рис. 5

Задача 11-6. Побудувати квадрат, центр якого знаходиться у точці O , а кінці однієї зі сторін віддалені від даної точки M відповідно на a і b .

Розв'язання

Припустимо, що квадрат побудований (рис. 6). Оскільки $OA = OB$ і $\angle AOB = 90^\circ$, то можна виконати поворот трикутника MAV навколо точки O на 90° . Тоді точка M перейде у точку M_1 .

Оскільки $M_1A = MB$, то з точок M і M_1 січками радіуса a і b можна отримати вершину A квадрата, а потім побудувати і сам квадрат.

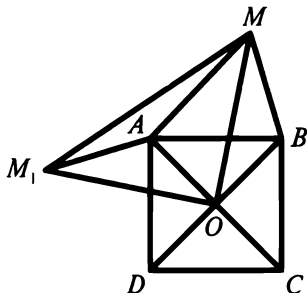


Рис. 6

№ 89 **Задача 11-7.** Побудувати рівносторонній трикутник з ортоцентром у заданій точці і двома вершинами на даному колі.

Розв'язання

Нехай ABC — шуканий трикутник з ортоцентром H (рис. 7), γ — задане коло. Оскільки $\angle BHC = 120^\circ$ і $HV = HC$ повернемо коло навколо точки H на цей кут. Отримаємо коло γ_1 , яке перетне коло γ в одній із шуканих точок.

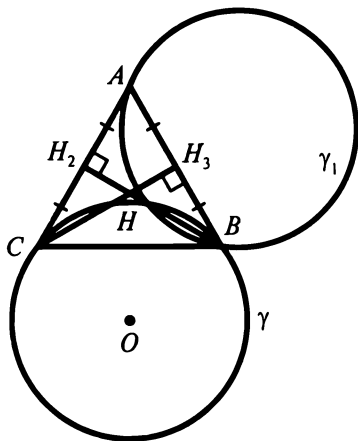


Рис. 7

12

**ЗАДАЧІ
НА МАКСИМУМ
І МІНІМУМ**

№ 90 **Задача 12-1.** Побудувати найменшу хорду круга, яку можна провести через задану точку, взяту всередині цього круга.

Розв'язання

Нехай точка P задана (рис. 1). Через цю точку проведемо хорду MN , перпендикулярну радіусу OA , і довільну хорду M_1N_1 . Опустивши перпендикуляр OP_1 на хорду M_1N_1 , отримаємо прямокутний трикутник OP_1P , у якого гіпотенуза OP більша за катет OP_1 , а тому $MN < M_1N_1$. Отже, шуканою хордою є та, яка перпендикулярна радіусу, який проходить через задану точку.

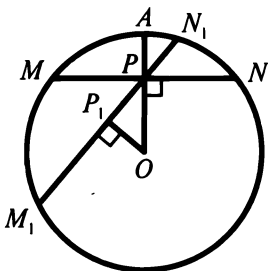


Рис. 1

Задача 12-2. На одній стороні гострого № 91 кута задані точки A і B . Побудуйте на іншій його стороні точку X , із якої відрізок AB видно під найбільшим кутом.

Розв'язання

Нехай MSN — заданий кут (рис. 2). Коло, яке проходить через точки A і B дотикається сторони MS у точці X . Кут AXB — шуканий. Дійсно, кут, наприклад, AX_1B менший за кут AXB , оскільки вимірюється різницею півдуг, які містяться між його сторонами. Знайти точку X можна завдяки рівності

$$SX^2 = SB \cdot SA.$$

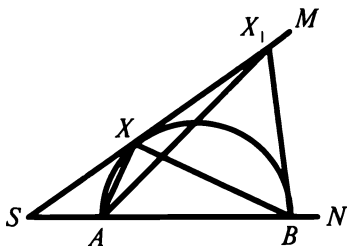


Рис. 2

- № 92 **Задача 12-3.** Задані кут MPN і точка X всередині нього. Проведіть через точку X пряму, яка відсікає від даного кута трикутник найменшої площі.

