А.Г. Конфорович

МАТЕМАТИЧНІ СОФІЗМИ І ПАРАДОКСИ

А. Г. Конфорович

МАТЕМАТИЧНІ СОФІЗМИ І ПАРАДОКСИ

Радянська школа

ПЕРЕДМОВА

Потрібно сьогодні сказати лише те,
що доречне сьогодні,
все інше відкладемо і скажемо,
коли буде потрібно.

ГОРАЦІЙ

Процес пізнання людиною навколишнього світу можна порівняти з радісним торжеством, бо кожна розкрита таємниця зміцнює віру її в свої сили. Але на шляху переможної людської думки виникали величезні, здавалося б нездоланні, перешкоди — задачі, перед якими були безсилі найвитонченіші міркування. Вчені боляче переживали такі невдачі. Давньогрецький філософ Діодор Кронос (пом. бл. 307 р. до н. е.), не розв'язавши однієї з найдавніших логічних загадок — парадоксу Евбуліда (див. розділ VI, № 5), помер від розпачу, а другий філософ Філет Косський, зазнавши такої самої невдачі, покінчив життя самогубством.

Давньогрецькі вчені натрапили на нерозв'язні задачі і в математиці. Вони докладали багато зусиль, щоб виявити механізми утворення таких загадок. Було встановлено, що наші міркування також підпорядковані певним законам (законам логіки), порушення яких знецінює результати, здобуті в таких міркуваннях. Нерозв'язність задач, з якими зустрілися Діодор Кронос та Філет Косський, пояснюється, як правило, порушенням законів логіки. Тому вже тоді гостро постало питання про систему «профілактичних заходів» — додержання певних правил міркувань з метою уникнення логічних пасток. Напевне, перша в історії спроба проведення «логічної профілактики» для початківців у математиці належить геніальному давньогрецькому математикові, автору славнозвісних «Начал» — Евкліду (IV ст. до н. е.). Він створив дивовижний збірник «Псевдарій», де вмістив різні помилкові міркування, до яких часто вдаються ті, хто починає вивчати математику. Отже, Евклід був автором першого з відомих досі збірників математичних софізмів та парадоксів. Доводиться тільки жалкувати, що цей твір патріарха математики не дійшов до нас. Зате вимогливість Евкліда до строгості й культури міркувань знайшла численних послідовників. Вони зібрали й опублікували велику колекцію математичних софізмів і парадоксів. У наш час педагоги й математики продовжують цю справу і зовсім не для того, щоб дивувати читачів. Людині властиво помилятися. Тому дуже важливо, щоб вона вміла виявляти свої та чужі помилки, вчилась уникати їх. Саме тут і стають у пригоді такі збірники, як «Псевдарій». Зрозуміло, що чим хитріший софізм, чим майстерніше замаскована помилка, тим більше задоволення мають її шукачі, бо кожне спростування софізму — це насамперед маленьке відкриття і прекрасна школа культури міркувань.

Збірники математичних софізмів і парадоксів завжди були популярними серед учителів і юних любителів математики. Про це свідчать і такі цікаві факти. 28 червня 1846 р. М. Г. Чернишевський писав братові Олександру: «Любий друг мій і брат мій Саша... Зізнаюсь тобі, дали мені тут горіха, сиджу одинадцять тижнів і 3 дні й не розгризу його. Чи не допоможеш вже хоч ти, а то доведеться, видно, як Іллі Муромцю, сидіти мені, доброму молодцю, сидьма 30 років? Я дав собі слово не сходити зі стільця, доки не розв'яжу цієї задачі, та щось не вдається; допоможи хоч ти, лише на тебе на одного і надія. Ось вона. Квадрат всякої сторони в усякому трикутнику дорівнює сумі квадратів двох інших сторін». М. Г. Чернишевський вмістив у листі креслення і навів міркування, які й привели до цікавого софізму (див.: V, № 22). 30 серпня 1846 року Микола Гаврилович знову пропонує брату софізм (див.: V, № 23).

У вересні 1884 року студент Петербурзького університету Олександр Ульянов писав матері: «Надсилаю татові брошуру «Математичні софізми», яку він хотів мати. Володі, я думаю, вона буде дуже корисною, якщо він стане самостійно розбирати ці софізми». Найбільш імовірно, що надісланою була книжка «Математичні софізми» прогресивного російського педагога-математика В. І. Обреїмова (1843—1911), яка вийшла на початку 1883 року в Петербурзі, і була найкращим на той час збірником математичних софізмів.

Очевидно, В. І. Ленін уважно опрацював книжку В. І. Обреїмова. В своїх працях він не раз використовує терміни «софізм» і «софістика». Так, у статті «Становище Бунду в партії» (1903 р.), характеризуючи помилки бундівців, Володимир Ілліч пише: «Міркування це ... схоже, як дві краплі води, на ті міркування, що їх математики називають математичними софізмами і в яких,— строго логічним, на перший погляд, способом,—

доводиться, що двічі по два п'ять, що частина більша від цілого і т. д. Існують збірники таких математичних софізмів, і дітям-учням вони дають свою користь» (Ленін В. І. Повне зібр. тв., т. 8, с. 64).

Однією з перших науково-популярних книжок з математики, виданих у молодій Країні Рад, був збірник математичних парадоксів В. Літцмана і Ф. Тріра «Де помилка?», який вийшов у Петрограді в тривожному 1919 році. З того часу було опубліковано кілька збірників математичних і фізичних софізмів та парадоксів (8, 14, 15, 29, 31, 32, 49) *, софізми та парадокси публікувалися в різних науково-популярних книжках та методичних виданнях. З часу виходу цих збірників колекція математичних і логічних софізмів та парадоксів поповнилася новими цікавими знахідками, які залишаються невідомими широким колам шанувальників точної думки. Ця книжка пропонує читачам не просто ще один збірник завдань з цікавої математики, а запрошує їх у своєрідну мандрівку неспокійними шляхами людської думки. Читачі мають стати співучасниками важкого пошуку закономірностей і таємниць абстрактного мислення.

У межах розділів задачі подаються в порядку зростання складності. Отже, можна працювати над завданнями книжки, починаючи з будь-якого розділу. Обов'язковим є тільки опрацювання вступної частини книжки. Вона не тільки ознайомить читачів з колом питань, пов'язаних з софізмами і парадоксами, а й розкриє джерела їх виникнення.

Хочеться застерегти також від спроб будь-що, негайно розв'язати залишені нам у спадщину мислителями минулого логічні вузли, які ще й досі не піддалися зусиллям найвидатніших логіків і математиків. Не варто втішати себе уявною перемогою. В цьому випадку ви, напевне, потрапите в одну з логічних пасток, про які йтиметься у вступі. Тут потрібна витримка, готовність відмовитися від ілюзії легкої перемоги. Початок міркувань, які приводять до софістичних висновків, показано знаком ▲, а кінець — ■.

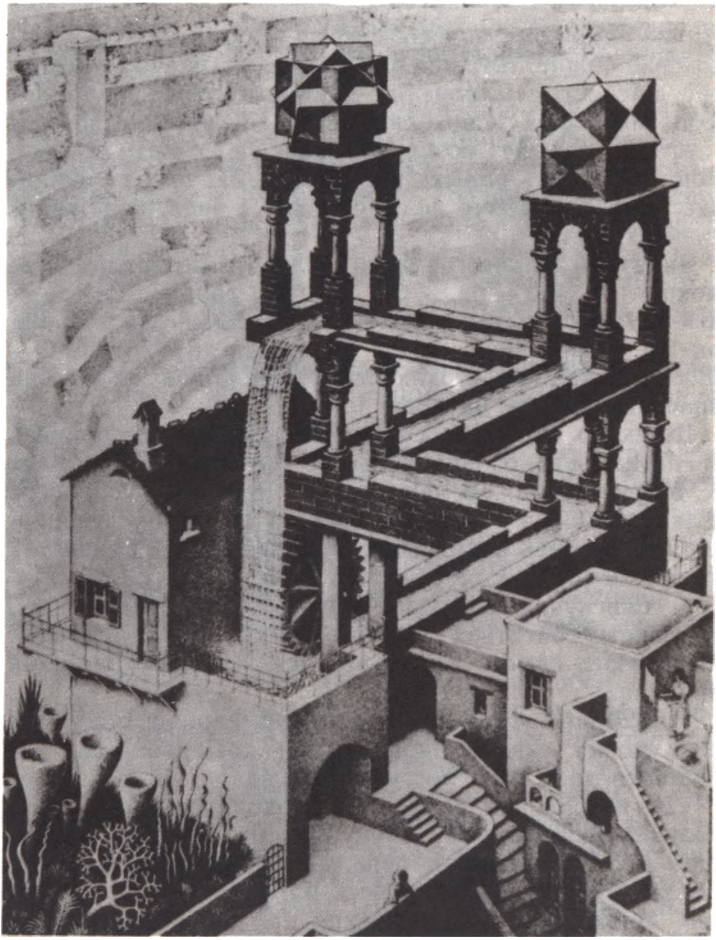
* Тут і далі числа в круглих дужках позначають номери згадуваних джерел в списку літератури, вміщеному в кінці книжки.

ІСТИНА І ШЛЯХ ДО НЕЇ

1

Але якщо я буду мовчати,
я ніколи не почну.

В. ШЕКСПІР



ЩО Є ІСТИНА

З усього, що під силу людському розумові, нема нічого відраднішого й достойнішого за пізнання істини.

ДЖ. КАРДАНО

В найширшому, філософському розумінні істина є цілком відповідне, тотожне відображення людиною реальної дійсності, відтворення предмета пізнання таким, яким він є поза нашою свідомістю і незалежно від неї.

Істина займає особливе місце в житті людини. Вона приносить радість або смуток, захоплює і викликає лють, паралізує волю слабких і веде на подвиги сильних.

Видатний давньогрецький філософ-матеріаліст Демокріт (бл. 460 — бл. 370 р. до н. е.) говорив, що доведення теореми йому дорожче за перський престол. Великий італійський вчений Джордано Бруно (1548—1600) зазнав жорстоких тортур і зійшов на вогонь інквізиції заради наукової істини.

Шлях до неї часто прокладається важкою працею. В передмові до французького видання «Капіталу» К. Маркс писав: «В науці немає широкого стовпового шляху, і тільки той може досягти її сяючих вершин, хто, не боячись втоми, карабкається по її каменистих стежках» (Маркс К., Енгельс Ф. Твори, т. 23, с. 27). Цей блискучий афоризм підтверджується життям і діяльністю багатьох учених різних епох і народів, насамперед самого Карла Маркса. Наведемо ще один приклад.

У 1820 році угорський математик Фаркаш Бойяй писав своєму синові Яношу, коли довідався, що той береться довести V постулат Евкліда:

«Ти не повинен намагатися подолати теорію паралельних ліній на цьому шляху: я знаю цей шлях, я пройшов його до кінця, я пережив цю безпросвітну ніч, і всякий світоч, всяку радість мого життя я поховав у ній. Молю тебе, облиш вчення про паралельні лінії... воно позбавить тебе здоров'я, дозвілля, спокою — воно тобі загубить всю радість життя. Ця безпросвітна імла може поглинути тисячу ньютонових башт, і ніколи на землі не розійдеться; ніколи... рід людський не досягне довершеної істини, навіть в геометрії!.. Я готовий був стати мучеником цієї істини, щоб тільки очистити геометрію від цієї плями, щоб передати роду людському бездоганну науку. Я проробив страшенну, гігантську роботу; я досяг значно більшого, ніж те, що було знайдено до мене, але повного задоволення я не дістав!» (Бойяй Янош. *Appendix*. Приложение. М.—Л., ГИТТЛ, 1950, с. 18—19). Перестороги були марними. Янош Бойяй пройшов увесь тяжкий шлях до розкриття таємниці паралельних прямих, пізнав радісні хвилини першовідкривача і гіркі години, навіть роки невизнання своїх парадоксальних на той час результатів.

Допитлива людська думка виявила невичерпну винахідливість, гнучкість і силу, відвойовуючи таємниці природи, пізнаючи закономірності навколишнього світу. Спочатку було особливо важко. Людина, гостро відчуваючи безсилля перед стихіями, щедро наділяла чарівною пізнавальною здатністю своїх фантастичних героїв. Так, маска монгольського бога війни Жамерана має три ока, давньогрецьку міфічну істоту Аргус зображують навіть зі ста очима.

На шляху пошуку істини людина створювала й створює дивовижні прилади, які допомагають їй глибше проникати в сутність досліджуваних об'єктів.

Все ж прилади тільки збагачували, загострювали або підсилювали людські відчуття. А чуттєве пізнання часто приводило людину до помилкових висновків. Те, що здавалося зрозумілим і очевидним (очам видно!), часто виявлялося помилкою. Люди спостерігають, як Сонце «обертається навколо Землі», насправді ж цей рух є тільки позірним наслідком руху Землі навколо Сонця і власної осі.

Багатьом поколінням математиків здавалося очевидним, що будь-яка поверхня в тривимірному евклідовому просторі обов'язково повинна мати дві сторони. А в 1858 році німецький математик Август Мебіус (1790—1863) здивував світ парадоксальним математичним об'єктом — односторонньою поверхнею, названою пізніше «листком Мебіуса». Цей геометричний феномен знайшов численні застосування в техніці і мистецтві (див.: Квант, 1978, № 4, 6; 1979, № 1; Барр Ст. Россыпи головоломок. М., 1978; Левитин К. Геометрическая рапсодия. М., 1976). А скільки разів люди дають неправильне тлумачення інформації, яка надходить від органів чуттів, коли оцінюють розміри тіл, інтервали часу, положення предметів у просторі, їх колір! Ці особливості сприймання нами тривимірного простору з дивовижною майстерністю використав у своїх гравюрах відомий голландський художник Мауріц Корнеліус Ешер (1898—1972). Деякі з них прикрашають обкладинку і шмуцтитули нашої книжки. Інші приклади подібних несподіванок, які називаються геометричними ілюзіями, дано на таблицях 2—8.

В оповіданні «Сфінкс» американського письменника Едгара По описано такий випадок з героєм оповідання: «Справа в тому, що скоро по приїзді в котедж зі мною трапилося щось... незрозуміле і зловісне... Я був настільки приголомшений і спантеличений, що минуло багато днів, перш ніж я наважився розповісти про це моєму товаришеві.

У кінці дуже жаркого дня я сидів з книжкою в руках біля відчиненого вікна, звідки відкривався вид на берег річки і на віддалений пагорб, з ближчого до нас боку майже безлісий внаслідок так званого оповзня. Думки мої вже давно відірвалися від книжки і перенеслися до сусіднього з нами міста, де панували пригніченість і жах. Відвівши очі від сторінки, я побачив оголений схил, а на ньому — огидну потвору, яка швидко спустилася з пагорба і зникла в густому лісі біля його підніжжя. При появі цієї істоти я спершу подумав, чи не збожеволів я, і в усякому разі не повірив своїм очам, минуло чимало часу, поки я переконався, що не божевільний і не сплю. Але якщо я опишу потвору, яку я чітко побачив і мав час спостерігати, доки вона спускалася по схилу, читачам ще важче, ніж мені, буде в неї повірити».

Страшною потворою виявилася... комаха, яка проповзла по павутині вздовж віконної рами. Спотворення і гіперболізація чуттєвого образу змусили героя оповідання пережити хвилини глибокого потрясіння.

Щоб уникнути подібних і ще трагічніших ситуацій, людина з перших кроків своєї діяльності, задовго до винайдення різних приладів вдавалася до іншого методу пізнання світу, який допомагав не тільки критикувати, а й коригувати чуттєве пізнання. Цим методом стало мислення. Тільки завдяки мисленню вдається пояснити й уточнити факти, виявлені в результаті спостережень і дослідів.

Вищою формою розумової діяльності людини є теоретичне мислення. Серед різних теоретичних методів пізнання світу надзвичайно потужним і своєрідним став математичний метод. Він зайняв особливе місце в пізнанні і за масштабами застосовності, і за мірою довіри до істин, які дістає математика. Визначний французький філософ і математик П'єр Гассенді (1592—1655) писав: «Той, хто з дитинства пройнявся математикою, засвоївши її неспростовні доведення, так підготовлений до сприймання істини, що легко відкине будь-яку фальш».

Саме на цю важливу рису математики звертає увагу визначний радянський астрофізик, президент АН Вірменської РСР В. А. Амбарцумян: «Математика важлива для навчання школярів не тільки як основа дальшого технічного і професійного навчання. Вона важлива насамперед тому, що навчає школяра точного і правильного мислення. А мислити правильно потрібно всім — і робітникові, і інженерові, і вченому, і солдатові».

Математика має справу з абстракціями, які створюються в нашій свідомості. Проте вона вивчає хоча й опосередковано, кількісні відношення та просторові форми реального світу.

Багато тисячоліть зайняв період конкретних спостережень над властивостями чисел і геометричних фігур. Тільки в VII—III ст. до н. е. в Стародавній Греції математика сформувалася як окрема галузь теоретичного знання із своїми особливими методом і предметом.

Щоб бути переконаним у справедливості здобутих за допомогою математики висновків, учені турбувалися про надійність, бездоганність найвищого і найскладнішого інструменту пізнання — мислення. Тільки воно виявляє найважливіші, найглибші характеристики об'єктів і відношення між ними. Мислення здійснюється в певних формах, а сам процес мислення і його результати фіксуються та передаються певною мовою.

МОВА І ФОРМИ ДУМКИ

З усіх мов світу найкраща — це мова штучна, вельми стисла мова, мова математики...

М. І. ЛОБАЧЕВСЬКИЙ

Перш ніж вирушити в дивовижний світ парадоксів і софізмів, потрібно оснаститися необхідним для такої подорожі інвентарем. Це будуть знання, про які відомий англійський філософ Томас Гоббс (1588—1679) писав: «Перші основи всякої науки справді не осліплюють своїм блиском, вони скоріше скромні, сухі і майже потворні». Але необхідні, додамо ми, для розуміння краси найвищих вершин математики, необхідні, як знання азбуки для розуміння О. С. Пушкіна і Т. Г. Шевченка, як сім нот для виконання музики Л. ван Бетховена і П. І. Чайковського.

Люди висловлюють свої думки й обмінюються ними за допомогою мови.

Далі ми найчастіше користуватимемося природною мовою, але там, де буде доцільно, вводитимемо й деякі математичні символи та позначення. У математичних книжках, у тому числі й у науково-популярних, зустрічаються часто знаки $\forall$ та $\exists$ — квантори загальності й існування. Знак $\forall$ читається «для всіх...» і називається *квантором загальності,* знак $\exists$ читається «існують такі...» і називається *квантором існування.* Квантори явно або неявно присутні в кожному означенні чи теоремі. Розглянемо, наприклад, такі два твердження.

1. Для будь-яких цілих чисел a та b існує таке ціле число c, що $a=b+c$.

2. Квадрат гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює сумі квадратів його катетів (теорема Піфагора).

У першому твердженні квантори існування і загальності названо, а в другому квантор загальності присутній неявно, оскільки, як відомо, теорема Піфагора справедлива для всіх прямокутних трикутників.

Ми вживатимемо знаки кванторів лише в окремих випадках, де потрібно буде наголосити, що йдеться про всі чи тільки про деякі елементи певної множини.

Об'єкти (реальні чи абстрактні, зокрема математичні) у тій чи іншій мові позначають за допомогою певних символів цієї мови — *імен* цих об'єктів. Сам об'єкт (реальний чи абстрактний) є *носієм*, або *значенням*, свого імені.

Ім'я не тільки позначає об'єкт, а й завжди виражає і деякий смисл. *Смисл* імені — це те, що ми розуміємо, коли засвоїмо ім'я. Наприклад, імена «Столиця СРСР» і «Москва» позначають один і той самий об'єкт, хоча відрізняються за смислом. Ім'я, як було вже сказано, завжди має смисл, але не завжди позначає якийсь об'єкт. Наприклад, такі імена, як «Мавка», «Пегас» тощо, мають смисл, але не позначають жодного реального об'єкта, тобто не мають значення. Так само ім'я «найменший дійсний корінь рівняння $x^2+1=0$» має смисл, але не має значення (такий корінь не існує).

Імена об'єктів у наукових теоріях використовують, додержуючи ряду принципів.

У реченні мова йде про предмети, імена яких зустрічаються у ньому, а не про імена предметів. У математиці один і той самий предмет може мати багато, навіть нескінченну множину імен. Наприклад, символи $2-1$, $\sin\frac{\pi}{2}$, $0!$, 1983^0 можна розглядати як різні імена числа «один» (це слово в лапках теж є одним з імен того ж числа!).

Кожний символ, який використовується в ролі імені, має позначати не більш як один предмет. У природній мові цей принцип додержується не завжди. Наприклад, слово «коса» має три значення.

Принцип заміни. Якщо об'єкт, про який говориться в реченні, має кілька імен, то речення не змінює свого значення при заміні одного імені іншим.

Речення також розглядають як імена, що позначають особливий абстрактний об'єкт — значення істинності: істину чи хибність; смислом речення є судження, яке воно виражає.

Наприклад, речення «$2^2>5$» позначає хибність і не змінить свого значення, якщо замінити ім'я 2^2 на ім'я 4.

Довільне речення, про яке можна цілком певно і об'єктивно сказати, істинне воно чи хибне, називається *висловленням*. Наприклад:

1) паралелограм має чотири сторони;
2) $25 \vdots 5$;
3) $2>5$;
4) діагональ і сторона квадрата — сумірні відрізки;
5) темніє;
6) котра година?

Речення 1) — 4) є висловленнями, висловлення 1) і 2) — істинні (позначають істину), 3) і 4) — хибні (позначають хибність), речення 5) і 6) не є висловленнями (не мають значення).

Очевидно, що не будуть висловленнями і питальні речення, оскільки в них не виражається певного судження про предмет і не можна сказати, істинні вони чи хибні.

Імена, які завжди позначають один і той самий предмет, тобто мають одне і те саме значення, називають *константами* (сталими). Наприклад: π, sin, exp (для позначення функції), $\boldsymbol{N}$ (для позначення множини натуральних чисел). Крім сталих, в математиці є символи, які можуть набувати значення будь-якого предмета з певної множини (області визначення) предметів. Ці символи називають *змінними*.

Знакосполучення, які містять одну або кілька змінних, називають *реченнями із змінними,* або *формами* (йдеться про змінні, які входять вільно, а не пов'язані кванторами). Наприклад, вираз $x^3+5x(x\in R)$ є числовою формою, а вираз $x^2+6x=0\ (x\in R)$ — висловлювальною формою. Але коли замість змінної x підставити ім'я якогось числа, то числова форма перетвориться в ім'я певного числа, а висловлювальна форма стане висловленням. У висловлення така форма перетворюється і тоді, коли всі змінні, що входять до неї, пов'язані кванторами.

В кожному висловленні є об'єкт і предикат (підмет і присудок у реченні природної мови). *Об'єкт* — це предмет (або предмети), про які йдеться у висловленні, а *предикат* — характеристична властивість, за допомогою якої розглядувані предмети виділяються з якоїсь множини. Наприклад, якщо через P позначено властивість (предикат) натурального числа n бути простим, то висловлювальну форму «натуральне число n є простим» можна записати у вигляді $P(n)$. Якщо у висловлювальну форму $P(n)$ замість змінної n підставляти певні її значення з N, то діставатимемо істинні або хибні висловлення: $P(2)=1$, $P(3)=1$, $P(4)=0$ і т. д. (тут і далі значення «істина» висловлення ми позначатимемо числом 1, а «хибність» — числом 0). Тому форму можна розглядати як функцію, в якій область визначення збігається з областю визначення форми, а область значення належить двохелементній множині $B=\{0,\ 1\}$. Зокрема, $D(P)=N$, $E(P)=\{0,\ 1\}$.

Вищою формою мислення є логічне, або понятійне, пізнання.

Поняття — це результат абстрагування від певних неістотних для розв'язування розглядуваної задачі ознак досліджуваного об'єкта. Отже, поняття — це форма мислення, яка відбиває істотні властивості об'єктів, що вивчаються.

Сукупність істотних ознак об'єктів, які вивчаються, називається *змістом* поняття, а множина об'єктів, охоплених поняттям,— його *обсягом*.

Поняття вводяться за допомогою логічної операції — *означення*. Найчастіше користуються так званим класичним означенням — *через найближчий рід і видову ознаку*.

Поняття, яке означується, називають *означуваним,* а те поняття чи групу понять, за допомогою яких вводиться означуване поняття, називають *означуючими.* Наприклад: «Паралелограм $\overset{\text{озн}}{\Leftrightarrow}$ чотирикутник, протилежні сторони якого паралельні», «Ромб $\overset{\text{озн}}{\Leftrightarrow}$ паралелограм, сторони якого рівні». У першому означенні «чотирикутник» — означуюче, а «паралелограм» — означуване поняття, в другому означуючим вже буде «паралелограм», а означуваним — «ромб». У першому означенні родовим поняттям є «чотирикутник», видовою ознакою — «паралельність протилежних сторін». Ця остання і задає на множині (роді) чотирикутників підмножину (вид) чотирикутників, які є паралелограмами.

У другому означенні родовим поняттям є «паралелограм», а видовою ознакою — «рівність протилежних сторін».

Нові математичні поняття вводять також за допомогою *описування* їх властивостей. Такі означення називають *дескриптивними,* або *дескрипціями.* Однією з дескрипцій числа π може бути така: «Те число, яке, будучи помноженим на довжину діаметра, дає довжину відповідного кола».

Поняття можна вводити також конструктивно — явним описуванням алгоритму побудови означуваного об'єкта. Наприклад: «Арифметичною прогресією називається ряд чисел виду: a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d, \ldots,$ де a, $d \in \mathbf{R}$».

Щоб поняття стали надійним інструментом пізнання, були *коректними,* їх означення потрібно будувати, додержуючи ряду вимог. Зокрема, коли означення подається через рід і видову ознаку, не можна опускати («арифметична прогресія — це коли кожен член...») чи підміняти родове поняття («арифметична прогресія — це прогресія...», замість «послідовність»); нечітко задавати видову ознаку («просте число — це натуральне число, яке має два різні дільники») замість поняття — «натуральне число, яке має лише два дільники — одиницю і самого себе». Поняття не повинно вводитися за допомогою взаємно суперечливих характеристик («круглий квадрат», «квадратне коло» і т. д.). Трапляється, що суперечності в означенні глибоко приховані і виявити їх можна, лише довівши одну чи кілька теорем. Наприклад, означення «трикутник з двома прямими кутами» означає в евклідовій геометрії порожню множину об'єктів, але щоб переконатися в цьому, потрібно спочатку довести, що сума величин кутів трикутника в цій геометрії одна й та сама і дорівнює 180°.

Щоб означення було коректним, необхідною є відсутність омонімії (від грецьк. ὁμωνυμος — однойменний). Поняття має задаватися однозначно. Наприклад, не можна говорити, що «$\sqrt{a}$ — це таке число x, що $x^2=a$». Якщо $a<0$, то цим означенням на множині R не задається ніякий об'єкт, якщо ж $a>0$, то воно визначає два дійсних числа.

Важливою є також вимога відсутності замкненого (або хибного) круга в означенні: означуюче поняття не повинно міститися в означуваному чи збігатися з ним («розв'язок рівняння — це число, яке є його коренем»). У випадку ланцюга означень вимога недопустимості «замкненого круга» полягає в тому, що не тільки означуюче не може міститися в означуваному, але й саме означення не може містити понять, які раніше на якомусь етапі були означені через означуване.

Зрозуміло, що поняття описують лише окремі, хоча й найважливіші для нас властивості предметів. Тому В. І. Ленін застерігав, що працювати з поняттями потрібно, «не забуваючи умовного і відносного значення всіх визначень взагалі, які ніколи не можуть охопити всебічних зв'язків явища в його повному розвитку...» (Ленін В. І. Повне зібр. тв., т. 27, с. 363). Але це жодною мірою не применшує значення понять у наукових дослідженнях, політичних і наукових дискусіях, на чому також наголошував В. І. Ленін: «Сперечатися про слова, звичайно, не розумно... Але треба виявити точно поняття, якщо хотіти вести дискусію» (Ленін В. І. Повне зібр. тв., т. 30, с. 89).

Історія науки знає багато смішних і драматичних дискусій, які виникали тому, що опоненти вкладали різний зміст в одне і те ж поняття. Наведемо два приклади з історії знаменитої задачі — про квадратуру круга. У 1665 році англійський філософ Т. Гоббс опублікував книжку, в якій, крім інших своїх математичних знахідок, виклав красиве наближене обчислення числа π. Автор, не маючи математичної підготовки, вважав його точним. Знаменитий математик Дж. Валліс (1616—1705) піддав критиці погляд Гоббса в памфлеті, що став початком тривалої й запеклої суперечки. Гоббс до самої смерті так і не зрозумів критики Валліса, оскільки в поняття точки, прямої і площини вкладав зовсім інший зміст, ніж надавали цим поняттям у математиці (детальніше див.: 11, с. 421—425). Відомий також конфлікт між полковником Монтейлем, який надіслав до Паризької Академії своє розв'язання задачі про квадратуру круга, і секретарем цієї Академії математиком Дарбу (1842—1917). Учений відхилив роботу полковника і в ході дискусії зажадав, щоб той дав означення довжини кола, тоді його роботу буде розглянуто. Полковник відмовився, посилаючись на те, що довжину кола не означують, а вимірюють. Оскільки основне поняття так і не було означене, дискусія і розгляд роботи не відбулися.

ЯК МИ МІРКУЄМО

Оскільки логіка є мистецтво, яке впорядковує і пов'язує думки, то я не бачу підстав лаяти її. Навпаки, люди помиляються саме тому, що їм бракує логіки.

Г. В. ЛЕЙБНІЦ

У повсякденній роботі і в процесі наукових досліджень людина весь час міркує, думає, прагнучи із уже відомих їй знань дістати нові. Ці нові знання називають ***вивідними***. Давньоіндійські логіки часто наводили такий приклад. Нехай ми знаємо, що «там, де є дим, є і вогонь» і що «на пагорбі є дим», то на основі цих відомостей дістаємо нове, вивідне знання: «на пагорбі є вогонь».

Якщо вихідні дані були істинними, то нам не було потреби збиратися на пагорб, щоб переконатися в існуванні там вогню.

Але чи завжди так буває? Якось на уроці математики на запитання вчителя, чому розглядуваний паралелограм не є ромбом, учень побудував таке міркування: «Якщо всі діагоналі паралелограма перпендикулярні, то цей паралелограм — ромб, але в даному паралелограмі діагоналі не перпендикулярні, тому цей паралелограм не є ромбом».

Наведені міркування дуже схожі на ті, які почула Аліса від Чеширського Кота в казці англійського математика Чарлза Лютвіджа Доджсона (1832—1898), який друкував свої казки і збірники з цікавої математики та логіки під псевдонімом Льюїс Керролл. Ось який діалог відбувся між Алісою і Чеширським Котом:

«— А звідки ви знаєте, що ви не в своєму розумі?

— Почнемо з того, що пес в своєму розумі. Згодна?

— Припустимо,— погодилася Аліса.

— Далі,—сказав Кіт.— Пес гарчить, коли сердиться, а коли задоволений, виляє хвостом. Ну, а я муркочу, коли задоволений, і виляю хвостом, коли серджуся. Тому я не в своєму розумі» (28, 54).

Аліса з недовір'ям сприйняла міркування Чеширського Кота.

Вчитель пояснив учневі, що, хоча його висновок є правильним (даний паралелограм не є ромбом), в міркуваннях він припустився помилки, яка обезцінює цей висновок. Міркуючи таким же чином, можна дістати і неправильний висновок. Учитель вказав на сосновий стіл, який стояв у класі, і побудував хибне міркування, аналогічне за формою до міркування учня: «Якщо стіл дубовий, то він дерев'яний; цей стіл не дубовий, тому він не дерев'яний».

Правильні міркування дають істинне знання в усіх випадках. Адже далеко не завжди можна перевірити, істинне чи хибне знання дістали в результаті проведених міркувань. Найчастіше ми йдемо до нового знання лише від правдоподібної гіпотези, істинність якої саме і мають підтвердити наші міркування. Тоді єдиною надійною гарантією істинності висновків є впевненість в істинності вихідних посилок, а також у тому, що закони, за якими будувалися висновки (форми думки), гарантують їх істинність.

Наука про закони і форми мислення називається *логікою*. Вона допомагає будувати міркування так, щоб дістати істинні результати. Логіка — це ніби цементний розчин, що з'єднує різні галузі знань, і гігієнічний засіб, який використовується, щоб з'єднувані частини були здоровими компонентами величезного організму — науки.

Ми обмежимося мінімумом інформації з логіки. Адже логічна грамотність є важливим компонентом загальної культури мислення. Зрозуміло, що ознайомлення з мінімумом логічних понять ще не забезпечує логічної грамотності. Важливим кроком до неї буде робота над пропонованими далі вправами.

Умовиводом називається сукупність висловлень, наприклад A_1, A_2, ..., A_n, B, одне з яких (наприклад, B) випливає з висловлень A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, тобто висловлення B істинне завжди, коли істинні висловлення

A_1, $A_2, \ldots, A_{n-1}$, A_n. У цьому випадку висловлення $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ називаються *посилками,* а B — *висновком.*

Посилки — це висловлення, які містять вихідне знання, а висновок — висловлення, яке містить нове знання, здобуте із вихідного (із посилок). У загальному випадку умовиводи зображують схемою

$$\frac{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{n-1},\ A_n}{B}.$$

Умовиводи завжди виражаються кількома реченнями, пов'язаними одне з одним спільним терміном (спільним словосполученням або формулою). Наявність в окремих реченнях спільного імені свідчить про те, що у висловленнях, виражених даними реченнями, є спільна думка, спільне знання, яке ніби об'єднує окремі речення і формує нове знання про досліджуваний предмет.

