Ісаак Кушнір

101 задача

Рівняння

І. Кушнір

101 ЗАДАЧА: РІВНЯННЯ

ФАКТ
ВИДАВНИЦТВО

Київ · 2007

УДК 514
ББК 22.151
К 96

ISBN 978-966-359-169-8

ПЕРЕДМОВА

Вибрати з безлічі рівнянь сто одне — нелегко. Але цікаво. Кожне з них — це, по-перше, окремо взяте маленьке життя, а по-друге — математика. Математика у кращих її проявах і традиціях. Це красивий неординарний хід розв'язання і знання типів рівнянь, це нестандарт, який після багатьох років став стандартом, і стандартний, але, тим не менш, несподіваний підхід до нестандартного на вигляд рівняння — все це зібрано у цій невеликій книзі: «макросвіт — у мікрокнизі». Будемо насолоджуватись і вчитись: рівняння — одна з головних тем, що пронизують не тільки шкільну й абітурієнтську математику. Згодиться!

І. НЕ РОЗВ'ЯЗУЮЧИ — РОЗВ'ЯЖИ!

Задача 1. Розв`язати рівняння **№ 1**

$$\sqrt[4]{2x-4}+\sqrt[3]{x+6}=2-\sqrt{2-x}.$$

Розв'язання

Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x-4\ge 0 \\ 2-x\ge 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x\ge 2 \\ x\le 2 \end{cases}, \quad x=2.$$

Перевірка показує, що $x=2$ — корінь рівняння.

Відповідь. 2.

№ 2 **Задача 2.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{10x+5}=8.$$

Розв'язання

Очевидно, що $x \ge 6$, а отже, ліва частина рівняння більша за $\sqrt{65}>8$.

Відповідь. $\varnothing$.

№ 3 **Задача 3.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-8x+12}+\sqrt{5-x}=\sqrt{3}.$$

Розв'язання

Оскільки

$$\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x^2-8x+12 \ge 0, \\ 5-x \ge 0 \end{cases} \quad \text{то} \quad \begin{cases} x \ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 \ge 6 \\ x_2 \le 2 \end{array}\right., \\ x \le 5 \end{cases}$$

отже, $x=2$.

Відповідь. 2.

№ 4 **Задача 4.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt[6]{x^2-81}+\sqrt[6]{81-x^2}+\sqrt[3]{x^2-54}=3.$$

Розв'язання

Маємо

$$\begin{cases} x^2-81\ge 0 \\ 81-x^2\ge 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} |x|\ge 9 \\ |x|\le 9 \end{cases}.$$

Таким чином, область визначення рівняння складається з двох чисел: $x_1=-9$ та $x_2=9$.

Перевірка показує, що вони обидва задовольняють вихідне рівняння.

Відповідь. -9; 9.

Задача 5. Розв'язати рівняння **№ 5**

$$\sqrt[3]{x+\frac{1}{x}}=\sqrt[4]{-x}+1.$$

Розв'язання

Областю визначення рівняння є $x<0$. Але при $x<0$

$$x+\frac{1}{x}<0, \quad \text{проте} \quad \sqrt[4]{-x}+1>0$$

отже, рівняння розв'язків не має.

Відповідь. $\varnothing$.

№ 6 **Задача 6.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{(x-1)^2(x-4)}=|x-2|\sqrt{16-x^2}.$$

Розв'язання

Знаходимо ОДЗ рівняння

$$\begin{cases}(x-1)^2(x-4)\geq 0\\ 16-x^2\geq 0\end{cases},$$

звідки $x_1=1$, $x_2=4$.

Перевірка показує, що тільки друге число є коренем рівняння.

Відповідь. 4.

№ 7 **Задача 7.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2-x}=\log_5(x-2).$$

Розв'язання

Знаходимо ОДЗ рівняння

$$\begin{cases}2-x\geq 0\\ x-2>0\end{cases},$$

тобто $x\in\varnothing$.

Відповідь. $\varnothing$.

Задача 8. Розв'язати рівняння **№ 8**

$$\sqrt{x+2-\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+5}=2.$$

Розв'язання

Маємо

$$\sqrt{x+2-\sqrt{x+2}}=2-\sqrt{x+5}.$$

Знайдемо ОДЗ

$$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x+5\geq 0 \\ x+2\geq\sqrt{x+2}, \\ 2\geq\sqrt{x+5} \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq -2 \\ x\geq -5 \\ x^2+3x+2\geq 0 \\ x+5\leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -2 \\ x\geq -5 \\ \left[\begin{array}{l} x\geq -1, \\ x\leq -2 \end{array}\right. \quad x_1=-1,\, x_2=-2. \\ x\leq -1 \end{cases}$$

Легко бачити, що лише $x=-1$ — корінь вихідного рівняння.

Відповідь. –1.

№ 9 **Задача 9.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{9-x^2}-\log_3(|x|-3)=0.$$

Розв'язання

Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} 9-x^2 \ge 0 \\ |x|-3>0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 \le 9 \\ |x|>3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} |x| \le 3 \\ |x|>3 \end{cases}, \quad x \in \varnothing.$$

Відповідь. $\varnothing$.

II. ДОБРОГО ДНЯ, ПАНЕ ГОРНЕР!

Задача 1. Розв'язати рівняння **№ 10**

$$\sqrt{x}+\frac{2x+1}{x+2}=2.$$

Розв'язання

Оскільки

$$\sqrt{x}=2-\frac{2x+1}{x+2}, \quad \text{або} \quad \sqrt{x}=\frac{3}{x+2},$$

то $x \geq 0$.

Підвівши обидві частини рівняння до квадрату, отримаємо

$$x^3+4x^2+4x-9=0.$$

Оскільки $x=1$ є коренем рівняння, то можна застосувати схему Горнера:

1	4	4	−9	1
1	5	9	0	

Звідси

$$x^2+5x+9=0\ (D<0),$$

отже, $x=1$ — єдиний розв'язок.

Відповідь. 1.

№ 11 **Задача 2.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^3+x^2-1}=3-\sqrt{x^3+x^2+2}.$$

Розв'язання

Зробимо заміну $x^3+x^2-1=y\geq 0$, звідки

$$\sqrt{y}=3-\sqrt{y+3}.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату, отримаємо:

$$y=9+y+3-6\sqrt{y+3},$$

$$\sqrt{y+3}=2,\quad y=1.$$

Отже,

$$x^3 + x^2 - 2 = 0.$$

Оскільки $x = 1$ є коренем рівняння, то можна застосувати схему Горнера:

1	1	0	−2	1
1	2	2	0	

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \ (D < 0), \text{ отже, } x = 1.$$

Відповідь. 1.

Задача 3. Розв'язати рівняння **№ 12**

$$\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)^3 + 2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)^2 = 3.$$

Розв'язання

Замінивши $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = y$, маємо

$$y^3 + 2y^2 - 3 = 0.$$

$y = 1$ є коренем; за схемою Горнера маємо:

1	2	0	−3	1
1	3	3	0	

$$y^2+3y+3=0\ (D<0).$$

Отже,

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=1.$$

ОДЗ: $x\geq 0$, тоді

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\geq 1$$

(див. попередній розділ), причому рівність досягається лише при $x=0$.

Відповідь. 0.

№ 13 **Задача 4.** Розв'язати рівняння

$$6x^4-11x^3+12x^2-6x+1=0.$$

Розв'язання

Задане рівняння зробимо зведеним. З цією метою помножимо обидві частини рівняння на 6^3. Дістанемо

$$6^4x^4-11\cdot 6^3x^3+72\cdot 6^2x^2-216\cdot 6x+216=0.$$

Зробимо заміну

$$y=6x.$$

Тоді

$$y^4-11y^3+72y^2-216y+216=0.$$

Підбором знаходимо $y_1 = 2$. За схемою Горнера:

1	−11	72	−216	216	2
1	−9	54	−108	0	

$$y^3 - 9y^2 + 54y - 108 = 0.$$

Підбором знаходимо $y_2 = 3$. За схемою Горнера:

1	−9	54	−108	3
1	−6	36	0	

$$y^2 - 6y + 36 = 0 \ (D < 0).$$

Отже,

$$6x = 2 \quad \text{або} \quad 6x = 3.$$

Відповідь. $\frac{1}{3}; \frac{1}{2}$.

Задача 5. Розв'язати рівняння № 14

$$\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0.$$

Розв'язання

Маємо

$$\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2},$$

звідки маємо ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 3x+2\geq 0 \end{cases}, \quad x\geq -\frac{2}{3}.$$

Піднесши обидві частини рівняння до шостого степеня, маємо

$$(x+2)^3=(3x+2)^2,$$

звідки

$$x^3-3x^2+4=0.$$

Підбором знаходимо $x_1=-1$ (проте цей корінь не задовольняє ОДЗ). За схемою Горнера:

1	−3	0	4	−1
1	−4	4	0	

$$x^2-4x+4=0,$$

маємо $x_{2,3}=2$.

Відповідь. 2.

Задача 6. Розв'язати рівняння **№ 15**

$$\left(\sin 2x + \cos 2x\right)\sqrt{2} = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x.$$

Розв'язання

Оскільки

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\sin 2x \cos 2x},$$

то, зробивши заміну

$$\sin 2x + \cos 2x = t,$$

отримаємо:

$$t\sqrt{2} = \frac{2}{t^2 - 1},$$

звідки

$$\sqrt{2}t^3 - \sqrt{2}t - 2 = 0.$$

Очевидно, що $t_1 = \sqrt{2}$. Застосуємо схему Горнера:

$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0	

$$\sqrt{2}t^2 + 2t + \sqrt{2} = 0 \ (D < 0).$$

Отже,

$$t=\sqrt{2},$$

звідси

$$\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2},$$

$$\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x=\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

III. ЗАДАЧІ-«РОЗКЛАДУШКИ»

Задача 1. Розв'язати рівняння **№ 16**

$$2x\sqrt{x}-4x-\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+3}=0.$$

Розв'язання

Маємо

$$2x\left(\sqrt{x}-2\right)-\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x}-2\right)=0;$$

$$\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2x-\sqrt{x+3}\right)=0;$$

$$x=4 \quad \text{або} \quad \begin{cases} 4x^2=x+3 \\ x\geq 0 \end{cases}.$$

Відповідь. 4; 1.

№ 17 **Задача 2.** Розв'язати рівняння

$$2^x - 3^x = \sqrt{6^x - 9^x}.$$

Розв'язання

$$2^x - 3^x - \sqrt{3^x\left(2^x - 3^x\right)} = 0;$$

$$\sqrt{2^x - 3^x}\left(\sqrt{2^x - 3^x} - \sqrt{3^x}\right) = 0;$$

$$2^x = 3^x \quad \text{або} \quad 2^x = 2 \cdot 3^x;$$

$$x = 0 \quad \text{або} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,\ x = \log_{\frac{2}{3}} 2 = \frac{1}{\log_2 \frac{2}{3}}.$$

Відповідь. $0;\ \dfrac{1}{1 - \log_2 3}$.