Розв'язання

Побудуємо кут $M'P'N'$, симетричний куту MPN відносно точки X (рис. 3). Позначимо точки перетину прямої l , яка проходить через точку X , зі сторонами кутів як A_1, A'_1, B_1, B'_1 . Так як $S_{PA_1B_1} = S_{P'A'_1B'_1}$, то

$$S_{PA_1B_1} = \frac{1}{2} (S_{PN'P'B} + S_{AA_1B'_1} + S_{A'_1B_1B}).$$

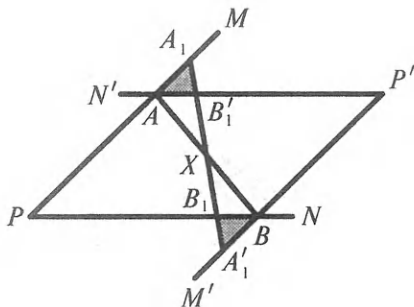


Рис. 3

Площа трикутника PA_1B_1 мінімальна, якщо A_1 збігається з A і B_1 збігається з B , тобто шукана пряма — AB .

Задача 12-4. Через задану точку T всере- № 93
дині круга провести дві взаємно перпендикулярні хорди AC і BD так, щоб площа чотирикутника $ABCD$ була найбільшою.

Розв'язання

Позначимо O — центр заданого кола γ (рис. 4), $OT = a$; S — площа чотирикутника $ABCD$. R — радіус кола,

$$OE \perp AC, \quad OF \perp BD, \quad OF = x.$$

Маємо:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2 DF \cdot CE.$$

Але:

$$DF = \sqrt{R^2 - x^2};$$

$$CE = \sqrt{R^2 - OE^2} = \sqrt{R^2 - (a^2 - x^2)};$$

$$S = 2\sqrt{(R^2 - x^2)(R^2 - a^2 + x^2)}.$$

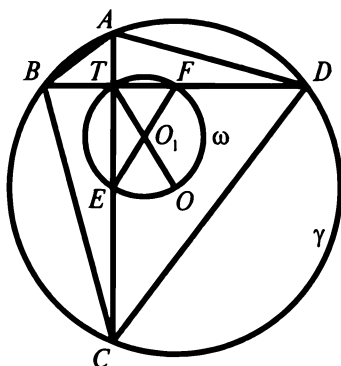


Рис. 4

Оскільки у добутку

$$(R^2 - x^2)(R^2 - a^2 + x^2)$$

сума множників дорівнює:

$$R^2 - x^2 + R^2 - a^2 + x^2 = 2R^2 - a^2,$$

тобто є сталою, вона досягає найбільшого значення при

$$R^2 - x^2 = R^2 - a^2 + x^2,$$

звідси $x^2 = \frac{a^2}{2}$; $x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, тобто $OF = FT$.

Отже, побудова відбувається наступним чином: описуємо коло ω з діаметром OT . Проводимо у колі ω діаметр, перпендикулярний до OT , — це й буде відрізок FE . Будуємо прямі TF і TE . Вони перетинають коло ω у точках B , D і A , C .

Задача 12-5. Всередині гострого кута зада- № 94
ні точки M і N . Побудуйте на сторонах кута точки K і L так, щоб периметр чотирикутника $MKLN$ був найменшим.

Розв'язання

Нехай M_1 і N_1 точки, симетричні точкам M і N відносно сторін кута ASB (рис. 5).

Відрізок M_1N_1 перетне ці сторони у точках K і L . Доведемо, що чотирикутник $MKLN$ — шуканий.

Дійсно, порівняємо його периметр M_1N_1 із периметром M_1UVN_1 чотирикутника $MUVN$, де U і V — довільні точки на сторонах кута. Очевидно, що довжина відрізка M_1N_1 менша довжини ламаної M_1UVN_1 .