Умовиводи можна поділити на дві групи: *безпосередні* і *опосередковані.* Безпосередні умовиводи мають тільки одну посилку. Наприклад, з висловлення «Жодний круг не є квадратом» легко зробити безпосередній висновок: «Жодний квадрат не є кругом». В опосередкованих умовиводах є більш ніж одна посилка. Так, з двох посилок «Усі ромби є паралелограмами» і «$ABCD$ — ромб» дістаємо висновок: «*$ABCD$ — паралелограм*».

За формою умовиводи діляться на цілий ряд видів, із яких найчастіше ми розглядатимемо *дедуктивні* і *індуктивні.*

За допомогою *дедуктивних* (від лат. *deductio* — виведення) міркувань переходять від загальних положень до вужчих. Дедуктивний умовивід застосовується щоразу, коли потрібно розглянути якесь конкретне явище на основі вже відомого загального положення і дістати щодо цього явища певний висновок. Отже, завжди, коли конкретний факт підводимо під загальне правило, а потім із загального правила дістаємо висновок щодо цього конкретного факту, ми будуємо дедуктивні умовиводи.

Нехай, наприклад, нам відомий такий конкретний факт: «Три дані точки не лежать на одній прямій» і загальне правило: «Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину».

Застосовуючи це загальне правило до даного конкретного факту, дістаємо (на підставі дедуктивного умовиводу) такий висновок: «Через три дані точки можна провести площину».

Індуктивним (від лат. *inductio* — наведення) називають умовивід, в результаті якого на підставі знань про окремі об'єкти певного класу дістають загальний висновок, який стосується всіх об'єктів цього класу. Розглянемо, наприклад, умовиводи:

«Круг перетинається прямою в двох точках»
«Еліпс перетинається прямою в двох точках»
«Парабола перетинається прямою в двох точках»
«Гіпербола перетинається прямою в двох точках»
«Круг, еліпс, парабола та гіпербола — це всі види конічних перерізів».

«Всі конічні перерізи перетинаються прямою в двох точках».

З допомогою цього умовиводу на підставі знань про всі окремі об'єкти класу ми дістали знання про цілий клас цих об'єктів. Такий умовивід називають *повною індукцією* (з його допомогою дістаємо лише правильні висновки).

Якщо ж загальний висновок про весь клас об'єктів робиться на підставі знання лише про деякі його об'єкти, то маємо так звану *неповну індукцію*. Міркування, що грунтуються на неповній індукції, можуть приводити як до істинних, так і до хибних висновків. Наприклад: «Числа 15, 25, 35, 55, 65 кратні 5, тому будь-яке число, яке закінчується цифрою 5, кратне 5». Дістали істинний висновок, і його можна довести. Підставляючи у вираз $991n^2+1$ натуральні значення змінної $n=1, 2, 3, \ldots$, ми жодного разу не матимемо точного квадрата, якщо навіть витратимо на такий обчислювальний марафон століття безперервної роботи з арифмометром. І все ж висновок за індукцією «Для всіх натуральних n: $991n^2+1 \neq k^2$» буде неправильним. Числа виду $991n^2+1$ можуть бути точними квадратами. Але тільки за допомогою ЕОМ вдалося обчислити, що найменше значення n, при якому число $991n^2+1$ буде точним квадратом, дорівнює

12 055 735 790 331 359 447 442 538 767.

Отже, якщо міркування здійснюється за неповною індукцією, кількість окремих випадків, коли висловлена гіпотеза справджується, не має вирішального значення. Наведений вище приклад показує, що вона може справджуватися для величезної кількості окремих випадків і бути водночас хибною взагалі. Тому на основі неповної індукції висуваються гіпотези, які тільки після строгого доведення їх набувають статусу істинних висловлень.

ЯК ПРИЙТИ ДО ІСТИНИ

Не можна пошкодити істині більше, ніж бажанням побудувати її на хибних умовиводах.

П. МОПЕРТЮІ

Мислення як окрема і, безумовно, найскладніша форма руху матерії підпорядковане певним об'єктивним законам — законам логіки, які потрібно було виявити, дослідити, щоб, додержуючи їх у міркуваннях, діставати з істинних знань нові істинні знання. У цих законах сконцентровано і узагальнено велетенський досвід практичної діяльності людства. В. І. Ленін писав: **«...ПРАКТИЧНА ДІЯЛЬНІСТЬ ЛЮДИНИ МІЛЬЯРДИ РАЗІВ ПОВИННА БУЛА ПРИВОДИТИ СВІДОМІСТЬ ЛЮДИНИ ДО ПОВТОРЕННЯ РІЗНИХ ЛОГІЧНИХ ФІГУР, ЩОБ ЦІ ФІГУРИ МОГЛИ НАБУТИ ЗНАЧЕННЯ АКСІОМ»** (Ленін В. І. Повне зібр. тв., т. 29, с. 160).

Розповідають, що якось астроном, фізик і математик мандрували по Шотландії. Із вікна вагона вони побачили в лузі чорну овечку. «Цікаво! — зауважив астроном.— Виявляється, в Шотландії всі овечки чорні». «Е, ні,— відгукнувся фізик.— У Шотландії деякі овечки чорні». Математик не погодився з обома: «У Шотландії є принаймні один луг, на якому пасеться принаймні одна овечка, у якої принаймні один бік чорний».

Цей дотепний жарт дуже вдало підкреслює характерні особливості математичного мислення.

З часів Стародавньої Греції за математикою закріпилася репутація точної науки. Радянський математик Ю. А. Шрейдер пише: «Невже теорема Піфагора цінна тільки можливістю обчислити гіпотенузу за відомими катетами? Хіба мало означає добута з неї впевненість у вічності і непохитності логічного знання? Скеля, здатна сплющити мене в таблетку, буде сточена водою і вітром, а теорема Піфагора залишиться вічною істиною».

Піфагорійці першими розглядали математику як науку, що дає істинне знання. Згодом у геометрії, а потім і в математиці взагалі доведення, що грунтувалися на чуттєвому сприйманні, замінювалися доведеннями, заснованими на умовиводах. «Оригінальність греків,— пишуть Н. Бурбакі (псевдонім, що об'єднує групу математиків різних країн, в основному французьких),— полягає саме в їхніх свідомих спробах розмістити ланцюг математичних доведень у таку послідовність, щоб перехід від однієї ланки до наступної не залишав місця сумніву і завоював загальне визнання». Евклід (IV ст. до н. е.) створює першу в історії науки теоретичну систему, побудовану на основі дедуктивного методу,— свої славнозвісні «Начала».

Величезне значення для формування логічних основ математики мали праці визначного давньогрецького філософа, вченого-енциклопедиста Арістотеля (384—322 рр. до н. е.). У логічних трактатах «Категорії», «Про тлумачення», «Перша аналітика», «Друга аналітика», «Топіка» (див.: Аристотель. Сочинения. В 4-х т. М., 1978, т. 2) він заклав основи формальної логіки, з гордістю і повним правом заявивши, що нова дисципліна, для якої він так і не знайшов єдиної назви,— його дітище і що в цій галузі до нього не було зовсім нічого. Вчений показав, що правильні міркування підпорядковані невеликому числу законів, які не залежать від змісту висловлень, а тільки від їх форми. Тому традиційну Арістотелеву логіку називають ще *формальною.*

Додержання законів формальної логіки — неодмінна умова визначеності, послідовності, несуперечливості, доказовості та істинності наших міркувань, правильного відображення в них досліджуваного предмета.

Закон тотожності — один з чотирьох основних законів формальної логіки — вимагає, щоб одна і та ж думка, яка наводиться в даному умовиводі, при повторенні мала один і той самий зміст. Багато помилок у міркуваннях пов'язано саме з порушенням цього закону. Вони зумовлені багатозначністю слів, словосполучень і речень природної мови. Ці помилки можна поділити на три види: еквівокація, логомахія і амфіболія.

Суть помилки *еквівокації* (від. лат. *aequus* — рівний, *vocalis* — голосний,— такі, що звучать однаково) в тому, що в міркуваннях використовують багатозначне ім'я предмета, то в одному, то в іншому значенні, вважаючи це ім'я однозначним. Наприклад, в умовиводі «Кожний метал є елементом. Латунь — метал. Отже, латунь є елементом» неправильний висновок, обумовлений помилкою еквівокації: в двох значеннях використано ім'я «метал». У першому реченні — в значенні хімічного елемента, в другому йдеться про сплав металів — речовину, яка має фізичні властивості металу: ковкість, електропровідність, металевий блиск і т. д.

У математиці помилка еквівокації майже неможлива і завжди очевидна, оскільки вимога відсутності омонімії убезпечує нас від двозначності понять, використовуваних у математичних міркуваннях.

Іноді під час дискусії один з її учасників використовує деяке багатозначне ім'я в іншому значенні, ніж його опонент. Суперечка може бути нескінченною, якщо опоненти не уточнять значення даного імені. Такий диспут називається *логомахією* (від грецьк. «логос» — слово і «махе» — суперечка). Логомахією називається також диспут, який не дає нічого суттєво важливого. Наприклад, можна без кінця сперечатися на тему: «Чи щаслива людина, яка живе у злагоді з природою?», оскільки словосполучення «жити у злагоді з природою» та ім'я «щастя» є багатозначними.

Амфіболія (від грецьк. «амфіболія» — двозначність) виникає, коли використовують речення, яке можна тлумачити по-різному. Наприклад, відома фраза «Страчувати не можна помилувати» допускає два протилежні тлумачення: «Страчувати не можна, помилувати» і «Страчувати, не можна помилувати». Щоб уникнути такої помилки, слід використовувати в міркуваннях імена (окремі слова або словосполучення), з яких кожне має тільки одне значення. Про це прекрасно сказав Л. М. Толстой: «Єдиний спосіб розумового спілкування людей є слово, і для того, щоб спілкування це було можливим, потрібно використовувати слова так, щоб при кожному слові безсумнівно викликалося у всіх відповідне поняття».

Закон суперечності (латинська назва — *Lex contradictionis*) полягає в тому, що не можуть бути одночасно істинними два *протилежні* висловлення про один і той самий об'єкт, взятий в один і той самий час і в одному й тому самому розумінні. Отже, не можна одночасно стверджувати й заперечувати щось про один і той самий об'єкт, бо такі висловлення не можуть одночасно бути істинними.

Закон суперечності пов'язаний з так званими *контрарними* (від латинського — *contrarius* — протилежний) протилежностями. Це вид протилежностей, коли зіставляється загальностверджувальне і загальнозаперечувальне висловлення: «Всі ромби — опуклі чотирикутники», «Жоден ромб не є опуклим чотирикутником».

Зауважимо, що обидві контрарні протилежності можуть бути хибними: «Всі прості числа непарні», «Всі прості числа парні», тобто існує третя можливість — «Існує єдине парне просте число», подана у формі окремого, або одиничного, висловлення.

Оперуючи з контрарними протилежностями, потрібно додержувати таких правил: 1) з істинності одного з контрарних висловлень випливає хибність другого; 2) з хибності одного з контрарних висловлень не можна встановити істинність контрарного щодо нього висловлення (воно може бути як істинним, так і хибним).

Якщо ми в міркуваннях використали висловлення *А*, а потім висловлення не — *А*, то тим самим ми використали складне хибне висловлення «*А* і не — *А*». А з другого правила оперування з контрарними протилежностями випливає, що ми не можемо нічого сказати про істинність висловлення, контрарного хибному висловленню «*А* і не — *А*» (воно може бути як істинним, так і хибним, і ми не маємо можливості відрізнити істину від хибності).

В цьому фундаментальне значення закону суперечності для людського мислення — з хибності випливає і істина, і хибність, які не можна відрізнити одну від одної.

Закон виключеного третього (латинська назва — *Lex exclusi tertii sive medii inter duo contradictoria* давня латинська назва — *tertium non datur* — третього не дано) стверджує, що з двох суперечливих висловлень, де розглядається один і той самий об'єкт в один і той самий час, одне обов'язково істинне.

Цей закон поширюється на так звані *контрадикторні* (від латинського — *contradictorius* — суперечливий) протилежності. Це вид протилежностей, коли зіставляються: загальностверджувальне і частиннозаперечувальне висловлення («Всі парні числа складені», «Деякі парні числа не є складеними»), загальнозаперечувальне і частинностверджувальне («Навколо будь-якого неправильного многокутника не можна описати коло», «Навколо деяких неправильних многокутників можна описати коло»).

Оперуючи з контрадикторними висловленнями, потрібно пам'ятати, що: 1) обидва вони не можуть бути одночасно хибними; 2) обидва вони не можуть бути одночасно істинними; 3) одне з контрадикторних висловлень істинне, а друге — неодмінно хибне, третього бути не може.

Цей закон відіграє в математиці дуже важливу роль.

Видатний німецький математик Д. Гільберт говорив, що «забрати в математиків закон виключеного третього — це те саме, що позбавити астрономів телескопа або заборонити боксерам користуватися кулаками».

Закон виключеного третього лежить в основі широко застосовуваних в математиці опосередкованих доведень. У процесі опосередкованого доведення висловлення *A* спочатку доводять хибність висловлення не—*A*, а потім на основі закону виключеного третього отримують істинність *A*.

Закон достатньої підстави вимагає, щоб кожна істинна думка була обгрунтована іншими думками, істинність яких доведено. Цей закон відображає одну з фундаментальних властивостей світу: в природі, частиною якої є людина, нема безпричинних явищ, кожне явище виникає із якихось інших фактів та явищ.

За законом достатньої підстави наші висловлення про досліджуваний предмет повинні бути внутрішньо пов'язаними, випливати одне з одного (наступне з попереднього), обгрунтовувати одне одне.

Отже, бути послідовним означає не тільки формулювати істинні висловлення, але й пояснювати їх і робити з них потрібні висновки (висновки, які з них випливають).

В цитованій вже казці Л. Керролла знаходимо й чудові приклади «доведень», у процесі яких герої казки допускають елементарні порушення закону достатньої підстави:

— Зніми свого капелюха,— сказав Король Капелюшнику.

— Він не мій,— відповів Капелюшник.

— Вкрадений! — закричав Король з торжеством і повернувся до присяжних, які тут же взялися за грифелі.

— Я їх тримаю для продажу,— пояснив Капелюшник.— У мене своїх нема, адже я Капелюхових справ Майстер» (28, с. 90).

Таким чином, міркування будуть правильними, якщо додержувати основних законів або принципів формальної логіки. Порушення будь-якого з численних правил логіки зводиться, по суті, до порушення одного з чотирьох логічних законів (закону тотожності, закону суперечності, закону виключеного третього, закону достатньої підстави).

«Пошук помилок,— влучно писав видатний польський математик Г. Штейнгауз,— не можна розглядати як вияв поганого смаку або прискіпливості. Не можна забувати, що запобігти помилці надзвичайно важко і помилялися навіть найвидатніші математики, отже, в тому, щоб припуститися помилки, немає нічого ганебного. Усуваючи помилку, скільки разів до цього не доводилося б вдаватися, ми прислужуємося науці. Але існує ще одна причина, з якої складання колекції математичних помилок має велике значення, особливо для тих, хто збирається вивчати математику. Така колекція стає одним з «сильнодіючих» засобів навчання» (53, с. 349).

Помилки в міркуваннях, пов'язані з порушеннями законів логіки, бувають двох родів: паралогізми і софізми. *Паралогізми* (від грецьк. *παραλογισμός* — неправильне) — це хибне міркування, логічна помилка, допущена не навмисне, а через втрату послідовності у міркуваннях чи при порушенні одного із законів логіки. Найрізноманітніші математичні помилки, які допускають і школярі, і визначні математики, здебільшого є саме паралогізмами. Написано багато збірників, в яких аналізуються такі помилки (див., наприклад: Тупиков В. А. Ошибки в решении конкурсных задач на вступительных экзаменах по математике. Минск, 1974).

Величезним кроком у розгадуванні закономірностей людського мислення було відкриття *софізмів* (від грецьк. *σοφίσμα* — хитрий викрутас, вигадка, хитрий умовивід) — міркувань, побудованих так, що вони містять навмисне допущену логічну помилку і, звичайно, приводять до хибних висновків. Першим ввів софізми давньогрецький філософ, засновник школи софістів Протагор із Абдери (бл. 480 — бл. 410 рр. до н. е.). Введення софізмів сприяло вдосконаленню ораторського мистецтва, підвищенню логічної культури мислення.

Виразну характеристику софістам, а також їхньому впливу на філософську думку дав О. І. Герцен: «Софісти — пишні, чудові квіти багатого грецького духу — виразили собою період юнацької самовпевненості й завзяття... Що за розкіш в їх діалектиці! Що за безпощадність...! Що за майстерне володіння думкою та формальною логікою!» (Герцен А. И. Собр. соч. В 30-ти т. М., 1954, т. 3, с. 163).

Щоправда, пізніше диспути софістів перетворилися в безрезультатні суперечки. Звідси одіозне значення слова «софіст» — людина, готова за допомогою будь-яких прийомів захищати певні тези, не рахуючись з об'єктивною істинністю чи хибністю цих тез. У деяких давньогрецьких філософів-софістів мистецтво софістики перетворилося на суперечку заради суперечки.

Різні приклади софізмів наводить у своїх діалогах Платон (427—347 до н. е.). Вперше аналіз і класифікацію софізмів дав Арістотель у трактаті «Про софістичні спростування» (див.: Аристотель. Собрание сочинений. В 4-х т. М., 1978, т. 2).

Найчастіше софістичне міркування грунтується на зовнішній подібності явищ, на навмисне неправильному доборі посилок, на тому, що певний факт виривається із загального зв'язку подій, на двозначності слів, підміні понять тощо.

Поняття софізму і похідних від нього часто використовували в своїх роботах класики марксизму-ленінізму. Карл Маркс згадував про софістику в схоластиці, діалектиці, у буржуазній політичній економії, в політиці, юриспруденції, релігії. Ф. Енгельс писав Женні Лонге 24.II.1881 р.: «...добре відомо, що вся протестантська реформація, коли відкинути дріб'язкові спори та софістичні суперечки з приводу догматів, була широко задуманим планом конфіскації землі» (Маркс К., Енгельс Ф. Твори, т. 35, с. 130).

В. І. Ленін називав софізми «грою в слова», відірваною від аналізу змісту понять, антиподами логіки (Ленін В. І. Повне зібр. тв., т. 13, с. 13). У статті «Нехай розв'язують робітники» В. І. Ленін, висловивши впевненість у тому, що петербурзький пролетаріат винесе самостійне рішення з питання про доцільність підтримки кадетського міністерства, писав: «Від цього свого *права,* від цього свого с.-д. і партійного *обов'язку* петербурзькі робітники не дозволять відхилити *себе* ніякими софізмами, тобто ніякими явно брехливими доводами» (Ленін В. І. Повне зібр. тв., т. 13, с. 181).

В. І. Ленін зазначав, що знання прийомів, за допомогою яких складаються софізми, має велике значення, особливо в політичній боротьбі. Коли в 1905 році ліберальні буржуа прагнули за допомогою пишномовних софізмів прикрити класову суть свого проекту конституції, В. І. Ленін, піддаючи нищівній критиці політичні софізми лібералів, у статті «Політичні софізми» писав: «Російському пролетаріатові довгий і довгий час доведеться зважати на ліберальні софізми. Пора починати ближче знайомитися з ними!» (Ленін В. І. Повне зібр. тв., т. 10, с. 190). Докладніше про використання В. І. Леніним поняття софізму і софістики див: Довідниковий том до повного зібрання творів В. І. Леніна, частина І, с. 120 і с. 630—631. Про політичні софізми сучасних захисників капіталізму див., наприклад: Приматов В. В. Извращение истины. Критика ревизионистских концепций общественного развития. К., 1981, 124 с.

Часто говорять: «Правильно, як двічі по два — чотири», — писав Г. Штейнгауз.— Ті, хто так говорять, поділяють поширену думку про непогрішимість математики. Заперечувати думку про те, що математичні умовиводи є непохитними істинами, було б дуже важко. Справді, твердження, які виводять з аксіом і постулатів шляхом математичних міркувань, безперечно, заслуговують почесної назви наукових істин. Сумніватися в цьому важко навіть тоді, коли нічого не розумієш в математичних міркуваннях. Проте зараз ітиметься про твердження, які лише здаються, а насправді не є математичними, про твердження, які манівцями проникли в споруду науки, приспавши пильність учених. Йдеться про помилкові твердження, які не заслуговують ніяких почестей. Зрозуміло, математики могли б і наглядати за боковими входами до храму науки, якби цих входів не було так багато. Помилковим твердженням не раз вдавалося пробиратися до нього, і викриття їх коштувало чималих зусиль» (53, с. 340).

Наголошуючи на тому, що з однієї неправильної посилки можна довести все що завгодно, німецький математик Хаусдорф писав: «Якщо припустити, що двічі по два п'ять, то існують русалки». А в розпорядженні конструкторів математичних софізмів є великий арсенал різних прийомів маскування помилок в міркуваннях. Зрозуміло, що вони не допускають очевидного безглуздя на зразок твердження, що $2\times2=5$. Автори софізмів заколисують увагу читача або слухача і у майстерно замаскованому вигляді свідомо допускають помилку на певному етапі міркувань. Адже, як застерігав Л. М. Толстой, «головна перешкода пізнанню істини є не хибність, а подібність хибності», а пропустивши десь помилку, можна вже доводити все, що завгодно, бо, як зазначав Блез Паскаль, «істина така тендітна, що ледь тільки відступив від неї, помилишся».

Паралогізми підстерігають неуважних або недостатньо натренованих у складному мистецтві міркувань. Софізми — це навмисне розставлені логічні пастки.

Але бувають і інші, тривожніші, справді катастрофічні ситуації в пізнавальній діяльності людини. Коли відомо, що дана суперечність є паралогізм або софізм, тобто результат якоїсь логічної помилки, то завдання зводиться до того, щоб локалізувати цю помилку, з'ясувати, в якому місці ланцюга міркувань були порушені правила логіки чи математики, і виявити, як саме. Складніше, коли правильні формально-логічні міркування приводять до результатів, які не узгоджують із загальноприйнятою думкою, є безглуздими. З таких логічних лабіринтів виходу, здавалося, немає.

Це були *парадокси* (від грецьк. *παράδοξος* — несподіваний, дивовижний). Згадуваний вже Філет Косський не витримав зустрічі з одним із типових парадоксів, сформульованих давньогрецьким філософом Евбулідом із Мілета (IV ст. до н. е.). Цей парадокс приписують крітському філософу Епіменіду (VI ст. до н. е.).

У викладі Евбуліда парадокс подається так. Крітянин Епіменід сказав: «Усі крітяни — брехуни». Епіменід — крітянин. Отже, він брехун.

Далі міркували так: якщо Епіменід — брехун, то його висловлення, що всі крітяни — брехуни, є хибним. Звідси випливає, що всі крітяни не брехуни. Епіменід — крітянин. Отже, він не брехун, і його висловлення «усі крітяни — брехуни» є істинним.

Дістали парадокс, тобто ситуацію, коли логічно правильні міркування приводять до взаємно протилежних висновків *А* і не *А*, кожний з яких не можна віднести ні до істинних, ні до хибних.

Парадокс «Брехун» викликав здивування і тривогу у сучасників. Аналізу його філософ-стоїк Хрисіпп (бл.

281—208 рр. до н. е.) присвятив три книжки. І в наш час цей парадокс привертає увагу логіків, математиків і філософів. Ще складнішими були парадокси (апорії) Зенона Елейського (див. розділ VI, № 1—4), яким присвячено величезну кількість наукових і популярних праць.

Парадокс Евбуліда і апорії Зенона не вичерпують логічних катастроф, природа яких ще далеко не розгадана. Про це відверто писав відомий сучасний американський учений, автор фундаментальної монографії «Основи математичної логіки» Х. Каррі: «...проблема пояснення парадоксів, як і раніше, відкрита і, як і раніше, важлива. Парадоксам присвячено велику літературу, було запропоновано багато пояснень, але й досі жодне з них не можна вважати загальновизнаним. Схоже на те, що потрібна повна реформа логіки, й математична логіка може стати головним інструментом для проведення цієї реформи» (М., 1969, с. 26).

Можливо, Каррі висловив істинну гіпотезу. Наприклад, в реферативному журналі «Математика» (1980, № 11, с. 6, реф. 12 А 37) повідомляється, що один із сучасних філософів, вважаючи, що класична логіка висловлень не може розв'язати такі парадокси, як «Брехун», застосував метод наближених міркувань (щось на зразок наближених обчислень), ввів нову, так звану розмиту, логіку, за допомогою якої вдалося змоделювати міркування для розв'язування двох парадоксів згаданого типу.

Висловлюються різні погляди на джерела виникнення парадоксів і їх роль в історії науки. Наприклад, Ханагов А. А. в статті «Чи існують у формальній логіці парадокси?» (Природа, 1978, № 10, с. 118—124) стверджує, що ніяких логічних парадоксів нема, що різні логічні суперечності в міркуваннях виникають як результат порушення законів формальної логіки, тобто як логічні помилки. Парадокси, пише автор статті, відрізняються від софізмів і паралогізмів тільки ступенем логічної «заплутаності» і тим, що в них не вдалося точно локалізувати ці логічні помилки. Твердження Ханагова не привело до перевороту в історії розв'язання парадоксів, проблема їх залишається все такою ж складною і продовжує привертати увагу вчених, хоч нема підстав тільки на основі таких аргументів оголосити його підхід помилковим (див. Уйомов А. І. Про природу логічних парадоксів.— Природа, 1981. № 12).

Парадокси як абсолютні суперечності легко виникають у теоріях, логічні основи яких недостатньо вивчені і повністю не виявлені. Негативна, у певному розумінні, роль парадоксів у тому, що вони виявляють і демонструють неспроможність теорії, в рамках якої вони виникли, показують, що аксіоматика цієї теорії є суперечливою і має бути відкинута. Адже логічні правила найчастіше дають змогу довести із суперечливої аксіоматики будь-яке висловлення, що знецінює саме поняття доводжуваності у цій теорії. Під час побудови наукової теорії важливо звільнити її від парадоксів, тобто надати їй таку форму, яка виключає можливість появи парадоксів (несуперечлива теорія). У зв'язку із складністю доведення несуперечливості теорії часто задовольняються іншим варіантом звільнення теорії від парадоксів (хоча перший шлях є, звичайно, кращим) — замінюють теорію Т, в якій виникли парадокси, іншою, достатньо близькою до неї за змістом, але напевне несуперечливою.

Несподіваними і надзвичайно важливими для проблем логічного обгрунтування математики були дві знамениті теореми австрійського математика Курта Геделя (1906—1978), опубліковані в1931 році. Перша теорема стверджувала: якщо формальна аксіоматична теорія формально несуперечлива, то вона неповна (тобто в такій теорії Т завжди знайдуться такі змістовноістинні твердження, які формально недоводжувані в ній). Друга теорема Геделя стверджувала: якщо формалізована аксіоматична теорія *T* несуперечлива, то довести її несуперечливість засобами, які можна в ній формалізувати, неможливо (6, 40, 45).

З теорем Геделя випливали висновки, надзвичайно неприємні для авторів програм, в яких робилися спроби довести несуперечливість певної аксіоматичної теорії, наприклад арифметики натуральних чисел. Виявилося, що аксіоматичний метод не всесильний, а лише необхідний і надзвичайно корисний на своєму місці інструмент пізнання реальної дійсності, який все ж має певні межі застосувань.

Парадоксами називали також відкриття, які розходилися з усталеними поглядами, з традицією.

Справді парадоксальним було в свій час відкриття несумірних відрізків, обертання Землі навколо Сонця і власної осі, перші теореми неевклідової геометрії, уявні числа, висновки з теорії відносності, закономірності мікросвіту. Досить сказати, що за однією з гіпотез, ціла галактика може народитися лише з однієї елементарної частинки (наприклад, протона), яку розігнали до швидкості 300 000 км в секунду... Скільки ж «народжується» тоді додаткової маси згідно із законом про еквівалентність маси і енергії?! Можна назвати десятки, навіть сотні інших парадоксів в різних галузях знання: гідростатичний Паскаля, гідродинамічний Д'Аламбера, геологічний (чим далі від Землі, тим доступніші для вивчення її надра), парадокс більярдних куль (їх не можна привести в порядок тими рухами рук, якими їх розштовхували). А скільки парадоксальних, на перший погляд, істин відкривали математики! Парадоксальними здавалися для сучасників доведені М. І. Лобачевським теореми неевклідової геометрії. Про евклідову геометрію, зокрема евклідову геометрію тривимірного фізичного простору, евклідівський характер земного розуму і неевклідові геометрії кілька разів згадується в романі «Брати Карамазови» Ф. М. Достоєвського. Іван Карамазов говорить братові Олексію: «Нехай навіть паралельні лінії зійдуться і я це сам побачу: побачу і скажу, що зійшлися, а все ж таки не прийму».

Траплялося, що й самі відкривачі істин не приймали їх, настільки ці нові істини розходилися з традиційними поглядами. Протягом трьох років (з 1871 по 1874) німецький математик Георг Кантор (1845—1918) прагнув довести, що неможливо встановити взаємнооднозначну відповідність між точками відрізка і квадрата. Але невмолима логіка міркувань привела вченого саме до побудови відповідності, в неможливості якої математик був глибоко переконаний. Вражений здобутим результатом, він писав математику Ріхарду Дедекінду (1831—1916): «Я бачу це, але не вірю цьому». І все ж довелося повірити, яким не парадоксальним здавався спочатку цей результат.

За допомогою так званої аксіоми вибору німецький математик Ф. Хаусдорф (1868—1942) довів, що половина поверхні кулі дорівнює її третині. Польські математики С. Банах (1892—1945) і А. Тарський (нар. у 1901 р.) показали, що можна розбити нерівні точкові множини евклідового простору на скінченне число попарно рівних підмножин. З цього випливало, наприклад, що будь-яка куля є сумою таких п'яти множин точок, які не перетинаються і з яких після відповідних перенесень і поворотів можна отримати дві кулі, що дорівнюють даній і не мають спільних точок. Теорема доводить лише існування таких куль, але не дає алгоритму їх знаходження.

З погляду геометричного поняття площі і об'єму це очевидні парадокси. Але вся суть у тому, що, користуючись аксіомою вибору, кулю вдається розбити на такі частини, які не мають об'єму, тобто не є кубовними фігурами. Щоразу парадоксальні результати виявлялися такими з погляду нижчого рівня строгості, того ступеня проникнення в закономірності досліджуваних об'єктів, які наука вже переступила. А за межами старих теорій відомі раніше поняття набували нових, невідомих раніше властивостей, які, коли їх не враховувати, призводять до суперечностей. Так, тисячоліттями всі були переконані, що кожна фігура скінченних розмірів має площу і питання полягає лише в тому, щоб обчислити її. Але вже на початку XX ст. вчені виявили обмежені плоскі фігури, які не мають певної площі. Для того, щоб фігура була квадровна, тобто мала певну площу, необхідно і достатньо, щоб її межа мала площу, яка дорівнює нулю. Але були побудовані скінченні плоскі фігури такої складної конфігурації, що площа межі таких фігур уже мала площу, більшу від нуля. Саме на такі 5 неквадровних частин і розчленовували кулю при доведенні своєї несподіваної теореми Банах і Тарський.

Пильна увага вчених до парадоксів, героїчні спроби розгадати механізми їх виникнення та знешкодити їх мають не тільки теоретичний інтерес. В наш час десятки тисяч найрізноманітніших автоматів із складними логічними схемами без допомоги людини приймають розумні рішення і виконують відповідальні роботи. Саме тут і виникає дивна і драматична ситуація. Якщо в логіці і математиці можливі парадокси, то де гарантія, що в складну програму ЕОМ не «прослизне» один з них? Тоді «логічна катастрофа» в математиці може обернутися трагічними подіями в реальності. У американського письменника-фантаста А. Азімова є оповідання, вся сюжетна гострота якого заснована на логічному парадоксі, закладеному в структуру автомата. На деякій планеті висаджуються космонавти і їхні помічники — роботи. Планета розміщена поблизу Сонця, і її поверхня покрита озерами з розплавленого металу. Доля космонавтів залежить від того, буде чи ні добуто з озера потрібний їм метал. Це під силу тільки роботам. Але завдання не може бути виконане, бо в конструкцію робота закладено, здавалося б, абсолютно раціональні, але взаємно протилежні алгоритми дій: а) неухильно виконувати накази космонавта і б) будь-якими засобами берегти себе від пошкодження. Робот не може не виконати наказу і йде до розплавленого металевого озера, але не може й виконати наказу, бо це загрожує йому загибеллю. Він так і залишається біля металевого озера, безрезультатно обходячи його знову і знову.

Зрозуміло, що парадокси виникають не тільки в логіці, математиці або фізиці. На них натрапляють і в інших галузях знання та практичної діяльності. Про це свідчать хоч би назви книг та статей: Терлецкий Я. П. Парадоксы теории относительности. М., 1966; Вейман С. Бальзаковский парадокс. М., 1981; Мирзаджанзаде А. Х. Парадоксы нефтяной физики. Баку, 1981; Борисовский Г. Б. Парадоксальность искусства и точные методы его исследования.— В кн.: Искусство и точные науки. М., 1979; Парадоксы природы.— В кн.: Н. А. Хотинский. Следы прошлого ведут в будущее. Очерки палеогеографа. М., 1981.