№ 18 **Задача 3.** Розв'язати рівняння

$$x^4 - 8x + 63 = 0.$$

Розв'язання

Перетворимо ліву частину рівняння:

$$x^4 - 8x + 63 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2 - 8x - 1 =$$
$$= (x^2 + 8)^2 - (4x + 1)^2 = (x^2 + 4x + 9)(x^2 - 4x + 7).$$

Відповідь. $\varnothing$.

Задача 4. Розв'язати рівняння **№ 19**

$$\sqrt{2x^2-9x+4}+3\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x^2+21x-11}.$$

Розв'язання

Розкладемо на множники підкореневі вирази, маємо:

$$\sqrt{(2x-1)(x-4)}+3\sqrt{2x-1}-\sqrt{(2x-1)(x+11)}=0,$$

звідки

$$\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{x-4}+3-\sqrt{x+11}\right)=0;$$

$$2x-1=0;\quad x=\frac{1}{2}$$

або

$$\sqrt{x-4}+3=\sqrt{x+11};$$

$$\begin{cases} x\ge 4 \\ x-4+9+6\sqrt{x-4}=x+11 \end{cases};\quad x=5$$

Відповідь. $\frac{1}{2}$; 5.

Задача 5. Розв'язати рівняння **№ 20**

$$\sin^5 x-\cos^5 x=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}.$$

Розв'язання

Використаємо рівність

$$a^5-b^5=(a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right).$$

Звідси

$$(\sin x-\cos x)\left(\sin^4 x+\sin^3 x\cos x+\right.$$
$$\left.+\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos^3 x+\cos^4 x\right)=$$
$$=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x\cos x},$$

а отже, або

$$\sin x=\cos x,\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$$

або вираз у других дужках дорівнює $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$.

Покладемо $y=\sin x\cos x$, тоді

$$y\left(\sin^4 x+\cos^4 x+y\sin^2 x+y\cos^2 x+y^2\right)=1;$$
$$y\left(\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2y^2+y\cdot 1+y^2\right)=1;$$
$$y\left(1-y^2+y\right)=1;\quad y^3-y^2-y+1=0;$$
$$y^2(y-1)-(y-1)=0;\quad (y-1)^2(y+1)=0.$$

Тобто $y=\pm 1$, звідки

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2y = \pm 2,$$

що неможливо.

Відповідь. $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Задача 6. Розв'язати рівняння **№ 21**

$$3\operatorname{tg}3x-4\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}^2 2x\cdot\operatorname{tg}3x.$$

Розв'язання

Використаємо рівність

$$\operatorname{tg}3x=\frac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}x}.$$

Маємо

$$3\cdot\frac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}x}-4\operatorname{tg}2x=$$

$$=\operatorname{tg}^2 2x\cdot\frac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}x},$$

звідки при $\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}x\neq 1$ дістанемо

$$3\operatorname{tg}2x+3\operatorname{tg}x-4\operatorname{tg}2x+4\operatorname{tg}^2 2x\cdot\operatorname{tg}x=$$

$$=\operatorname{tg}^3 2x+\operatorname{tg}^2 2x\cdot\operatorname{tg}x;$$

$$\operatorname{tg}^3 2x - 3\operatorname{tg}^2 2x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} x = 0;$$

$$\left(\operatorname{tg}^2 2x + 1\right)\left(\operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} x\right) = 0.$$

Отже,

$$\begin{cases} \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = 3\operatorname{tg} x \\ \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \neq 1 \end{cases}.$$

Звідси

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x\left(3\operatorname{tg}^2 x - 1\right) = 0 \\ \operatorname{tg} x \neq \pm 1 \\ 3\operatorname{tg}^2 x \neq 1 \end{cases};$$

$$\operatorname{tg} x = 0.$$

Відповідь. $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

№ 22 **Задача 7.** Розв'язати рівняння

$$2\cos^2 2x - 1 = \cos^2 3x.$$

Розв'язання

Використаємо формули пониження степеня та потрійного кута:

$$\cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2} = \frac{1+4\cos^3 2x - 3\cos 2x}{2}.$$

Звідси

$$4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x - 3\cos 2x + 3 = 0;$$

$$(\cos 2x - 1)\left(4\cos^2 2x - 3\right) = 0;$$

$$(\cos 2x - 1)(2\cos 4x - 1) = 0.$$

Відповідь. $\pi n;\ \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2};\ n, k \in \mathbb{Z}.$

IV. СПАДАЄ? ЗРОСТАЄ!

№ 23 **Задача 1.** Розв'язати рівняння

$$2^x = 3 - x.$$

Розв'язання

Один корінь

$$x = 1$$

легко знаходиться підбором. Оскільки

$$f(x) = 2^x$$

зростає, а

$$g(x) = 3 - x$$

спадає, то інших коренів немає.

Відповідь. 1.

Задача 2. Розв'язати рівняння **№ 24**

$$4^x - 3^x = 1.$$

Розв'язання

Задане рівняння запишемо у вигляді:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Ліва частина рівняння — зростаюча функція, права — спадна.

Отже, рівняння не може мати більше одного кореня: $x = 1$.

Відповідь. 1.

Задача 3. Розв'язати рівняння **№ 25**

$$16^x = 3^x + 4^x + 9^x.$$

Розв'язання

Маємо

$$16^x - 9^x = 3^x + 4^x;$$

$$\left(4^x + 3^x\right)\left(4^x - 3^x\right) = 3^x + 4^x; \quad 4^x - 3^x = 1$$

(далі див. попередню задачу).

Відповідь. 1.

№ 26 **Задача 4.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^3+28}=\frac{20}{3x-4}-\sqrt{x^3+8}.$$

Розв'язання

Перепишемо рівняння у вигляді

$$\frac{20}{3x-4}=\sqrt{x^3+28}+\sqrt{x^3+8}.$$

Помічаємо, що ліва частина є спадною функцією, а права — зростаючою. Рівняння не може мати більше одного кореня: $x=2$.

Відповідь. 2.

№ 27 **Задача 5.** Розв'язати рівняння

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x.$$

Розв'язання

Поділимо ліву і праву частини даного рівняння на $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$. Оскільки

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2,$$

дістанемо

$$1+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^{x}.$$

Оскільки

$$2-\sqrt{3}<1<\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

то права частина отриманого рівняння є зростаючою функцією, а ліва — спадною, значить, і початкове рівняння має не більше одного розв'язку: $x=2$.

Відповідь. 2.

Задача 6. Знайти всі додатні розв'язки **№ 28** рівняння

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^{2}}+\ldots+\sqrt{1+2007x^{2007}}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^{2}}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^{3}}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{2007}{x^{2007}}}.$$

Розв'язання

$x=1$. Інших коренів немає.

Відповідь. 1.

V. ТАКИЙ ГЛАДКИЙ, ПРОБАЧТЕ, ПОВНИЙ КВАДРАТ

№ 29 **Задача 1.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{-2x-x^2}+\sqrt{8-2x-x^2}=4.$$

Розв'язання

Маємо

$$\sqrt{-2x-x^2}+\sqrt{8-2x-x^2}=$$

$$=\sqrt{1-(x+1)^2}+\sqrt{9-(x+1)^2}\le 1+3=4.$$

Рівність має місце лише при $x=-1$.

Відповідь. -1.

Задача 2. Розв'язати рівняння **№ 30**

$$2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1.$$

Розв'язання

Оскільки $2x^2=x^2+x^2$, то задане рівняння рівносильне рівнянню

$$\left(x-\sqrt{x^2-3x}\right)^2=1,$$

отже,

$$\left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x^2-3x}=1 \\ x-\sqrt{x^2-3x}=-1 \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{x^2-3x} \\ x+1=\sqrt{x^2-3x} \end{array}\right.,$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-1)^2=x^2-3x \\ x-1\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)^2=x^2-3x \\ x+1\ge 0 \end{cases} \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ x\ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x=-1 \\ x\ge -1 \end{cases} \end{array}\right., \quad x=-\frac{1}{5}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{5}$.

Зауваження. Поясніть самостійно, чому можна не виписувати окремо умову того, що підкореневий вираз є невід'ємним.

№ 31 **Задача 3.** Розв'язати рівняння

$$4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x).$$

Розв'язання

Додамо до обох частин рівняння вираз $9(1+x)$. Маємо

$$9(1+x)+4x^2+12x\sqrt{1+x}=9(1+x)+27(1+x),$$

або

$$\left(2x+3\sqrt{1+x}\right)^2=36(1+x);$$

$$\left(2x+3\sqrt{1+x}-6\sqrt{1+x}\right)\times$$

$$\times\left(2x+3\sqrt{1+x}+6\sqrt{1+x}\right)=0.$$

Отже,

$$\left[\begin{array}{l}2x=3\sqrt{1+x}\\2x=-9\sqrt{1+x}\end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x^2-9x-9=0\\x\ge0\end{cases}\\\begin{cases}4x^2-81x-81=0\\x\le0\end{cases}\end{array}\right..$$

Відповідь. 3; $\dfrac{81-9\sqrt{97}}{8}$.

Задача 4. Розв'язати рівняння **№ 32**

$$9^x + 4^x + 1 = 6^x + 3^x + 2^x.$$

Розв'язання

Маємо

$$3^{2x} + 2^{2x} + 1 = 2^x \cdot 3^x + 3^x + 2^x.$$

Нехай

$$3^x = a, \quad 2^x = b.$$

Тоді

$$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b,$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2 = 2ab + 2a + 2b,$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + a^2 + 1 - 2a + b^2 + 1 - 2b = 0.$$

Отже,

$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0.$$

Тоді $a = b = 1$, або

$$3^x = 2^x = 1, \quad x = 0.$$

Відповідь. 0.

Задача 5. Розв'язати рівняння **№ 33**

$$x^2 + \frac{(3x)^2}{(x-3)^2} = 16.$$

Розв'язання

Маємо

$$\left(x+\frac{3x}{x-3}\right)^2=16+6x\cdot\frac{x}{x-3},$$

або

$$\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2=16+6\cdot\frac{x^2}{x-3}.$$

Зробимо заміну

$$\frac{x^2}{x-3}=y.$$

Отримаємо

$$y^2-6y-16=0;\quad y_1=8,\ y_2=-2.$$

Отже,

$$\frac{x^2}{x-3}=8 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{x-3}=-2$$

$$x^2-8x+24=0 \quad \text{або} \quad x^2+2x-6=0.$$

$$x\in\varnothing \quad \text{або} \quad x_{1,2}=-1\pm\sqrt{7}.$$

Відповідь. $-1\pm\sqrt{7}$.