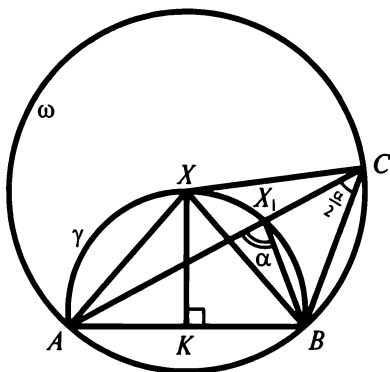


Рис. 6

Проведемо з точки X коло ω радіусом, рівним XB . Продовжимо AX_1 до перетину з колом ω у точці C . Маємо:

$$\begin{aligned} AX + XB &= AX + XC > & (1) \\ &> AC = AX_1 + X_1C. \end{aligned}$$

Нехай $\angle BX_1A = \alpha$. З трикутника BX_1C маємо:

$$\angle X_1CB = \frac{1}{2} \angle AX_1B = \frac{\alpha}{2}.$$

Оскільки кут AX_1B зовнішній у трикутнику CX_1B і $\angle ACB = \frac{\alpha}{2}$, то $\angle X_1BC = \frac{\alpha}{2}$ і трикутник CX_1B рівнобедрений:

$$CX_1 = X_1B. \quad (2)$$

Із (1) і (2) виведемо:

$$AX + XB > AC = AX_1 + X_1C,$$

що і треба було довести.

13

**Позиційні
ЗАДАЧІ**

№ 96 **Задача 13-1.** Побудувати трикутник за M_1 , M_2 і l_{a_x} — прямою, що містить бісектрису l_a .

Розв'язання

Аналіз показує, що якщо побудувати точку X , симетричну точці M_2 відносно прямої l_{a_x} , то вона буде належати стороні BC .

Враховуючи, що $AB \parallel M_1M_2$, можна отримати точку A (рис. 1).

Залишається побудувати відрізок, кінці якого лежать на сторонах кута BAC і M_1 — його середина.

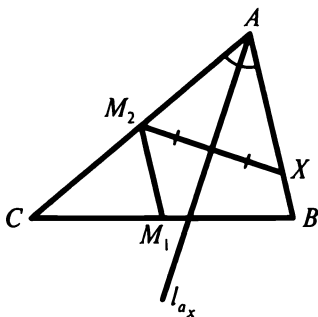


Рис. 1

№ 98 **Задача 13-3.** Побудувати трикутник ABC за точками H_2, H_3 — основами висот, проведених із вершин B і C та прямою h_{ax} , яка містить висоту h_a .

Розв'язання

Припустимо, що трикутник ABC побудований (рис. 3). Трикутник $H_1H_2H_3$ — ортоцентричний, в ньому бісектриса кута $H_2H_1H_3$ належить прямій h_{ax} .

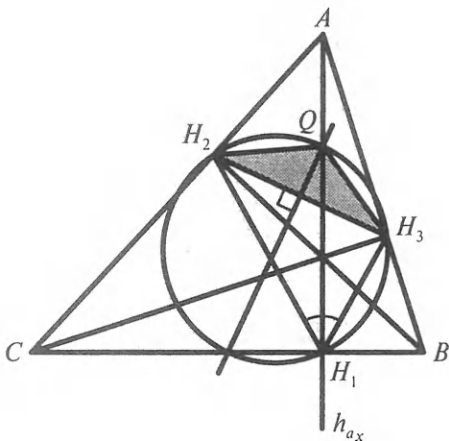


Рис. 3

Якщо до відрізка H_2H_3 провести серединний перпендикуляр, то він перетне пряму h_{a_x} у точці Q — аналог точки W для трикутника $H_1H_2H_3$.

Коло, описане навколо трикутника H_2QH_3 , буде описаним колом навколо ортоцентричного трикутника $H_1H_2H_3$, тобто точку H_1 — побудували.

Залишається побудувати трикутник ABC за основами висот H_1 , H_2 , H_3 . Пропонується зробити це самостійно.