Парадокс може означати абсолютну суперечність, коли в ньому не використовуються ніякі вихідні припущення. Але коли такі припущення (посилки) використовуються, то виведення суперечності доводитиме лише несумісність припущень, що само по собі не є парадоксом.

Будь-які міркування спираються на певні припущення, які використовуються явно або приховано. Тому завжди є можливість позбутися будь-якого парадокса — для цього достатньо проаналізувати міркування, виявити використовувані в ньому припущення і відмовитися від будь-якого із суперечливих.

З першими парадоксами зіткнулися вже вчені античного світу. Від тих часів лишилися до наших днів остаточно не розв'язані парадокси, які завдають багато турбот математикам, логікам, фізикам і філософам.

Парадокси відіграли в історії науки й велику позитивну роль. Вони були хоча й тривожними, але своєчасними сигналами про те, що певна наукова теорія досягла, в своєму розвитку такого рівня, проникла до таких глибоких фактів, які вже не вдається пояснити, залишаючись в межах її понятійного апарату і вихідних положень (посилок, аксіом).

ЯК ОБЧИСЛИТИ ІСТИНУ

Не будемо сперечатися, обчислимо істину.

Г. В. ЛЕЙБНІЦ.

Д. Свіфт у своїй безсмертній сатирі «Мандри Гулівера» розповів про те, як професор лапутянської академії винайшов машину, за допомогою якої будь-хто може написати книгу з фізики, політики, права, математики, богослів'я, причому для такої творчості не потрібно ні ерудиції, ні таланту. Машина лапутянського професора давала випадкові комбінації слів, з яких потім відбирали осмислені фрази. Професор мав намір розсортувати ці фрази і збагатити таким способом світ повною бібліотекою з усіх галузей знань. Зрозуміло, що це була нездійсненна мрія. І скоріше згаснуть зорі Галактики, ніж ми матимемо в такий спосіб одне нове оповідання або доведення ще невідомої теореми з геометрії.

Все ж ідея механізації здобуття нового знання не така вже й фантастична. Іспанський філософ, логік і богослов Раймунд Луллій (бл. 1235—бл. 1315) прагнув знайти саме такий спосіб механічного комбінування понять, щоб полегшити виведення істинних висновків із заданих посилок. За життя вченого його ідею механізації умовиводів зустріли з недовір'ям, але вже з XVII століття вона мала великий вплив на вчених.

На цей час важливим досягненням теорії дедукції було встановлення тісної аналогії між логічними і математичними відношеннями, що відкрило шлях до взаємопроникнення математики і логіки. В результаті виникла нова галузь формальної логіки — *математична логіка.* Вона властивими для математики засобами вивчає різні питання, пов'язані з математичними доведеннями: Що означає довести теорему? На якій підставі можна стверджувати, що в процесі певних міркувань теорему доведено? Як потрібно будувати математичні теорії і окремі доведення, щоб уникнути суперечностей? За якими правилами з одних тверджень можна виводити інші? і т. д.

Математизувати логіку, побудувати числення висловлень прагнув великий німецький математик, учений-енциклопедист Г. В. Лейбніц (1646—1716). Його логіко-математичні ідеї набагато випереджували час, тому реалізувати їх вдалося тільки в XIX ст. засновникові математичної логіки англійському математикові Джорджу Булю (1815—1864). У творах «Математичний аналіз логіки» і «Закони мислення» він побудував математизовану теорію логічних законів і відношень, про створення якої мріяв Г. В. Лейбніц. Алгебра логіки Буля й тепер становить основну частину математичної логіки.

Ми розглянемо мінімум понять формальної і математичної логіки, необхідних для розуміння вимог, які ставляться до побудови правильних (логічних) міркувань, для вміння виявити джерела виникнення математичних помилок і запобігати їх у практичній діяльності.

В математичній логіці за допомогою логічних операторів (словесних виразів або знаків, які позначають певні логічні операції над висловленнями) можна певним чином конструювати нові висловлення і знаходити значення істинності результату. В логіці висловлень кожне висловлення розглядається незалежно від його змісту. Нас цікавитиме тільки його істиннісне значення — істина (1) або хибність (0). Позначатимемо прості висловлення великими латинськими літерами: A, B, C.

З простих висловлень за допомогою логічних операцій утворюють складні висловлення. Одна з важливих задач логіки висловлень — встановити значення істинності складних висловлень. Воно залежить від значень істинності простих висловлень, з яких побудовано складне висловлення.

Щоб означити певну логічну операцію над висловленнями, слід вказати, яких значень істинності набуває її результат залежно від значень істинності висловлень — компонентів у складному висловленні. Це зручно робити за допомогою таблиць істинності для кожної логічної операції.

Складемо такі таблиці для двох довільних висловлень A та B.

Логічним добутком (або *кон'юнкцією*) висловлень A і B називають складне висловлення «$A \wedge B$» (читається «A і B»), яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинне кожне з висловлень A, B, і хибне, коли принаймні одне з висловлень A, B хибне (табл. 1).

Логічною сумою (або *диз'юнкцією*) висловлень A і B називають складне висловлення «A або B», яке істинне, якщо істинне принаймні одне з висловлень A, B, і хибне, коли обидва висловлення A, B хибні (табл. 2).

Тут «або» вживається в нероздільному розумінні. Наприклад, коли говоритимемо «або вітер або дощ», то вважатимемо, це висловлення істинним, коли 1) тільки вітер, 2) тільки дощ або 3) і вітер, і дощ.

Запереченням висловлення A називається висловлення $\neg A$ (читається «не A»), яке істинне, якщо A хибне, і хибне, якщо A істинне (табл. 3).

Імплікацією (від лат. *implicato* — тісно зв'язую) висловлень A і B називається висловлення $A \rightarrow B$ (читається «Якщо A, то B», «З A випливає B», «A зумовлює B», «A — достатня умова B» (або «B — необхідна умова для A»), яке хибне тоді і тільки тоді, коли A (посилка) істинне, а B (наслідок) хибне (табл. 4).

На перший погляд, другий і третій рядки таблиці істинності здаються дивними. Не викликає, наприклад, сумніву істинність імплікації «Якщо 9 ділиться на 3, то 81 ділиться на 3», але важко погодитися з тим, що імплікації «Якщо 10 ділиться на 3, то й 100 ділиться на 3», «Якщо $2 \times 2 = 5$, то Дніпро впадає в Каспійське море» або «На городі бузина, а в Києві дядько» з точки зору математичної логіки теж істинні.

У математичній логіці імплікація має смисл і тоді, коли не існує ніякого змістовного зв'язку між посилкою і наслідком, причому з хибної посилки можна дістати як істинний, так і хибний наслідок. На ці особ-

Таблиця 1

A	B	$A \wedge B$
I	I	I
I	0	0
0	I	0
0	0	0

Таблиця 2

A	B	$A \vee B$
I	I	I
I	0	I
0	I	I
0	0	0

Таблиця 3

A	$\neg A$
I	0
0	I

Таблиця 4

A	B	$A \rightarrow B$
I	I	I
0	I	I
0	0	I
I	0	0

Таблиця 5

A	B	$A \leftrightarrow B$
I	I	I
I	0	0
0	I	0
0	0	I

ливості імплікації звернув увагу вже Арістотель. Їх називають парадоксами імплікації. І, нарешті, розглянемо ще одну операцію, тісно пов'язану з імплікацією.

Еквіваленцією висловлень A і B називається складне висловлення $A \leftrightarrow B$ (читається: «A тоді і тільки тоді, коли B», «A еквівалентне B»), яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення A і B істинні або обидва хибні (табл. 5, стор. 39).

Якщо висловлення $A \leftrightarrow B$ істинне, то A і B називаються *еквівалентними,* або *рівносильними.*

Можна побудувати складені висловлення, які будуть істинними при всіх наборах значень істинності простих висловлень, з яких вони утворені. Ці тотожно істинні висловлення і є законами логіки. Зокрема, три розглянутих основних закони логіки записуються такими тотожно істинними висловленнями:

$A \rightarrow A$ — закон тотожності,

A або $\neg A$ — закон виключеного третього,

$\neg(A \wedge \neg A)$ — закон суперечності (фактично це закон виключення суперечності).

З інших законів математичної логіки назвемо ще: $A \wedge A = A$, $A \vee A = A$ (закони тавтології, або ідемпотентності).

$A \vee 1 = 1$, $A \vee 0 = A$

$\neg\neg A = A$ (закон подвійного заперечення),

$(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B = \neg(A \vee B)$ (закони де Моргана).

ЯК ДОВЕСТИ ІСТИНУ

Від часів греків говорити «математика» — значить говорити «доведення».

Н. БУРБАКІ

Доведеннями в математиці називаються міркування, що встановлюють істинність якогось твердження (теореми) як логічного наслідку з інших тверджень — аксіом, посилок і доведених раніше теорем. З часів Евкліда незмінною залишилася ідеальна структура математичного доведення як демонстрації «неочевидної» істини шляхом переходу до неї від «очевидних» істин або встановлених раніше посилок за допомогою послідовності явно виписаних «очевидно законних» елементарних умовиводів. Довести теорему означає показати, що вона випливає з якихось тверджень (аксіом, теорем, означень) даної теорії за правилами виведення, прийнятими в цій теорії.

Найкраще було б записувати доведення, використовуючи тільки математичні символи певної теорії. Тоді кожний крок доведення буде просто перетворенням певних формул за чітко визначеними прийнятими правилами при повному абстрагуванні від змісту формул і правил їх перетворення. Такі доведення називають формальними. Засвоєння їх вимагає значної підготовчої роботи. Доведення в шкільній математиці записуються з використанням і математичних символів і виразів природної мови без фіксації використовуваних правил виведення. Такі доведення називають *змістовними,* або *неформальними.* Так будуть подані доведення і в нашій книжці.

Якщо висловлення B істинне, то для нього існує достатня підстава A. Висловлення B, істинність якого доводять, називається *тезою,* а висловлення, за допомогою яких доводиться теза (або тези),— *аргументами.* Демонстрація доведення — це сам спосіб, форма умовиводів, які застосовуються для виведення тези із аргументів. Хоча в змістовних доведеннях правила виведення не фіксуються, в неявному вигляді вони присутні, бо саме на основі цих правил будується послідовність елементарних умовиводів.

В нематематичних міркуваннях часто використовують також доведення за аналогією, коли обгрунтовується схожість двох предметів за якоюсь ознакою на основі того, що ці предмети мають ряд інших схожих ознак. За аналогією доводиться існування планет в інших зоряних системах, можливість життя на інших планетах. При цьому міркують за такою схемою: досліджуваний предмет імовірно має ще ознаку P, оскільки всі відомі нам його ознаки подібні до ознак іншого предмета, який має, крім того, ознаку P.

Доведення за аналогією має лише ймовірнісний характер, бо воно дає лише правдоподібне знання. Тільки за умови повної аналогії такі доведення мають певну доказову силу. Трапляється, що при доведеннях за аналогією апелюють до чисто зовнішньої або й надуманої подібності, яка не розкриває і не може розкривати шуканих відношень. Саме в такий спосіб Капелюшник і Соня доводили Алісі, що в кисільній криниці жили якісь сестрички:

«— Я не розумію... Як же вони там жили?

— Чого там розуміти,— сказав Капелюшник.— Живуть же риби у воді. А ці сестрички жили в киселі! Зрозуміла, дурненька?

— Але чому? — запитала Аліса Соню, зробивши вигляд, що не чула останнього зауваження Капелюшника.

— Тому, що вони були кисільні панночки» (28, с. 63).

Зрозуміло, що міркування за аналогією мають у математиці тільки евристичне значення, допомагають відкривати певні залежності, які, щоб вони стали математичними фактами потім, необхідно доводити одним із методів, прийнятих у математиці. Зрозуміло також, що всі доведення мають смисл тільки в несуперечливих теоріях.

Несуперечливість — найважливіша характеристика, від якої залежить, має чи не має певну цінність побудована теорія. Суперечливість суперечливої теорії не завжди очевидна. Це надзвичайно складне питання. Наприклад: одна із аксіом алгебраїчної структури поля вимагає існування оберненого елемента поля за множенням: якщо $a \neq 0$, то існує такий елемент a^{-1}, що $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$. Якщо опустити вимогу, щоб $a \neq 0$, то аксіоматика стане суперечливою. Справді, коли б 0 мав обернений елемент 0^{-1}, то $(0 \cdot 0) \cdot 0^{-1} = 0 \cdot 0^{-1} = 1$ і $0 \cdot (0 \cdot 0^{-1}) = 0 \cdot 1 = 0$, що суперечить закону асоціативності $(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$. Ось чому забороняється ділити на нуль! Така дія порушує закони арифметики, приводить до суперечливої теорії і є джерелом численних софізмів.

Якщо в якійсь теорії можна довести дві суперечливі теореми, тобто якщо ця теорія суперечлива, то вона не має ніякої цінності, бо в ній можна довести все, що завгодно.

Коли якось на обіді англійський математик Дж. Харді (1877—1947) розповів про суперечливі аксіоматики, один із присутніх зажадав, щоб йому продемонстрували, як із суперечливої теорії, наприклад з припущення, що $2 \times 2 = 5$, можна довести, що містер X є папою римським. Харді, ненадовго замисливщись, відповів: «Ми знаємо також, що $2 \times 2 = 4$, звідси випливає, що $5 = 4$. Віднявши від обох частин останньої рівності по 3, матимемо $2 = 1$. Містер X і папа римський — це дві людини, але ми знаємо, що $2 = 1$, тому містер X і папа римський — одна людина».

ПРО ПІЗНАННЯ, ІСТИНУ, ПАРАДОКСИ ТА МАТЕМАТИКУ

Бувають такі крилаті слова, які з дивною влучністю виражають суть досить складних явищ.

В. І. ЛЕНІН

Це здається парадоксальним і таким, що суперечить повсякденному досвідові. Але парадоксально й те, що земля рухається навколо сонця і що вода складається з двох легкозаймистих газів. Наукові істини завжди парадоксальні, коли судити на підставі повсякденного досвіду, який схоплює тільки облудну видимість речей.

К. Маркс

...людське мислення за природою своєю здатне давати і дає нам абсолютну істину, яка складається з суми відносних істин. Кожний ступінь у розвитку науки додає нові зерна до цієї суми абсолютної істини, але межі істини кожного наукового положення відносні, будучи то розсовувані, то звужувані дальшим зростанням знання.

В. І. Ленін

Пізнання є вічне, безконечне наближення мислення до об'єкта. *Відображення* природи в думці людини треба розуміти не «мертво», не «абстрактно», *не без руху,* **не без суперечностей,** а у вічному **процесі** руху, виникнення суперечностей і розв'язання їх.

В. І. Ленін

Передусім... слід зрозуміти поняття, що лежать в основі слів, для того щоб, зводячи до них наші думки, питання, вагання, ми могли обговорювати їх і щоб у нас при нескінченних поясненнях нічого не залишалося нерозв'язаним, або щоб ми не мали порожніх слів.

Епікур

Людям, які бажають йти вірним шляхом, важливо також знати і про відхилення.

Арістотель

...Жартівливі приклади часто мають більше значення, ніж корисні.

М. Штіфель

Для шукача істини нема нічого краще самої істини, і не слід нехтувати істиною і звисока дивитися на тих, хто її висловив або передав: істиною нікого не можна принизити — навпаки, істина облагороджує кожного.

Аль-Кінді

З усіх істинних наук, як твердять Арістотель і Авероес, наші математичні науки найістинніші і мають перший ступінь вірогідності, решта природничих наук іде за ними.

Л. Пачолі

Ніякої достовірності нема в науках там, де не можна застосувати ні однієї з математичних наук, і в тому, що не має зв'язку з математикою.

Леонардо да Вінчі

Сама лише математика має неспростовні докази, що виходять із необхідних причин. Через це тільки там людина може, спираючись на власні закони цієї науки, підійти до істини.

Р. Бекон

У самій лише математиці є наука і доведення у найточнішому і власному розумінні.

Гросетес

Все має бути доведеним, і при доведенні не можна послуговуватись нічим, крім аксіом і раніше доведених теорем.

Б. Паскаль

У математичних питаннях не можна нехтувати й найменшими похибками.

І. Ньютон

Люди, не знайомі з алгеброю, не можуть уявити собі тих дивних речей, яких можна досягти за допомогою названої науки.

Г. Лейбніц

Саме математика насамперед захищає нас від обману чуттів і вчить, що одна справа — як влаштовані предмети, які сприймаються чуттями, а інша —

якими вони здаються; ця наука дає найнадійніші правила; хто керується ними, тому не страшний обман чуттів.

Л. Ейлер

Математику вже навіть задля того треба вивчати, що вона розум до ладу приводить.

М. В. Ломоносов

Перша умова, якої треба дотримуватися у математиці,— це бути точним, друга — бути ясним і, наскільки можливо, простим.

Л. Карно

Математика — цариця всіх наук. Її улюблениця — істина, її вбрання — простота і ясність. Палац цієї володарки оточено тернистими заростями, і, щоб досягти його, кожному доводиться пробиратися крізь хащі. Випадковий мандрівник не виявить у палаці нічого привабливого. Краса його відкривається лише розуму, що любить істину і загартований в боротьбі з труднощами, і такому, який свідчить про незвичайну схильність людини до заплутаних, але невичерпних і піднесених розумових насолод.

Ян. Снядецький

Розв'язування софізмів, які призводять до абсурдів, для не новачка в математиці повинні бути чудовим засобом перевірки правильності наближення до математичної істини, засобом тренування розуму і удержування міркування й доказів у твердо встановлених межах.

Ж. Віола

Тисячі шляхів ведуть до помилки, до істини — тільки один.

Ж.-Ж. Руссо

Будь-який науковий метод має галузь застосованості й джерела помилок. Останні мають бути виключені лише тоді, коли ясні логічні передумови методу.

Й. Вальтер

Кажуть, що посередині між двома протилежними думками лежить істина. Ні в якому разі! Між ними лежить проблема.

Й.-В. Гете

О сколько нам открытий чудных
Готовит просвещенья дух:
И Гений, [парадоксов] друг,
И Опыт, [сын] ошибок трудных,
И Случай, бог-изобретатель.

О. С. Пушкін

Не можна пошкодити істині більше, ніж бажанням побудувати її на хибних умовиводах.

П. Мопертюї

Математика — дивовижна вчителька в мистецтві спрямовувати думки, наводити порядок там, де вони не впорядковані, викорчовувати безглуздя, фільтрувати брудне і наводити ясність.

Ж. Фабр

Дуже важливо не приймати ніяких припущень без доведення, а ще важливіше не користуватися словами, якщо їм не надано певного смислу.

В. Кліффорд

Дуже помилковою є думка... що строгість в доведенні — це ворог простоти. Численні приклади переконують нас у протилежному: строгі методи є одночасно і найпростішими; і найдоступнішими. Прагнення до строгості саме й приводить до знаходження найпростіших доведень.

Д. Гільберт

З тих пір як почали доводити очевидні твердження, багато з них виявилися хибними.

Б. Рассел

Есть бытие; но именем каким
Его назвать? Ни сон оно, ни бденье;
Меж них оно, и в человеке им
с безумием граничит разуменье.

Є. Баратинський

Головна перешкода пізнання істини є не хибність, а подібність до істини.

Л. М. Толстой

Історія помилок людського розуму, можливо, так само важлива, як історія його руху вперед до істини.

П. Таннері

Доведення, яке не є строгим,— це ніщо.

А. Пуанкаре

У математичній науці все, що не обгрунтовано до кінця, розцінюється як абсолютно необгрунтоване.

С. Я. Хінчин

Для математики характерним є доведення до крайньої межі домінування логічної сили міркування; математик, який, бодай тимчасово, опустить цю схему, взагалі втрачає здатність науково мислити.

О. Я. Хінчин

У математиці немає і не може бути «напівдоведених» і «майже доведених» тверджень: або повноцінність аргументації — така, що ніякі суперечки про правильність доводжуваного твердження вже неможливі, або аргументація взагалі відсутня.

О. Я. Хінчин

У моральному плані математика навчає нас суворо ставитися до того, що стверджується як істина, що висувається як аргумент чи висловлюється як доведення. Математика вимагає ясності понять та тверджень і не терпить ні туману, ні бездоказових заяв.

О. Д. Александров

Математичне доведення наводиться так скрупульозно, що воно стає незаперечним і переконливим для кожного, хто тільки його зрозуміє... Однак строгість математики не абсолютна: вона розвивається, принципи математики не застигли раз назавжди, а рухаються і теж можуть бути і є об'єктом наукових суперечок.

О. Д. Александров

Серед усіх наук математика користується особливою повагою; підставою для цього є та єдина обставина, що її положення абсолютно правильні й незаперечні, в той час як положення інших наук до деякої міри спірні, і завжди є небезпека їх спростування новими відкриттями.

А. Ейнштейн

Ніде, як у математиці, ясність і точність умовиводу не дають змоги замінити відповідь розмовами навколо питання.

О. Д. Александров

Математика навчає точності думки, підкоренню логіці доведень, поняттю строго обгрунтованої істини, а все ж формує особистість, мабуть, більше, ніж музика.

О. Д. Александров

Неспростовність — ім'я твоє, математика. Нехай представник природничих наук задовольняється очевидністю — математикові потрібні докази.

У. В. Куайн

Ми, математики, маємо напрочуд простий критерій істини. Доведення або є, або його немає.

К. Урбанік

У математиці немає авторитетів. Єдиний аргумент істинності — доведення.

К. Урбанік

Поняття істинності майже неминуче потребує абстракції нескінченності вже тому, що правильне математичне висловлювання має бути правильним завжди і всюди.

Ю. І. Манін

Для строгого логіка неповне доведення — взагалі не доведення. І, звичайно, потрібно чітко розмежовувати неповні й повні доведення. Плутати їх одне з одним погано, а ще гірше приймати одне за друге.

Д. Пойа

Потрібно всіма засобами навчати мистецтву доведення, не забуваючи при цьому про мистецтво здогадуватися.

Д. Пойа

Не все на світі просто, але є
Якась закономірність саме в тому,
Що істина раптово постає
Крізь ліс ускладнень, в самому простому.

Віталій Коротич

Фридмонов точечных·просторы —
«Ничто», живая кисея,
Конечных с бесконечным споры —
Все грозный вызов Бытия...
Вселенной трепетная лира
Сердца спокойствия лишит,
Загадки парадоксов Мира
Мысль диалектиков решит!

В. С. Шубінський

Математика дає найбільш чисте й безпосереднє переживання істини; на цьому грунтується її цінність для загальної освіти людей.

М. Лауе

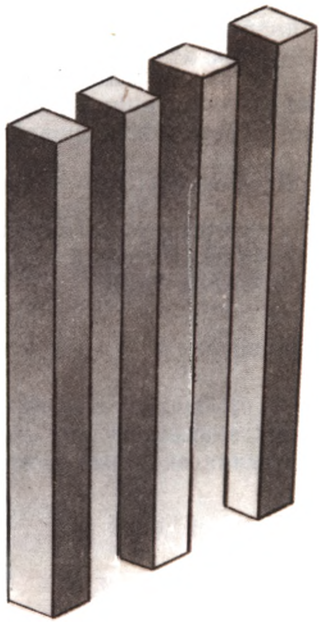
Строгість у математиці означає насамперед добросовісність і ясність.

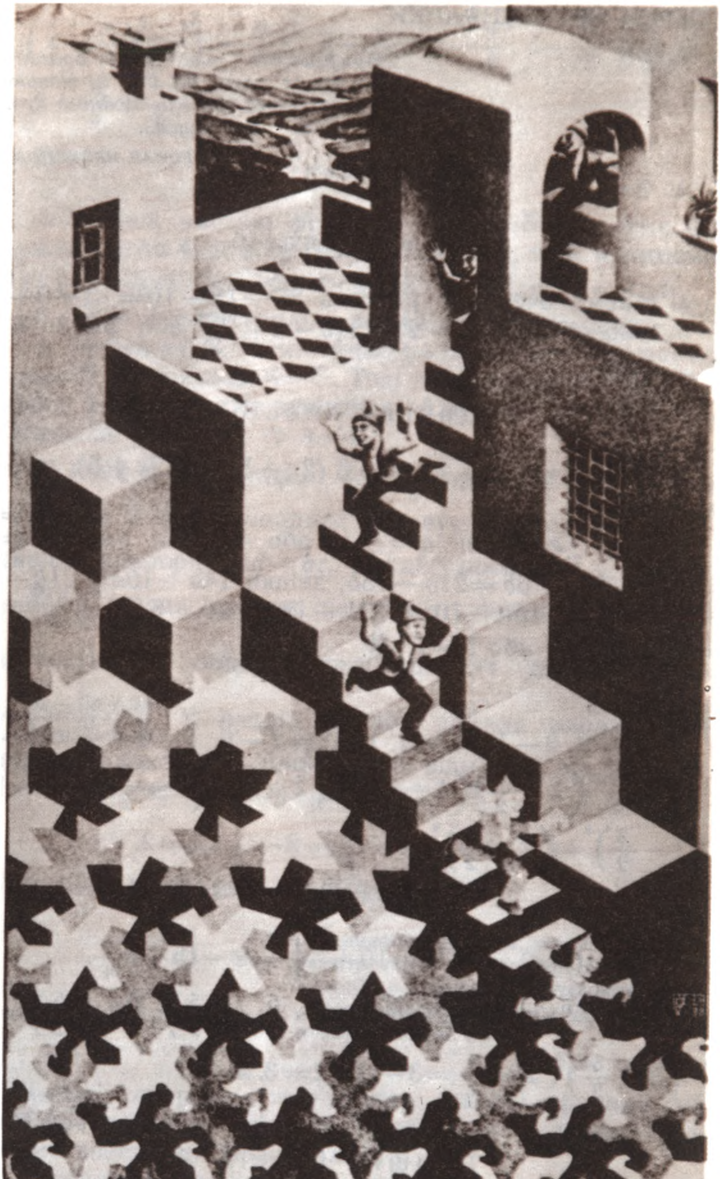
Ліпман Берс

АРИФМЕТИКА 2

Якщо ви не сподіваєтеся знайти нічого несподіваного, то ви його не знайдете, оскільки це буде для вас непосильним.

ГЕРАКЛІТ





ПЕРШІ НЕСПОДІВАНКИ

...Арифметика — наче вхідна брама до всіх інших наук, бо без її пізнання ніхто не може зробити жодного кроку вперед до храму науки...

ФЕОФАН ПРОКОПОВИЧ

1. $3=5$.

Перший спосіб

▲ Маємо очевидну рівність $25-15-10=15-9-6$, звідки $5(5-3-2)=3(5-3-2)$, або $5=3$. ■

Другий спосіб

▲ $6x+15=10x+25$, або $3(2x+5)=5(2x+5)$, звідки $3=5$. ■

2. $5=7$. ▲ Нехай $a=\frac{3}{2}b$, або $4a=6b$. Тоді $4a=14a-10a$ і $6b=21b-15b$, звідки $14a-10a=21b-15b$, або $15b-10a=21b-14a$, або $5(3b-2a)=7(3b-2a)$, або $5=7$. ■

3. $1=2$.

▲ $2=2$, $3-1=6-4$, $1-3=4-6$, $1-3+\frac{9}{4}=4-6+\frac{9}{4}$, $\left(1-\frac{3}{2}\right)\left(1-\frac{3}{2}\right)=\left(2-\frac{3}{2}\right)\left(2-\frac{3}{2}\right)$, $\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$, $1-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2}$, $1=2$.

4. $2=3$.

▲ $4-10=9-15$, $4-10+6\frac{1}{4}=9-15+6\frac{1}{4}$.
$2^2-2\cdot 2\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=3^2-2\cdot 3\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2$, $\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$, $2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$, $2=3$. ■

5. $4=5$.

Перший спосіб

▲ Виконаємо такі перетворення очевидної рівності $16-36=25-45$; $16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$,

$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$, $4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$, $4-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=$
$=5-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}$, $4=5$. ■

Другий спосіб

▲ У лівій частині рівності $4:4=5:5$ винесемо за дужки число 4, а в правій частині — 5, тоді матимемо $4\,(1:1)=5\,(1:1)$, або $4\cdot 1=5\cdot 1$, звідки $4=5$. ■

6. Будь-яке натуральне число n дорівнює нулю.

▲ Нехай $n \in N$. Помножимо на n рівність, яку маємо довести, наприклад $4=5$. Тоді отримаємо $4n=5n$. Від цього рівність не порушиться. Але тоді: $(4-5)n=0$. Оскільки $4-5\neq 0$, то $n=0$.

7. $1\neq 1$ ▲ Із пропорції $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ випливає $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}=$ $=\frac{c}{d}$, бо в обох випадках виконується основна властивість пропорції $ad=bc$. Нехай у пропорції $\frac{3x-b}{3x-5b}=$ $=\frac{3a-4b}{3a-8b}x$ означено так, що рівність виконується. Тоді застосування попереднього правила дає $\frac{3a-4b}{3a-8b}=$ $=\frac{3x-3a+3b}{3x-3a+3b}$. У правій частині дістали вираз, який дорівнює одиниці, в лівій — дріб, відмінний від одиниці. Тим самим «доведено», що $1\neq 1$. ■

НЕВИЗНАНІ ПРАВИЛА АРИФМЕТИКИ

Правила арифметики, які створювались багато тисяч років тому, в епоху сучасної математики зберігають свою силу і використовуються буквально на кожному кроці.

Б. В. ГНЄДЕНКО

Читачі, звичайно, пам'ятають основні правила дій над натуральними, цілими і дробовими числами. Спробуємо ввести ще деякі правила.

Розширимо можливості скорочень дробів, наприклад, такими способами:

8. $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$; $\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5}$; $\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5}$; $\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}$.

9. $\frac{2199\cancel{9}78}{8999\cancel{9}12}=\frac{219\cancel{9}78}{899\cancel{9}12}\quad\frac{21\cancel{9}78}{89\cancel{9}12}=\frac{2178}{8912}$;

$\frac{1388\cancel{8}75}{5788\cancel{8}31}=\frac{138\cancel{8}75}{578\cancel{8}31}\quad\frac{13\cancel{8}75}{57\cancel{8}31}=\frac{1375}{5731}$;

$\frac{2144\cancel{4}23}{3244\cancel{4}12}=\frac{214\cancel{4}23}{324\cancel{4}12}=\frac{21\cancel{4}23}{32\cancel{4}12}\quad\frac{2123}{3212}$;

10. $\frac{19\cancel{9}8}{89\cancel{9}1}=\frac{1\cancel{9}8}{8\cancel{9}1}=\frac{18}{81}=\frac{26\cancel{6}4}{46\cancel{6}2}=\frac{2\cancel{6}4}{4\cancel{6}2}=\frac{24}{42}$.

Тепер доповнимо «варварські» скорочення ще й перестановкою цифр у чисельниках і знаменниках дробів: $\frac{\cancel{1}\cancel{8}2}{\cancel{8}\cancel{1}9}=\frac{2\cancel{1}\cancel{8}}{9\cancel{8}\cancel{1}}=\frac{2}{9}$; $\frac{\cancel{2}\cancel{7}3}{\cancel{7}\cancel{2}8}=\frac{3\cancel{2}\cancel{7}}{8\cancel{7}\cancel{2}}=\frac{3}{8}$; $\frac{\cancel{2}\cancel{4}4}{\cancel{4}\cancel{2}7}=\frac{\cancel{4}\cancel{2}4}{7\cancel{4}\cancel{2}}=\frac{4}{7}$; $\frac{\cancel{3}\cancel{6}4}{\cancel{6}\cancel{3}7}=\frac{4\cancel{3}\cancel{6}}{7\cancel{6}\cancel{3}}=\frac{4}{7}$; $\frac{\cancel{1}\cancel{2}4}{\cancel{2}\cancel{1}7}=\frac{4\cancel{1}\cancel{2}}{7\cancel{2}\cancel{1}}=\frac{4}{7}$; $\frac{5\cancel{4}\cancel{5}}{6\cancel{5}\cancel{4}}=\frac{5}{6}$; $\frac{\cancel{4}\cancel{8}4}{\cancel{8}\cancel{4}7}=\frac{4}{7}$.

11. Дії абсолютно неприпустимі, а проте результати правильні. Можливо, математики й досі не відкрили ще одне правило дій над дробовими числами? $\frac{9-25}{6+10}=\frac{9}{6}-\frac{25}{10}$; $\frac{121-64}{55+40}=\frac{121}{55}-\frac{64}{40}$; $\frac{8-50}{2+5}=\frac{8}{2}-\frac{50}{5}$.