VI. — РІВНЯННЯ?

— СИСТЕМА РІВНЯНЬ!

Задача 1. Розв'язати рівняння **№ 34**

$$\frac{1}{\sqrt{14-x}}+\frac{1}{\sqrt{x-4}}=\frac{4}{3}.$$

Розв'язання

Нехай

$$\sqrt{14-x}=a>0, \quad \sqrt{x-4}=b>0.$$

Тоді

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{4}{3} \\ a^2+b^2=10\end{cases}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо

$$\begin{cases} a+b=\frac{4}{3}ab \\ (a+b)^2-2ab=10 \end{cases},$$

або, зробивши заміну $y=ab$, дістанемо

$$8y^2-9y-45=0; \quad y_1=-\frac{15}{8},\ y_2=3.$$

Маємо дві системи.

1) $$\begin{cases} ab=-\frac{15}{8} \\ a+b=-\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Система не має розв'язків, бо $a>0, b>0$.

2) $$\begin{cases} ab=3 \\ a+b=4 \end{cases},$$

звідки

$$\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}.$$

Якщо $a=3$, то

$$14-x=3^2,\ x_1=5;$$

якщо $a = 1$, то

$$14 - x = 1^2,\ x_2 = 13.$$

Відповідь. 5; 13.

Задача 2. Розв'язати рівняння **№ 35**

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2} - \cos x} + \sqrt[6]{\frac{1}{2} + \cos x} = 1.$$

Розв'язання

Нехай

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2} - \cos x} = u \geq 0; \quad \sqrt[6]{\frac{1}{2} + \cos x} = v \geq 0.$$

Тоді

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^6 + v^6 = 1 \end{cases}.$$

Оскільки сума невід'ємних чисел u та v дорівнює 1, то кожне з них не перевищує 1. Отже,

$$u^6 \leq u, \quad v^6 \leq v,$$

тоді

$$1 = u^6 + v^6 \leq u + v = 1.$$

Рівність можлива тільки якщо $u = u^6$, $v = v^6$. Звідси маємо дві можливості:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}.$$

Отже,

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{або} \quad \cos x = -\frac{1}{2},$$

звідки

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m \quad \text{або} \quad x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

де m, n — цілі числа. Об'єднуючи ці розв'язки:

$$x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

№ 36 **Задача 3.** Розв'язати рівняння

$$(8x - 3)\sqrt{2x + 3} = \sqrt{17}.$$

Розв'язання (нестандартне)

Оскільки функція

$$f(x) = (8x - 3)\sqrt{2x + 3}$$

зростає на області визначення, то задане рівняння має не більше одного кореня.

Перепишемо вихідне рівняння у вигляді

$$(8x-3)\sqrt{8x+12}=2\sqrt{17}.$$

Припустимо, що

$$\begin{cases} 8x+12=17 \\ 8x-3=2 \end{cases},$$

звідки $x=\frac{5}{8}$. Перевірка показує, що це корінь.

Відповідь. $\frac{5}{8}$.

Задача 4. Розв'язати рівняння **№ 37**

$$\cos 12x=5\sin 3x+9\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x.$$

Розв'язання

Задане рівняння запишемо у вигляді:

$$(3\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)^2+5(1+\sin 3x)+$$

$$+(1-\cos 12x)=0.$$

Оскільки кожен доданок не менше нуля, то одночасно повинні виконуватися рівності

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x \\ \sin 3x = -1 \\ \cos 12x = 1 \end{cases}.$$

Маємо

$$\sin 3x = -1 \Rightarrow \sin^2 3x = 1 \Rightarrow \cos^2 3x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + \cos 6x = 0 \Rightarrow \cos 6x = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos^2 6x = 1 \Rightarrow \sin^2 6x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - \cos 12x = 0 \Rightarrow \cos 12x = 1,$$

отже,

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x \\ \sin 3x = -1 \\ \cos 12x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{3} \\ \sin 3x = -1 \end{cases}.$$

Звідки

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2m\pi}{3},\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Відповідь. $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 5. Розв'язати рівняння № 38

$$x=\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}.$$

Розв'язання

Нехай

$$a=\sqrt{1-\frac{1}{x}},\quad b=\sqrt{x-\frac{1}{x}}.$$

Тоді при $x\neq 0$

$$\begin{cases} a+b=x \\ b^2-a^2=x-1 \end{cases},$$

звідки

$$b-a=\frac{b^2-a^2}{b+a}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x},$$

тоді, додавши цю рівність до першого рівняння системи, дістанемо

$$2b=1+x-\frac{1}{x}=1+b^2$$

звідки $b=1$. Отже,

$$x-\frac{1}{x}=1,\quad x^2-x-1=0,$$

отже,

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Вихідному рівнянню задовольняє тільки

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$

№ 39 **Задача 6.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{1 - x^2} + \sqrt[4]{x^2 + x - 1} + \sqrt{1 - x} - 1 = 0.$$

Розв'язання

Позначимо

$$\sqrt{1 - x^2} = u, \quad \sqrt[4]{x^2 + x - 1} = v, \quad \sqrt{1 - x} = w.$$

Тоді

$$\begin{cases} u + v + w = 1 \\ x^2 + v^4 + w^2 = 1 \end{cases}. \qquad (1)$$

Так як $u \geq 0$, $v \geq 0$, $w \geq 0$, то (див. задачу 2)

$$u^2 \leq u, \quad v^4 \leq v, \quad w^2 \leq w,$$

і тому система (1) є сумісною тільки у випадку

$$u^2 = u, \quad v^4 = v, \quad w^2 = w.$$

Враховуючи першу рівність системи (1), отримуємо наступні три випадки:

1) $u = 1$; $v = 0$; $w = 0$, тобто

$$\begin{cases} 1 - x^2 = 1 \\ x^2 + x - 1 = 0, \\ 1 - x = 0 \end{cases} \quad x \in \varnothing.$$

2) $u = 0$; $v = 1$; $w = 0$, тобто

$$\begin{cases} 1 - x^2 = 0 \\ x^2 + x - 1 = 1, \\ 1 - x = 0 \end{cases} \quad x = 1.$$

3) $u = 0$; $v = 0$; $w = 1$, тобто

$$\begin{cases} 1 - x^2 = 0 \\ x^2 + x - 1 = 0, \\ 1 - x = 1 \end{cases} \quad x \in \varnothing.$$

Перевіркою впевнюємося, що $x = 1$ — корінь вихідного рівняння.

Відповідь. 1.

VII. ДВА НЕВІДОМИХ...
У ОДНОМУ РІВНЯННІ

№ 40 **Задача 1.** Знайти x та y, якщо

$$x^2-2\sqrt{2}x+y-2\sqrt{y}+3=0.$$

Розв'язання

Перепишемо задану рівність у вигляді:

$$\left(x^2-2\sqrt{2}x+2\right)+\left(y-2\sqrt{y}+1\right)=0,$$

$$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0,$$

звідки $x-\sqrt{2}=\sqrt{y}-1=0.$

Відповідь. $x=\sqrt{2}$, $y=1.$

Задача 2. Розв'язати у цілих числах рівняння №41

$$x + y = xy.$$

Розв'язання

Перепишемо рівняння у вигляді

$$xy - x - y + 1 = 1; \quad (x-1)(y-1) = 1.$$

Оскільки $(x-1)$ і $(y-1)$ — цілі, то

$$\text{або} \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases}, \quad \text{або} \begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-1 \end{cases},$$

тобто $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Відповідь. $x=2$, $y=2$ або $x=0$, $y=0$.

Задача 3. Розв'язати відносно x і y рівняння №42

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4.$$

Розв'язання

Виділимо повні квадрати ($x \neq 0$, $y \neq 0$):

$$\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + 4 + \left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}\right) = 4;$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2=0.$$

З останнього рівняння отримуємо

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=0 \\ y-\dfrac{1}{y}=0 \end{cases}, \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \end{cases}.$$

Підстановкою впевнюємося, що ці значення підходять.

Відповідь. (1; 1); (–1; 1); (–1; –1); (1; –1).

№ 43 **Задача 4.** Розв'язати рівняння відносно x і y

$$\frac{\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}^2 y}{1+\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}^2 y}=\sin^2 x+\sin^2 y.$$

Розв'язання

Нехай

$$a=\mathrm{tg}^2 x\geq 0; \quad b=\mathrm{tg}^2 y\geq 0.$$

Тоді рівняння набуде вигляду

$$\frac{a+b}{1+a+b}=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}. \qquad (1)$$

Але при $a \geq 0, b \geq 0$

$$\frac{a}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a}, \quad \frac{b}{1+a+b} \leq \frac{b}{1+b}.$$

Причому, рівність (1) виконується тільки

при $a = 0$ **або** при $b = 0$.

Отже, розв'язками рівняння будуть пари $(x; y)$, що задовольняють системам

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \text{або} \quad \begin{cases} \sin y = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}.$$

Відповідь[1]. $\left\{ (x; y) \,\middle|\, (\pi n; c), (c; \pi m); \; c \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, n, m, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

---

[1] Як може помітити уважний читач, у книзі використовуються різні форми запису відповідей. Всі вони є допустимими.

VIII. — КУДИ?

— НАЗАД!

№ 44 **Задача 1.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{x-9}=(x-3)^3+6.$$

Розв'язання

Звертаємо увагу на теорему, якою будемо користуватися у цьому розділі.

> Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ взаємно обернені. Рівняння $f(x)=g(x)$ і $f(x)=x$ рівносильні, якщо $f(x)$ зростає і рівняння $f(x)=g(x)$ є наслідком рівняння $f(x)=x$, якщо $f(x)$ спадає.

Переходимо до розв'язання.

Перепишемо рівняння у вигляді:

$$(x-3)^3+9=\sqrt[3]{x-9}+3.$$

Нехай

$$f(x)=(x-3)^3+9,$$

тоді

$$x-3=\sqrt[3]{f(x)-9}, \quad x=\sqrt[3]{f(x)-9}+3,$$

звідки оберненою до $f(x)$ є функція

$$g(x)=\sqrt[3]{x-9}+3.$$

Отже, рівняння має вигляд $f(x)=g(x)$, причому функція $f(x)$ монотонно зростає, звідси, за теоремою,

$$(x-3)^3+9=x.$$

Маємо

$$x^3-9x^2+26x-18=0,$$

а оскільки

$$x^3-9x^2+26x-18=(x-1)\left(x^2-8x+18\right),$$

то $x=1$.