Задача 13-4. Відновити трикутник ABC за № 99 вершиною A , ортоцентром H , основою бісектриси L_1 .

Розв'язання

Проведемо пряму AN (рис. 4). Із точки L_1 опустимо на цю пряму перпендикуляр; отримаємо точку H_1 . Побудуємо точку N_1 , симетричну H відносно точки H_1 . Відомо, що точка N_1 належить колу, описаному навколо трикутника ABC . Побудуємо центр O цього кола.

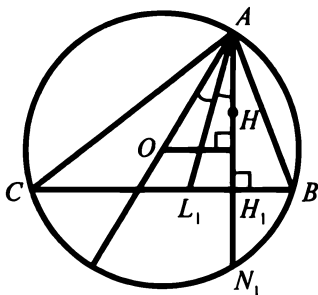


Рис. 4

Кут L_1AH можна побудувати. Він дорівнює куту OAL_1 (доведіть), отже, точка O — перетин прямої, яка складає з AL_1 кут, рівний L_1AH , і перпендикуляра, проведеного через середину відрізка AN_1 .

№ 100 **Задача 13-5.** Побудувати трикутник ABC за центром O описаного кола, інцентром I , центром I_a зовнішнього кола.

Розв'язання

Припустимо трикутник ABC побудований (рис. 5). Якщо відрізок II_0 розділити навпіл,

то отримаємо точку W_1 . Маючи точку O — отримаємо радіус R .

Будуємо описане навколо трикутника ABC коло. За теоремою «трилисника» знаходимо вершини B і C . Пряма W_1I перетне коло в точці A .

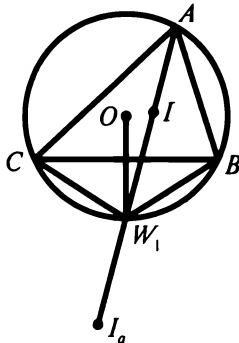


Рис. 5

Задача 13-6. Задані дві точки і пряма MN № 101 (точки прямій не належать). На прямій MN знайти таку точку X , щоб різниця кутів AXM і BXN дорівнювала даному куту φ .

Розв'язання

«Віроломність» задачі полягає у тому, що звичайно розв'язують задачу, коли дві точки (назвемо їх A і B) знаходяться в одній півплощині, у той час як задану задачу треба починати розв'язувати для випадку, коли точки A і B знаходяться з прямою MN у різних півплощинах,

а потім симетрією звести наступне розташування точок до попереднього.

Отже, розглянемо перший випадок: точки A і B знаходяться у різних півплощинах (рис. 6).

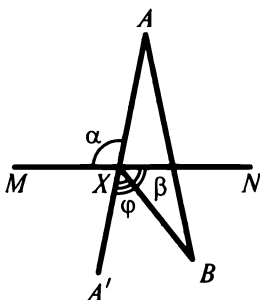


Рис. 6

Нехай $\angle AXM = \alpha$, $\angle BXN = \beta$. Аналіз показує, що якщо провести пряму AXA' , то $\angle A'XN$ дорівнюватиме α , $\angle BXA' = \alpha - \beta = \varphi$. Тоді $\angle AXB = 180^\circ - \varphi$.

Побудова: будуємо на відрізку AB сегмент, що вміщує кут $180^\circ - \varphi$, який перетне MN у точці X .

Розглянемо другий випадок: точки A і B в одній півплощині (рис. 7).

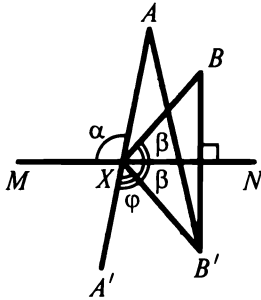


Рис. 7

Будуємо точку B' , симетричну точці B відносно прямої MN . Тоді $\angle NXB' = \beta$ і $\angle B'XA'$ дорівнює ϕ , а $\angle AXB'$ дорівнює $180^\circ - \phi$. Звідси побудова: на відрізку AB' будуємо сегмент, який вміщує кут $180^\circ - \phi$. Його перетин із прямою MN дає точку X .