12. Відомо, якими складними є перетворення числових виразів із степенями, а все тому, що забули дуже просте і корисне правило спрощення:

$$\frac{41^3+25^3}{41^3+16^3}=\frac{41+25}{41+16};\ \frac{73^3+37^3}{73^3+36^3}=\frac{73+37}{73+36};\ \frac{81^3+18^3}{81^3+63^3}=\frac{81+18}{81+63};$$

$$\frac{5^3+4^3}{5^3+1^3}=\frac{5+4}{5+1}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2};\qquad \frac{6^3+4^3}{6^3+2^3}=\frac{6+4}{6+2}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}.$$

13. Ще більше неприємностей завдає нам добування коренів. Звичайно цю операцію можна легко виконати коли є мікрокалькулятор. Але без нього може стати у нагоді і такий спосіб «раціоналізації» добування коренів різних степенів і чисел:

$$\sqrt{5\tfrac{5}{24}}=5\sqrt{\tfrac{5}{24}};\ \sqrt{12\tfrac{12}{144}}=12\sqrt{\tfrac{12}{144}};\ \sqrt[3]{3\tfrac{3}{26}}=3\sqrt[3]{\tfrac{3}{26}};$$

$$\sqrt[3]{2\tfrac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\tfrac{2}{7}};\ \sqrt[5]{2\tfrac{2}{31}}=2\sqrt[5]{\tfrac{2}{31}}.$$

14. а) Сума (різниця) двох чисел дорівнює їх добутку (частці):

$$5\frac{5}{4}=5\cdot\frac{5}{4},\ \frac{25}{4}-5=\frac{25}{4}:5,\ 6\frac{6}{5}=6\cdot\frac{6}{5},\ \frac{36}{5}-6=\frac{36}{5}:6.$$

б) Щоб додати до дробу число, досить додати це число до чисельника і знаменника дробу:

$$\frac{2}{5}+\left(-\frac{22}{5}\right)=\frac{2-\frac{22}{5}}{5-\frac{22}{5}}=-4;\ \frac{3}{4}+\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{3-\frac{15}{4}}{4-\frac{15}{4}}=-3.$$

15. а) Логарифм суми дорівнює сумі логарифмів:

$$\lg\left(16+\frac{16}{15}\right)=\lg 16+\lg\frac{16}{15};\ \lg\left(17+\frac{17}{16}\right)=\lg 17+\lg\frac{17}{16}.$$

б) Логарифм різниці дорівнює різниці логарифмів:

$$\lg\left(\frac{49}{6}-7\right)=\lg\frac{49}{6}-\lg 7;\ \lg\left(\frac{64}{7}-8\right)=\lg\frac{64}{7}-\lg 8.$$

НЕПІДНЯТА РУКАВИЧКА П'ЄРА ФЕРМА

...ми розуміємо і те високе почуття, що охоплює кожного ученого, який прагне проникнути в загадку великої теореми Ферма, бо він опиняється перед лицем самих основ арифметики, перед лицем тих величних законів, які управляють світом чисел і на яких грунтується все наше знання про цей світ.

О. Я. ХІНЧИН

Геніальний французький математик П'єр Ферма (1601—1665) був за фахом юристом і займався математикою в години відпочинку. Він залишив недоведеними багато тверджень, серед яких одне залишається не доведеним до нашого часу. Це знаменита і надзвичайно популярна теорема. Формулювання її дуже просте і, здається, має бути таким же простим її доведення. Пропонуємо знайти помилки в міркуваннях, які, на думку їхніх авторів, і є доведеннями знаменитої теореми Ферма.

16. Рівняння

$$x^n+y^n=z^n, \qquad (1)$$

де n — ціле число, більше від двох, не має розв'язків у цілих додатних числах.

▲ Міркуватимемо методом від супротивного. Припустимо, що рівняння (1) має розв'язки в цілих додатних числах при деякому $n>2$.

Ніхто не піддасть сумніву істинність знаменитої теореми Піфагора, для якої знайдено кілька сот різних доведень. Її можна записати в такій формі: $x^2+y^2=$ $=z^2$ (2), де x, y, z — значення довжини відповідно катетів і гіпотенузи прямокутного трикутника. Рівняння (1) і (2) можна переписати так:

$\left(\frac{x}{z}\right)^n+\left(\frac{y}{z}\right)^n=1$ (3) і $\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2=1$. (4)

Праві частини рівнянь (3) і (4) рівні, тому мають бути рівними й ліві частини, тобто

$$\left(\frac{x}{z}\right)^n+\left(\frac{y}{z}\right)^n=\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2. \quad (5)$$

Але остання рівність справедлива лише при $n=2$. Таким чином, припустивши, що велика теорема Ферма хибна, ми прийшли до суперечності, тому істинним має бути висловлення, протилежне нашому припущенню, тобто сама ця теорема. ■

17. Знову про теорему Ферма.

▲ Теорема Ферма стверджує, що $x^n+y^n\neq z^n$ при $n>2$; а теорема Піфагора: $x^2+y^2=z^2$ (2) при двох умовах 1) $n=2$ і 2) x, y, z — піфагорові трійки, тобто значення довжин катетів і гіпотенузи прямокутного трикутника. Це означає, що рівність (2) неможлива, коли порушується принаймні одна з двох названих умов. Ми можемо стверджувати, що $x^n+y^n\neq z^n$ (3) при $n>2$, хоча для правильності нерівності (3) є навіть більше підстав, ніж невиконуваність умови 1), адже в ній x, y і z є не тільки піфагорові трійки, а й будь-які натуральні числа. ■

Велика теорема Ферма привертає увагу не тільки математиків. Про це свідчить і фантастичне оповідання А. Порджерса «Саймон Флегг і чорт» (Квант, 1972, № 8).

Старійшині радянських фантастів Олександру Казанцеву потрібен був простір роману «Гостріше за шпагу», щоб показати, що навіть в епоху панування цієї зброї існувало дещо вагоміше й гостріше за неї — всюдисуща думка мислителів: Ферма, батька й сина Паскалів, Декарта, Торрічеллі, Гюйгенса, Мерсенна... і, звичайно, їх творіння, одним з яких є непіднята рукавичка Ферма.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

Не потрібно плутати те, що нам здається неймовірним і неприродним, з абсолютно неможливим.

К. Ф. ГАУСС

18. Переглядаючи науково-популярний журнал, учень натрапив на повідомлення про різні вдосконалення в роботі парової машини, кожне з яких, незалежно від інших, давало значну економію пального. Перше вдосконалення мало дати 40% економії, друге — 35%, третє — 25%.

— Ура! — вигукнув учень.— Нарешті винайдено вічний двигун. Прийнявши всі три пропозиції, дістанемо 100 % економії пального:

$40\%+35\%+25\%=100\%$.

А це означає, що парова машина працюватиме без використання пального, тобто стане вічним двигуном.

Чи справді це так?

19. На складі є 100 кг ягід. Проведений аналіз показав, що в ягодах міститься 99% води. Через деякий час аналіз повторили. Виявилося, що кількість води в ягодах зменшилася до 98%. Яку масу тепер мають ягоди?

20. *Із «Арифметики» М. П. Магніцького.* Дехто продав коня за 156 крб. Однак покупець, придбавши коня, передумав його купувати і повернув продавцеві, кажучи:

— Нема рації мені купувати за цю ціну коня, бо він таких грошей не вартий.

Тоді продавець запропонував інші умови:

— Якщо, на твою думку, ціна коня надто велика, то купи лише цвяхи, що у його підковах, а коня дістанеш тоді на додачу безплатно. Цвяхів у кожній підкові 6. За перший цвях дай мені лише $\frac{1}{4}$ копійки, за другий $\frac{1}{2}$ копійки, за третій 1 копійку і т. д.

Покупець, спокушений низькою ціною, бажаючи даром дістати коня, прийняв умови продавця, розраховуючи, що за цвяхи доведеться заплатити не більше як 10 карбованців.

Скільки повинен заплатити покупець?

21. *Підступний заповіт.* Французька графиня Елізабет-Анжеліка де Боутвіль овдовіла в 20 років. Її люблячий чоловік — губернатор Сенліса залишив такий заповіт: за перший рік після його смерті вдові має виплачуватися 1 золота монета, а якщо вона не вийде знову заміж, кожного наступного року вона має одержувати вдвічі більше, ніж попереднього. Графиня прожила ще 69 років і не вийшла знову заміж. На яку суму грошей вона отримала право?

22. Візьміть аркуш паперу завтовшки, наприклад, 0,1 мм. Складіть його пополам, потім ще раз пополам і т. д. Звичайно, виконати таку операцію ви зможете разів 8—10, не більше. Але якщо б вам вдалося зробити це, скажімо, 40 раз, якої товщини досяг би складений аркуш паперу?

23. *Куди поділася 1 копійка?* (Із задач Л. М. Толстого). Дві селянки продавали яблука, кожна по 30 штук. Перша продавала за 1 копійку 2 штуки, а друга за 1 копійку — 3 штуки. Перша вторгувала 15 копійок, друга — 10 копійок. Якось друга селянка не змогла піти на базар і попросила першу продавати її яблука. Та продавала 5 яблук за 2 копійки, оскільки вона за 1 копійку продавала свої 2 яблука, а її сусідка — за 1 копійку 3 яблука.

У першої селянки було тепер 60 яблук. Вона зробила 12 купок по 5 яблук, продала кожну за 2 копійки і була здивована, що вторгувала не 25, а тільки 24 копійки. Куди поділася 1 копійка?

24. *Де ще один франк?* Ввечері до готелю французького міста приїхали три туристи. Господар повідомив, що нічліг буде коштувати кожному 10 франків. Але коли гості розрахувалися і розмістилися в кімнатах, господар вирішив, що йому буде досить 25 франків і доручив посильному повернути туристам 5 франків. Посильний, не знаючи, як розділити 5 франків між трьома туристами, вирішив для простоти обчислень залишити собі 2 монети, а туристам повернув по одній монеті, і всі були задоволені.

Потім він підвів підсумок і був здивований, бо вийшло ось що: гості заплатили разом $9 \cdot 3 = 27$ франків, два франки посильний залишив собі. Отже, всього від подорожніх одержали $27 + 2 = 29$ франків. Але ж господар одержав спочатку 30 франків? Куди ж подівся 1 франк?

25. Описуючи життя Архімеда, римський історик Плутарх (50—125 рр.) стверджує, що великий математик вважав механізм важеля настільки досконалим, що сказав: «Дайте мені точку опори — і я зрушу Землю».

А якщо й справді мати десь поза Землею точку опори, то якої довжини повинно бути одне плече важеля, щоб другим кінцем підняти Землю на 1 см?

26. Один римлянин, вмираючи, залишив заповіт на користь своєї дружини і дитини, яка мала народитися. Якщо народиться син, йому належатиме 2/3 спадщини, а дружині — 1/3. Якщо ж народиться дочка, то вона має одержати 1/3 майна, а 2/3 — мати. Але дружина римлянина народила близнюків: хлопчика і дівчинку. Як розділити спадщину?

27. *Чи можна продати ціле яйце, продаючи по пів-яйця?*

Продавщиця гастроному розповідала, що вона продала одному покупцеві половину всіх яєць і ще пів-яйця, другому — половину залишку і ще пів-яйця, третьому — половину другого залишку і ще пів-яйця, так само вона продавала четвертому, п'ятому і шостому покупцеві, після чого в ящику залишилося тільки одне яйце.

— Не розповідайте байки,— зауважив один із слухачів.— Як це ви могли продавати пів-яйця?

— Але я нікому й не продавала пів-яйця, а завжди тільки цілі,— здивувалася в свою чергу продавщиця,— а все ж виходило, що продавала саме так, як розповідаю.

Як це могло бути?

28. Один кочівник заповів своїм трьом синам 17 верблюдів. Старшому — половину всіх верблюдів, середньому — третину, а молодшому — дев'яту частину. Спантеличені нащадки довго сперечалися, як розділити спадщину. Випадково до них підійшов дідусь, ведучи старого знесиленого верблюда, і взявся розділити спадщину, віддавши братам і власного верблюда.

Тоді із усіх 18 верблюдів старший дістав згідно із заповітом 9 (половину), середній 6 (третину), а молодший — 2 (дев'яту частину). Брати були дуже задоволені, дідусь теж, бо при цьому залишився один добре вгодований верблюд, з яким дідусь і продовжив свій шлях. Як це могло трапитися?

Ми розглянули цікаві арифметичні задачі та головоломки — приклади найпростіших математичних моделей, які готують допитливий розум до побудови і дослідження значно складніших реальних та логічно можливих закономірностей.

ВІДПОВІДІ, РОЗВ'ЯЗАННЯ

Пам'ятайте: якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх.

Д. ПОЙА

1. Софізм засновано на типовому випадку замаскованого виконання забороненої дії — ділення на нуль. Заборона ділення на нуль — одне з фундаментальних положень усієї математики. Справді, припустимо, що $a \neq 0$ і $a:0=c$. Тоді дістанемо, що $c \cdot 0 = a$, а, за означенням, для всіх $a: a \cdot 0 = 0$. Тому й діє повсюдна заборона виконання цієї операції, бо не існує її результату. Варіації теми цього софізму зустрічаються в алгебрі, геометрії, тригонометрії.

2. Див. розв'язання № 1.

3. Софізм заснований на неправомірному поширенні істинності прямої теореми: «Якщо числа рівні, то й квадрати їх рівні» на обернену: «Якщо квадрати двох чисел рівні, то й ці числа рівні». На множині натуральних чисел N справджуються пряма й обернена теореми. На множині Z пряма теорема справджується, а обернена ні. Істинним є частково стверджувальне висловлення: «Якщо квадрати двох цілих чисел рівні, то й ці числа можуть бути рівними». Останні перетворення мали бути такими:

$$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2, \quad \left(1-\frac{3}{2}\right)=\left(2-\frac{3}{2}\right),$$

$$\frac{3}{2}-1=2-\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

4. Див. вказівку до № 3.

5. Другий спосіб.

Софізм виник в результаті застосування (за аналогією) розподільного закону множення відносно додавання до дії ділення, що, безумовно, є незаконним. Потрібно було виконати такі операції: $4:4=\frac{4}{4}=4\cdot(1:4)$, $5:5=\frac{5}{5}=5\cdot(1:5)$, і ніякого софістичного висновку дістати не вдалося б.

6. Допущено помилку «круг у доведенні» (лат. *idem per idem* — повторення того ж самого). Істинність доводжуваного висловлення дістали на основі еквівалентного йому висловлення (всі наші міркування грунтуються на тому, що справджується рівність $4n=5n$, яка рівносильна доводжуваній).

Крім того, тут прихована ще одна помилка. Спочатку ми зробили неправомірне, очевидно хибне припущення, що $4=5$, а потім використали істинне відношення: $4\neq5$.

7. $3x-3a+3b=0$, тобто права частина рівності, а тому і весь вираз, записаний у формі рівності, не має значення. На його основі не можна робити будь-яких висновків.

9, 10. Справді існують окремі види дробів, у яких можна закреслювати в чисельнику та знаменнику «зайві» цифри, не змінюючи величини дробу.

Такі скорочення можливі тільки для дробів виду

$$\frac{ab\overbrace{mm...m}^{n}cd}{ac\underbrace{mm...m}_{n}ba}=\frac{ab\overbrace{mm...m}^{n-1}cd}{dc\underbrace{mm...m}_{n-1}ba}=...=\frac{abcd}{dcba},$$

у яких $a+c=b+d$, $a<d$; $m=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Усього існує 120 таких дробів.

Крім того, скорочення цього типу можливі для дробів

$$\frac{a\overbrace{mm...m}^{n}b}{b\underbrace{mm...m}_{n}a}=\frac{a\overbrace{mm...m}^{n-1}b}{b\underbrace{mm...m}_{n-1}a}=\frac{ab}{ba},$$

де $a+b=m$ і $a<b$. Цей випадок зводиться до попереднього при $b=c=1$. Існує тільки 16 дробів такого виду.

Математика, як і інші науки, вивчаючи свої об'єкти, класифікує їх на певні сукупності за характеристичними властивостями цих об'єктів. Так, множину натуральних чисел N розбивають на підмножини: 1) парних і непарних чисел; 2) підмножини $\{1\}$, {прості числа}, {складені числа} і т. д. На множині простих чисел можна виділити прості числа виду $4k+1$, $4k+3$, $6k+5$, n^n+1, $n^{n^n}+1$ і т. д.

Чим вужча множина математичних об'єктів, зокрема числова множина, тим більше появляється можливостей виявити на ній такі специфічні властивості, які, як правило, не справджуються на ширших множинах. Кілька невизнаних правил арифметики (№ 10—15) ілюструють це важливе положення логіки і математики.

Потрібні чи зайві подібні правила? Звичайно, вони надзвичайно корисні. Запам'ятати всі їх неможливо, та в цьому й нема потреби. Але різні раціональні (красиві) способи обчислень, зокрема прийоми усних обчислень, раціональні способи розв'язування задач, засновані саме на тому, що на певних сукупностях чисел, алгебраїчних виразів або геометричних фігур вдається виявити закономірності, притаманні тільки об'єктам вужчих множин, які дають можливість раціоналізувати розв'язування поставленої задачі. Так слід розуміти цінність і смисл появи наведених невизнаних правил. Їх надзвичайно багато. І чим більше ми їх знатимемо, тим з меншою затратою зусиль і роботи зуміємо розв'язувати різні задачі.

11. Рівність $\frac{a-b}{c+d}=\frac{a}{c}-\frac{b}{d}$ еквівалентна таким (при $c, d \neq 0$ і $c+d \neq 0$) : $(a-b)cd=(c+d)(ad-bc)$; $acd-bcd=acd+ad^2-bc^2-bcd$; $ad^2-bc^2=0$ і справджується тільки при виконанні цих умов.

12. Це корисне правило теж не є загальним, а застосовне тільки до числових виразів спеціального виду. Воно засноване на формулі

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}.$$

Справді,

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{a^2-a(a-b)+(a-b)^2}=$$

$$=\frac{a+b}{a+(a-b)}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{a^2-a^2+ab+a^2-2ab+b^2}=\frac{a+b}{a+(a-b)}.$$

13. Правило засноване на тотожності:

$$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}.$$

14. а) Правило справджується тільки для чисел виду

$$a+\frac{a}{a-1}=a\cdot\frac{a}{a-1} \text{ і } \frac{a^2}{a-1}-a=\frac{a^2}{a-1}:a,$$

де $a>0$.

б) Правило справджується тільки для чисел виду

$$\frac{b}{c}+\left(1-c-\frac{b}{c}\right)=\frac{b+\left(1-c-\frac{b}{c}\right)}{c+\left(1-c-\frac{b}{c}\right)},$$

де a, b, $c>0$.

15. а) $\lg(a+b)=\lg a+\lg b \Leftrightarrow b>1$ і $a=\frac{b}{b-1}$;

б) $\lg(a-b)=\lg a-\lg b \Leftrightarrow b>1$ і $a=\frac{b^2}{b-1}$.

16. Суперечність в рівності (5) має інше джерело і не залежить від того, правильна чи неправильна велика теорема Ферма. В лівій частині рівності (5) змінні x, y, z — натуральні, а в правій вони є компонентами впорядкованих трійок (r_1, r_2, r_3), де r_1, r_2, r_3 — такі додатні дійсні числа, що $r_1^2+r_2^2=r_3^2$. Тому суперечність ми запрограмували, поєднавши знаком рівності вирази, задані в різних областях визначення і з різними множинами значень.

Теоремі Ферма присвячено величезну літературу, пропорційну її популярності і кількості спроб взяти цю фортецю математики. До 1978 року теорема Ферма доведена для всіх $n<100\,000$. Тому в прикладах, які її спростовують, доводиться оперувати з числами, більшими за $10^{500\,000}$.

Про історію питання і досягнуті результати радимо прочитати в кн.: Постников М. М. Теорема Ферма. М., 1978 і Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. М., 1978. Тільки опрацювавши ці дві роботи, можна зрозуміти, в якому напрямку варто продовжувати пошук і що означає кожний новий його крок.

17. Допущено логічну помилку *підміни тези* (лат. *ignoratio elenchi*), зумовлену порушенням закону тотожності в процесі доведення. Суть її полягає в тому, що, почавши доводити одну тезу, на певному етапі доведення починають непомітно, замасковано доводити іншу тезу, тільки зовнішньо схожу з попередньою. Саме тому теза, яку потрібно було довести, виявляється не доведеною.

Отже, щоб у доведенні (або розв'язанні задачі) не відбулося підміни тези, потрібно дотримуватися правила, щоб теза була тотожна протягом усього доведення.

В нашому прикладі ми тільки довели, що коли не виконуються умови 1) або 2), то $x^n+y^n\neq z^n$, але звідси зовсім не випливає доведення великої теореми Ферма.

18. Нехай машина потребує 100 кг пального. Впровадження пропозиції першого раціоналізатора дасть 40 кг економії, і пального потрібно буде $100-40=60$ кг. Впровадження другої пропозиції (незалежно від першої) дасть економії 21 кг ($60 \cdot 35\% = 21$ кг), і машина після цього потребуватиме $60 - 21 = 39$ (кг) пального. Впровадження третьої пропозиції дало б $39 \cdot 25\% = 9{,}75$ (кг) економії пального, і для роботи машини після впровадження всіх трьох пропозицій потрібно було б витрачати $39 - 9{,}75 = 29{,}25$ (кг) пального. Тому економія від впровадження всіх трьох пропозицій становитиме 70,75%.

19. Місткість вологи в ягодах зменшилася до 98%, а частка сухої речовини стала становити 2% ($100\% - 98\% = 2\%$). Ці 2% маси ягід становлять так само 1 кг. 1% становить тепер $1 : 2 = 0{,}5$ кг. А тому маса ягід (загальна маса сухої речовини і вологи) тепер дорівнює $0{,}5 \cdot 100 = 50$ (кг).

Отже, щоб вологість 1 центнера ягід зменшилася на 1%, потрібно було випарувати 50 кг води.

Цей результат здається парадоксальним, і коли журнал «Наука и жизнь» (1965, № 2) опублікував розв'язання цієї задачі, один читач, бухгалтер-пенсіонер написав до редакції гнівного листа, зміст якого зводиться до того, що «такого не може бути». Редакції журналу вдруге довелося повернутися до цієї задачі (1965, № 12, с. 149) і доводити людині, яка все життя мала справу з обчисленнями і підрахунками, що задача розв'язана правильно.

20. За цвяхи у підковах довелося заплатити $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{24-3}$ к. Це дорівнює $\frac{2 \cdot 2^{21} - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4\,193\,303\frac{3}{4}$ к., тобто близько 42 тисяч крб. За таких умов варто коня дати на додачу.

Задачі на зростаючі і спадні геометричні прогресії надзвичайно популярні. Широко відома індійська легенда про винагороду зернами, що вмістяться на клітках шахової дошки, якої зажадав у царя Шерама винахідник шахів Сето. Цар був ображений мізерністю винагороди, а насправді виявилося, що потрібно було б віддати 18 446 744 073 709 551 615 зерен. Якщо висота комори 4 м і ширина 10 м, то довжина її повинна становити 300 000 000 км, щоб вмістити таку кількість зерна.

21. На суму 147 573 952 314 798 506 112 золотих монет. Такої суми грошей не існує у всіх банках світу.

22. Товщина стосу аркушів паперу буде в 2^{40} разів більша, ніж товщина взятого аркуша паперу, тобто становитиме $1 \cdot 2^{40} = 109\,951\,162\,777{,}6$ мм, близько 110 тис. км. Це трохи більше, ніж третина відстані від Землі до Місяця.

23. Першого разу селянка продавала свої яблука по 1/2 к., а другого разу свої й сусідчині продавала по 2/5 к., тому вона втратила на своїх яблуках $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right) \cdot 30 = 3$ к., але за яблука сусідки вона вторгувала більше, ніж вторгувала б сусідка на $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right) \cdot 30 = 2$ к. Отже, загальна втрата й становить $3-2=1$ (к.).

24. Посильний був нечесний і погано знав арифметику. Коли господар готелю повернув 5 франків, у нього залишилося 25 франків. Але кожний турист одержав назад по 1 франку, тобто вони сплатили 27 франків, а це на 27—25 франки більше, ніж одержав господар готелю. Це і є ті 2 франки, які привласнив собі посильний.

25. Маса Землі становить $6 \cdot 10^{24}$ кг. Припустимо, що людина може підняти за 1 с 60 кг на висоту 1 м. Тоді одне плече важеля має бути у стільки разів довшим за друге, у скільки $6 \cdot 10^{24}$ більше за $6 \cdot 10$, тобто в 10^{23} рази. Якщо кінець короткого плеча важеля (до якого прикріплено Землю) підніметься на 1 см, то кінець довгого опуститься на $1 \text{ см} \cdot 10^{23} = 1 \text{ м} \cdot 10^{21} = 10^{18}$ км. Ця відстань в 6000 мільйонів разів більша за відстань від Землі до Сонця. Якщо швидкість опускання становила б 1 м/с, то рух довшого плеча мав продовжуватися 10^{12} років. Навіть, якщо це опускання відбуватиметься із швидкістю світла, то для завершення руху буде потрібно 100 000 років.

Не випадково Архімедів важіль — один з найпопулярніших крилатих висловів.

26. Римський юрист Сальвій розв'язував задачу так. Спадщину необхідно розділити на 7 частин; 4/7 одержить син, 2/7 дружина і 1/7 — дочка. При цьому буде виконана воля батька: син одержить вдвічі більше за матір, а мати вдвічі більше за дочку.

27.

Покупець	застав	купив	лишилося
Перший	127	64	63
другий	63	32	31
третій	31	16	15
четвертий	15	8	7
п'ятий	7	4	3
шостий	3	2	1

28. Допущено логічну помилку підміни тези або ухилення від тези (див. відповідь до № 17).

В запропонованому розв'язанні міркування подані так, ніби розв'язується дана задача, а насправді — інша. Заповіт складено непередбачливо. Адже сума частин $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}\right)$ не становить усього майна. Старшому братові передбачено передати $\frac{17}{2}$ голів табуна, середньому $\frac{17}{3}$, молодшому $\frac{17}{9}$. В сумі це складає $\frac{289}{18}=16\frac{1}{18}$, а $\frac{17}{18}$ від одного верблюда лишаються поза заповітом кочівника. Дідусь так підмінив тезу (заповіт кочівника), що $\frac{17}{18}$ брали не від 17, а від 18 одиниць,— чисельності нового табуна верблюдів. Але таке розв'язання фактично є тільки наближеним виконанням вимоги заповіту. Фактично, старший брат одержав більше на $9-\frac{17}{2}=\frac{1}{2}$ верблюда, середній на $6-\frac{17}{3}=\frac{1}{3}$, а молодший на $2-\frac{17}{9}=\frac{1}{9}$.

От і закінчилася перша наша подорож у світ дивовижних витворів людської думки — софізмів та парадоксів. Час зробити перші висновки і зазирнути за горизонт.

Кожний наведений приклад — софізм був пов'язаний з деякою суперечністю, зумовленою більш або менш вдало замаскованими помилками в міркуваннях. Попереду нас чекають зустрічі із суперечностями істотно іншого роду — парадоксами. Парадокси є вузловими центрами, віхами розвитку кожної науки, які відбивають суперечливість явищ природи і поява яких свідчить про необхідність перегляду усталених меж тих чи інших понять і теорій.

Пізнання — це вічне наближення нашого знання до абсолютної істини. А усталені, звичні положення науки — парадигми (від грецького παράδειγμα — зразок, норма) являють собою певні зупинки в пізнавальному процесі, які, звичайно, не можуть бути тривалими. Саме це мав на увазі німецький філософ Гегель, коли писав, що «суперечність є критерій істини, відсутність суперечності — критерій хибної думки».

Нові знання не завжди вкладаються в обсяги понять досягнутої парадигми. Вони порушують її межі й тому сприймаються спочатку як парадоксальні. Згодом же стає зрозумілим той факт, що під маскою парадоксів приховується нове, глибше знання про навколишній світ, яке з часом стає новою парадигмою науки. Розвиток знання спричиняє появу нових парадоксів, які, в свою чергу, стають парадигмами. Саме так прокладався і прокладатиметься шлях до наукової істини.

Цікаво провести тут одну паралель. 25 лютого стародавні римляни бучно вшановували бога меж і межових знаків — Терміна. У цей день недоторкані межові стовпи, камені та інші знаки, що розділяли земельні ділянки й лісові угіддя, прикрашали квітами, стрічками, покривали позолотою.

У науці теж шанують межі понять, наукових теорій та законів. Але не як жорстко, раз і назавжди усталені рамки наших знань, а тільки як досягнуті рубежі, від яких відразу ж, без щонайменшої зупинки вчені вирушають далі... Адже там, де ще тільки вчора були межі наших знань, сьогодні — вже тили науки. (Докладніше див. 7, 48).

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 3

Алгебра щедра, вона часто дає більше, ніж у неї просять.

Ж. Д'АЛАМБЕР

ДАВНІ ЗНАЙОМІ

Зміст сховано в алгебраїчних формулах для того, щоб, розкриваючи закон, не повторювати сто разів того самого.

О. І. ГЕРЦЕН

1. $2 \times 2 = 5$.

Перший варіант міркувань

▲ Нехай $a = b + c$, тоді $5a = 5b + 5c$ і $4b + 4c = 4a$. Додавши почленно дві останні рівності, дістанемо $4b + 4c + 5a = 5b + 5c + 4a$; тепер, віднявши від обох частин по $9a$, матимемо: $4b + 4c - 4a = 5b + 5c - 5a$, або $4(b + c - a) = 5(b + c - a)$, звідки випливає, що $4 = 5$. ■

Другий варіант міркувань

▲ Нехай $a = 4$, $b = 5$ і $c = \frac{a+b}{2}$, або

$$a + b = 2c, \qquad (1)$$

звідки

$$a = 2c - b. \qquad (2)$$

Перемноживши почленно рівності (1) і (2), дістанемо:

$$2ac - a^2 = 2bc - b^2. \qquad (3)$$

Помножимо обидві частини рівності (3) на -1, тоді, додавши до кожної частини по c^2, маємо:

$$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2, \qquad (4).$$

тобто $(a - c)^2 = (b - c)^2$.

У результаті добування квадратного кореня з обох частин рівності (4) маємо $a - c = b - c$, або $a = b$, або $4 = 5$. ■

Третій варіант міркувань

▲ Нехай b — будь-яке число і $a = b + 1$ (1). Помноживши рівність (1) почленно на $(a - b)$, матимемо: $a^2 - ab = ab + a - b^2 - b$, або $a^2 + b^2 = 2ab + a - b$ (2). Підставивши в рівність (2) значення $a = 2$ і $b = 2$, маємо $4 + 4 = 8 + 2 - 2$, тобто вірну рівність. Тому й вихідна рівність $a = b + 1$ буде вірною при $a = b = 2$, таким чином, $2 = 2 + 1$, або $4 = 5$. ■

2. $5 = 7$.

▲ Нехай $b = 1$ і $a = 1{,}5$. Тоді $10a = 15b$ і $14a = 21b$, звідки $14a - 10a = 21b - 15b$, або $15b - 10a = 21b - 14a$, $5(3b - 2a) = 7(3b - 2a)$, звідки $5 = 7$. ■

3. Будь-яке число дорівнює своїй половині.

Перший варіант міркувань

▲ Відомо, що $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ для будь-яких чисел. Прийнявши $a=b$, виконаємо такі перетворення: $a^2-a^2=(a-a)\cdot(a+a)$; $a\cdot(a-a)=(a-a)\cdot(a+a)$, тоді $a=2a$, або $a=0{,}5a$. ■

Другий варіант міркувань

▲ Нехай $a=b$, або $a^2=ab$, тоді $a^2-b^2=ab-b^2$, або $(a+b)\cdot(a-b)=b\cdot(a-b)$, звідки $a+b=b$. Оскільки, за умовою $a=b$, то $2b=b$ або $b=\frac{1}{2}b$. ■

4. Для кожного числа $n: n=n+1$.

Перший варіант міркувань

▲ Почнемо з очевидної рівності $(n+1)^2=n^2+2n+1$ і виконаємо такі очевидні перетворення:
$(n+1)^2-(2n+1)=n^2$, $(n+1)^2-(2n+1)-n(2n+1)=$ $=n^2-n(2n+1)$; $(n+1)^2-(2n+1)(n+1)=n^2-n(2n+1)$;
$(n+1)^2-(2n+1)(n+1)+\frac{1}{4}(2n+1)^2=n^2-n(2n+1)+$ $+\frac{1}{4}\cdot(2n+1)^2$; $((n+1)-\frac{1}{2}(2n+1))^2=(n-\frac{1}{2}(2n+1))^2$;
$(n+1)-\frac{1}{2}(2n+1)=n-\frac{1}{2}(2n+1)$, $n=n+1$. ■

Другий варіант міркувань

▲ Візьмемо тотожність $n^2-(2n+1)n=(n+1)^2-$ $-(n+1)\cdot(2n+1)$. Додавши до обох її частин квадрат числа $\frac{2n+1}{2}$, дістанемо: $\left(n-\frac{2n+1}{2}\right)^2=\left(n+1-\frac{2n+1}{2}\right)^2$, а це означає, що $n-\frac{2n+1}{2}=n+1-\frac{2n+1}{2}$, звідки $n=n+1$. ■

Третій варіант міркувань

▲ Розглянемо рівність $3-1=6-4$, яка є істинною. Виконаємо тепер ряд перетворень, які і приведуть до потрібного нам висновку:

$3-1=6-4$, $1-3=4-6$, $1-3+\frac{9}{4}=4-6+\frac{9}{4}$,
$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$, $1-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2}$,
звідки $1=2$, або $2=3$, $3=4$, ..., $n=n+1$. ■

Скориставшись транзитивністю відношення рівності (якщо $a=b$ і $b=c$, то $a=c$), приходимо до висновку, що всі натуральні числа рівні між собою.

Алгебра справді щедра наука!

5. Усі числа рівні між собою.