Відповідь. 1.

№ 45 **Задача 2.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{2-x}=2-x^3.$$

Розв'язання

Нехай $f(x)=2-x^3$. Знайдемо функцію $g(x)$, обернену до $f(x)$:

$$x^3=2-f(x),\quad x=\sqrt[3]{2-f(x)},$$

звідки

$$g(x)=\sqrt[3]{2-x}.$$

Оскільки, за умовою, $f(x)=g(x)$, то, за теоремою, $f(x)=x$, тобто

$$2-x^3=x,\quad (x-1)\left(x^2+x+2\right)=0,\quad x=1.$$

Відповідь. 1.

№ 46 **Задача 3.** Розв'язати рівняння

$$x^2-x+1=\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{3}{4}}.$$

Розв'язання

Очевидно, що $x\ge\frac{3}{4}$. Нехай

$$f(x)=x^2-x+1.$$

При $x \geq \frac{3}{4}$ функція $f(x)$ зростає (покажіть це самостійно!). Знайдемо функцію $g(x)$, обернену до $f(x)$:

$$x^2 - x + 1 - f(x) = 0,$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1 - f(x))}}{2},$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{f(x) - \frac{3}{4}},$$

проте

$$\frac{1}{2} - \sqrt{f(x) - \frac{3}{4}} \leq \frac{1}{2} < \frac{3}{4},$$

отже,

$$g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}.$$

Маємо

$$g(x) = f(x),$$

тому, за теоремою,

$$x^2 - x + 1 = x, \qquad x = 1.$$

Відповідь. 1.

№ 47 **Задача 4.** Розв'язати рівняння

$$x=\sqrt{\sqrt{x}-\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}.$$

Розв'язання

Очевидно, що

$$\sqrt{x}\ge\frac{1}{4},\ \text{тобто}\ x\ge\frac{1}{16}.$$

Тоді $x+\frac{1}{4}>0$ і, піднесши до квадрату, дістанемо

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\sqrt{x}-\frac{1}{4}.$$

Нехай

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2.$$

При $x\ge\frac{1}{16}>-\frac{1}{4}$ функція $f(x)$ — зростає.

Знайдемо функцію $g(x)$, обернену до $f(x)$:

$$x+\frac{1}{4}=\sqrt{f(x)},$$

$$g(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{4}.$$

Отже, задане рівняння еквівалентне рівнянню

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 = x, \quad \text{звідки } x=\frac{1}{4}.$$

Відповідь. $\frac{1}{4}$.

Задача 5. Розв'язати рівняння №48

$$x = 1 - e^{1-e^x} \ (x \geq 0).$$

Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді

$$1 - x = e^{1-e^x},$$

тоді $x \in [0;1)$ і

$$\ln(1-x) = 1 - e^x.$$

Якщо $f(x) = \ln(1-x)$, то функція $f(x)$ при $x \in [0;1)$ зростає. Очевидно, що оберненою буде функція $g(x) = 1 - e^x$. Отже,

$$\ln(1-x) = x, \quad 1 - x = e^x, \quad x = 0$$

(бо функція $1-x$ спадає, а e^x — зростає).

Відповідь. 0.

№ 49 **Задача 6.** Розв'язати рівняння

$$2\sqrt{x-1}=1+\frac{1}{4}x^2.$$

Розв'язання

Нехай

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+1 \quad (x\geq 1).$$

Тоді при $x>1$ функція $f(x)$ — зростає. Знайдемо обернену функцію $g(x)$:

$$\frac{1}{4}x^2=f(x)-1, \quad x=2\sqrt{f(x)-1},$$

відтак,

$$g(x)=2\sqrt{x-1},$$

отже, маємо $f(x)=g(x)$, тобто

$$2\sqrt{x-1}=x, \quad 4(x-1)=x^2,$$

звідки $x=2$.

Відповідь. 2.

№ 50 **Задача 7.** Розв'язати рівняння

$$x=2+\sqrt{2+\sqrt{x}}.$$

Розв'язання

Очевидно, що $x \geq 2 + \sqrt{2} > 2$. Запишемо рівняння у вигляді:

$$(x-2)^2 = 2 + \sqrt{x}.$$

Нехай $f(x) = (x-2)^2$, тоді обернена функція має вигляд $g(x) = 2 + \sqrt{x}$.

Оскільки $f(x)$ зростає при $x \geq 2$, застосуємо теорему:

$$2 + \sqrt{x} = x, \quad \sqrt{x} = 2.$$

Відповідь. 4.

Задача 8. Розв'язати рівняння **№ 51**

$$\sqrt[3]{2x+1} = \frac{x^3-1}{2}.$$

Розв'язання

Нехай $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$, тоді обернена функція має вигляд $g(x) = \dfrac{x^3-1}{2}$. Оскільки $f(x)$ зростає при всіх x, то можна застосувати теорему.

Отже, задане рівняння рівносильне такому рівнянню

$$2x+1=x^3.$$

Оскільки

$$x^3-2x-1=(x+1)\left(x^2-x-1\right),$$

то $x_1=-1;\ x_{2,3}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь. $-1;\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

№ 52 **Задача 9.** Розв'язати рівняння

$$7\operatorname{tg}^3 x-6=\sqrt[3]{\frac{1}{7}(\operatorname{tg} x+6)}.$$

Розв'язання

Зробимо заміну $y=\operatorname{tg} x$. Маємо

$$7y^3-6=\sqrt[3]{\frac{1}{7}(y+6)}.$$

Нехай $f(y)=7y^3-6$. Тоді

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{7}(f(y)+6)},$$

тобто обернена функція має вигляд

$$g(y)=\sqrt[3]{\frac{1}{7}(y+6)}.$$

Оскільки $f(y)$ зростає при всіх y, то можна застосувати теорему і $f(y)=y$ або

$$7y^3-6=y,\quad 7y^3-y-6=0.$$

Зауважимо, що $y=1$. Застосуємо схему Горнера:

$$7y^2+7y+6=0\ (D<0).$$

Отже, $y=1$ і тому

$$\operatorname{tg}x=1;\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Задача 10. Розв'язати рівняння **№ 53**

$$16\sin^3 x=14+\sqrt[3]{\sin x+7}.$$

Розв'язання

Зробимо заміну $y=\sin x$. Тоді

$$8y^3-7=\frac{1}{2}\sqrt[3]{y+7},$$

Нехай $f(y)=8y^3-7$, тоді обернена функція має вигляд

$$g(y)=\sqrt[3]{\frac{y+7}{8}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{y+7}.$$

Отже,

$$f(y)=y, \quad 8y^3-7=y,$$

$$(y-1)\left(8y^2+8y+7\right)=0,$$

звідки $y=1$, тобто

$$\sin x=1, \quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

IX. КРОКОДИЛИ

Задача 1. Розв'язати рівняння **№ 54**

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0.$$

Розв'язання

Зробимо заміну $y=2\left(x-\frac{5}{2}\right)$. Звідси

$$\frac{3}{\frac{y}{2}+\frac{5}{2}}+\frac{1}{\frac{y}{2}+\frac{3}{2}}+\frac{4}{\frac{y}{2}+\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{4}{\frac{y}{2}-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{y}{2}-\frac{3}{2}}+\frac{3}{\frac{y}{2}-\frac{5}{2}}=0.$$

Маємо

$$\frac{3y}{\frac{y^2}{4}-\frac{25}{4}}+\frac{y}{\frac{y^2}{4}-\frac{9}{4}}+\frac{4y}{\frac{y^2}{4}-\frac{1}{4}}=0,$$

$$4y\left(\frac{3}{y^2-25}+\frac{1}{y^2-9}+\frac{4}{y^2-1}\right)=0.$$

Звідси

$$\frac{32y\left(y^4-24y^2+119\right)}{\left(y^2-1\right)\left(y^2-9\right)\left(y^2-25\right)}=0.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримаємо

$$y_1=0;\quad y_{2,3}=\pm\sqrt{7};\quad y_{4,5}=\pm\sqrt{17}.$$

Тому

$$x_1=2{,}5;\quad x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2};\quad x_{4,5}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Відповідь. $2{,}5;\ \frac{5\pm\sqrt{7}}{2};\ \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}.$

№ 55 **Задача 2.** Розв'язати рівняння

$$\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Розв'язання

Задане рівняння рівносильне такому

$$\left(\frac{x-a}{bc}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-b}{ac}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+$$

$$+\left(\frac{x-c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0,$$

$$\frac{x-a-c-b}{bc}+\frac{x-b-c-a}{ac}+\frac{x-c-b-a}{ab}=0,$$

$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}\right)=0. \qquad (1)$$

Враховуючи, що кожна з величин a, b, c не дорівнює 0, а отже і abc не дорівнює 0, обидві частини рівняння (1) можна помножити на abc. Отримаємо рівняння

$$(x-a-b-c)(a+b+c)=0.$$

Якщо $a+b+c=0$, то розв'язком шуканого рівняння є всі дійсні числа.

Якщо $a+b+c\neq 0$, то рівняння має єдиний корінь $a+b+c$.

Відповідь. При $a+b+c=0$ $x\in\mathbb{R}$,
при $a+b+c\neq 0$ $x=a+b+c$.

№ 56 **Задача 3.** Розв'язати рівняння

$$\frac{1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3}=\frac{199}{242}.$$

Розв'язання

Додамо 1 до обох частин рівняння. Маємо

$$\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+(2n)^3}{2^3\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)}=\frac{441}{242}. \qquad (1)$$

Пропонується довести самостійно (за індукцією), що

$$1^3+2^3+\ldots+m^3=m^2(m+1)^2\cdot\frac{1}{4}.$$

Застосуємо цю формулу до чисельника та знаменника лівої частини рівняння (1). Маємо:

$$\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4}:\frac{8n^2(n+1)^2}{4}=\frac{441}{242}=\frac{(21)^2}{2\cdot(11)^2},$$

або

$$\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2}=\frac{(21)^2}{(11)^2}.$$

Звідси $n=10$.

Відповідь. 10.

Задача 4. Розв'язати рівняння **№ 57**

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)=$$
$$=\left(1+x+x^2+x^3\right)^2.$$

Розв'язання

Неважко перевірити, що $x=1$ не є коренем рівняння. Тоді домножимо його на $(x-1)^2$. Отримаємо

$$(x-1)\left(1+x+x^2\right)(x-1)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)=$$
$$=\left((x-1)\left(1+x+x^2+x^3\right)\right)^2,$$

або

$$\left(x^3-1\right)\left(x^5-1\right)=\left(x^4-1\right)^2,$$
$$x^8-x^3-x^5+1=x^8-2x^4+1,$$
$$x^5-2x^4+x^3=0,$$
$$x^3\left(x^2-2x+1\right)=0,$$
$$x^3(x-1)^2=0.$$

Оскільки $x\neq 1$, то $x=0$ — єдиний розв'язок.