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Александров И. И. *Сборник геометрических задач на построение*. — Москва: Учпедгиз, 1950. — 175 с.
2. Боравльов А. П., Ленчук І. Г. *Аналіз у розв'язуванні задач на побудову*. — К.: Вища школа, 2002. — 191 с.
3. Готман Э. Г. *Задачи по планиметрии и методы их решений*. — Москва: Просвещение, 1996. — 238 с.

4. Кушнір І. А. *Геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників.* — К.: Факт, 2002. — 112 с.

5. Кушнір І. А. *Методи розв'язання задач з геометрії.* — К.: Абрис, 1994. — 460 с.

6. Кушнір І. А. *Треугольник и тетраэдр в задачах.* — К.: Факт, 2004. — 336 с.

7. Кушнір І. А. *Возвращение утраченной геометрии.* — К.: Факт, 2004. — 328 с.

8. Кушнір І. А. *Триумф школьной геометрии.* — К.: Наш час, 2005. — 431 с.

9. Петечук В. М. *Геометрія для 8 класу з поглибленим вивченням математики.* — Ужгород, 1992. — 125 с.

10. Понарин Я. П., Скопец З. А. *Перемещения и подобия плоскости.* — К.: Радянська школа, 1981.

11. Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии: Ч. I, II.* — Москва: Наука, 1991. — 240 с.

12. Пржевальский Е. *Собрание геометрических теоремъ.* — Москва, 1901. — 376 с.

ЗМІСТ

1. Застосування деяких теорем геометрії трикутника	11
2. Підвищення складності.	25
3. Побудова в трикутнику	35
4. Побудова кола	51
5. Побудови у колі	59
6. Побудова за допомогою допоміжного кола.	71
7. Два і більше кола	81
8. Застосування формул	91
9. Сегмент, який вміщує даний кут . . .	101
10. Десять елітних задач	109
11. Поворот	125
12. Задачі на максимум і мінімум.	133
13. Позиційні задачі	143

К 96 **Кушнір, Ісаак**
101 задача на побудову. — К.: Факт,
2007. — 156 с.

ISBN 966-359-136-6

Запропоновано сто одну найкращу, на думку автора, задачу на побудову. Представлені основні типи таких задач і методи розв'язань: базисні трикутники, сегмент, який вміщує даний кут, перетворення, а також застосування спеціальних теорем планіметрії. У книзі розглянуто також позиційні задачі.

Розрахована на учнів 7—11-х класів, студентів, учителів.

УДК 514
ББК 22.151

Науково-методичне видання

Ісаак КУШНІР
101 ЗАДАЧА НА ПОБУДОВУ

Редактор *Леонід Фінкельштейн*
Технічний редактор *Оксана Кравцова*
Коректор *Дарія Шарговська*
Макетування обкладинки
Інокентія Вирового
Верстка та макетування
Дмитра Фінкельштейна

Здано до виробництва 17.10.2006. Підписано до друку 16.01.2007. Формат 60×84 1/32. Папір офсетний № 1. Гарнітура «Ньютон». Друк офсетний. Ум. друк. арк. 4,55. Обл.-вид. арк. 5,3. Наклад 2000 прим. Зам. № 7-46

ТОВ «Видавництво „Факт“»
04080, Україна, Київ-80, а/с 76
Реєстраційне свідоцтво
ДК № 1284 від 19.03.2003
Тел./факс: (044) 287 1882, 287 1886
E-mail: office@fact.kiev.ua
Відділ збуту: (044) 463 6887
E-mail: sbyt@fact.kiev.ua
www.fact.kiev.ua

Надруковано з готових форм на ЗАТ «ВІПОЛ»
03151, Київ, вул. Волинська, 60
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 752 від 27.12.2001