Перший варіант міркувань

▲ Нехай a і b — два довільні числа, причому $a \neq b$ і $a > b$. Позначимо різницю чисел a і b через c, тобто

$$a-b=c, \text{ або } a=b+c. \qquad (1)$$

Помноживши обидві частини рівності (1) на $(a-b)$, матимемо $a^2-ab=ab+ac-b^2-bc$, звідки

$$a^2-ab-ac=ab-b^2-bc. \qquad (2)$$

Цю рівність можна записати у вигляді:

$$a(a-b-c)=b(a-b-c). \qquad (3)$$

Поділивши обидві частини рівності (3) на спільний множник $(a-b-c)$, матимемо $a=b$. ■

Другий варіант міркувань

▲ Нехай знову a та b — два довільних числа і $a > b$. Тоді завжди існує число d — середнє арифметичне чисел a і b, тобто

$$\frac{a+b}{2}=d, \text{ або } a+b=2d, \qquad (1)$$

з рівності (1) дістанемо:

$$b=2d-a \qquad (2)$$

і

$$2d-b=a \qquad (3).$$

Перемноживши почленно рівності (2) і (3), дістанемо

$$2db-b^2=2ad-a^2. \qquad (4)$$

Віднімемо почленно рівність (4) від очевидної рівності $d^2=d^2$, матимемо $d^2-2db+b^2=d^2-2da+a^2$, або $(d-b)^2=(d-a)^2$, або

$$d-b=d-a. \qquad (5)$$

Рівність (5) означає, що при відніманні від d числа b дістанемо таку саму різницю, як при відніманні від того ж числа d числа a. Оскільки за умови рівності зменшуваних і різниць мають бути рівними і від'ємники, то $a=b$. ■

6. Сума будь-яких двох чисел дорівнює нулю.

Перший варіант міркувань

▲ Нехай a та b — будь-які числа і $a+b=c$. Виконаємо тепер такі очевидні перетворення: $c(a+b)=(a+b)^2$; $ac+bc=a^2+2ab+b^2$; $a^2+2ab+b^2-ac-bc=0$; $(a^2+ab-ac)+(ab+b^2-bc)=0$; $a(a+b-c)+b(a+b-c)=0$, звідки $a+b=0$. ■

Другий варіант міркувань

▲ Припустимо, що

$$x=a, \qquad (1)$$

тоді: $4ax=4a^2$, $-4ax+4a^2=0$, $-4ax+4a^2+x^2=x^2$, $(x-2a)^2=x^2$, $x-2a=x$.
Підставимо з рівності (1) значення $x=a$. Тоді $a-2a=a$, $-a=a$, $a+a=0$. ■

НОВІ МОЖЛИВОСТІ — НОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Людський розум не винайшов іншої машини, яка такою ж мірою вивільняла б від нудної роботи, як алгебра.

ДЖ. В. ГІББС

7. $4>12$.

▲ До обох частин очевидної нерівності $7>5$ додамо по -8, тоді $7-8>5-8$, або $-1>-3$. Тепер, помноживши почленно останню нерівність на (-4), дістанемо $(-1)\cdot(-4)>(-3)\cdot(-4)$, або $4>12$. ■

8. Якщо $a>b$, то $a>2b$.

▲ Отже, нехай $a>b$. Помноживши обидві частини нерівності на b, дістанемо $ab>b^2$ (1), звідки $ab-a^2>b^2-a^2$, або $a(b-a)>(b-a)(b+a)$, або $a>b+a$. Додамо почленно до останньої нерівності вихідну нерівність $a>b$, тоді: $2a>2b+a$, або $a>2b$. ■

9. Нуль більший від будь-якого числа.

▲ Нехай a — довільне додатне число. Тоді

$$a-1<a. \qquad (1)$$

Помноживши обидві частини нерівності (1) на $(-a)$, дістанемо

$$-a^2+a<-a^2, \qquad (2)$$

а додавши до обох частин нерівності (2) по a^2, прийдемо до нерівності $a<0$.

10. Квадрат будь-якого числа дорівнює одиниці.

▲ Нехай

$$x=y=\frac{m^2}{4} \ (m \in \boldsymbol{N}), \qquad (1)$$

тоді $\sqrt{x}=\sqrt{y}$. (2)

Віднявши почленно від рівності (1) рівність (2), дістанемо $x-\sqrt{x}=y-\sqrt{y}$, $x-y=\sqrt{x}-\sqrt{y}$, $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=\sqrt{x}-\sqrt{y}$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $2\sqrt{x}=1$; оскільки $x=\frac{m^2}{4}$, то $2\sqrt{\frac{m^2}{4}}=1$, $m^2=1$. ■

11. Будь-яке додатне число, дорівнює від'ємному числу, яке має такий же модуль.

▲ Нехай $a>0$, тоді $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}=\sqrt{(-a)(-a)}=\sqrt{a^2}=a$. $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}=(\sqrt{-a})^2=-a$, тому $a=-a$. ■

Наприклад: $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)\cdot(-2)}=\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$, $\sqrt{-2}\sqrt{-2}=(\sqrt{-2})^2=-2$, а тому $2=-2$.

Примітка. З розглянутого прикладу випливають цікаві висновки. Справді, $a=-a$, то $a+a=0$, або $2a=0$, але $2\neq 0$, тому $a=0$. Цей результат не суперечить висновку із задачі 3.

12. Якщо $p<q$ і n — будь-яке парне натуральне число, то $n\cdot p<q$.

▲ Нехай

$$p>0 \text{ і } p<q. \qquad (1)$$

Помноживши обидві частини нерівності (1) на p, дістанемо $p^2<pq$, звідки

$$p^2-q^2<pq-q^2, \text{ або } (p+q)(p-q)<q(p-q). \qquad (2)$$

Поділивши почленно нерівність (2) на $(p-q)$, матимемо $p+q<q$. Додавши почленно останню нерівність і нерівність (1), дістанемо $2p+q<2q$, або $2p<q$.

Так само як з нерівності $p<q$ маємо $2p<q$, з нерівності $2p<q$ легко дістати $4p<q$, звідки $8p<q$ і т. д., тобто при довільному парному n $(n\in\boldsymbol{N})$, якщо $p<q$, то $np<q$. ■

13. Ще раз $1=2$.

▲ Підставивши в праву частину правильної рівності

$$1=\frac{2}{3-1}, \qquad (1)$$

замість числа 1 вираз $\frac{2}{3-1}$, дістанемо $1=\frac{2}{3-\frac{2}{3-1}}$. Зробивши цю підстановку ще раз, дістанемо

$$1=\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-1}}}. \tag{2}$$

Повторивши ту ж підстановку нескінченне число разів, дістанемо рівність

$$1=\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-\dots}}}. \tag{3}$$

З другого боку,

$$2=\frac{2}{3-2}. \tag{4}$$

Підставивши в праву частину рівності (4) замість 2 вираз $\frac{2}{3-2}$, дістанемо

$$2=\frac{2}{3-\frac{2}{3-2}}.$$

Проробивши цю підстановку вдруге, матимемо:

$$2=\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-2}}}, \tag{5}$$

а повторивши її нескінченне число разів, дістанемо:

$$2=\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-\dots}}} \tag{6}$$

Праві частини рівностей (3) і (6) рівні, тому рівні й ліві їх частини, тобто $1=2$. ■

14. $3>7$.

▲ Прологарифмувавши очевидну нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^3>$

$>\left(\frac{1}{3}\right)^7$, матимемо $3\lg\left(\frac{1}{3}\right)>7\lg\left(\frac{1}{3}\right)$, а поділивши її почленно на $\lg\left(\frac{1}{3}\right)$, приходимо до напевне неправильного співвідношення $3>7$. ■

15. $\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$.

Перший варіант міркувань

▲ Почнемо з нерівності $2\lg a>\lg a$, тому $\lg a^2>\lg a$. Прийнявши $a=\frac{1}{2}$, матимемо $\lg\frac{1}{4}>\lg\frac{1}{2}$, звідки $\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$, бо, як відомо, більшому логарифму відповідає і більше число. ■

Другий варіант міркувань

▲ $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}$, $\lg\sin\frac{\pi}{6}=\lg\sin\frac{\pi}{6}$, $2\lg\sin\frac{\pi}{6}>\lg\sin\frac{\pi}{6}$, $\lg\sin^2\frac{\pi}{6}>\lg\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin^2\frac{\pi}{6}>\sin\frac{\pi}{6}$, але $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, тому $\left(\frac{1}{2}\right)^2>\frac{1}{2}$, або $\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$. ■

16. Квадратний корінь з будь-якого натурального числа є число ірраціональне.

▲ Нехай $n\in N$ і $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, де p і q — натуральні, а $\frac{p}{q}$ — нескоротний дріб, або $q=1$. Тоді $\frac{p^2}{q^2}=n$. В лівій частині нескоротний дріб, а в правій напевне ціле число. Але нескоротний дріб не може дорівнювати цілому числу. Тому для будь-якого натурального числа n число $\sqrt{n}$ не є раціональним, отже, воно ірраціональне. ■

17. $0=4=-4$.

▲ Розглянемо нескінченний ряд $4-4+4-4+\ldots$ і обчислимо різними способами його суму S. По-перше, згрупувавши члени по два, дістанемо: $(4-4)+(4-4)+\ldots=0$. Тепер згрупуємо члени ряду по два, починаючи з другого члена: $4-(4-4)-(4-4)-\ldots-(4-4)=4$. Переставимо місцями члени ряду і згрупуємо їх: $4-4+4-4+\ldots=-4+4-4+4-\ldots=-4+(4-4)+(4-4)+(4-4)+\ldots=-4$. Оскільки $S=0$, $S=4$ і $S=-4$, то $0=4=-4$. ■

18. $2=0$ і $1{,}38=0{,}6$.

▲ Можна довести (див., наприклад, 34), що ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$ збіжний, а його сума l дорівнює $\ln 2$ і міститься в межах: $\frac{1}{2}<l<1$, а точніше $\ln 2\approx 0{,}69$. Тепер виконаємо такі дії:

$$2l=2-\frac{2}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}-\frac{2}{6}+\frac{2}{7}-\frac{2}{8}+\frac{2}{9}-\frac{2}{10}+\ldots;$$

$$2l=2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{5}+\ldots;$$

$$2l=(2-1)-\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)-\ldots;$$

$$2l=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=l.$$

Звідси випливають два висновки:

1) $2l=l$, $l\neq 0$, тому $2=0$ і 2) $2l=l$, $l\approx 0{,}69$, тому $0{,}69\approx 1{,}38$. ■

19. Для всіх натуральних n:

$$\ldots n^3+n^2+n+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots=0.$$

Можна перевірити діленням, що

$$\frac{n}{1-n}=n+n^2+n^3+\ldots \text{ і } \frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Додавши почленно ці рівності, дістанемо:

$$0=\ldots n^3+n^2+n+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ldots \quad ■$$

20. $\infty=-1$.

▲ Нехай $x=1+2+4+8+16+\ldots$, тоді $2x=2+4+$ $+8+16+32+\ldots$, або $2x=x-1$, звідки $x=-1$. Отже, $1+2+4+8+16+\ldots=-1$, або $\infty=-1$. ■

21. $\infty<-1$ (парадокс Валліса).

▲ Очевидно, що $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$, тому

$$\ldots\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{1}{1}<\frac{1}{0}<\frac{1}{-1}<\frac{1}{-2}<\frac{1}{-3}\ldots,$$

звідки: $\frac{1}{0}<\frac{1}{-1}$, або $\infty<-1$. ■

МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Вид пізнання, яке підтверджується тільки спостереженнями, потрібно ретельно відрізняти від істини; його дістають, як прийнято говорити, за індукцією. Але ми бачимо випадки, коли проста індукція призводить до помилок. Тому нам потрібно з великою увагою стежити за тим, щоб не приймати за істинні такі властивості чисел, які ми відкрили спостереженнями і які спираються на одну тільки індукцію.

22. У наших міркуваннях скористаємося принципом індукції. Цей принцип грунтується на одній з основних властивостей упорядкованої множини $\mathbf{N}=\{0, 1, 2, ..., n, n+1, ...\}$ натуральних чисел.

Розглянемо довільну частину M множини $\mathbf{N}$. Принцип індукції можна сформулювати так:

Якщо 1) число 0 належить множині M;

2) для кожного натурального числа n з того, що n належить множині M, випливає, що число $n+1$ належить M, то множина M дорівнює $\mathbf{N}$.

Символічно принцип індукції можна записати так: Якщо

1) $0 \in M$,
2) $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$,
то $M=N$.

Якщо в тричлен $f(x)=x^2+x+41$ підставляти цілі невід'ємні значення змінної, то в результаті завжди діставатимемо прості числа.

▲ $f(0)=41$, $f(1)=43$, $f(2)=47$, $f(3)=53$, $f(4)=61$, $f(5)=71$, $f(6)=83$, $f(7)=97$ і т. д.

Все це прості числа. На основі знайдених результатів стверджуємо, що при підстановці в тричлен $f(x)$ будь-якого натурального числа завжди матимемо прості числа.

Таким чином, знайдемо формулу, яка дає прості числа. ■

23. Будь-яке натуральне число дорівнює наступному натуральному числу.

▲ Припустимо, що

$$k=k+1, \qquad (1)$$

і доведемо, що

$$k+1=k+2. \qquad (2)$$

Справді, додавши до обох частин рівності (1) по 1, дістанемо рівність (2). Отже, якщо наше висловлення істинне при $n=k$, то воно істинне і при $n=k+1$.

Таким чином, натуральні числа рівні між собою. ■

24. Всі натуральні числа рівні.

Перший варіант міркувань

▲ Досить довести, що кожне натуральне число l більше від кожного натурального числа k або дорівнює йому: $l \geqslant k$. Звідси випливає, що для всіх натуральних чисел m і n $m \geqslant n$ і $n \geqslant m$, а отже, $n=m$.

Розглянемо множину M всіх натуральних чисел $m \geqslant k$.

1. Якщо $k=0$, то $k \in M$.

2. Якщо будь-яке натуральне число $n \in M$, то $n+1 \in M$ (якщо $n \geqslant k$, то тим більше $n+1 \geqslant k$).

За принципом індукції звідси «випливає», що $M=N$ і всі натуральні числа більші за число k або дорівнюють йому.

Другий варіант міркувань

▲ Означимо множину M так: довільне натуральне число m належить M, якщо довільні $m+1$ натуральних чисел рівні, і не належить M в протилежному випадку.

1. Очевидно, що $0 \in M$, бо кожне натуральне число дорівнює самому собі.

2. Для кожного натурального числа $n>0$ з $n \in M$ випливає $n+1 \in M$. Справді, припустимо, що будь-які $n+1>1$ натуральних чисел рівні. Розглянемо довільні $n+2>2$ натуральні числа. За припущенням числа $k_1, k_2, ..., k_{n+1}$ рівні, і числа $k_2, ..., k_{n+1}, k_{n+2}$ рівні. Числа $k_2, ..., k_{n+1}$ належать кожній з цих послідовностей. Тому всі розглядувані $n+2$ чисел $k_1, ..., k_{n+1}, k_{n+2}$ рівні.

За принципом індукції звідси випливає, що $M=N$ і кожні $n+1$ натуральних чисел рівні між собою. ■

25. Для всіх натуральних $n : (2^n>2n+1)$.

▲ Нехай існує таке натуральне k, що

$$2^k>2k+1. \qquad (1)$$

Мал. 1

Доведемо, що тоді нерівність справджується і при $n=k+1$, тобто

$$2^{k+1}>2(k+1)+1. \qquad (2)$$

Справді, для всіх натуральних k $2^k \geqslant 2$. Додамо до лівої частини нерівності (1) 2^k, а до правої 2. Дістанемо правильну нерівність $2^k+2^k>2k+1+2$, або $2^{k+1}>2(k+1)+1$. ■

26. «Доведемо» методом математичної індукції твердження: у всіх кішок очі одного і того самого кольору.

▲ Для $n=1$ (одна кішка) твердження очевидно вірне.

Припустимо, що це твердження правильне для n, тобто що будь-які n кішок мають однаковий колір очей. Доведемо, що воно правильне для $n+1$. Візьмемо довільну сукупність із $n+1$ кішок (мал. 1) і пронумеруємо їх.

За індуктивним припущенням кішки з номерами від 1 до n мають один і той же колір очей, кішки з номерами від 2 до $n+1$ (їх теж n штук) також мають один і той же колір очей. В обидві ці множини входить, наприклад, кішка номер 2. Тому у всіх $(n+1)$ кішок очі одного і того ж кольору. Такий результат викликає заперечення, але хіба можна встояти перед силою неспростовних висновків математичної логіки?

ПРИГОДИ З РІВНЯННЯМИ І НЕРІВНОСТЯМИ

Захотів алгебри, ось і маєш!
ЖЮЛЬ ВЕРН

Розглянемо приклади, які розв'язували учні деякої школи, потрапляючи при цьому в незвичні ситуації. Вони робили ніби й усе правильно, але приходили до напевне неправильних висновків, а не до шуканих результатів. Іноді вони в процесі розв'язування припускалися очевидних грубих помилок і при цьому діставали правильний результат. Траплялося, що результат був правильним, помилки, на перший погляд, не було, але насправді розв'язання було хибним. Учні тієї школи зрештою познаходили свої помилки. Пошук їх буде корисним і нашим читачам.

27. Ось який результат дістав один учень, розв'язуючи рівняння $5x-25+20=4x$: $5x-25=4x-20$, $5(x-5)=4(x-5)$, $5=4$. Чому так трапилося?

28. Інший розв'язував рівняння $x-1=2$ таким нераціональним шляхом: $(x-1)(x-5)=2(x-5)$, $x^2-6x+5=2x-10$, $x^2-7x+12=x-3$, $(x-4)(x-3)=x-3$, $x-4=1$, $x=5$. Але $x=5$ не є коренем рівняння! З'являється сторонній корінь!

Потім учень вдруге взявся за рівняння $x-1=2$, але поспішав і додав тільки до лівої частини число 10, дістав $x+9=2$, потім виконав такі перетворення: $(x+9)(x-3)=2(x-3)$, $x^2+6x-27=2x-6$, $x^2+4x-21=0$, $(x+7)(x-3)=0$, $x-3=0$, $x=3$.
Учень дістав правильну відповідь. Чому?

29. Розв'язуючи рівняння $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}=1$ (1)
учень виконав такі перетворення:

$$\frac{x^3+6x^2+11x+8}{(x+1)(x+2)(x+3)}=1, \quad \frac{x^3+6x^2+11x+8}{x^3+6x^2+11x+6}=1,$$

$x^3+6x^2+11x+8=x^3+6x^2+11x+6$, що дало $8=6$, або $2=0$. У чому справа?

30. Розв'язуючи рівняння
$\frac{x+5}{x-7}-5=\frac{4x-40}{13-x}$, учень виконав перетворення:

$$\frac{x+5-5x+35}{x-7}=\frac{4x-40}{13-x}; \quad \frac{40-4x}{x-7}=\frac{4x-40}{13-x};$$

$$\frac{4x-40}{7-x}=\frac{4x-40}{13-x}; \ 7-x=13-x, \ 7=13.$$

Він знову дістав неправильну рівність. З досвіду розв'язування попереднього прикладу учень зробив висновок, що й це рівняння не має коренів. А що скаже читач?

31. Ще одна несподіванка при розв'язуванні рівняння:

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=1,$$
$$2x^2+2-2\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=1,$$
$$2x^2+1-2\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=0,$$
$$2x^2+1=2\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)},$$
$$4x^4+4x^2+1=4(x^4+x^2+1),\ 4x^4+4x^2+1=$$
$$=4x^4+4x^2+4,\ 1=4,\ \text{або}\ 0=3.$$

32. Рівняння $x^{x^x}=2$ (1) можна переписати у вигляді $x^2=2$, звідки $x=\sqrt{2}$ і тому

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}=2. \qquad (2)$$

Розв'яжемо рівняння

$$\sqrt{y}^{\sqrt{y}^{\sqrt{y}}}=4, \qquad (3)$$

яке можна подати у вигляді $y^4=4$, звідки $y=\sqrt{2}$ і тому $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}=4$ (4). З рівностей (2) і (4) випливає, що $2=4$.

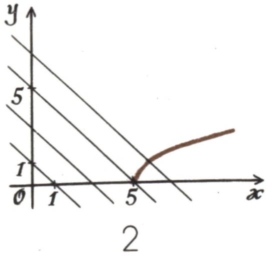
33. Учень розв'язував систему рівнянь:

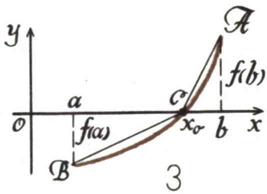
$$\begin{cases} x^4-1321x-23=0, \\ x^4-1310x-144=0. \end{cases}$$

Від першого рівняння він відняв почленно друге, вийшло: $-11x+121=0$, звідки $x=11$. Але, підставивши значення $x=11$, учень переконався, що воно не є коренем жодного з даних рівнянь. Чому?

34. Дві групи учнів розв'язували таку задачу: «Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $\sqrt{x-5}=a-x$ не має розв'язків».

У першій групі міркували так: $\sqrt{x-5}$ (мал. 2) — це половина графіка (параболи), а вираз $a-x$ — сім'я лінійних функцій. Прямі сім'ї лінійних функцій $a-x$ перетинаються з параболою тоді і тільки тоді, коли $a \geqslant 5$. Тому відповіддю задачі має бути проміжок $]-\infty;\ 5]$.





Мал. 2—3

В другій групі міркували так: з даного рівняння видно, що коли воно має розв'язок, то $x-5\geqslant 0$, або $x\geqslant 5$ і $a-x\geqslant 0$, або $a\geqslant x$, а це означає, що коли це рівняння має розв'язок, то $a\geqslant 5$.

Але теорема «Якщо A, то B» рівносильна оберненій до протилежної «Якщо не B, то не A». Тому, якщо $a<5$, то дане рівняння не має розв'язків.

Усім сподобався спосіб розв'язування задачі учнями другої групи, і його застосували при розв'язуванні рівняння $\sqrt{x-5}+\sqrt{x-4}=a-x$, діставши, що воно не має розв'язків при $a<5$, але при $a=5$ воно теж не має розв'язків.

Де загубилося значення параметра $a=5$ при цьому способі розв'язування? Чому для попереднього рівняння розв'язання було вірним?

35. Потрібно було знайти значення параметра a, при якому рівняння $x^2-|x|+a=0$ має єдиний корінь.

Учень A міркував так: відомо, що $x^2=|x|^2$, тому дане рівняння можна записати в такій формі: $|x|^2-|x|+a=0$. Оскільки воно квадратне відносно $|x|$, то єдиний корінь може бути тільки тоді, коли дискримінант його дорівнює нулю, тобто при $a=\frac{1}{4}$.

Йому заперечив учень B. Якщо дане рівняння має корінь x_0, то $-x_0$ теж буде його коренем. А щоб корінь був єдиним, необхідно, щоб $x_0=-x_0$, а це можливо тільки при $x_0=0$. Тому $a=0$, а не $\frac{1}{4}$.

Їм обом хотів щось заперечити учень C, але учень D сказав, що й так усе зрозуміло. Чия відповідь є правильною? Що хотів заперечити C? Що зрозуміло для D?

36. Для доведення тотожності

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2 \qquad (1)$$

учень виконав такі перетворення: підніс до куба обидві частини рівності, дістав

$$14+3\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})^2}\,\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+3\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\times$$
$$\times\sqrt[3]{(7-5\sqrt{2})^2}=8,$$

або

$$3\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})}(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}})=-6, \quad (2)$$

потім підставив значення числового виразу в дужках $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$, записав

$$\sqrt[3]{49-50}=-1, \qquad (3)$$

тобто $-1=-1$. «Що й потрібно було довести»,— сказав учень. Але вчителя таке доведення не задовольнило. Чому?

37. Учень дав таке доведення тотожності $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$; $2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{2}$, $2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{5}$ або $\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{5}$, тобто $\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}$ або $\sin\frac{\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}$, отже, $1=1$, що й потрібно було довести.

Чи довів учень тотожність?

38. В якій точці функція $y=(2+\sin x)\,(6-\sin x)$ набуде найбільшого значення?

Р о з в' я з а н н я. Відомо, що коли дане додатне число потрібно розкласти на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим, то ці доданки мають бути однаковими. Функція $(2+\sin x)\,(6-\sin x)$ набуває найбільшого значення на R при $2+\sin x=6-\sin x$, тобто при $\sin x=2$ (абсурд.). Тому функція екстремальних значень на R не має.

Розв'язуючи задачу звичайним способом (використавши похідну), можна знайти, що функція має екстремальні значення в точках, для яких $\cos x=0$, а саме: $y_{\min}=7$, $y_{\max}=15$.

Де помилка в перших міркуваннях?

39. Обчислюючи первісну для функції $f(x)=\sin x \times \cos x$, учні десятого класу дістали дві відповіді: $F_1(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x$ і $F_2(x)=-\frac{1}{2}\cos^2 x$. Тому вони записали рівність $\frac{1}{2}\sin^2 x=-\frac{1}{2}\cos^2 x$, звідки $\sin^2 x+\cos^2 x=0$ або просто $1=0$. Оскільки учні відразу зрозуміли, що припустилися помилки, то вони записали відповіді інакше: $F_1(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x+C$, $F_2(x)=-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$. Після цього в рівності $\frac{1}{2}\sin^2 x+C=-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$ дістали ту ж безглузду відповідь: $1=0$. Довелося записати відповіді, додержуючи всіх вимог точності: $F_1(x)=\frac{1}{2}\cos^2 x+C_1$, $F_2(x)=-\frac{1}{2}\cos^2 x+C_2$. Але ж цими сталими можуть бути будь-які числа, зокрема й рівні, наприклад 1983, тоді з рівності $\frac{1}{2}\sin^2 x+1983=-\frac{1}{2}\cos^2 x+1983$ виходить знову та сама настирлива помилка: $1=0$.

Ви вже зрозуміли, що можна і чого не можна писати, коли маєш справу з первісними?

40. *Відкриття віку?*

На підсумковому факультативному занятті за темою «Наближене розв'язання рівнянь» учні випробували новий метод чисельного розв'язання рівнянь.

Нехай на відрізку $a \leqslant x \leqslant b$ рівняння $f(x)=0$ має єдиний корінь x_0, а функція $f(x)$ неперервна на цьому відрізку і на кінцях його набуває значень різних знаків (мал. 3). Проведемо хорди AC і BC дуг графіка заданої функції. Рівняння прямої, яка проходить через точки $A(b;\ f(b))$ і $C(x_0;\ 0)$, таке:

$$\frac{f(b)-y}{f(b)-0}=\frac{b-x}{b-x_0},$$

або

$$y=f(b)-\frac{b-x}{b-x_0}f(b).$$

Аналогічно запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки $B(a;\ f(a))$ і $C(x_0;\ 0)$:

$$\frac{f(a)-y}{f(a)-0}=\frac{a-x}{a-x_0}, \text{ або } y=f(a)-\frac{a-x}{a-x_0}f(a).$$

Щоб знайти точку перетину цих прямих, розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y=f(b)-\dfrac{b-x}{b-x_0}f(b), \\ y=f(a)-\dfrac{a-x}{a-x_0}f(a). \end{cases}$$

Виконаємо послідовність відомих перетворень:

$$f(b)-\frac{b-x}{b-x_0}f(b)=f(a)-\frac{a-x}{a-x_0}f(a),$$

$$f(b)\left(1-\frac{b-x}{b-x_0}\right)=f(a)\left(1-\frac{a-x}{a-x_0}\right),$$

$$f(b)\frac{x-x_0}{b-x_0}=f(a)\frac{x-x_0}{a-x_0}, \quad \frac{f(b)}{f(a)}=\frac{b-x_0}{a-x_0},$$

$$x_0=\frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)}.$$

Дістали формулу для кореня даного рівняння: $f(x)=0$! Але ж геніальні математики — норвезький Н. Х. Абель (1802—1829) і французький Е. Галуа (1811—1832) — довели, що не існує загальної формули для розв'язування в радикалах загального алгебраїчного рівняння n-го степеня, де $n \geqslant 5$. Чим же тоді є виведена формула — відкриттям віку чи результатом допущеної десь помилки?

41. Учні розв'язували задачу:

В 2050 році біолог вивів нову різновидність мікробів. Початкова довжина мікробу дорівнювала 0,01 мм, але вона подвоювалася через кожні 20 хв. Гордий за своє відкриття, вчений послав радіограму колегам, які працювали на космічній станції на відстані 21 світлової години від Землі.

Якою стала довжина бактерії, коли радіограма досягла станції?

Учні були надзвичайно вражені результатами підрахунку. Чому?

ВІДПОВІДІ, РОЗВ'ЯЗАННЯ

Математику не можна вивчати спостерігаючи, як це робить сусід!

А. НІВЕН

1. $b+c-a=0$. Отже, в першому варіанті міркувань замасковано виконано неможливу дію — ділення на нуль.

В другому варіанті міркувань допущено помилку при почленному добуванні квадратного кореня з рівності (4). Має бути: $(a-c)^2=(b-c)^2$, $|a-c|=|b-c|$.

В нашому прикладі $a-c=4-4\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$, тому має бути $a-c=c-b$, $a+b=2c$, і ніякого софізму не виникає.

У третьому варіанті міркувань дана рівність справджується тільки при $a=b+1$, а тому не можна брати значення $a=b=2$.

Від результату цього софізму ($2\times2=5$) і відомого нам факту $2\times2=4$ приходимо до першого хибного висновку: $5=4$, потім $1=0$, $2=1$, $3=2$ і т. д. На підставі таких висновків можна розгорнути цілу теорію. У ній буде багато й істинних висловлень. Наприклад, додавши почленно $5=4$ і $3=2$, матимемо $5+3=4+2$, $8=6$, звідки робимо правильний висновок, що сума двох непарних чисел $(5+3)$ є число парне (6). Але ці окремі істини будуть буквально потоплені в океані помилкових результатів, абсурдів.

Найтрагічнішим для того, хто опинився б в полоні «теорії», заснованої на $2\times2=5$, було б те, що він ніяк не міг би відрізнити істинний висновок від хибного. Саме тому дуже важливим є застереження Л. М. Толстого: «Якщо дитину переконали, що $2\times2=5$, то знаряддя її пізнання навіки спотворено» (Толстой Л. Н. Полн. собр. соч., т. 53, с. 379).

Абсурд — від лат. *ab* — від, *surdus* — глухий, отже, *absurdus* — безглуздий, дурний; привести до абсурду (*reductio ab absurdum*) означає довести, що в якомусь положенні приховується безглуздість, замаскована логічна суперечність, і таким чином спростувати це положення.

Абсурд як логічну суперечність відрізняють від ситуацій, які виникають в процесі розвитку науки. Ф. Енгельс в «Анти-Дюрінгу» писав: «...квадратний корінь із мінус одиниці є не просто суперечність, але навіть просто абсурдна суперечність, справжнє безглуздя. І все-таки $\sqrt{-1}$ є в багатьох випадках необхідним результатом правильних математичних операцій; більше того, щó було б з математикою, як нижчою, так і вищою, якби їй заборонено було оперувати з $\sqrt{-1}$?» (Маркс К., Енгельс Ф., Твори, т. 20, с. 117).

2. $3b-2a=0$, замасковане ділення на нуль.

3. Замасковане ділення на нуль: $a-a=0$, $a-b=0$.

5. $a-b-c=0$. В другому варіанті міркувань допущено помилку при добуванні квадратного кореня із обох частин рівності. В результаті має бути не рівність (5), а $|d-b|=|d-a|$ і т. д.

6. $a+b-c=0$.

Другий варіант міркувань: $(x-2a)^2=x^2$, $x-2a=x$, якщо $x-2a\geqslant 0$, або $x-2a=-x$, якщо $x-2a<0$. За умовою $x=a$, звідки $x-2a<0$, тому має місце слідування: $(x-2a)^2=x^2$, $x-2a=-x$, $a-2a=-a$, $a=a$.

7. При множенні або діленні обох частин нерівності на від'ємне число знак нерівності змінюється на протилежний.

8. $b-a<0$, див. вказівку до № 7.

9. Див. вказівку до № 7.

10. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$.

11. Якщо $a>0$, то $-a<0$. В міркуваннях порушено правила: $(\sqrt[n]{a})^n=a\,(a\geqslant 0)$ і $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$.

12. $p-q<0$. Див. вказівку до № 7.

13. Допущено помилку ухилення від тези (див. розв'язання № 17 з розділу «Арифметика»). Алгоритм перетворення будь-якого числа n в ланцюговий дріб складається з двох кроків: 1) із числа виділяється ціла частина, тобто n записується як сума двох доданків: ціле число плюс остача, менша за одиницю, і 2) другий доданок подається як одиниця, поділена на число, більше від одиниці. До знайденого числа застосовується перший крок і т. д. Наприклад:

$$\frac{61}{27}=2+\frac{7}{27}=2+\frac{1}{\frac{27}{7}}=2+\frac{1}{3+\frac{6}{7}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{7}{6}}}=$$

$$=2+\frac{1}{3+\frac{1}{1\frac{1}{6}}}.$$

Справедливими є такі теореми: 1) Будь-яке раціональне число виражається скінченним ланцюговим дробом, а ірраціональне — нескінченним, 2) квадратні ірраціональності, і тільки вони, виражаються нескінченним періодичним ланцюговим дробом, 3) ці представлення є однозначними.

Детальніше див.: Виленкин Н. Я. и др. Алгебра. Учебное пособие для IX—X классов средних школ с математической специализацией. М., 1972; Бескин Н. М. Замечательные дроби. Минск, 1980.