Відповідь. 0.

№ 58 **Задача 5.** Розв'язати рівняння

$$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+\ldots+$$
$$+(x+8)(x+9)+(x+9)(x+10)=$$
$$=1\cdot2+2\cdot3+\ldots+8\cdot9+9\cdot10.$$

Розв'язання

Оскільки

$$(x+k)(x+k+1)-k\cdot(k+1)=x^2+(2k+1)x$$

$(k=1,2,\ldots,9)$, то рівняння набуде вигляду

$$x^2+x+x^2+3x+x^2+5x+\ldots+x^2+19x=0,$$

звідки, використовуючи формулу суми членів арифметичної прогресії $(a_1=1,\ d=2,\ n=10)$, дістанемо

$$10x^2+\frac{1+19}{2}\cdot10\cdot x=0$$

Отже, задане рівняння набуде вигляду

$$x(x+10)=0,$$

звідки

$$x_1=0;\quad x_2=-10.$$

Відповідь. 0; –10.

X. — РІВНЯННЯ?

— НЕРІВНОСТІ!

Задача 1. Розв'язати рівняння **№ 59**

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Розв'язання

Маємо рівняння, рівносильне даному

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Підбором знаходимо $x = 2$. Покажемо, що корінь 2 — єдиний. Дійсно, при $x > 2$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2.$$

Отже,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x<\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1,$$

що суперечить умові. Аналогічно, при $x<2$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x>\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1$$

Тому рівність можлива тільки при $x=2$.

Відповідь. 2.

№ 60 **Задача 2.** Розв'язати рівняння

$$\sin^{21}x-\cos^{15}x=1.$$

Розв'язання

Якщо кут x не кратний куту $\frac{\pi}{2}$, то

$$\left|\sin^{21}x\right|<\sin^2 x,\quad \left|\cos^{15}x\right|<\cos^2 x,$$

тому

$$\left|\sin^{21}x-\cos^{15}x\right|\le\left|\sin^{21}x\right|+\left|\cos^{15}x\right|<$$

$$<\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

що суперечить умові.

Отже, розв'язки можуть бути тільки серед кутів, кратних $\frac{\pi}{2}$, а саме, якщо

$$\begin{cases}\sin x = 1\\ \cos x = 0\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}\sin x = 0\\ \cos x = -1\end{cases}.$$

Звідси

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{або} \quad x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \pi + 2\pi n,\ k, n \in \mathbb{Z}.$

Задача 3. Розв'язати рівняння **№ 61**

$$\sin^2 2x + \frac{1}{\sin^2 2x} = \cos\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 2x.$$

Розв'язання

Як сума двох обернених додатних величин ліва частина рівності не менше двох. Оскільки

$$\left|\cos\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1, \quad |\sin 2x| \le 1,$$

отримаємо рівносильну систему:

$$\begin{cases}\sin 2x = -1\\ \cos\left(-x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1\end{cases}.$$

З першого рівняння:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Підставивши це значення у друге рівняння, отримаємо умову

$$\cos \pi n = 1,$$

тому n — парне число: $n = 2m, m \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

№ 62 **Задача 4.** Розв'язати рівняння

$$\log_3\left(8 + 2x - x^2\right) = 2^{x-1} + 2^{1-x}.$$

Розв'язання

Оцінимо ліву і праву частини рівняння:

$$\log_3\left(8 + 2x - x^2\right) = \log_3\left(9 - \left(1 - 2x + x^2\right)\right) =$$

$$= \log_3\left(9 - (x-1)^2\right) \le \log_3 9 = 2;$$

проте

$$2^{x-1}+2^{1-x}=2^{x-1}+\frac{1}{2^{x-1}}\geq 2.$$

Відтак,

$$\log_3\left(8+2x-x^2\right)=2 \quad \text{та} \quad 2^{x-1}+2^{1-x}=2.$$

Отже,

$$2^{x-1}=1, \quad x=1.$$

Цей корінь задовольняє й іншу умову.

Відповідь. 1.

Задача 5. Розв'язати рівняння №63

$$2^{x^6}+2^{x^2}=2^{x^4+1}.$$

Розв'язання

Оскільки для довільних невід'ємних a та b

$$a+b\geq 2\sqrt{ab},$$

причому рівність досягається лише при $a=b$, то, двічі застосувавши цю нерівність, дістанемо

$$2^{x^6}+2^{x^2}\geq 2\sqrt{2^{x^6}\cdot 2^{x^2}}=$$

$$=2^{\frac{x^6+x^2}{2}+1}\geq 2^{\sqrt{x^6x^2}+1}=2^{x^4+1}.$$

Оскільки за умовою має бути рівність, то

$$x^6 = x^2,$$

звідки

$$x = 0 \quad \text{або} \quad x^2 = 1.$$

Відповідь. $0; \pm 1$.

№ 64 **Задача 6.** Розв'язати рівняння ($k \in \mathbb{N}$)

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \ldots + \left(x^{2k-1} + \frac{1}{x^{2k-1}}\right) = 2k.$$

Розв'язання

Рівняння не має від'ємних коренів (при від'ємних x ліва частина рівняння від'ємна, а права — додатна).

При $x > 0$ кожна дужка не менша 2. Причому вона дорівнює 2 тільки при $x = 1$. Дійсно, для довільного $a > 0$

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0.$$

Всього дужок k. Отже, ліва частина дорівнює $2k$ тільки тоді, коли $x = 1$.

Відповідь. 1.

Задача 7. Розв'язати рівняння **№ 65**

$$\frac{1}{x^2+2x+2}+\frac{3}{x^2+2x+4}+\frac{5}{x^2+2x+6}+$$

$$+\ldots+\frac{2005}{x^2+2x+2006}=1003.$$

Розв'язання

Перетворимо знаменники дробів:

$$\frac{1}{(x+1)^2+1}+\frac{3}{(x+1)^2+3}+\frac{5}{(x+1)^2+5}+$$

$$+\ldots+\frac{2005}{(x+1)^2+2005}=1003.$$

Кожен доданок у лівій частині цього виразу не перевищує 1. Всього їх 1003. Отже, рівність буде виконуватися тільки тоді, коли кожен з доданків дорівнюватиме 1. Це можливо при $x=-1$.

Відповідь. –1.

Задача 8. Розв'язати рівняння **№ 66**

$$\cos x = 1 + x^8.$$

Розв'язання

Маємо

$$\cos x \le 1, \quad 1 + x^8 \ge 1,$$

отже,

$$1 + x^8 = 1; \quad x = 0.$$

Перевіркою впевнюємося, що $x = 0$ — корінь.

Відповідь. 0.

№ 67 **Задача 9.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{\sin x - \sqrt{\sin x + \cos x}} = \cos x.$$

Розв'язання

З умови випливає, що $\cos x \ge 0$ і

$$\sin x - \sqrt{\sin x + \cos x} \ge 0,$$

отже,

$$\sin x \ge \sqrt{\sin x + \cos x} \ge \sqrt{\sin x}.$$

Звідси або $\sin x = 0$ (але тоді $0 \ge \sqrt{\cos x}$, тобто і $\cos x = 0$, що неможливо), або $\sin x = 1$, що задовольняє рівнянню.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 10. Розв'язати рівняння №68

$$\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\cos\left(\pi\sqrt{x-4}\right)=1.$$

Розв'язання

Так як

$$\left|\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\right|\le 1 \quad \text{та} \quad \left|\cos\left(\pi\sqrt{x-4}\right)\right|\le 1,$$

то задане рівняння еквівалентно сукупності двох систем:

$$\begin{cases}\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)=1\\ \cos\left(\pi\sqrt{x-4}\right)=1\end{cases} \qquad (1)$$

або

$$\begin{cases}\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)=-1\\ \cos\left(\pi\sqrt{x-4}\right)=-1\end{cases}. \qquad (2)$$

Система (1) може бути переписана у вигляді:

$$\begin{cases}\pi\sqrt{x}=2\pi k\\ \pi\sqrt{x-4}=2\pi n\end{cases}, \quad k,n\in\mathbb{Z}.$$

Звідси (враховуючи, що $\sqrt{x} \geq 0, \sqrt{x-4} \geq 0$)

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 2k \\ \sqrt{x-4} = 2n \end{cases}, \quad k, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

отже,

$$\begin{cases} x = 4k^2 \\ x = 4n^2 + 4 \end{cases}, \quad k, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

звідки

$$k^2 = n^2 + 1, \quad (k-n)(k+n) = 1,$$

а це можливо тільки при $k = 1$, $n = 0$. Тоді

$$x = 4.$$

Аналогічно, з системи (2) маємо:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 2k + 1 \\ \sqrt{x-4} = 2n + 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = (2k+1)^2 \\ x = (2n+1)^2 + 4 \end{cases},$$

де $k, n = 0, 1, 2, \ldots$ Тоді

$$(2k+1)^2 - (2n+1)^2 = 4,$$

$$(k-n)(k+n+1) = 1.$$

Так як n і k — цілі невід'ємні числа, то останнє рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} k-n=1 \\ k+n=0 \end{cases},$$

яка не має цілих розв'язків.

Відповідь. 4.

Задача 11. Розв'язати рівняння **№ 69**

$$\sqrt[4]{1-x^2-y^2}=\sqrt{1+x^2+2y^2+\sin^2 xy}+(x-y)^2.$$

Розв'язання

Оцінимо ліву і праву частини рівняння:

$$1-\left(x^2+y^2\right)\le 1,$$

отже,

$$\sqrt[4]{1-x^2-y^2}\le 1;$$

та

$$x^2+2y^2+\sin^2 xy\ge 0,$$

отже,

$$\sqrt{1+x^2+2y^2+\sin^2 xy}\ge\sqrt{1}=1.$$

Окрім того, $(x-y)^2\ge 0$, а отже, права частина рівняння не менша за 1.

Таким чином, рівність можлива тільки якщо $x^2 + y^2 = 0$, звідки $x = y = 0$.

Перевірка підтверджує, що ця пара значень є розв'язком вихідного рівняння.

Відповідь. $(0; 0)$.

XI. ВІДОМЕ — ЯК НЕВІДОМЕ

Задача 1. Розв'язати рівняння **№ 70**

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0.$$

Розв'язання

Розв'яжемо рівняння як квадратне відносно $\sqrt{2}$.

Маємо

$$\left(\sqrt{2}\right)^2-x^2\sqrt{2}+x^3-x^2=0.$$

Оскільки

$$D=x^4-4x^3+4x^2=$$

$$=x^2\left(x^2-4x+4\right)=x^2(x-2)^2,$$

дістанемо

$$\sqrt{2} = \frac{x^2 \pm x(x-2)}{2},$$

отже,

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - \sqrt{2} = 0 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right..$$

Відповідь. $\frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$; $\sqrt{2}$.

№ 71 **Задача 2.** Розв'язати рівняння

$$x^2 + \sqrt{x+5} = 5.$$

Розв'язання

При

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 5 - x^2 \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

маємо

$$x + 5 = 25 + x^4 - 10x^2.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно 5:

$$5^2 - 5\left(1 + 2x^2\right) + x^4 - x = 0.$$

Маємо

$$5=\frac{1+2x^2\pm\sqrt{1+4x^2+4x^4-4x^4+4x}}{2}=$$

$$=\frac{1+2x^2\pm(1+2x)}{2}.$$

Отже,

$$5=1+x^2+x,\qquad x^2+x-4=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2},$$

або ж

$$5=x^2-x,\qquad x^2-x-5=0,$$

$$x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Враховуючи (1), дістанемо відповідь.

Відповідь. $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}.$

Задача 3. Розв'язати рівняння **№ 72**

$$x^4-2x^2+4(a+1)x-a(a+2)=0.$$

Розв'язання

Відносно параметра a задане рівняння є квадратним:

$$a^2-2(2x-1)a-\left(x^4-2x^2+4x\right)=0,$$

$$a_{1,2}=(2x-1)\pm\sqrt{4x^2-4x+1+x^4-2x^2+4x}=$$

$$=2x-1\pm\left(x^2+1\right).$$

Отже, рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} a=x^2+2x \\ a=-x^2+2x-2 \end{array}\right. .$$

Розв'язуємо ці рівняння відносно x:

1) $$x^2+2x-a=0,$$

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+a} \text{ (при } a\geq-1);$$

2) $$x^2-2x+a+2=0,$$

$$x_{3,4}=1\pm\sqrt{-1-a} \text{ (при } a\leq-1).$$

Відповідь. $1\pm\sqrt{-1-a}$ при $a<-1$;

-1 та 1 при $a=-1$;

$-1\pm\sqrt{1+a}$ при $a>-1$.

Задача 4. Розв'язати рівняння **№ 73**

$$x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0.$$

Розв'язання

Розв'яжемо це рівняння як квадратне відносно $\sqrt{3}$. Маємо

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(2x^2 + 1\right)\sqrt{3} + x^4 + x = 0,$$

$$\sqrt{3} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x - 1)}{2},$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + x - \sqrt{3} = 0 \\ x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0 \end{array}\right..$$

Відповідь. $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$; $\dfrac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$.

Задача 5. Розв'язати рівняння **№ 74**

$$x^3 - 2\sqrt{7}x^2 + 7x - 4\sqrt{7} + 8 = 0.$$

Розв'язання

Розв'яжемо рівняння відносно $\sqrt{7}$. Маємо

$$x\left(\sqrt{7}\right)^2 - 2\left(x^2 + 2\right)\sqrt{7} + \left(x^3 + 8\right) = 0,$$

звідси, враховуючи що $x \neq 0$,

$$\frac{D}{4} = \left(x^2+2\right)^2 - x\left(x^3+8\right) =$$

$$= x^4 + 4x^2 + 4 - x^4 - 8x =$$

$$= 4\left(x^2 - 2x + 1\right) = (2x-2)^2.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{7} = \dfrac{x^2+2+(2x-2)}{x} \\ \sqrt{7} = \dfrac{x^2+2-(2x-2)}{x} \end{array}\right.,$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+2x-\sqrt{7}x=0 \\ x^2-2x-\sqrt{7}x+4=0 \end{array}\right.,$$

$$\left[\begin{array}{l} x\left(x+2-\sqrt{7}\right)=0 \\ x^2-\left(2+\sqrt{7}\right)x+4=0 \end{array}\right.,$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{7}-2 \\ x=\dfrac{2+\sqrt{7}\pm\sqrt{4\sqrt{7}-5}}{2} \end{array}\right..$$

Відповідь. $\sqrt{7}-2; \dfrac{2+\sqrt{7}\pm\sqrt{4\sqrt{7}-5}}{2}.$

XII. ХІД ЗІ ЗНАКОМ ОКЛИКУ

Задача 1. Розв'язати рівняння **№ 75**

$$\left(3x^2+7x-2\right)^2+5x^2\left(3x^2+7x-2\right)-24x^4=0.$$

Розв'язання

Очевидно, що $x=0$ — не корінь даного рівняння. Розділимо обидві частини рівняння на x^4:

$$\frac{\left(3x^2+7x-2\right)^2}{x^4}+5\cdot\frac{3x^2+7x-2}{x^2}-24=0.$$

Позначимо

$$\frac{3x^2+7x-2}{x^2}=t.$$

Маємо

$$t^2+5t-24=0;\quad t_1=3, t_2=-8.$$

Отже, задане рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{3x^2+7x-2}{x^2}=3\\ \dfrac{3x^2+7x-2}{x^2}=-8\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}7x-2=0\\ 11x^2+7x-2=0\end{array}\right..$$

Відповідь. $\frac{2}{7}$; $\frac{-7\pm\sqrt{137}}{22}$.

№ 76 **Задача 2.** Розв'язати рівняння

$$x^3+2x-5\sqrt{3}=0.$$

Розв'язання

Зробимо заміну $x=y\sqrt{3}$. Маємо

$$3y^3\sqrt{3}+2y\sqrt{3}-5\sqrt{3}=0,$$

$$3y^3+2y-5=0,\quad (y-1)\left(3y^2+3y+5\right)=0,$$

$$y=1\quad\text{або}\quad 3y^2+3y+5=0\ (D<0).$$

Відповідь. $\sqrt{3}$.

Задача 3. Розв'язати рівняння **№ 77**

$$\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x.$$

Розв'язання

Позначимо $\log_2 x=t$ $(x>0)$. Маємо:

$$t^2+(x-1)t-(6-2x)=0.$$

Розглянемо це рівняння як квадратне відносно t. Його дискримінант:

$$D=(x-1)^2+4(6-2x)=$$

$$=x^2-10x+25=(x-5)^2\geq 0.$$

Тоді маємо

$$t_{1,2}=\frac{(1-x)\pm(x-5)}{2};\quad t_1=3-x, t_2=-2.$$

Маємо

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x=3-x\\ \log_2 x=-2\end{array}\right..$$

Зазначимо, що перше рівняння має єдиний корінь ($x=2$), тому що ліва його частина зростає, а права спадає.

Відповідь. $\frac{1}{4}$; 2.

№ 78 **Задача 4.** Розв'язати рівняння

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0.$$

Розв'язання

Корені цього рівняння можна спробувати пошукати серед дільників виразу abc. Поклавши $x=a$, знаходимо, що

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+ac+bc)a-abc=0.$$

Отже, $x_1=a$. Аналогічно знаходимо $x_2=b$, $x_3=c$. Таким чином, ми знайшли всі три корені рівняння.

Відповідь. a; b; c.[1]

№ 79 **Задача 5.** Розв'язати рівняння

$$x^4-2x^2-400x=9999.$$

Розв'язання

Додамо до обох частин рівняння вираз

$$4x^2+400x+1.$$

Отримаємо

$$x^4+2x^2+1=4x^2+400x+10000,$$

[1] Зрозуміло, що відповідь також випливає з теореми Вієта для рівняння третього степеня.

або

$$\left(x^2+1\right)^2=(2x+100)^2,$$

$$x^2+1=\pm(2x+100).$$

Таким чином, маємо

$$x^2-2x-99=0 \quad \text{або} \quad x^2+2x+101=0,$$

звідки $x_1=11$, $x_2=-9$; друге рівняння не має дійсних коренів.

Відповідь. -9; 11.

Задача 6. Розв'язати рівняння № 80

$$x^4-12x+323=0.$$

Розв'язання

Розв'яжемо рівняння так званим методом невизначених коефіцієнтів — знайдемо розклад лівої частини у добуток квадратних тричленів:

$$x^4-12x+323=\left(x^2+px+q\right)\left(x^2+mx+n\right).$$

Маємо

$$\left(x^2+px+q\right)\left(x^2+mx+n\right)=$$

$$=x^4+mx^3+nx^2+px^3+pmx^2+$$

$$+pnx+qx^2+qmx+qn=$$

$$=x^4+(m+p)x^3+(n+pm+q)x^2+$$

$$+(pn+qm)x+qn.$$

Зазначимо, що два многочлени є рівними тоді і тільки тоді, коли їх коефіцієнти рівні.

Отже,

$$\begin{cases} m+p=0 \\ n+pm+q=0 \\ pn+qm=-12 \\ qn=323 \end{cases}.$$

Знайдемо один з розв'язків цієї системи.

Рівність $323=17\cdot 19$ підказує нам «спробувати» $q=17$, $n=19$. Тоді

$$\begin{cases} m+p=0 \\ pm=-36 \end{cases},$$

звідки, наприклад, $m=6$, $p=-6$. Дістанемо:

$$x^4-12x+323=\left(x^2-6x+17\right)\left(x^2+6x+19\right).$$

Отже, задане рівняння не має дійсних коренів.

Відповідь. $\varnothing$.

Задача 7. Розв'язати рівняння **№ 81**

$$2x^3 - 6x + 5 = 0.$$

Розв'язання

Рівняння можна розв'язати за допомогою «чудової тотожності»:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$
$$= (a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right)$$

(зробіть це самостійно), але читачам пропонується інший спосіб, який застосовується при розв'язанні кубічних рівнянь.