14. $\lg\left(\frac{1}{3}\right)<0.$

15. $2\lg a>\lg a$ тоді і тільки тоді, коли $a>1$; $\lg\sin\frac{\pi}{6}<0$, тому $2\lg\sin\frac{\pi}{6}<\lg\sin\frac{\pi}{6}$.

16. Припущення, що $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, де p і $q \in \boldsymbol{N}$ і $\frac{p}{q}$ нескоротний дріб, є неправильним. Наприклад, не існує таких p і q, що $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$.

17. Числовий ряд $u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots$ називають збіжним або таким, що має суму, якщо послідовність його частинних сум $S_1=u_1$, $S_2=u_1+u_2$, $S_3=u_1+u_2+$ $+u_3,\ldots$ має скінченну границю $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$. Число S при цьому називають *сумою ряду* і записують $S=$ $=u_1+u_2+u_3+\ldots$ Якщо послідовність частинних сум ряду розбіжна, то ряд є розбіжним і не має суми.

Легко перевірити, що послідовність частинних сум розглядуваного ряду не має скінченної границі ($S_1=4$, $S_2=0$, $S_3=4$, $S_4=0,\ldots$), тому він є розбіжним і не має суми. Застосування до розбіжного ряду поняття суми є «незаконним», тому й привело до парадоксальних висновків.

В XVII ст., коли поняття збіжності рядів не було ще точно встановлено, математики часто оперували з розбіжними рядами, як із збіжними, і потрапляли в парадоксальні ситуації. Наприклад, багато клопотів завдав математикам розбіжний ряд $1-1+1-1+\ldots$, для якого різні вчені, серед них і Г. В. Лейбніц, прагнули знайти фактично неіснуючу суму.

Н. Х. Абель писав про розбіжні ряди: «Розбіжні ряди — в цілому витвір сатани, і це ганьба, що дехто дозволяє собі грунтувати на них яке б то не було доведення. Якщо ними користуватися, то можна прийти до чого завгодно, і це вони плодять стільки утруднень і парадоксів. Чи можна уявити собі що-небудь більш огидне, ніж коли кажуть, що $0=1-2^n+3^n-4^n\ \ldots$, де n — ціле додатне число. Ну, хіба це не сміховинно?» (34, с. 56).

Як бачимо, навіть в XIX ст. вчені-математики потрапляли в логічні пастки розбіжних рядів.

18. Розрізняють абсолютно і умовно збіжні ряди. Якщо ряд $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots$ (1), складений із модулів членів ряду $u_1+u_2+u_3+\ldots$ (2), збіжний, то ряд (2) називають абсолютно збіжним, якщо ж ряд (1) розбіжний, то ряд (2) може бути або також розбіжним, або тільки умовно збіжним.

Виявилося, що тільки з абсолютно збіжними рядами можна оперувати як із скінченними сумами — застосовувати до їх членів переставний або сполучний закон. Що ж до умовно збіжних рядів, то, як довів визначний німецький математик Б. Ріман (1826—1866), з будь-якого умовного збіжного ряду за допомогою деякого переставляння його членів можна дістати ряд з будь-якою заданою скінченною або нескінченною сумою.

Розглядуваний ряд для $\ln 2$ (ряд Лейбніца) є умовно збіжним, бо для нього рядом, складеним із модулів його членів, буде гармонійний ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ $+\frac{1}{5}+\ldots$ і хоча послідовність його частинних сум (H_n) зростає надзвичайно повільно, він є розбіжним, бо $\lim\limits_{n\to\infty} H_n=\infty$. Прекрасне доведення цього факту дав уже французький математик Нікола Орем (1323—1382). Цікаво зазначити, що $H_{1000}=7{,}485$, $H_{1\,000\,000}=14{,}393$ (див.: Дороговцев А. Я. Ряды. К., 1978, с. 22 і далі).

19. Розглядувані ряди не є збіжними для всіх $n\in N$, а при $n=1$ наведені записи не мають смислу, оскільки $1-1=0$.

20. Див. вказівку до № 17 цього розділу.

21. Нерівність $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ справедлива лише для $n\in N$. Валліс незаконно поширив її на всі цілі числа, що й привело до парадоксального результату.

22. Сформульовану теорему не доведено, бо ми довели тільки базис індукції, потрібний для застосування принципу математичної індукції. Справді, $f(0)=41$ є простим числом. Але не довели другої теореми: із припущення, що висловлення істинне при $n=k$, випливає істинність його для $n=k+1$. На многочлен x^2+x+41 звернув увагу Л. Ейлер. Цей многочлен дає ряд із 40 простих чисел, але $f(41)=41^2+41+41=$ $=41\cdot(41+1+1)=41\cdot 43$ буде вже числом складеним.

23. Помилка полягає в тому, що базис індукції необхідний для застосування принципу математичної індукції не справджується: не існує жодного натурального числа, яке б дорівнювало наступному натуральному числу.

24. Умова 1 принципу індукції істинна для $k=0$. В цьому випадку є правильним висловлення про число k: якщо $k>0$, то $0 \notin M$. Умова 1 принципу індукції не виконується, отже, застосовувати цей принцип не можна.

У другому доведенні умова 2 принципу індукції виконується для $n>0$. Доведено, що коли кожні два натуральних числа рівні, то будь-яка множина натуральних чисел складається з рівних чисел (див. примітку до № 22). Якщо $n=0$, то з $n \in M$ не випливає $n+1 \in M$. З того, що кожне натуральне число дорівнює саме собі, не випливає, що кожні два натуральних числа рівні. Умову 2 (або другу теорему) індукції не виконано, тому застосовувати цей принцип не можна.

25. Твердження неправильне. Другу теорему доведено, але не доведено (і вона не справджується) теорему 1 для $n=1$.

26. Доведено другу теорему, але при $n=1$ висловлення не має смислу.

27. Корінь рівняння $x=5$, тому $x-5=0$.

28. Корінь рівняння $x=3$ втрачено при «незаконному» діленні обох частин рівняння на $x-3=0$, сторонній корінь $x=5$, з'явився при множенні обох частин рівняння на $(x-5)$.

В другому варіанті розв'язання неправильну дію (додавання тільки до лівої частини числа 10) учень компенсував тим, що помножив обидві частини на $x-3$ — корінь даного рівняння. У результаті «незаконної» дії з'явився сторонній корінь $x=-7$, але учень позбувся його, коли поділив (це теж незаконна дія!) обидві частини рівняння $(x+7)(x-3)=0$ на $x+7$.

29. Усі перетворення виконано вірно. Але, записавши рівняння (1), ми ще не знаємо, чи існує його корінь. Припустивши існування цього кореня, записали рівняння (1) і правильно виконали всі передбачені алгоритмом розв'язування рівнянь перетворення. Неправильна рівність $8=6$ свідчить про те, що наше припущення про існування кореня рівняння (1) хибне. Рівність (1) так само неправильна, як і та очевидна, до якої вона нас привела.

30. Розв'яжемо це рівняння і ми.

$$\frac{x+5}{x-7}-\frac{4x-40}{13-x}=5.$$

Виконавши необхідні перетворення, дістанемо $24x=$ $=240$, звідки $x=10$. Перевірка підтверджує, що $x=10$ є коренем рівняння.

Учень зробив хибний висновок про рівність знаменників дробів. Правильний висновок має бути таким: якщо у рівних дробів чисельники рівні і відмінні від нуля, то рівні і знаменники, при цьому передбачається неодмінна умова для дробів — відмінність від нуля їх знаменників.

32. Хибний висновок $(2=4)$ дістали з рівностей (2) і (4) на основі властивості: якщо $a=b$ і $a=c$ — істинні рівності, то й $b=c$ — істинна рівність. Оскільки цю властивість не піддаємо сумніву, то парадокс виник тому, що неправильна принаймні одна з рівностей (2), (4). Першу дістали в результаті підстановки в рівняння (1) значення $x=2$, знайденого при розв'язуванні рівняння (1). Рівняння $x^2=2$ є наслідком рівняння (1), і тому необхідно перевірити: чи є $\sqrt{2}$ коренем рівняння (1). Вираз $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdots}}$ можна тлумачити як границю послідовності $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdots}$; $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot}}}}$, ... (5), яка збігається до 2. Тому границя послідовності (5) дорівнює 2. Якщо виразу (2) надати цього смислу, то справджується рівність (2) і не справджується рівність (4).

33. Рівняння $-11x+121=0$ є тільки наслідком системи, але воно не еквівалентне їй: будь-який розв'язок системи є розв'язком рівняння, але не навпаки. Тому поки що можна зробити лише такий висновок: якщо система має розв'язок, то він єдиний і є розв'язком рівняння. Підставивши значення $x=11$ в систему, робимо остаточний висновок: розв'язків вона не має.

36. Тотожність не доведено. В процесі міркувань допущено логічну помилку («круг в доведенні»): при переході від рівності (2) до (3) використано рівність (1), справедливість якої саме й потрібно довести. Для доведення тотожності (1) можна міркувати так: $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=a$ або $14+3\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})^2}\times$ $\times\sqrt[3]{(7-5\sqrt{2})}+3\sqrt{7+5\sqrt{2}}\ \sqrt[3]{(7-5\sqrt{2})^2}=a^3$, або $3\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})}(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt{7-5\sqrt{2}})=$

$=a^3-14$. Оскільки $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt{7-5\sqrt{2}}=a$ (цей факт ми приймаємо без доведення, а тому логічної помилки тут немає), то $3\sqrt[3]{49-50}\cdot a=a^3-14$, а це означає, що ліва частина тотожності має дорівнювати одному з коренів кубічного рівняння $a^3+3a-14=0$. Тотожність доведено, бо $a=2$ очевидно єдиний дійсний корінь рівняння.

38. У задачі йдеться не про числа, а про функції, і потрібне нам висловлення для функції, наведене в міркуваннях, читається так: якщо скрізь визначена функція f набуває в деякій точці x_0 значення $\frac{c}{2}$, то функція $g(x)=f(x)(c-f(x))$ набуває найбільшого значення на R в точці x_0: $f(x)(c-f(x))=\frac{c^2}{4}-\left(f(x)-\frac{c}{2}\right)^2$.

Але функція $f(x)=2+\sin x$ не набуває значення $\frac{8}{2}=4$ в жодній точці. Тому розв'язувати задачу за допомогою цього твердження не можна.

Задачу можна легко розв'язати і без обчислення похідної. Оскільки $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ і функція $y=(2+t)(6-t)$ на відрізку $[-1;\ 1]$ зростає, то дана функція набуває найбільшого значення на R в тих точках, в яких $\sin x=1$, тобто при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ (k — ціле число).

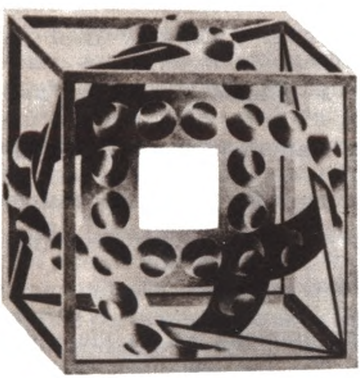
39. Оскільки функція $F_1(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x$ є первісною для f, то будь-яка первісна для f, зокрема $F_2(x)=-\frac{1}{2}\cos^2 x$, подається у вигляді $F_1(x)+C$. Для F_2 константа C знаходиться з рівності $-\frac{1}{2}\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin^2 x+C$. Підставивши, наприклад, $x=0$, дістанемо $C=-\frac{1}{2}$. Отже, $F_2(x)=F_1(x)-\frac{1}{2}$. Зрозуміло також, що будь-яка первісна для f подається у вигляді $F_2(x)+C$. Зокрема, $F_1(x)=F_2(x)-\frac{1}{2}$.

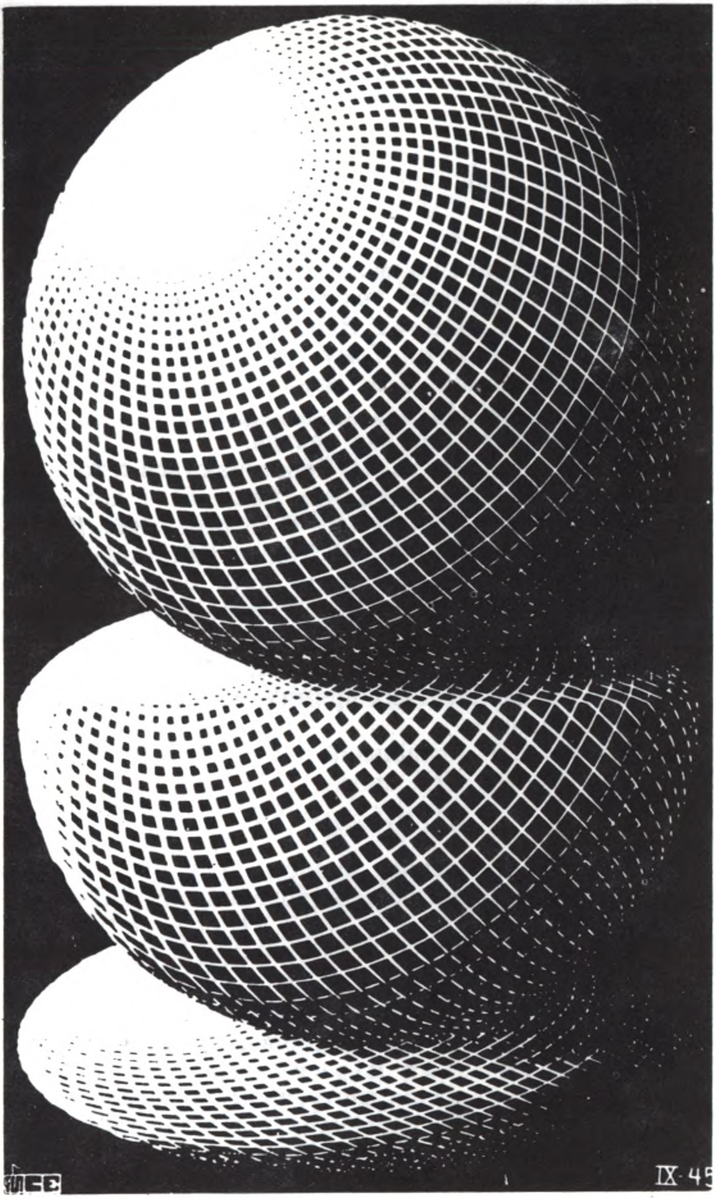
40. В умові сказано, що на відрізку $[a,\ b]$ рівняння $f(x)=0$ має єдиний корінь x_0. Це означає, що не виключається випадок, коли $x_0=a$ або $x_0=b$. У такому разі дроби, знаменниками яких є різниці $b-x_0$ і $a-x_0$, не мають значення, бо $b-x_0=0$ чи $a-x_0=0$.

ГЕОМЕТРІЯ 4

Адже не знайдеться нікого, хто б не захоплювався геометричними або оптичними чудесами, а в разі дослідження їх — не запалювався б жадобою їх пізнати.

ФЕОФАН ПРОКОПОВИЧ




IX·45

ПЕРШІ СОФІЗМИ

...У величезному саду геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком.
ДАВІД ГІЛЬБЕРТ

1. Через будь-які дві різні точки можна провести дві різні прямі.

▲ На сторонах AB і BC (мал. 4) трикутника ABC, як на діаметрах, побудуємо півкола, які перетинаються в точці D. Сполучимо точку D з вершинами трикутника. Тоді $\angle ADB = \angle BDC = 90°$ як вписані, що спираються на діаметр. Тому три точки A, D, C належать одній прямій, а це означає, що через A і C провели дві прямі. ■

2. Будь-яке коло має два центри.

▲ Нехай прямі BD та AD перетинаються в точці D. Побудуємо $CB \perp BD$, $CA \perp AD$ (мал. 5) і коло, яке проходить через точки A, B, C й перетинає BD та AD відповідно в точках K і M. Тоді $\angle KBC = \angle MAC = 90°$. Звідси випливає, що ці кути спираються на діаметри KC і MC одного і того самого кола. Середини відрізків KC і CM — точки O_1 і O_2 є двома різними центрами одного і того самого кола. ■

3. Відрізки паралельних прямих, вміщені між сторонами кута, рівні.

▲ Нехай CED — довільний кут і $CD \parallel AB$ (мал. 6). Тоді $AE : CE = BE : DE$, звідки

$$AE \cdot DE = BE \cdot CE. \qquad (1)$$

Помножимо почленно рівність (1) на різницю $AB - CD$ і виконаємо такі перетворення: $AE \cdot DE \cdot AB - AE \cdot DE \cdot CD = BE \cdot CE \cdot AB - BE \cdot CE \cdot CD$, $AE \times DE \cdot AB - BE \cdot CE \cdot AB = AE \cdot DE \cdot CD - BE \cdot CE \times CD$, $AB(AE \cdot DE - BE \cdot CE) = CD(AE \cdot DE - BE \cdot CE)$, звідки $AB = CD$. ■

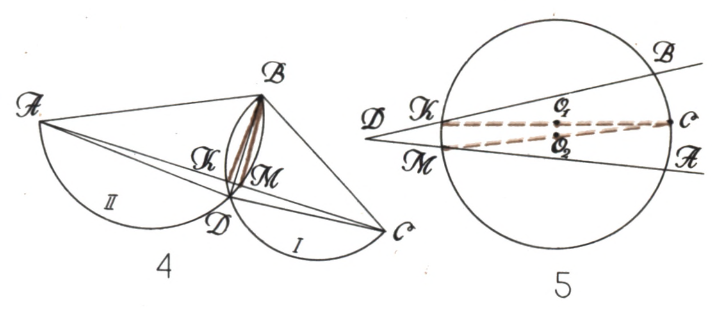
4. Частина відрізка прямої дорівнює всьому відрізку.

Перший варіант міркувань

▲ Перетнемо довільно взяту пряму в точках A і B прямими MN і PQ, перпендикулярними цій прямій (мал. 7). Проведемо пряму ED, яка перетинає пряму MN у точці E, AB в C і PQ в D.

Трикутник CBD подібний трикутнику AEC, звідки $BD : AE = CB : AC$:

$$BD : AE = (AB - AC) : AC. \qquad (1)$$



Мал. 4—5

Побудуємо пряму $FH \parallel AB$, тоді з подібності трикутників CBD та FHD маємо:

$$BD : HD = BC : FH \text{ або } BD : HD = (AB - CA) : FH. \quad (2)$$

Із співвідношень (1) і (2) знаходимо BD:

$$BD = \frac{AE \cdot (AB - AC)}{AC} = \frac{HD\,(AB - AC)}{FH},$$

або

$$AF \cdot FH \cdot AB - AE \cdot FH \cdot AC = AC \cdot HD \cdot AB - AC^2 \cdot HD. \quad (3)$$

Додамо до обох частин рівності (3) різницю $AE \cdot FH \times AC - DH \cdot AB \cdot AC$, зведемо подібні члени і винесемо за дужки спільний множник $AB\,(AE \cdot FH - AC \cdot HD) = AC\,(AE \cdot FH - AC \cdot HD)$, звідки $AB = AC$. ■

Другий варіант міркувань

▲ Нехай α — найбільший кут різностороннього трикутника ABC (мал. 8), тоді β — гострий. Побудуємо $\angle BAD = \gamma$ і відрізок $AE \perp BC$. Тоді

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA. \quad (1)$$

$$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle DBA} = AC^2 : AD^2. \quad (2)$$

Оскільки розглядувані трикутники мають спільну висоту AE, то їх площі відносяться, як основи BC і BD.

Таким чином:

$$AC^2 : BC = AD^2 : BD. \qquad (3)$$

Кут, протилежний стороні AC в трикутнику ABC і стороні AD в трикутнику ABD, є гострим. Тому можна застосувати теорему:

Квадрат сторони, яка лежить в трикутнику проти гострого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку однієї з цих сторін та проекції на неї другої сторони.

Згідно з цією теоремою маємо:

$$(AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BE) : BC = (AB^2 + BD^2 - \\ -2BD \cdot BE) : BD. \qquad (4)$$

Поділимо тепер кожен член суми чисельника на відповідний знаменник і зведемо подібні члени. Тоді матимемо:

$$\frac{AB^2}{BC} + BC = \frac{AB^2}{BD} + BD. \qquad (5)$$

Перенесемо BC в праву частину, BD — в ліву і, виконавши відповідні дії, матимемо:

$$\frac{AB^2 - BC \cdot BD}{BC} = \frac{AB^2 - BC \cdot BD}{BD}.$$

В останній рівності чисельники рівні, тому мають бути рівними і знаменники: $BC = BD$. ■.

5. Прямий кут дорівнює тупому.

Планіметричний варіант міркувань

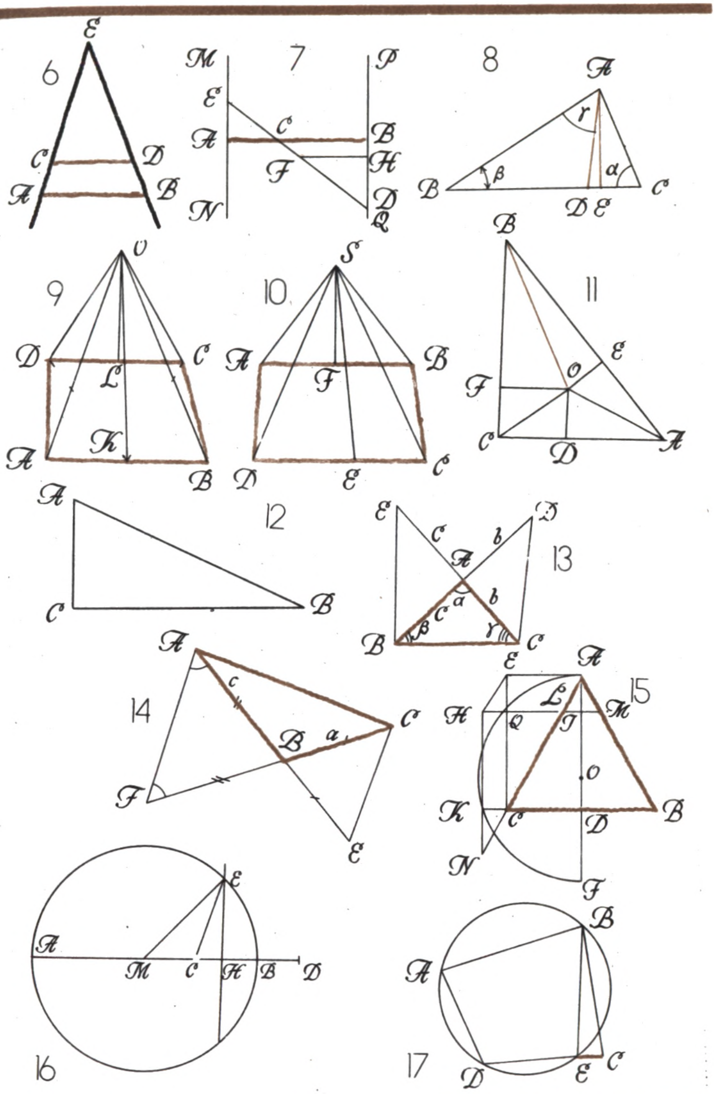
▲ Нехай в чотирикутнику $ABCD$ (мал. 9) $\angle D = 90°$, $\angle C > 90°$ і $BC = AD$. Через середини сторін AB і CD проведемо до них перпендикуляри. Точку їх перетину O сполучимо з вершинами чотирикутника. Із попарно рівних прямокутних трикутників AOK і KOB, DLO і CLO маємо:

$$AO = OB,\ OC = OD;\ \angle ODL = \angle OCL \qquad (1)$$

З рівностей $DA = BC$, $OA = OB$ і $OD = OC$ випливає, що $\triangle AOD = \triangle BCO$. Звідки

$$\angle ADO = \angle BCO. \qquad (2)$$

Віднімаючи почленно від рівності (2) рівність (1), маємо $\angle ADC = \angle BCD$, тобто прямий кут дорівнює тупому. ■



Мал. 18—24

Стереометричний варіант міркувань

▲ Нехай знову дано чотирикутник $ABCD$ (мал. 10), у якого $\angle BAD = 90°$, $BA = BC$ і $\angle ABC > 90°$. Побудуємо в точці F, яка є серединою відрізка AB, відрізок SF, перпендикулярний до площини чотирикутника $ABCD$, а в точці E — середині відрізка DC — перпендикуляр до відрізка DC і позначимо точку перетину цих перпендикулярів через S. Побудуємо також відрізки SB, SA, SC і SD. З теореми про три перпендикуляри випливає, що $AD \perp SA$, тобто $\angle SAD = 90°$.

Але за побудовою $AS = SB$ (як похилі до прямої AB, що мають рівні проекції) і $DS = SC$ (як похилі до прямої DC, що також мають рівні проекції), а за умовою $AD = BC$, тому $\triangle SAD = \triangle SBC$. З рівності цих трикутників маємо: $\angle SBC = \angle SAD = 90°$.

Тепер з теореми, оберненої до теореми про три перпендикуляри (вона справедлива!), дістаємо: $BC \perp AB$, а тому $\angle ABC = \angle DAB$. ■

6. У будь-якому прямокутному трикутнику катет дорівнює гіпотенузі.

Нехай в прямокутному трикутнику ABC (мал. 11) BO — бісектриса кута B, D — середина відрізка AC, $DO \perp AC$, $OE \perp AB$ і $OF \perp BC$. Прямокутні трикутники BEO і BFO рівні (гіпотенуза BO у них спільна і $OE = OF$), тому $BE = BF$ (1), $\triangle OEA = \triangle OFC$, $OA = OC$, бо перпендикуляр, який проходить через середину відрізка, рівновіддалений від його кінців, а $OE = OF$), тому $AE = FC$ (2).

Додавши почленно рівності (1) і (2), маємо: $AB = BC$. ■

7. У будь-якому прямокутному трикутнику катет більший за гіпотенузу.

▲ Різницю квадратів довжин гіпотенузи і катета трикутника ABC (мал. 12) можна подати у вигляді: $AB^2 - BC^2 = (AB + BC) \cdot (AB - BC)$, або $AB^2 - BC^2 = -(AB + BC)(BC - AB)$. Поділивши останню рівність почленно на добуток: $-(AB + BC) \cdot (AB - BC)$, матимемо пропорцію:

$$\frac{AB + BC}{-(AB + BC)} = \frac{BC - AB}{AB - BC}.$$

Очевидно, що додатна величина більша за від'ємну, тобто $AB + BC > -(AB + BC)$. Але тоді і $BC - AB > AB - BC$, звідки $2BC > 2AB$, або $BC > AB$. ■

8. В будь-якому трикутнику всі кути рівні.

▲ Нехай ABC — довільний трикутник, α, β, γ — величини його внутрішніх кутів, a, b, c — довжини сторін, які лежать проти відповідних кутів (мал. 13). Побудуємо на продовженнях сторін AB і AC відрізки $AE=AB$, $AD=AC$, а також побудуємо BE і DC. У $\triangle BEC$:

$\angle E=\frac{\alpha}{2}$, $\angle CBE=\beta+\frac{\alpha}{2}$. Тому, за теоремою синусів:

$$\frac{b+c}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

У трикутнику BDC $\angle D=\frac{\alpha}{2}$, $\angle BCD=\gamma+\frac{\alpha}{2}$, отже,

$$\frac{b+c}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (2)$$

В рівностях (1) і (2) праві частини рівні, тому рівні й ліві частини:

$$\frac{b+c}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{b+c}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)},$$

звідки $\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)$ або $\beta=\gamma$.

Продовживши сторони AB і CB і повторивши аналогічні міркування, прийдемо до висновку, що $\alpha=\gamma$. ■

9. Усі трикутники рівносторонні.

▲ Нехай дано довільний трикутник ABC (мал. 14). На продовженні сторони BC будуємо відрізок FB довжиною c, на продовженні сторони AB — відрізок BE довжиною a і, крім того, будуємо відрізки FA і EC. Тоді $\angle CFA=\angle EAF=\frac{\angle B}{2}$, $\angle AEC=\angle ECF=\frac{\angle B}{2}$. Застосуємо до трикутника AFC теорему синусів:

$$\frac{\sin FAC}{FC}=\frac{\sin AFC}{AC}; \quad \frac{\sin\left(A+\frac{1}{2}B\right)}{c+a}=\frac{\sin\frac{1}{2}B}{b},$$

звідки

$$\sin\left(A+\frac{1}{2}B\right)=\frac{a+c}{b}\sin\frac{1}{2}B. \qquad (1)$$

Застосуємо теорему синусів до трикутника AEC:

$$\frac{\sin ECA}{AE}=\frac{\sin AEC}{AC}, \quad \frac{\sin\left(C+\frac{1}{2}B\right)}{c+a}=\frac{\sin\frac{1}{2}B}{b},$$

$$\sin\left(C+\frac{1}{2}B\right)=\frac{a+c}{b}\sin\frac{1}{2}B. \qquad (2)$$

Порівняємо рівності (1) і (2): $\sin\left(C+\frac{1}{2}B\right)=$ $=\sin\left(A+\frac{1}{2}B\right)$, звідки $C+\frac{1}{2}B=A+\frac{1}{2}B$, або $\angle C=$ $=\angle A$, а тому й $AB=BC$. Аналогічно можна довести, що $AB=AC$, тобто $\triangle ABC$ — рівносторонній. ■

10. Площа рівностороннього трикутника дорівнює нулю.

▲ Нехай $\triangle ABC$ рівносторонній (мал. 15). Побудуємо в ньому висоту AD і на ній — відрізки $DF=CD$. На відрізку AF, як на діаметрі, опишемо півколо, яке перетне пряму CD у точці K. Тоді $KD^2=AD\cdot DF$; квадрат $KDIH$, прямокутник $ADCE$ і трикутник ABC рівновеликі. Виконаємо переміщення трикутника ACE на вектор AL. Тоді C перейде в точку N, а точка H в точку E. Квадрат $KHID$ складено з трапецій $CLID$ і $CKHL$, причому остання рівновелика трапеції $BMID$. Тому квадрат $KHID$ рівновеликий трапеції $CBML$, тобто площа рівностороннього трикутника ALM дорівнює нулю. ■

11. Кожна точка діаметра кола лежить на самому колі.

▲ Нехай C — деяка точка діаметра AB заданого кола (мал. 16). Візьмемо на прямій AB точку D, таку, щоб $AC:CB=AD:DB$ (1). Точка D, яка задовольняє ці умови, називається *четвертою гармонійною до точок A, B і C*. Якщо M — центр даного кола, то з пропорції (1) маємо:

$$\frac{MA+MC}{MA-MC}=\frac{MA+MD}{MD-MA},$$

або $\frac{MA}{MC}=\frac{MD}{MA}$, звідки $MA^2=MC\cdot MD$. Врахувавши, що $MC=MH-CH$ і $MD=MH+CH$, матимемо:

1) $MH^2-CH^2=MC\cdot MD$, або $MH^2-CH^2=MH^2$. Якщо перпендикуляр в точці H до прямої AB перетне коло в точці E, то

2) $ME^2=MH^2+HE^2$ і

3) $CE^2=CH^2+HE^2$. Віднявши почленно рівність 3) від рівності 2), маємо:

4) $MH^2-CH^2=ME^2-CE^2=MA^2-CE^2$. Але з рівностей 1) і 4) випливає, що $MA^2=MA^2-CE^2$, звідки $CE^2=0$ (тобто точка C лежить на колі), причому

така рівність справджується для всіх внутрішніх точок діаметра AB. ■

12. Зовнішній кут трикутника дорівнює внутрішньому, не суміжному з ним.

▲ Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle A+\angle C=180°$ (мал. 17). Оскільки будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, повністю визначають положення кола, то можна стверджувати, що через точки A, B і D проходить єдине коло. Точку перетину його із стороною DC позначимо через E. Побудувавши відрізок BE, маємо чотирикутник $ABED$, вписаний в коло, причому $\angle A+\angle E=\angle B+\angle D=180°$. Оскільки $\angle A+\angle C=$ $=180°$ і $\angle A+\angle BED=180°$, то $\angle BED=\angle C$. ■

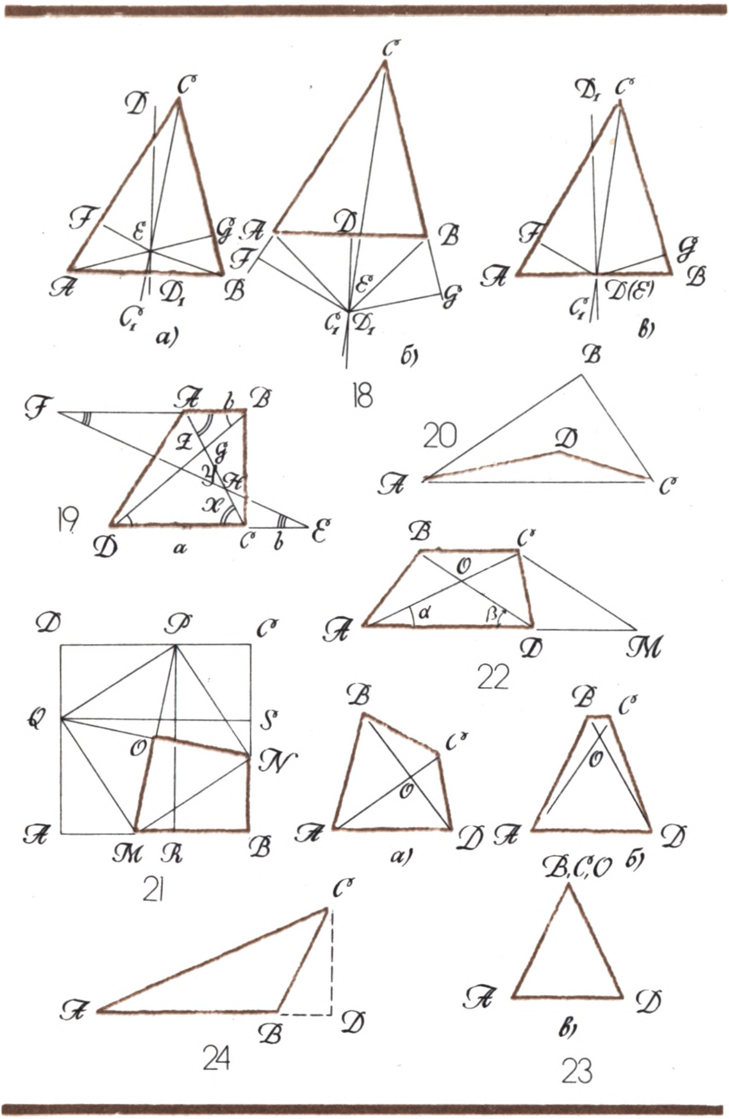
13. Усі трикутники рівнобедрені.

▲ Припустимо, що в довільному трикутнику ABC $AC>BC$. Побудуємо бісектрису CC_1 кута ACB і вісь симетрії DD_1 сторони AB (мал. 18, *а*). Нехай E — точка перетину прямих CC_1 та DD_1. Ці прямі не можуть суміщатися і не можуть бути паралельними, бо тоді бісектриса кута була б одночасно і висотою, що можливо тільки в рівнобедреному трикутнику, тобто коли $AC=BC$.

Щодо положення точки E відносно трикутника ABC, можливі три припущення: 1) точка E розміщена всередині трикутника ABC; 2) поза цим трикутником і 3) належить стороні AB.

Приймемо перше припущення (мал. 18, *а*). Побудуємо відрізки AE, BE, $EF\perp AC$ і $EG\perp BC$. Розглянемо прямокутні трикутники CEF і CEG. У них спільна гіпотенуза CE, $EF=EG$ (точка E належить бісектрисі кута C), а тому й $CF=CG$ (1); отже, $\triangle CEF=\triangle CEG$. Прямокутні трикутники ADE і BDE рівні (у них катет DE спільний і $AD=BD$), а тому $AE=BE$. Крім того, прямокутні трикутники AEF і BGE рівні, бо рівні їх гіпотенузи ($AE=BE$) і катети ($EF=$ $=EG$), а тому $AF=BG$ (2). Додавши почленно рівності (1) і (2), маємо: $AC=BC$, а це суперечить умові $AC>BC$. Отже, кожний нерівнобедрений трикутник є рівнобедреним.

До такого ж висновку прийдемо, прийнявши друге припущення — точка E лежить поза трикутником ABC (мал. 18, *б*). Розглядаючи пари рівних трикутників EFC і EGC, EAD і BED, EAF і BEG, дістаємо рівності $CF=CG$ і $AF=BG$. Почленно віднявши їх, маємо: $AC=BC$.



Мал. 18—24

Аналогічно міркуємо і в разі припущення, що точка E належить відрізку AB, тобто збігається з точкою D (мал. 18, *в*). З рівності двох пар трикутників ADF

і BDG, CDF і CDG маємо: $AF=BG$ і $FC=GC$, звідки знову $AC=BC$.

Отже, у всіх трьох випадках висновок той самий. ■

14. Усі трикутники рівновеликі.

▲ Позначимо сторони довільно взятого трикутника через a, b, c, відповідні висоти — h_1, h_2, h_3, а площу — через S. Для інших довільно взятих трикутників вживатимемо ті самі позначення, але із штрихами.

З курсу геометрії відомо, що $S:S'=ah_1:a'h_1'$ (1), $S:S''=bh_2:a''h_2''$ (2).

Визначимо S із рівностей (1) і (2):

$$S=S'\cdot\frac{ah_1}{a'h_1'};\ S=S''\cdot\frac{bh_2}{a''h_1''}.$$

Тому: $S'\frac{ah_1}{a'h_1'}=S''\frac{bh_2}{a''h''}$, $S'ah_1a''h_1''=S''a'h_1'bh_2$. (3)

Помножимо обидві частини рівності (3) на різницю $S-S_1$ і розкриємо дужки:

$$SS'ah_1a''h_1''-S'^2ah_1a''h_1''=SS''a'h_1'bh_2-S'S''ah_1'bh_2.\ (4)$$

Тепер додамо до обох частин рівності (4) різницю $S'^2ah_1a''h_1''-SS''a'h_1'bh_2$. Після зведення подібних членів і винесення за дужки спільних множників матимемо:

$$S(S'ah_1a''h_1''-S''a'h_1'bh_2)=S'(S'ah_1a''h_1''-S''a'h_1'bh_2).\ (5)$$

звідки $S=S'$ (6). ■

15. Сума основ будь-якої трапеції дорівнює нулю.

▲ Нехай $ABCD$ — довільна трапеція (мал. 19). Продовжимо сторону AB на відрізок $FA=DC$, сторону DC на відрізок $CE=AB$. Введемо позначення: $AG=z$, $GH=y$, $HC=x$, $AB=b$, $CD=a$.

З подібності трикутників CDG і ABG маємо пропорцію: $(x+y):z=a:b$ (1), а з подібності трикутників AFH і CEH — пропорцію $(y+z):x=a:b$. З цих двох пропорцій маємо: $(x+y):z=(y+z):x$, або $(x+y):z=(-y-z):(-x)$. Застосуємо до останньої пропорції відому з алгебри властивість ряду рівних відношень, а саме:

Якщо кілька відношень рівні між собою, то сума всіх попередніх їх членів так відноситься до суми всіх наступних членів, як один з попередніх членів до свого наступного.

Отже, $(x+y):z=(x+y-y-z):(z-x)=(x-z):(z-x)=-1$, $(x+y):z=-1$. Порівнюючи цей результат з пропорцією (1), бачимо, що $a:b=-1$, звідки $a=-b$, $a+b=0$. ■

16. Опукла обвідна ламана коротша за опуклу ламану, яку вона охоплює.

▲ Відрізки AB і BC обвідної візьмемо довільно, а відрізки AD і DC — пропорційні до відрізків AB і BC обвідної: $AD = kAB$, $DC = kBC$, де k — будь-який додатний дріб (мал. 20).

З останніх рівностей маємо:

$$-AD = k(-AB) \text{ і } -DC = k(-BC),$$
$$-AD + (-DC) = k(-AB + (-BC)),$$
$$(-AD + (-DC)) : (-AB + (-BC)) = k,$$

але $k = AD : AB$, тому $((-AD) + (-DC)) : ((-AB) + (-BC)) = AD : AB$ (1).

В останній пропорції попередній член у правій частині менший від наступного ($AD < AB$), а тому й попередній її член в лівій частині теж має бути меншим від свого наступного: $((-AD) + (-DC)) < ((-AB) + (-BC))$ (2), звідки $AB + BC < AD + DC$. ■

17. Будь-який прямокутник, вписаний у квадрат, є також квадрат.

▲ Нехай $ABCD$ — даний квадрат і $MNPQ$ — вписаний в нього прямокутник (мал. 21). Побудуємо рівні між собою відрізки $PR \perp AB$, $QS \perp BC$, кожний з яких дорівнює стороні даного квадрата. Ці перпендикуляри є катетами прямокутних трикутників PRM і QSN, гіпотенузи яких рівні між собою як діагоналі вписаного в квадрат прямокутника $MNPQ$. Звідси випливає, що $\triangle PMR = \triangle QSN$, а тому $\angle PMR = \angle QNS$. Розглянемо тепер чотирикутник $MBNO$. Його зовнішній кут при вершині N дорівнює внутрішньому куту при вершині M. А тому сума двох внутрішніх кутів цього чотирикутника при вершинах M і N дорівнює 180°. Тоді такою самою буде і сума внутрішніх кутів цього чотирикутника при вершинах B і O. Але один із них $\angle B = 90°$, а тому і $\angle O = 90°$. Це означає, що діагоналі QN і PM вписаного в даний квадрат прямокутника $PNMQ$ взаємно перпендикулярні. А це означає, що цей прямокутник — квадрат. ■

18. Площа будь-якої трапеції дорівнює нулю.

▲ Легко перевірити (мал. 22), що $S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BCD}$ (1).

Оскільки $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot DB \sin\beta$ і $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \times AC \sin\alpha$, то $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = BD \sin\beta : AC \cdot \sin\alpha$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC\sin\alpha$ і $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin\beta$,

тому $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle BCD}=AC\cdot\sin\alpha:BD\sin\beta$. В рівності (1) винесемо в лівій частині за дужки $S_{\triangle ACD}$, а в правій $S_{\triangle BCD}$, тоді матимемо:

$$S_{\triangle ACD}\left(\frac{BD\sin\beta}{AC\sin\alpha}-1\right)=S_{\triangle BCD}\left(\frac{AC\sin\alpha}{BD\sin\beta}-1\right),$$

$$S_{\triangle ACD}\frac{BD\sin\beta-AC\sin\alpha}{AC\sin\alpha}=S_{\triangle BCD}\frac{AC\sin\alpha-BD\sin\beta}{BD\sin\beta}. \qquad (2)$$

Чисельники дробів у правій і лівій частинах рівності (2) однакові за модулем, але протилежні за знаками.

Щоб порівняти знаменники дробів, побудуємо відрізки $DM=BC$, так, щоб прямі AM та BC були паралельними. Тоді $AC:CM=\sin\beta:\sin\alpha$, $AC\sin\alpha=CM\sin\beta$. Отже, дроби в обох частинах рівності (2) рівні за модулем і протилежні за знаками.

Поділивши обидві частини рівності (2) на дріб, який стоїть у правій частині, дістанемо: $S_{\triangle ACD}=-S_{\triangle BCD}$, $S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=0$. Але $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$, тому $S_{\triangle ACD}+$ $+S_{\triangle ABC}=0$, або $S_{ABCD}=0$. ■

19. У гострокутному трикутнику точка, сума відстаней від якої до вершин цього трикутника є мінімальною, збігається з однією з його вершин.

▲ Відомо, що точкою, сума відстаней від якої до вершин даного чотирикутника найменша, є точка перетину його діагоналей (мал. 23, *а*). Зменшуватимемо одну із сторін чотирикутника, наприклад сторону BC, доки вона не перетвориться в точку. При цьому точка O буде наближатися до неї і зрештою зіллється з нею (мал. 23, *б, в*).

Отже, точкою, сума відстаней від якої до вершин даного трикутника найменша, є одна із вершин цього трикутника. Але цей висновок суперечить тому факту, що цю властивість має точка, з якої всі три сторони трикутника видно під кутом 120° (ця точка називається точкою Ферма). ■

20. Через будь-які n точок (n — натуральне число) можна провести пряму.

▲ При $n=1$ і $n=2$ теорема справджується згідно з відомими аксіомами геометрії.

Припустимо, що теорема справджується для деякого $n=k$ ($k>2$) і покажемо, що в цьому випадку вона справджуватиметься і при $n=k+1$.

Отже, нехай задано довільні $k+1$ точок M_1, M_2, ..., M_k, M_{k+1}. За припущенням індукції, через k точок M_1, M_2, ..., M_{k-1}, M_k проходить деяка пряма l. За тим же припущенням, через k точок M_2, M_3, ..., M_k, M_{k+1} теж проходить деяка пряма l'. Ці дві прямі мають принаймні дві спільні точки M_2 і M_k. Але дві точки визначають єдину пряму. Тому прямі l і l' збігаються, а пряма l, яка проходить через точки M_1, M_2, ..., M_k проходить і через точку M_{k+1}. ■

21. Якщо дві площини симетричні відносно початку координат O, то вони обидві проходять через точку O.

▲ Нехай площини α і β симетричні відносно початку координат O. Якщо рівняння площини α подається у вигляді

$$ax+by+cz+d=0, \tag{1}$$

то рівнянням площини β буде:

$$-ax-by-cz+d=0. \tag{2}$$

Додавши почленно (1) і (2), дістанемо $d=0$. Отже, (0; 0; 0) є розв'язком обох рівнянь, а це означає, що точка O належить обом площинам. ■

Наступні два софізми М. Г. Чернишевський запропонував у 1846 році своєму братові Олександру (докладніше див. с. 6).

22. 1) Квадрат будь-якої сторони у будь-якому трикутнику дорівнює сумі квадратів двох інших сторін цього трикутника.

▲ Візьмемо довільний трикутник ABC (мал. 24) і побудуємо ще прямокутний трикутник BCD. Тоді $AC^2=AD^2+CD^2$ (1) і $BC^2=CD^2+BD^2$, $CD^2=BC^2-BD^2$ (2). Підставимо значення CD з рівності (2) в рівність (1): $AC^2=AD^2+BC^2-BD^2$ (3), або $AC^2-BC^2=AD^2-BD^2$ (4). Але $AD=AB+BD$, тому $AD^2-BD^2=AB^2$. Підставивши в рівність (4) замість різниці AD^2-BD^2 значення AB^2, яке їй дорівнює, матимемо $AC^2-BC^2=AB^2$, або $AC^2=AB^2+BC^2$. ■

Аналогічно Чернишевський «доводить», що $BC^2=AC^2+AB^2$, і закінчує лист словами: «...десь тут має приховуватися обман; відкривши його, ти зробиш велику послугу люблячому тебе брату Миколі Чернишевському».

2) В будь-якому тупокутному трикутнику довжина сторони, протилежної тупому куту, більша від суми довжин двох інших сторін.

▲ Нехай в тупокутному трикутнику ABC $\angle A >$ $> \angle B + \angle C$. Тоді з теореми синусів $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} =$ $= \frac{c}{\sin C} = 2R$ (де R — радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, матимемо: $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$. Але за умовою $\angle A > \angle B + \angle C$, тому й $a > b + c$. ■

ПЛОЩА ЗНАЙОМА І НЕСПОДІВАНА

Вимірюй все, що піддається вимірюванню, і зроби таким усе, що не піддається вимірюванню.

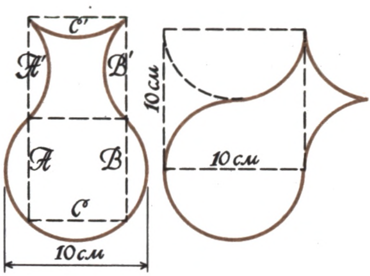
Г. ГАЛІЛЕЙ

Задачі на розрізування фігур і складання з отриманих частин якихось інших фігур традиційно займають почесне місце в цікавій математиці. Унікальну колекцію їх зібрано в книзі Г. Ліндгрена «Занимательные задачи на разрезание» (М., 1977). В основі їх лежить відома з часів античної математики задача про рівновеликі і рівноскладені фігури. У випадку плоских многокутників рівновеликість фігур є необхідною і достатньою умовою їх рівноскладеності. Для многогранників рівновеликість не є достатньою умовою їх рівноскладеності.

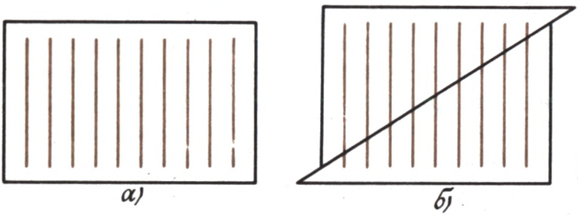
Створено багато цікавих задач на розрізування фігур — від простих, в яких прямокутник перетворюється в рівноскладений і, зрозуміло, рівновеликий йому квадрат до складніших, коли, криволінійна фігура перетворюється в прямокутник або квадрат (мал. 25).

Численні геометричні софізми засновано на принципі прихованого перерозподілу площ прямолінійних плоских фігур. Оскільки за одиницю вимірювання площ беруть площу квадрата, сторона якого дорівнює одиниці довжини, то здебільшого на малюнках до пропонованих софізмів площі фігур вже розбиті на одиничні квадрати.

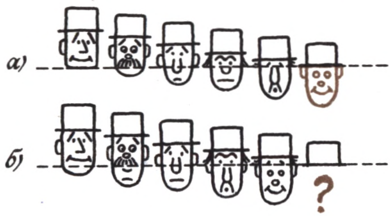
23. Тепер накресліть на прямокутному аркуші паперу 10 однакових вертикальних відрізків, проведіть пунктиром діагональ (мал. 26) і розріжте знайдену фігуру по пунктирній лінії. Зсуньте нижню частину прямокутника вздовж розрізу вниз і вліво на відстань між сусідніми лініями і полічіть лінії. Виявляється, їх лишилося тільки 9. Парадокс? Звичайно. Ще більшу несподіванку демонструють шість масок. Перемалюйте їх, а потім розріжте вздовж пунк-



25



26



27

Мал. 25—27

тирної лінії і зсуньте одну частину відносно іншої на відстань між двома сусідніми масками (мал. 27). Тут, справді, є чому здивуватися: від однієї маски залишилася тільки верхівка капелюха. Так виникають перші парадокси, пов'язані з розрізуванням і прихованим перерозподілом фігур, в результаті чого частина даної фігури (частина площі, якась деталь фігури, частина малюнка) зникають або з'являються. Щоправда, лінія — це не площа, але маска — це вже не тільки частина площі, а й певні деталі на ній.

Дивно й те, що коли частинки розрізаної фігури повернути на свої місця, то зниклі деталі якимось таємничим чином з'являються. В чому тут річ?

24. $64=63$.

Перший варіант міркувань

▲ Візьмемо квадрат, площа якого дорівнює 64 (це може бути і звичайна шахова дошка), і розріжемо дану фігуру на три частини (мал. 28, *а*). Переклавши їх, дістанемо рівноскладений з даним квадратом прямокутник (мал. 28, *б*). Таким чином, із квадрата, площа якого 64, дістали прямокутник, площа якого дорівнює $7\times9=63$ (мал. 28, *б*). ■

Другий варіант міркувань

▲ Той самий квадрат розрізали на дві частини (мал. 29, *а*). Потім першу частину перемістили вгору і вправо. Якщо трикутник NCP відрізати і вмістити на вільному місці в лівому нижньому куті ($\triangle QRM$), то матимемо прямокутник, площа якого становить 7×9 (мал. 29, *б*). Отже, $64=63$. ■

25. $143=145$.

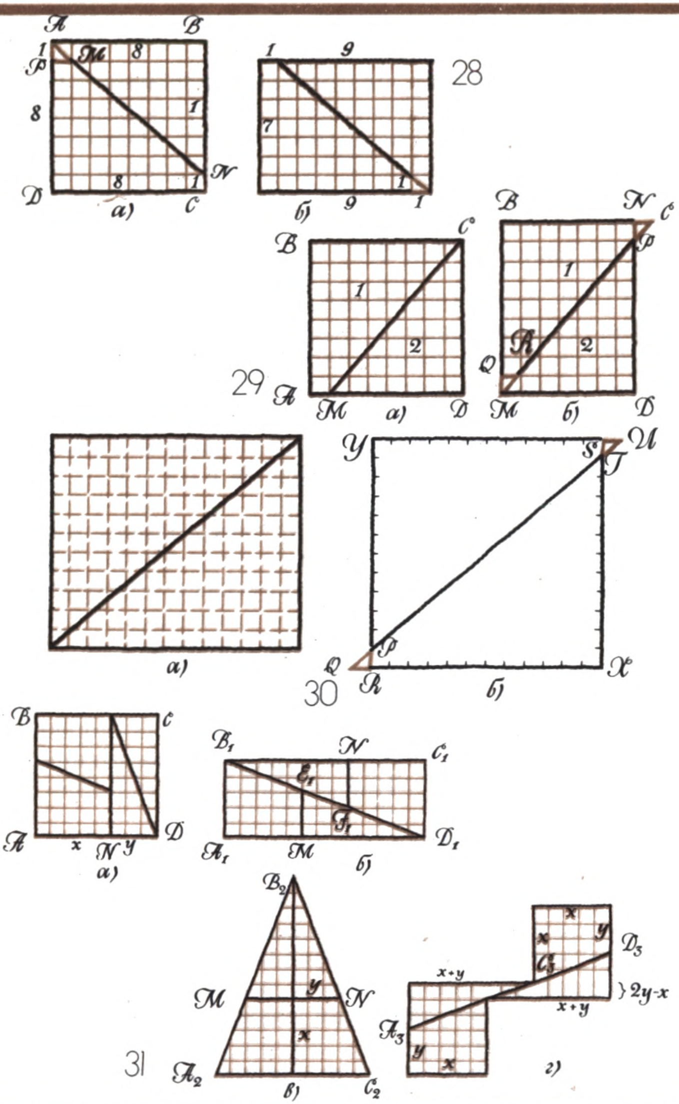
▲ В результаті перекроювання фігур площа фігури, рівноскладеної з даною, може виявитися не тільки меншою, а й більшою. У прямокутнику з розмірами 11×13 (мал. 30, *а*) проведемо діагональ, а потім знайдені прямокутні трикутники зсунемо по їхній спільній гіпотенузі в положення (мал. 30, *б*).

Одержана фігура складається із квадрата і двох рівних прямокутних трикутників. Площа їх дорівнює $12\times12+0{,}5+0{,}5=145$. Оскільки площа даного прямокутника становить $11\times13=143$, то рівність $143=145$ доведено. ■

26. $63=64=65$, $168=169$, $441=442$, $1155=1156$, ...

▲ Квадрат $ABCD$, площа якого $S=64$, розрізали на чотири частини (мал. 31, *а*). З них утворили прямокутник, трикутник і неопуклий восьмикутник. Квадрат і три одержані фігури рівноскладені. Але площа S_2 прямокутника дорівнює площі S_3 трикутника, тобто 65, а площа S_4 восьмикутника дорівнює 63. Таким чином, довели: $63=64=65$.

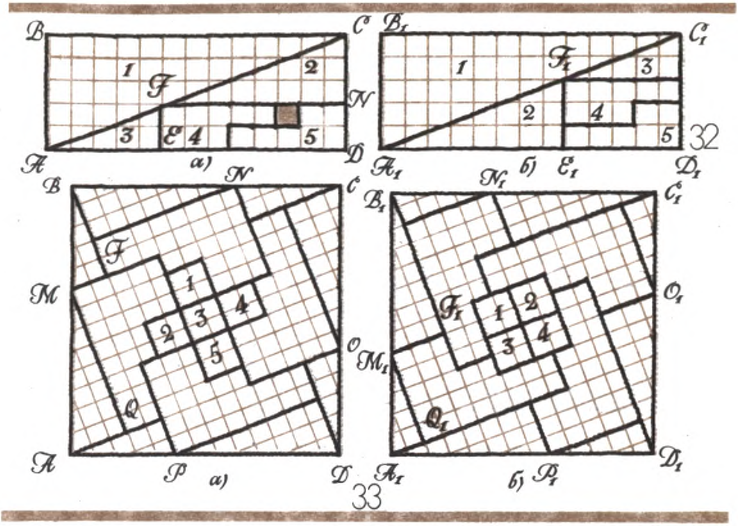
У нашому прикладі сторони квадрата було поділено на такі частини, що $x=5$, $y=3$. Коли б ми поділили їх на частини $x=6$ і $y=2$, то з одержаних двох рівних трапецій і двох рівних прямокутних трикутників не вдалося б утворити прямокутник, лінія B_1D_1 якого очевидно була б ламаною. Не утвориться прямокутник при $x=4\frac{1}{2}$, $y=3\frac{1}{2}$ та інших значеннях x і y.



Мал. 28—31

При $x=5$ і $y=3$ дістали прямокутник із сторонами: $x+x+y=2x+y=2\cdot 5+3=13$, $x=5$, $S_1=13\times 5=65$.

Якщо сторони квадрата, площа якого 169 кв. од.,



Мал. 32—33

поділити на частини $x=8$, $y=5$, а потім квадрат поділити на чотири частини (пари рівних трапецій і трикутників), то з них утворюється прямокутник із сторонами $2x+y=2\cdot 8+5=21$ і $x=8$. Отже, $S_1=168$!

Якщо сторони квадрата $21\times 21=441$ поділити на частини $x=13$, $y=8$, то дістанемо прямокутник, у якого $S_1=(2x+y)x=(2\cdot 13+8)\cdot 13=442$. А для квадрата, площа якого $S=34\times 34=1156$, при $x=21$, $y=13$ маємо: $S_1=(2x+y)y=(2\cdot 21+13)\cdot 21=1155$.

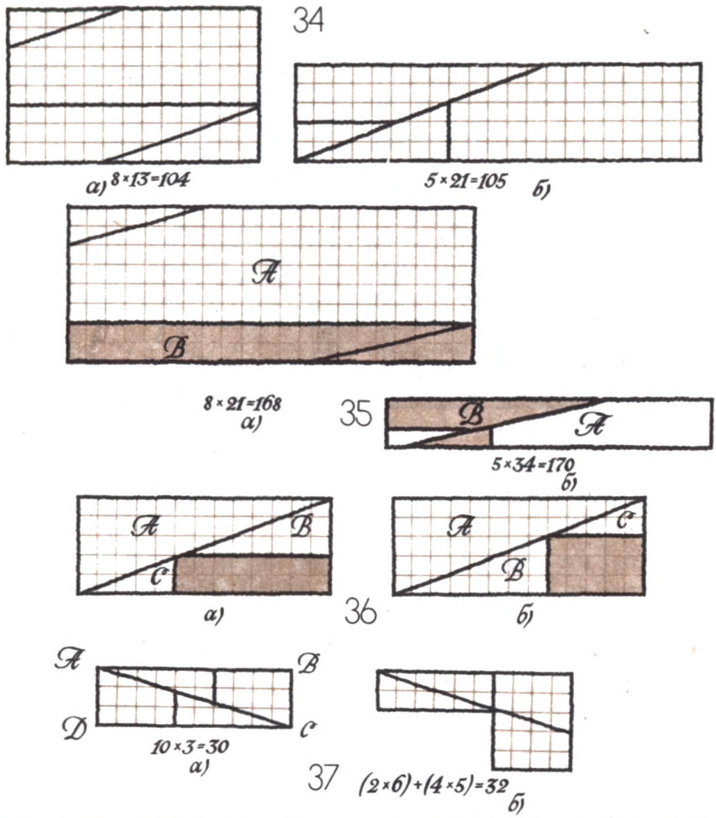
Як бачимо, при одних варіантах перетворень квадратів $S_1-S=1$, а при інших $S-S_1=1$. Легко показати, що подібні несподіванки чекають на нас при обчисленні площ трикутників, рівноскладених з відповідними квадратами. ■

27. Знову $65=64$.

▲ Прямокутник $ABCD$ (мал. 32) розрізали по прямих лініях на такі 5 частин, що з них потім склали прямокутник заданих розмірів (5×13) од., а зафарбований квадратик зник. Відбулося «зникнення» одиниці площі, це означає, що $65=64$. ■

28. $141=145$.

▲ Квадрат $ABCD$, площа якого 145, розрізали на 17 частин (мал. 33, *а*). Потім поміняли деякі з них



Мал. 34—37

місцями і знову утворили квадрат $A_1B_1C_1D_1$ того самого розміру, причому один з п'яти маленьких квадратиків виявився зайвим (мал. 33, *б*), тобто знову $145=141$. ■

29. $104=105$, $168=170$, $1=2$

▲ Прямокутник, площа якого $8\times13=104$, розрізали на чотири частини, з яких утворили прямокутник $5\times21=105$ (мал. 34). ■

▲ Прямокутник, площа якого $8\times21=168$, розрізали на чотири частини (мал. 35), з яких утворено прямокутник $5\times34=170$. (Останній прямокутник зображено у вдвічі більшому масштабі).

▲ Прямокутник розбито на чотири частини (мал. 36). Поміняємо місцями трикутники *B* і *C* і обчислимо площу утвореного прямокутника. Він, як і даний прямокутник, складається з трьох трикутників (*A*, *B* і *C*) і зафарбованої частини. Але в даному прямокутнику було 16 од. зафарбовано, а в одержаному зафарбовано тільки 15 од. Тому площа його на 1 менша за площу даного і рівноскладеного з ним прямокутника. ■

30. 30=32.

▲ Прямокутник *ABCD*, площа якого 30, розрізали на чотири частини. З них утворили два прямокутники, сума площ яких дорівнює 32 (мал. 37). ■

31. 1=2=3.

▲ Цікаві парадокси пов'язані з такими розрізуваннями квадратів, що після перекладання частин знову виходять квадрати, з отворами в 1, 2, 3 і т. д. Найцікавіші з них подано на мал. 38—43. ■

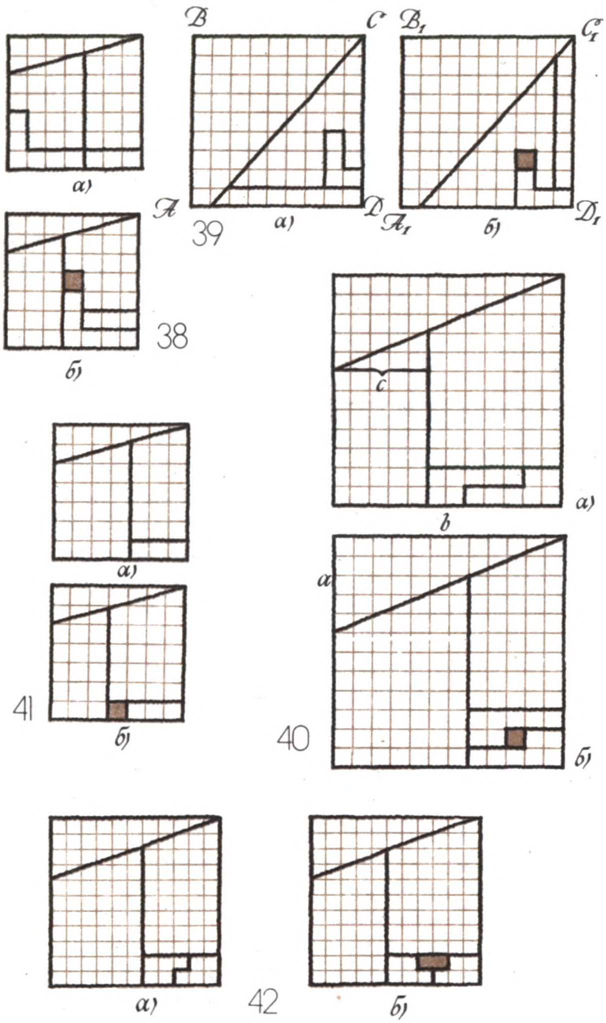
Доведіть формулу, яка виражає залежність розміру отвору, що «виникає» при перекладанні частин розрізаного квадрата, від довжин *a* і *b* катетів найбільшого трикутника і відстані від сторони квадрата до лінії вертикального розрізу (мал. 40). *Площа отвору в квадратних одиницях дорівнює різниці між ac і найближчим до ac числом, кратним b.* Наприклад, на малюнку 40 $ac=25$; число, найближче до 25 і кратне *b*, дорівнює 24, тому в результаті перекладання частин розрізаного квадрата дістанемо отвір в 1.

Слід застерегти, що хоча механізми утворення парадоксів уже відомі читачам, проте точні обчислення, тобто пошук втраченої частини площі, щоразу потребуватиме творчої і чималої роботи. Щоб знайти площу, яку ми втрачаємо, і площу, яка зумовлює видимість цієї анігіляції.

32. $0=2=4=6=8=\ldots=2n=\ldots$

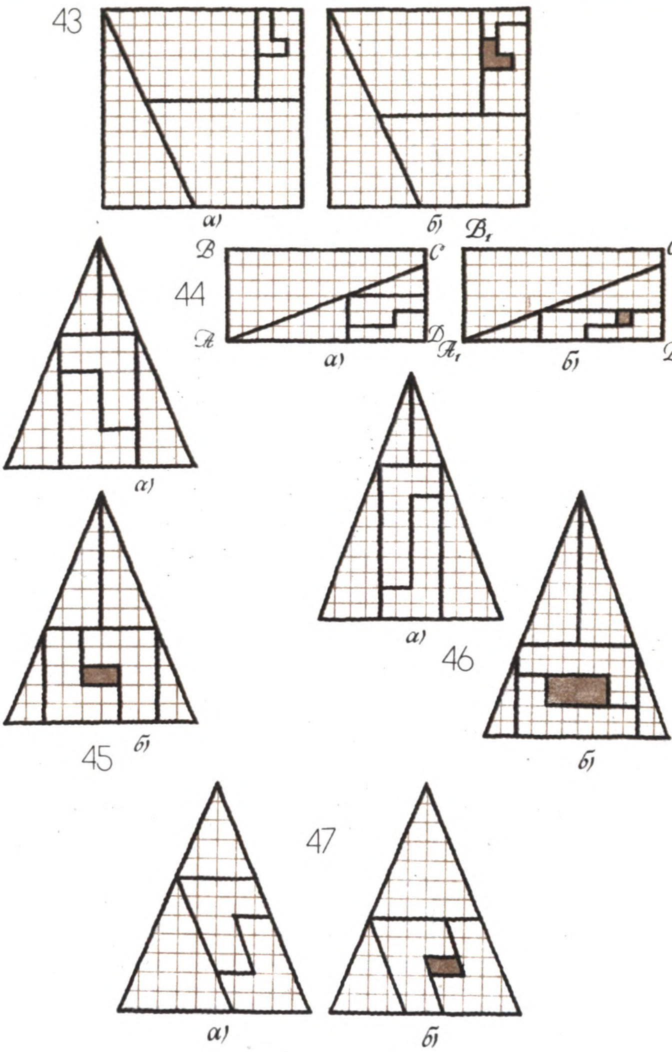
▲ В утворенні ряду парадоксів з перекроюванням прямокутників, наприклад на малюнку 44, великий трикутник *ABC* не відіграє ніякої ролі, і його можна взагалі відкинути, залишаючи тільки розрізаний на чотири частини трикутник *ACD*. Після перекладання цих частин дістанемо прямокутний трикутник $A_1C_1D_1$ з отвором в 1, ніби рівновеликий даному (мал. 44).