Зробимо підстановку $x = y + \frac{1}{y}$. Тоді

$$x^3 = y^3 + \frac{1}{y^3} + 3 \cdot y \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right),$$

отже, задане рівняння набуде вигляду

$$2\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + 5 = 0,$$

звідки

$$2y^6 + 5y^3 + 2 = 0;$$

$$y^3 = -2 \quad \text{або} \quad y^3 = -\frac{1}{2}.$$

Очевидно, що значення x не зміниться, якщо замінити y на $\frac{1}{y}$. Отже, для знаходження x достатньо використати рівняння $y^3 = -2$. Це рівняння має єдиний дійсний корінь

$$y = -\sqrt[3]{2},$$

а тому $x = -\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Відповідь. $-\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

№ 82 **Задача 8.** Розв'язати рівняння

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}.$$

Розв'язання

Маємо

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) =$$
$$= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \left(2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1\right).$$

Тому рівнянню можна надати вигляду

$$4\cos^2\frac{x+y}{2}-4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}+1=0.$$

Перші два доданки у лівій частині легко доповнити до квадрата різниці, після чого рівняння запишеться у вигляді

$$\left(2\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\sin^2\frac{x-y}{2}=0.$$

Останнє рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 2\cos\frac{x+y}{2}=\cos\frac{x-y}{2} \\ \sin\frac{x-y}{2}=0 \end{cases}.$$

З другого рівняння цієї системи маємо

$$x-y=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

звідки $y=x-2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Підставляючи це значення y в перше рівняння, отримаємо

$$2\cos(x-k\pi)=\cos k\pi.$$

Оскільки

$$\cos(x-k\pi)=(-1)^k\cos x,\qquad \cos k\pi=(-1)^k,$$

то звідси

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$

$$y = \pm\frac{\pi}{3} + 2(n-k)\pi,\ n,k \in \mathbb{Z}.$$

№ 83 **Задача 9.** Розв'язати рівняння

$$26\sin^2 x^2 + 12\cos 2x + 5\sin 2x = 13.$$

Розв'язання

Враховуючи, що

$$12\cos 2x + 5\sin 2x = \left(\frac{12}{13}\cos 2x + \frac{5}{13}\sin 2x\right)\cdot 13,$$

вводимо допоміжний кут γ, такий що

$$\cos 2\gamma = \frac{12}{13}, \quad \sin 2\gamma = \frac{5}{13}, \quad 2\gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Задане рівняння еквівалентне рівнянню

$$2\sin^2 x^2 + \cos(2x - 2\gamma) = 1.$$

Звідси дістанемо

$$1 - \cos 2x^2 + \cos(2x - 2\gamma) = 1,$$

$$\cos 2x^2 - \cos(2x - 2\gamma) = 0,$$

$$2\sin\left(x^2 + x - \gamma\right)\sin\left(x - \gamma - x^2\right) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{ll} x^2 + x - \gamma = k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x^2 - x + \gamma = n\pi, & n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad (1)$$

Дискримінант першого рівняння дорівнює $1 + 4\gamma + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Оскільки $\gamma \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, то $1 < 1 + 4\gamma < 1 + \pi$, звідки тільки при $k = 0, 1, 2, \ldots$ цей дискримінант є невід'ємним.

Дискримінант другого рівняння дорівнює $1 - 4\gamma + 4n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Аналогічно, від'ємні цілі n не підходять, додатні цілі підходять, додаткового аналізу вимагає випадок $n = 0$. Тоді умова того, що дискримінант є додатним, еквівалентна нерівності $1 - 4\gamma \geq 0$, тобто $0 < 2\gamma \leq \frac{1}{2}$.

Оскільки $\sin x$ на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ зростає, а $\cos x$ — спадає, ця умова еквівалентна таким

$$\frac{5}{13} = \sin 2\gamma \leq \sin\frac{1}{2} \quad \text{та} \quad \frac{12}{13} = \cos 2\gamma \geq \cos\frac{1}{2}.$$

Підносячи ці нерівності до квадрату, дістанемо, що обидві вони рівносильні такій

$$\cos 1 \le \frac{119}{169}.$$

Але ця нерівність є вірною. Справді, оскільки $1 > 54°$, то

$$\cos 1 < \cos 54° = \sqrt{\frac{1+\cos 108°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sin 18°}{2}},$$

але ж $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ (доведіть це самостійно!),

а отже, $\cos 1 < \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} < \dfrac{119}{169}$ (в останній нерівності легко пересвідчитись, безпосередньо піднесши до квадрату). В результаті дістали, що при $n=0$ дискримінант другого рівняння сукупності (1) також невід'ємний.

Відповідь. $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4\gamma+4k\pi}}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-4\gamma+4n\pi}}{2}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

де $\cos 2\gamma = \dfrac{12}{13}$, $\sin 2\gamma = \dfrac{5}{13}$.

Задача 10. Розв'язати рівняння № 84

$$x^4+4x-1=0.$$

Розв'язання

Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$x^4+2x^2+1-2x^2+4x-2=0,$$

або

$$\left(x^2+1\right)^2-2(x-1)^2=0,$$

або

$$\left(x^2+1+\sqrt{2}(x-1)\right)\left(x^2+1-\sqrt{2}(x-1)\right)=0.$$

Таким чином, задане рівняння розпадається на два квадратних рівняння:

$$x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0 \quad \text{та} \quad x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1=0.$$

З першого рівняння знаходимо

$$x_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2},$$

друге рівняння не має дійсних коренів.

Відповідь. $\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.

№ 85 **Задача 11.** Розв'язати рівняння:

$$3x^4+4x^3+2x^2+x+6=0.$$

Розв'язання

Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$3x^4-3x^3+3x^2+7x^3-7x^2+7x+$$
$$+6x^2-6x+6=0;$$
$$3x^2\left(x^2-x+1\right)+7x\left(x^2-x+1\right)+$$
$$+6\left(x^2-x+1\right)=0;$$
$$\left(x^2-x+1\right)\left(3x^2+7x+6\right)=0;$$
$$\left[\begin{array}{l}x^2-x+1=0\\3x^2+7x+6=0\end{array}\right.;\quad x\in\varnothing.$$

Відповідь. $\varnothing$.

XIII. МІНЯЮ — ЗАМІНЯЮ

Задача 1. Розв'язати рівняння **№ 86**

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{3}.$$

Розв'язання

Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}.$$

Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{1}{\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[6]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{x^2}}=\frac{1}{3}.$$

Позначимо $\sqrt[6]{x}=y$ $(y>0,\ y\neq 1)$.

Тоді

$$\frac{1}{y^3+y^2}+\frac{1}{y^3-y^2}=\frac{1}{3},$$

або

$$y^3-y-6=0.$$

Оскільки

$$y^3-y-6=(y-2)\left(y^2+2y+3\right),$$

то $y=2$, звідки $x=64$.

Відповідь. 64.

№ 87 **Задача 2.** Розв'язати рівняння

$$x^2+\sqrt{x(x-4)}=2(1+2x).$$

Розв'язання

Оскільки $x(x-4)\geq 0$, то $x\leq 0$ або $x\geq 4$. Зробимо заміну

$$\sqrt{x^2-4x}=y\ (y\geq 0).$$

Тоді

$$\begin{cases} y^2+y-2=0 \\ y\geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y=1, y=-2 \\ y\geq 0 \end{cases},$$

відтак $y=1$.

Отже,

$$\sqrt{x^2-4x}=1; \quad x_{1,2}=2\pm\sqrt{5}.$$

Відповідь. $2\pm\sqrt{5}$.

Задача 3. Розв'язати рівняння № 88

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{3}{2}(x+1).$$

Розв'язання

Задане рівняння домножимо на 2:

$$2x^2+6-3(x+1)-2\sqrt{2x^2-3x+2}=0;$$

$$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}+1=0.$$

Заміна:

$$\sqrt{2x^2-3x+2}=y\ (y\geq 0).$$

Отримаємо

$$y^2-2y+1=0; \quad y=1;$$

$$\sqrt{2x^2-3x+2}=1; \quad 2x^2-3x+1=0;$$

Відповідь. $1; \frac{1}{2}$.

№ 89 **Задача 4.** Розв'язати рівняння

$$(x-1)(500x-501)(1000x-1001)^2=2001.$$

Розв'язання

Задане рівняння рівносильне такому:

$$(1000x-1000)\cdot(1000x-1002)\times$$
$$\times(1000x-1001)^2=4002000.$$

Заміна: $y=1000x-1001$. Отримаємо рівняння

$$(y+1)(y-1)y^2=4002000,$$

звідки маємо біквадратне рівняння

$$y^4-y^2-4002000=0,$$

з якого знаходимо $y^2=2001$. Отже,

$$x_{1,2}=\frac{1001\pm\sqrt{2001}}{1000}.$$

Відповідь. $\frac{1001\pm\sqrt{2001}}{1000}$.

№ 90 **Задача 5.** Розв'язати рівняння

$$4\sin x+3\cos x=5.$$

Розв'язання

Оскільки при $\cos\frac{x}{2}=0$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0,$$

і рівняння набуде вигляду $3\cos x = 5$, що не має розв'язків, то $\cos\frac{x}{2}\neq 0$ і можна зробити заміну:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Нехай $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тоді

$$\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}=5,$$

звідки

$$4t^2-4t+1=0, \quad t=\frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

№ 91 **Задача 6.** Розв'язати рівняння

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}.$$

Розв'язання

Очевидно,

$$x^2-1>0,\quad \left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-1\end{array}\right..$$

Але якщо $x<-1$, то ліва частина рівняння від'ємна, а права — додатня, отже, $x\in(1,\ \infty)$.

Зробимо заміну

$$x=\frac{1}{\sin t},\quad 0<t<\frac{\pi}{2}.$$

Тоді задане рівняння набуде вигляду:

$$\frac{1}{\sin t}+\frac{1}{\cos t}=\frac{35}{12},$$

або

$$12(\sin t+\cos t)=35\sin t\cos t.$$

Зробивши заміну $\sin t+\cos t=z$, отримаємо:

$$12z=35\cdot\frac{z^2-1}{2},$$

звідки

$$35z^2-24z-35=0;\quad z_1=-\frac{5}{7},\ z_2=\frac{7}{5},$$

проте при $0<t<\frac{\pi}{2}$ маємо: $z=\sin t+\cos t>0$,

отже,

$$\sin t+\cos t=\frac{7}{5}.$$

Позначимо $\frac{1}{x}=\sin t=y$. Тоді, розв'язуючи рівняння,

$$y+\sqrt{1-y^2}=\frac{7}{5},$$

отримаємо

$$y_1=\frac{3}{5},\ y_2=\frac{4}{5}.$$

Отже,

$$x_1=\frac{5}{3}\ \text{та}\ x_2=\frac{5}{4}$$

є коренями заданого рівняння.

Відповідь. $\frac{5}{3}; \frac{5}{4}$.

№ 92 **Задача 7.** Розв'язати рівняння

$$2\left(x^2+x+1\right)^2-7(x-1)^2=13\left(x^3-1\right).$$

Розв'язання

Легко бачити, що $x\neq 1$. Розділимо обидві частини рівняння на $(x-1)^2$. Маємо:

$$2\left(\frac{x^2+x+1}{x-1}\right)^2-7=13\frac{x^2+x+1}{x-1}.$$

Зробимо заміну

$$\frac{x^2+x+1}{x-1}=t,$$

тоді

$$2t^2-13t-7=0;\quad t=7 \text{ або } t=-\frac{1}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=7\\[2mm] \dfrac{x^2+x+1}{x-1}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x^2+x+1=7x-7\\ 2x^2+2x+2=1-x\end{array}\right..$$

Відповідь. 4; 2; –1; $-\frac{1}{2}$.

Задача 8. Розв'язати рівняння **№ 93**

$$\frac{2x^2-x+3}{3}-\frac{2x^2}{2x^2-4x+3}=\frac{x}{6}.$$

Розв'язання

Легко бачити, що $x \neq 0$. Маємо

$$\frac{x\left(2x+\frac{3}{x}-1\right)}{3}-\frac{2x^2}{x\left(2x+\frac{3}{x}-4\right)}=\frac{x}{6};$$

$$\frac{2x+\frac{3}{x}-1}{3}-\frac{2}{2x+\frac{3}{x}-4}=\frac{1}{6}.$$

Нехай

$$2x+\frac{3}{x}-1=y,$$

тоді

$$\frac{y}{3}-\frac{2}{y-3}=\frac{1}{6},$$

і при $y \neq 3$ маємо

$$\left(y^2-3y-6\right)\cdot 6=3(y-3).$$

Отже,

$$2y^2-7y-9=0;$$

$$y=\frac{9}{2} \quad \text{або} \quad y=-1;$$

$$2x+\frac{3}{x}-1=\frac{9}{2} \quad \text{або} \quad 2x+\frac{3}{x}-1=-1;$$

$$4x^2-11x+6=0 \quad \text{або} \quad 2x^2+3=0;$$

$$x\in\left\{2;\frac{3}{4}\right\} \quad \text{або} \quad x\in\varnothing.$$

Відповідь. $2;\ \frac{3}{4}$.

№ 94 **Задача 9.** Розв'язати рівняння

$$\left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2+5x+1\right)=9x^2.$$

Розв'язання

Легко бачити, що $x\neq 0$. Розділимо обидві частини рівняння на x^2.

Дістанемо

$$\frac{2x^2-3x+1}{x}\cdot\frac{2x^2+5x+1}{x}=9;$$

$$\left(2x-3+\frac{1}{x}\right)\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)=9.$$

Нехай

$$2x+\frac{1}{x}-3=y,$$

тоді

$$y(y+8)=9; \quad y^2+8y-9=0;$$

$$y=-9 \quad \text{або} \quad y=1;$$

$$2x+\frac{1}{x}-3=-9 \quad \text{або} \quad 2x+\frac{1}{x}-3=1;$$

$$2x^2+6x+1=0 \quad \text{або} \quad 2x^2-4x+1=0;$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2} \quad \text{або} \quad x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$; $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

XIV. АХ, ЦІ НЕСТАНДАРТНІ!

№ 95 **Задача 1.** Розв'язати в натуральних числах рівняння

$$x^2+2x-x!=0.$$

Розв'язання

Маємо

$$x^2+2x=x!$$

Оскільки $x \neq 0$, то

$$x+2=(x-1)!$$

Позначимо $x-1=y$. Маємо

$$y+3=y! \qquad (1)$$

Очевидно, що $y=3$ є коренем рівняння (1), а $y \in \{0; 1; 2\}$ — ні.

Якщо $y \geq 4$, то $y! > y(y-1)$, проте нерівність

$$y+3 > y^2 - y$$

не має розв'язків при $y \geq 4$, отже, інших розв'язків рівняння (1) не існує. (Іншими словами, $y!$ зростає швидше, ніж $y+3$.)

Отже, $x = 4$.

Відповідь. 4.

Задача 2. Розв'язати рівняння **№ 96**

$$\overline{xxx(x-1)} = (x-1)^{x-2}.$$

Розв'язання

Оскільки

$$5^4 = 625 < 1000, \quad 7^6 = 343 \cdot 343 > 10000,$$

то $5 < x-1 < 7$, звідки $x = 7$. Перевірка показує, що $6^5 = 7776$, так що $x = 7$ дійсно задовольняє умову задачі.

Відповідь. 7.

Задача 3. Довести, що рівняння **№ 97**

$$x! + y! = 10z + 9$$

не має натуральних розв'язків.

Доведення

Так як права частина рівняння — непарне число, то і ліва частина повинна бути непарним числом. Тому або x, або y дорівнює 1.

Нехай для визначеності $x=1$, тобто

$$y!=10z+8.$$

Права частина останньої нерівності не ділиться на 5, тому $y\le 4$, але жодне з цілих чисел, які задовольняють цій нерівності, не є розв'язком даного рівняння. Отже, твердження задачі доведено.

№ 98 **Задача 4.** Розв'язати рівняння

$$\operatorname{ctg}^2 x=\left\{\sin^2 x\right\}+\left[\cos^2 x\right],$$

де $\{x\}$ і $[x]$ — відповідно дробова та ціла частини числа x.

Розв'язання

Зауважимо, що $\sin^2 x\neq 0$, отже $\cos^2 x\neq 1$, тому $0\le\cos^2 x<1$, звідки $\left[\cos^2 x\right]=0$. Розглянемо два випадки:

$$0<\sin^2 x<1 \quad \text{або} \quad \sin^2 x=1.$$

Якщо $0 < \sin^2 x < 1$, то

$$\{\sin^2 x\} = \sin^2 x$$

і рівняння набуде вигляду:

$$\operatorname{ctg}^2 x = \sin^2 x$$

або

$$\sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0.$$

Звідки

$$\sin^2 x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \cos 2x = 2 - \sqrt{5}.$$

Отже,

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(2-\sqrt{5}\right) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $\sin^2 x = 1$, то $\{\sin^2 x\} = 0$ і рівняння набуде вигляду $\operatorname{ctg}^2 x = 0$, звідси $\cos^2 x = 0$, а отже, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(2-\sqrt{5}\right) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

№ 99 **Задача 5.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{x-4}-\sqrt{-1-x}=\sqrt[16]{-x}.$$

Розв'язання

Маємо

$$-1-x\geq 0,\ \ x\leq -1.$$

Але при $x\leq -1$

$$\sqrt[3]{x-4}<0,$$

отже,

$$\sqrt[3]{x-4}-\sqrt{-1-x}<0<\sqrt[16]{-x}$$

для всіх x з ОДЗ, тому

$$x\in\varnothing.$$

Відповідь. $\varnothing$.

№ 100 **Задача 6.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=4$$

на відрізку $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання

Розглянемо два вектори

$$\bar{a} = \left(2\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos x;\ \sqrt{3}\sin x\right),$$

$$\bar{b} = \left(\sqrt{3}\cos x;\ 2 - \sqrt{3}\sin x\right).$$

Тоді

$$|\bar{a}| = \sqrt{15 - 12\cos x}, \quad |\bar{b}| = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x},$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \left(2\sqrt{3}; 2\right).$$

Отже, задане рівняння набуде вигляду

$$|\bar{a}| + |\bar{b}| = |\bar{a} + \bar{b}|,$$

а це виконується тоді й тільки тоді, коли вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ є колінеарними та співнапрямленими, звідки випливає рівність

$$\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos x}{\sqrt{3}\cos x} = \frac{\sqrt{3}\sin x}{2 - \sqrt{3}\sin x}.$$

Розв'язуємо її:

$$4 - 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x + \sqrt{3}\sin x\cos x =$$

$$= \sqrt{3}\sin x\cos x;$$

$$2 = \sqrt{3}\sin x + \cos x;$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

На заданому інтервалі $x = \frac{\pi}{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{3}$.

№ 101 **Задача 7.** Розв'язати рівняння

$$(x - y)^2 + \left(e^x - y\right)^2 = 0{,}5.$$

Розв'язання

Розглянемо довільну точку графіка функції

$$f(x) = e^x$$

з абсцисою x:

$$A(x; e^x),$$

а також довільну точку графіка функції

$$g(x) = x$$

(бісектриси першого і третього координатного кутів) з абсцисою y:

$$B(y; y).$$

Ліва частина рівняння являє собою квадрат відстані між точками A та B.

Знайдемо найменшу можливу таку відстань r. Очевидно, r дорівнює відстані між вказаною бісектрисою та дотичною до графіка функції $f(x)$, паралельною графіку функції $g(x)$. Отже, якщо x_0 — абсциса точки дотику цієї дотичної, то

$$f'(x_0) = 1,$$

звідки

$$e^{x_0} = 1, \quad x_0 = 0.$$

Рівняння дотичної має вигляд

$$h(x) = x + 1.$$

Отже, r дорівнює відстані між прямими $g(x)$ та $h(x)$, а тому

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Як ми бачимо, за умовою відстань між точками A та B є найменшою з можливих, тобто точка A є точкою дотику вказаної дотичної до графіка функції $f(x)$.

Звідси

$$x = x_0 = 0,$$

а тоді, підставивши x в задане рівняння, маємо:

$$y = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, єдиним розв'язком даного рівняння є пара $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

Відповідь. $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

ЗМІСТ

Здано до виробництва 20.04.2007. Підписано до друку 26.06.2007. Формат 60×84 1/32. Папір офсетний № 1. Гарнітура «Ньютон». Друк офсетний. Ум. друк. арк. 3,5. Обл.-вид. арк. 3,8. Наклад 2000 прим. Зам. № 7-928

ТОВ «Видавництво „Факт"»
04080, Україна, Київ-80, а/с 76
Реєстраційне свідоцтво
ДК № 1284 від 19.03.2003
Тел./факс: (044) 287 1882, 287 1886
E-mail: office@fact.kiev.ua
Відділ збуту: (044) 463 6887
E-mail: sbyt@fact.kiev.ua
www.fact.kiev.ua

Надруковано з готових форм на ЗАТ «ВІПОЛ»
03151, Київ, вул. Волинська, 60
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 752 від 27.12.2001

Кушнір, Ісаак

К 96 101 задача: Рівняння. — К.: Факт, 2006. — 120 с.

ISBN 978-966-359-169-8

Вибрати з безлічі рівнянь сто одне — нелегко. Але цікаво. Кожне з них — це, по-перше, окремо взяте маленьке життя, а по-друге — математика. Математика у кращих її проявах і традиціях.

Розбираючи приклад за прикладом, читач зможе не тільки перевірити себе, але й збагатити арсенал прийомів розв'язання рівнянь, які зазвичай зустрічаються на іспитах до найпрестижніших вузів.

УДК 514
ББК 22.151

Науково-методичне видання

Ісаак КУШНІР
101 ЗАДАЧА: РІВНЯННЯ

Редактор *Леонід Фінкельштейн*
Технічний редактор *Олександр Дмитрієв*
Макетування обкладинки
Інокентія Вирового
Верстка та макетування
Дмитра Фінкельштейна

ФАКТ

ВИДАВНИЦТВО