З двох таких прямокутних трикутників можна діставати різні варіанти розрізування рівнобедрених трикутників, пов'язані з парадоксами про зникнення кількох одиниць площі (мал. 45). У цих випадках



Мал. 38—42

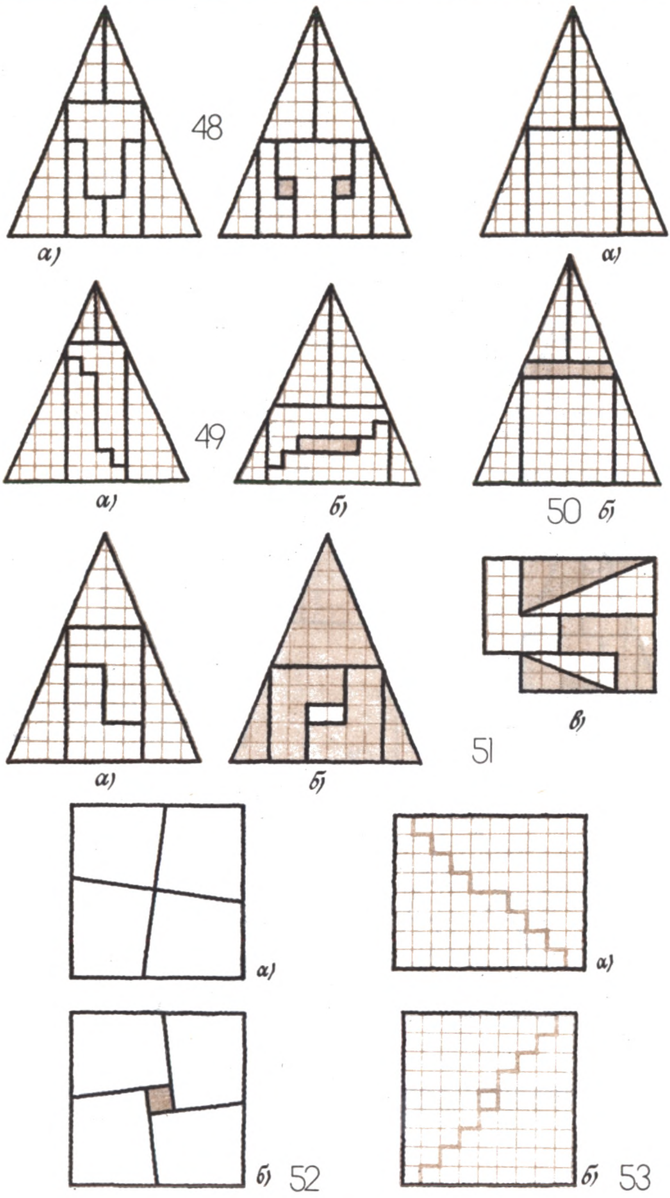
все зрозуміло, але далі доведеться пошукати причини втрати певного парного числа одиниць площі (див. мал. 46 (8), мал. 47, 48 (2), мал. 49 (4), мал. 50 (6)).



Мал. 43—47

33. $0=1=2$.

▲ Трикутник, площа якого 60, розрізали на 5 частин (мал. 51), перевернули їх на другий бік і склали з них



Мал. 48—53

інший трикутник, всередині якого «дірка» з площею 2. Повернувши лицевим боком лише три частини трикутника, утворимо неопуклий шестикутник, площа якого дорівнює 59. ■

34. *Невловима площа.*

Перший варіант міркувань

▲ Повернемося до квадратів. Цього разу вони демонструють парадокси, засновані на принципово інших методах. Можна, наприклад, розрізати квадрат на чотири рівні частини (мал. 52), а потім скласти їх по-іншому, так, що дістанемо квадрат такого ж розміру, як і даний, але з отвором всередині.

Так само можна розрізати й прямокутник з довільним відношенням довжин сторін.

Другий варіант міркувань

▲ Прямокутник можна розрізати тільки на дві частини, перекласти їх по-іншому і в результаті дістати прямокутник тих самих розмірів, але з отвором всередині (мал. 53). ■

СЮРПРИЗИ НЕСКІНЧЕННОСТІ

Разве в мире бесконечном направленье есть?
Разве далям бесконечным измеренье есть?

НИЗАМИ

Нас хвилює вже саме слово «нескінченність». А які реальності воно позначає? Про це написано сотні книг і тисячі статей. «З давніх-давен ніяке інше питання так глибоко не хвилювало людську думку, як питання про нескінченність; нескінченне так збуджувало людський розум і було настільки плідним, як навряд чи ще якась ідея; проте жодна інша ідея так конче не потребувала роз'яснення, як нескінченність»,— так говорив у 1925 році видатний математик Давід Гільберт (1862—1943), який і сам багато зробив для розкриття природи цього поняття в математиці. Шлях до таємниць нескінченного виявився складним, і математиці тут належала провідна роль. Ось чому її називають інколи наукою про нескінченне. Математика, як правило, оперує нескінченними множинами об'єктів, і саме поняття істинності неминуче вимагає абстракції нескінченності. Нескінченність заманювала й лякала безмірністю своєї безодні. Страх перед нею породив характерний латинський термін: *horror infiniti* (жах нескінченного).

Під час розкриття природи нескінченності логіки і математики часто наштовхувалися на апорії, антиномії, парадокси, суперечності. При цьому подолання ціною великих зусиль одних парадоксів, пов'язаних із нескінченністю, неодмінно приводило до ще складніших. У цьому була своя логіка, бо, як писав Ф. Енгельс: «Безконечність є суперечність, і вона повна суперечностей. Суперечністю є вже те, що безконечність повинна складатися з самих тільки конечних величин, а тим часом це якраз так. Обмеженість матеріального світу призводить до не менших суперечностей, ніж його безмежність, і всяка спроба усунути ці суперечності веде, як ми бачили, до нових і гірших суперечностей. Саме тому, що безконечність є суперечність, вона являє собою безконечний процес, який без кінця розгортається в часі і просторі. Знищення цієї суперечності було б кінцем безконечності» (Маркс К., Енгельс Ф. Твори, т. 20, с. 49). Враховуючи виключну роль поняття нескінченності в математиці, зокрема в теорії вимірювання величин, кілька софізмів, в яких її дія виявляється особливо виразно, подаємо окремою групою.

35. *Всі кола мають однакову довжину* (парадокс давньогрецького філософа Арістотеля (384—322 до н. е.) — «Арістотелеве колесо»).

▲ Розглянемо два скріплених концентричних кола C і C_1 різних радіусів (мал. 54).

Фізичною моделлю такої фігури можуть бути два циліндричних вали, насаджених на спільну горизонтальну вісь і наглухо скріплених, або цілісна деталь такої форми.

До кіл C і C_1 у точках M і M_1, які лежать на одному радіусі OM, проведено дотичні MN і M_1N_1. Кола скріплені, і тому вони рухатимуться (наприклад, в напрямі, заданому стрілкою), як одне ціле: коло C по прямій MN, а коло C_1 — по прямій M_1N_1. Пунктиром зображено одне з проміжних положень руху кіл (M' і M'_1 — відповідні нові положення точок M і M_1). Фізичною моделлю такого процесу міг би бути рух колеса залізничного вагона, коли б під виступом на зовнішньому боці колеса було прокладено горизонтальну площину, паралельну рейкам. Якщо коло C зробить повний оберт, то точка M займе положення M^*; при цьому коло C_1 теж зробить повний оберт, а точка M_1 займе положення M_1^* на радіусі O^*M^*, паралельному OM, оскільки обидва ці радіуси перпендикулярні до прямої MN. Звідси й випливає, що $MM^* = M_1M_1^*$, а це означає, що довільно взяті кола за повний оберт пройшли однакові шляхи і, отже, мають однакову довжину. ■

36. Довжина гіпотенузи дорівнює сумі довжин катетів.

▲ У прямокутному трикутнику ABC (мал. 55) із середини гіпотенузи AB побудуємо відрізок DF, перпендикулярний AC, і відрізок DE, перпендикулярний BC. Маємо ламану $BEDFA$, яка складається з чотирьох ланок і довжина якої дорівнює сумі довжин катетів. Виконаємо таку саму побудову для трикутників BDE і AFD, тобто із середин гіпотенуз BD і DA опустимо перпендикуляри на катети BE, ED і DF, FA. Дістанемо ламану, яка складається з восьми ланок і має таку саму довжину, як ламана $BEDFA$, тобто дорівнює $AC+BC$. Описаний процес можна продовжувати до нескінченності; в результаті гіпотенузу буде поділено на 2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ... рівних частин, і щоразу вони утворюватимуть пилкоподібну ламану, складену відповідно з 2, 4, 8, 16, ... 2^n, ... ланок — «зубців». Всі ці ламані («пилки») мають однакову довжину, яка дорівнює сумі довжин катетів трикутника ABC. Із збільшенням числа ланок ламана все більше наближатиметься до гіпотенузи AB, причому, як би близько не було проведено пряму A_1B_1 від прямої AB, в побудованій послідовності ламаних знайдеться така, яка разом з усіма наступними щодо неї ламаними по всій відстані від A до B повністю лежатиме в смузі, утвореній прямими AB і A_1B_1 або, точніше кажучи, послідовність ламаних має своєю границею пряму AB. А оскільки границею послідовності ламаних є гіпотенуза, то довжина її є границею відповідної послідовності довжин ламаних, бо двох різних границь послідовність мати не може. ■

До проведеного міркування зробимо три зауваження:

1) Неістотно, який трикутник взято — прямокутний чи будь-який інший, бо побудова і висновок будуть такими самими (мал. 56). Таким чином, приходимо до загальнішого висновку: в будь-якому трикутнику довжина однієї сторони дорівнює сумі довжин двох інших сторін.

2) Неістотно також і те, що ми ділили сторону на 2, 4, 8, 16, ... рівних частин. Її можна ділити на 2, 3, 4, 5, ... частин і навіть на нерівні частини (потрібно лише, щоб число частин необмежено зростало і довжина найбільшої з них прямувала до нуля).

3) Читача може не турбувати той факт, що ламані нашої послідовності мають одну і ту саму довжину. В математиці розглядають послідовності, утворені з рівних членів, і це саме число — член послідовності є границею послідовності, що повністю узгоджується з означенням поняття границі.

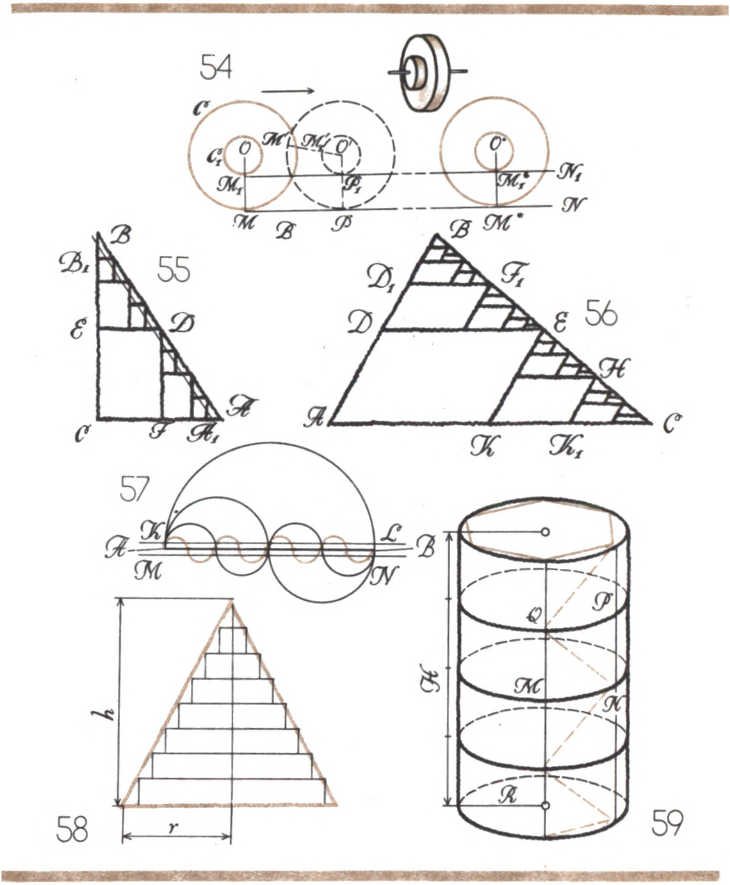
37. Число π дорівнює 2.

▲ На відрізку AB, як на діаметрі, побудуємо півколо (мал. 57). Поділивши цей відрізок пополам, на кожній половині, як на діаметрах, побудуємо два півкола, розміщуючи їх по різні боки від прямої AB. Ці півкола утворять хвилеподібну лінію, довжина якої від A до B дорівнює довжині початкового півкола.

Поділимо відрізок AB на чотири рівні частини і побудуємо хвилеподібну лінію, яка складається з чотирьох півкіл із сумою довжин, що дорівнює $\frac{1}{2}(\pi \cdot AB)$. Продовжимо цей процес до нескінченності, ділячи відрізок AB на 8, 16, ... рівних частин, будуючи на них півкола (з одного і з другого боку від прямої AB). Дістанемо послідовність хвилеподібних ліній, які все більше наближаються до відрізка AB і мають своєю границею його довжину. Справді, якою б вузькою не була смуга, утворена прямими KL і MN, паралельними прямій AB, у послідовності хвилеподібних ліній знайдеться така лінія, починаючи від якої всі хвилеподібні лінії на відстані від A до B будуть повністю вміщуватися всередині цієї смуги. Але довжина всіх хвилеподібних ліній однакова і дорівнює $\frac{1}{2}(\pi AB)$. Такою самою має бути і довжина границі послідовності цих ліній, тобто відрізка AB. Тоді з рівності $\frac{\pi}{2}AB=AB$ знаходимо $\pi=2$. Отже, число π — не трансцендентне, а натуральне. ■

38. Бічна поверхня P прямого кругового конуса з радіусом r і висотою h подається формулою $P= =\pi r(r+h)$.

▲ Побудуємо в даному конусі перерізи за допомогою площин, перпендикулярних до його осі і віддалених



Мал. 54—59

одна від одної на $\frac{h}{n}$ (n — натуральне число). Кожний з $n-1$ перерізів візьмемо за верхню основу циліндра, висота якого дорівнює $\frac{h}{n}$. Дістанемо всього $n-1$ циліндрів, які разом утворюють східчасту фігуру, вписану в даний конус. Осьовий переріз комбінації побудованих фігур подано на малюнку 58. Бічна поверхня східчастої фігури дорівнюватиме сумі бічних поверхонь усіх циліндрів та площ кілець, які залишаються на верхній основі кожного циліндра (площу нижньої основи першого знизу циліндра до уваги не беремо, а верхню основу першого зверху циліндра враховуємо повністю).

З подібності трикутників маємо, що радіус основи першого знизу циліндра дорівнює $r\left(1-\frac{1}{n}\right)$, другого знизу циліндра — $r\left(1-\frac{2}{n}\right)$, третього знизу $r\left(1-\frac{3}{n}\right)$ і т. д., а самого верхнього $r\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$. Сума бічних поверхонь усіх циліндрів дорівнює:

$$2\pi r\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{h}{n}+2\pi r\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{h}{n}+2\pi r\left(1-\frac{3}{n}\right)\times$$
$$\times\frac{h}{n}+\ldots+2\pi r\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{h}{n},$$

$$2\pi r\frac{h}{n}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{2}{n}\right)+\left(1-\frac{3}{n}\right)+\ldots+\left(1-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{n-1}{n}\right)\right),\ abo\ 2\pi r\frac{h}{n}\left((n-1)-\frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right)=$$
$$=\pi rh\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Отже, сума площ кілець дорівнює площі основи першого знизу циліндра, тобто $\pi\left(r\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2$. Тому для бічної поверхні східчастої фігури маємо формулу:

$$P_n=\pi rh\left(1-\frac{1}{n}\right)+\pi\left(r\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2=$$
$$=\pi r\left(h\left(1-\frac{1}{n}\right)+r\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right).$$

При необмеженому зростанні числа n східчаста фігура буде необмежено наближатися до конуса, як до границі. Тому

$$P=\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\pi r\left(h\left(1-\frac{1}{n}\right)+r\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right)=$$
$$=\pi r(h+r).\ \blacksquare$$

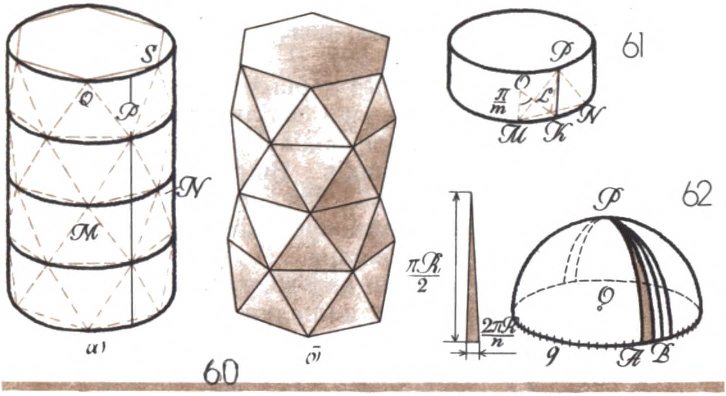
39. Бічна поверхня циліндра не має площі.

▲ Розглянемо прямий круговий циліндр, радіус якого R та висота H, і шукатимемо площу його бічної поверхні як границю послідовностей площ вписаних в нього многогранних поверхонь із все меншими гранями. Для цього розділимо висоту циліндра на n рівних частин і через точки поділу проведемо площини, перпендикулярні до твірних. У перетині з бічною поверхнею циліндра матимемо $n-1$ кіл, які разом з основами поділяють цю поверхню на n рівних циліндричних шарів (мал. 59). В одне з кіл впишемо правильний m-кутник і через вершини його проведемо твірні, якими кожне з інших кіл поділиться на m рівних частин. Візьмемо ці точки поділу за вершини вписаних в кола многокутників. Відрізки проведених твірних разом із сторонами вписаних многокутників утворюють mn рівних прямокутників, вершини яких лежать на поверхні циліндра. Поділивши кожний прямокутник діагоналлю на два трикутники, матимемо вписану в бічну поверхню циліндра многогранну поверхню, утворену із $2mn$ рівних трикутних граней. Коли числа m і n необмежено зростатимуть, довжини сторін трикутних граней побудованої многогранної поверхні прямуватимуть до нуля; до нуля прямуватимуть також і відстані всіх точок цих граней від бічної поверхні циліндра.

Форму вписаної в циліндр многогранної поверхні визначають значення m і n. Вибираючи їх різними способами, можна дістати нескінченну кількість способів побудови послідовності многогранних поверхонь (одне із значень m, n вважаємо функцією іншого, наприклад: $m=n$, $m=3n$, $m=n^2$ і т. д.)

Тепер дещо змінимо спосіб вписування многогранної поверхні: вписуватимемо в кожне коло правильні m-кутники так, щоб твірна, проведена через будь-яку вершину многокутника, вписаного в деяке з кіл, ділила пополам дугу, стягувану стороною правильного m-кутника, вписаного в сусіднє коло. Наприклад, твірна, яка проходить через вершину P, ділить пополам MN і PQ (мал. 60). При такому способі побудови матимемо неопуклу многогранну поверхню, яка складається з $2mn$ рівних рівнобедрених трикутників (по $2m$ у кожному з n шарів). Ця поверхня нагадує паперовий ліхтарик і вписана в поверхню циліндра.

Оскільки площа побудованої многогранної поверхні складається з рівних трикутних граней, розглянемо детальніше одну з них, наприклад MNP (мал. 61). Тут MN — сторона правильного m-кутника, вписаного в круговий переріз циліндра з центром O, точки K і L — відповідно середини дуги MN і хорди MN, а PK — відрізок твірної. Трикутник MNP рівнобедрений ($PM=$



Мал. 60—62

$=PN$), бо $KM=KN$, а відрізки KM і KN є проекціями відрізків MP і PN на площину круга з центром O. В трикутнику PKL $\angle K=90°$, $PK=H:n$, $KL=R-$

$$-OL=R-R\cos\frac{\pi}{m}=2R\sin^2\frac{\pi}{2m},$$

звідки

$$PL=\sqrt{\left(\frac{H}{n}\right)^2+4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

А оскільки $\frac{1}{2}MN=R\sin\frac{\pi}{m}$, то

$$S_{\triangle MNP}=R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{n^2}+4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Позначивши через S_{mn} площу всієї многогранної поверхні у випадку, коли коло поділено на m, а висоту на n рівних частин, знаходимо:

$$S_{mn}=2mnR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^2}{n^2}+4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}=$$

$$=2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2+4n^2R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Як вже зазначалося, із сукупності чисел S_{mn} (площа поверхні — це ж число!) можна нескінченною множиною способів будувати послідовності, залежно від вибраного співвідношення між m і n. Розглянемо два з нескінченної множини можливих варіантів:

1) $n=m^2$, тобто якщо коло ділитимемо послідовно на 3, 4, 5, ... частин, то висоту ділитимемо відповідно на 9, 16, 25, ... частин. Оскільки в цьому випадку площа многогранної поверхні залежить уже тільки від m, позначатимемо її через S_m. Тоді, враховуючи залежність $n=m^2$, матимемо:

$$S_m=2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2+4m^4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Бічна поверхня циліндра дорівнює границі послідовності площ многогранних поверхонь, вписаних в циліндр, тобто $S_{\text{цил.}}=\lim\limits_{m\to\infty} S_m$.

Обчислимо цю границю: $\lim\limits_{m\to\infty} S_m=\lim\limits_{m\to\infty} 2mR\times$

$$\times\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2+4m^4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}=\lim_{m\to\infty} 2\pi R\times$$

$$\times\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{H^2+\frac{1}{4}\pi^4R^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4}=$$

$$=2\pi R\sqrt{H^2+\frac{1}{4}\pi^4R^2}.$$

Обчислена границя (площа бічної поверхні циліндра) більша, ніж значення загальновідомого виразу $2\pi RH$ для обчислення цієї величини. Прикро також, що, вибираючи різні залежності між m і n, ми діставатимемо для границі S_m й інші різні значення, в тому числі і як завгодно великі. Наприклад, якщо $n=km^2$ (k — натуральне число), матимемо:

$$\lim_{m\to\infty} S_m=2\pi R\sqrt{H^2+\frac{k^2}{4}\pi^4R^2}.$$

2) Нехай $n=m^3$, тобто кількість частин, на які поділено висоту, зростатиме порівняно з попереднім варіантом, ще швидше,

тоді

$$S_m=2\pi R\sqrt{H^2+\frac{1}{4}m^2\pi^4R^2}\to\infty \quad \text{при } m\to\infty.$$

Виявляється, що можна встановити такий закон вписування многогранних поверхонь, що послідовності їх площ матимуть будь-які значення, зокрема можуть і необмежено зростати, не прямуючи ні до якої границі. При цьому напрошується аналогія з виразом $\frac{0}{0}$, якому в математиці саме тому й не надають ніякого смислу, що він мав би тоді будь-які значення. З тих же міркувань доводиться відмовитися і від поняття бічної поверхні циліндра і прийти до єдиного в цій ситуації висновку: бічна поверхня циліндра не має площі. ■

40. Площа поверхні кулі радіусом R дорівнює π^2R^2.

▲ Розглянемо півкулю з центром O і поділимо коло великого круга на досить велике число n рівних частин — дуг (мал. 62). Сполучимо всі точки поділу з точкою P дугами великих кіл, кожна з яких дорівнює $\frac{1}{4}$ дуги кола великого круга. Тим самим ми поділили півкулю на n вузьких сферичних трикутників, кожний з яких обмежений $\frac{1}{n}$-ою дуги кола великого круга і двома дугами, що становлять $\frac{1}{4}$ цього кола. Всі ці трикутники рівні між собою. Будемо тепер необмежено збільшувати число n точок поділу великого круга півкулі. Тоді всі утворені сферичні трикутники (такі, як $\triangle APB$) ставатимуть як завгодно вузькими, і кожний з них можна розгорнути на площину із збереженням усіх розмірів. В результаті матимемо рівнобедрені трикутники, у кожного з яких основою буде спрямлена дуга великого круга $\frac{2\pi R}{n}$, а висотою — спрямлена дуга, що дорівнює $\frac{1}{4}$ цієї дуги, тобто $\frac{\pi R}{2}$. Площа кожного трикутника становить

$$\frac{1}{2}\frac{2\pi R}{n}\cdot\frac{\pi R}{2}=\frac{1}{2n}\pi^2R^2;$$

загальна площа всіх n трикутників, що покривають півкулю, $\frac{1}{2}\pi^2R^2$, а площа поверхні кулі — π^2R^2. ■

З ПОЛОНУ V ПОСТУЛАТУ

Усім відомо, що в геометрії теорія паралельних досі лишалася недосконалою. Даремні намагання ще з часів Евкліда, протягом двох тисяч років, змусили мене запідозрити, що в самих поняттях ще немає тієї істини, яку хотіли доводити...

М. І. ЛОБАЧЕВСЬКИЙ

Захоплюючі, повчальні і драматичні сторінки історії математики пов'язані із спробами вчених різних епох і народів довести V постулат Евкліда. Цей пошук невловимої істини розпочався в IV ст. до н. е. і завершився тільки в XIX ст. На його старті і фініші — два геніальних вчених: давньогрецький Евклід (бл. 365 — бл. 300 рр. до н. е.) і російський М. І. Лобачевський (1792—1856). Перший поставив задачу, другий розв'язав її. У славнозвісних «Началах» за означеннями понять, які вперше зустрічаються в першій книзі, Евклід вмістив 5 постулатів і 4 аксіоми (існують варіанти текстів «Начал», які містять 11 аксіом або 5 постулатів і 7 аксіом). Істинність цих висловлень Евклід прийняв без доведень і на їхній основі доводив всі інші висловлення — 464 теореми. Вважають, що постулати стосувалися тільки геометричних фігур, аксіоми — фігур і чисел, які виникали як значення геометричних величин. З часом учені прийшли до помилкового висновку, що постулати і аксіоми Евкліда не потребують доведень як очевидні істини. Але так не думали про V постулат, в якому йшлося про паралельні: «І якщо пряма, яка перетинає дві прямі, утворює внутрішні й розміщені з одного боку кути, сума яких менша від двох прямих, то якщо продовжити ці прямі необмежено, вони перетнуться з того боку, де ця сума менша від двох прямих».

Формулювання V постулату значно складніше за інші аксіоми і постулати, крім того, в ньому стверджується інтуїтивно не очевидна істина. Майже всі математики були переконані, що це теорема, яку Евклід просто не зумів довести. А коли так, то справою честі, вважали вони, є виправлення цього недоліку «Начал», зняття плями недосконалості з найвизначнішого пам'ятника математичної думки. Так, імовірно ще за життя самого Евкліда, розпочався справді героїчний штурм загадки паралельних. Понад 22 століття V постулат тримав у полоні думки і волю геніальних учених і тисяч безіменних шукачів гучної слави. Все було на цьому шляху: передчуття близької перемоги, відчай і зневіра від поразок. Про це красномовно свідчить цитований нами на с. 10 лист угорського математика Фаркаша Бойяя синові Яношу, який зацікавився теорією паралельних. Тільки сурм перемоги не було чути навіть тоді, коли М. І. Лобачевський і Янош Бойяй здобули справжню перемогу: показали, що і в проблемі паралельних прямих Евклід виявив геніальну далекоглядність. V постулат логічно не залежить від інших аксіом та постулатів і тому не може бути доведений на їх основі. Цю неочевидну істину потрібно було прийняти без доведення, а всі, кому здавалося, що вони довели V постулат, припускалися різних логічних помилок. Найчастіше це був круг у доведенні, коли на певному етапі міркувань використовувалося висловлення, еквівалентне V постулату. (Зрозуміло, що коли явно або в прихованій формі вводиться твердження, еквівалентне A, то потім, міркуючи вже у повній відповідності із законами логіки, можна вивести A, бо завжди $A \Rightarrow A$). Ця діяльність учених була корисною для математики, оскільки вони виявляли висловлення, еквівалентні V постулату. Серед них були такі важливі еквіваленти:

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Сума кутів у кожному трикутнику одна і та сама.

Через будь-яку точку всередині кута можна провести січну, яка перетинає обидві сторони кута.

Існують два подібні, але не рівні трикутники.

Сторона правильного вписаного в коло шестикутника дорівнює радіусу кола.

Сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи (теорема Піфагора).

Зрозуміло, що допускалися найрізноманітніші логічні помилки, тому чимало таких міркувань поповнили колекцію задач на кмітливість, математичних софізмів і парадоксів. Вони займають належне місце і в нашому збірнику.

Траплялося, що вчені пробували довести V постулат методом від супротивного, тобто припускали, що через точку C, яка лежить поза прямою AB, можна провести більше ніж одну пряму, яка не перетинає AB, або що сума внутрішніх кутів трикутника менша за

180°. У процесі доведення вони, по суті, відкривали і доводили перші теореми неевклідової геометрії, помилково вважаючи, що вони суперечать зробленому припущенню, тобто думали, що V постулат доведено. (Детальніше див.: Лаптев Б. Л. Геометрия Лобачевского, ее история и значение. М., 1976; Лаптев Б. Л. Н. И. Лобачевский и его геометрия. М., 1976).

41. *Доведення V постулату Евкліда.*

▲ Нехай дано пряму AB і точку C поза нею. Потрібно довести, що через точку C можна провести єдину пряму, паралельну AB. Це твердження еквівалентне V постулату. Доведемо V постулат, побудувавши цю єдину пряму, яка проходить через точку C і паралельна AB. Побудуємо $CD \perp AB$. (мал. 63). Цей перпендикуляр до AB єдиний. Тепер побудуємо в точці C $CE \perp CD$. Цей перпендикуляр єдиний. Він і буде прямою, паралельною AB (за теоремою про єдиність перпендикуляра до прямої). Посилання на цю теорему тут законне, бо вона доводиться без аксіоми паралельних. Оскільки CD і CE — єдині перпендикуляри відповідно до прямих AB і CD, то CE — єдина пряма, яка проходить через точку C і паралельна AB. ■

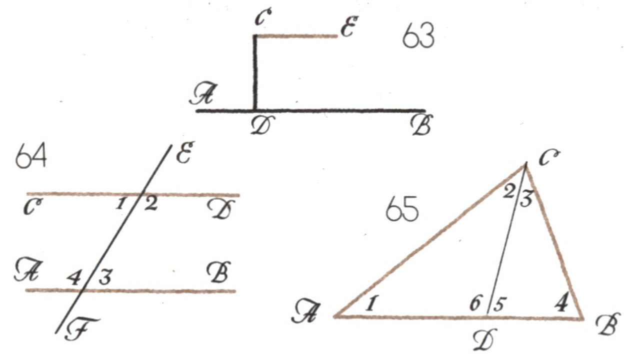
42. Якщо паралельні прямі перетнути січною, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° (доведення, в якому не використовується аксіома паралельних).

▲ Нехай $AB \parallel CD$ і EF — січна (мал. 64). Щодо внутрішніх односторонніх кутів можливі три припущення: 1) сума їх більша від 180°; 2) менша від 180°; 3) дорівнює 180°.

При першому припущенні маємо: $\angle 1 + \angle 4 > 180°$, $\angle 2 + \angle 3 > 180°$; звідки $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 > 360°$, в той час як ця сума двох пар суміжних кутів дорівнює 360°. Тому перше припущення потрібно відкинути як таке, що приводить до суперечності. З аналогічної причини відкидається й друге припущення (з нього випливає, що сума чотирьох внутрішніх кутів менша за 360°). Єдино можливим лишається третє припущення (з нього не дістаємо суперечності). ■

43. Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180° (доведення, в якому не використовується аксіома паралельних).

▲ Довільний трикутник ABC відрізком CD розіб'ємо на два трикутники (мал. 65). Нехай x — невідома поки що сума внутрішніх кутів трикутника ABC. Тоді



Мал. 63—65

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = x$, $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = x$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2x$. Але $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = x$, а $\angle 5 + \angle 6 = 180°$, звідки $x + 180° = 2x$, або $x = 180°$. ■

44. Існує трикутник, сума кутів якого дорівнює 180°.

Хіба хто може піддати сумніву цю істину? І все ж таки ми доведемо її на рівні славнозвісної математичної строгості.

▲ Розглянемо доведення, в якому не використовується аксіома паралельних. Припустимо, що сума кутів трикутника не більша від 180°, і нехай ABC (мал. 65) — трикутник з найбільшою такою сумою (якщо таких трикутників кілька або навіть нескінченна множина, то візьмемо один з них). Позначимо максимально можливу суму кутів через α. Тоді $\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 \leqslant \alpha$, $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 \leqslant \alpha$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 \leqslant 2\alpha$, але, за припущенням, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \alpha$ і $\angle 5 + \angle 6 = 180°$, тому $\alpha + 180° \leqslant 2\alpha$, $\alpha \geqslant 180°$. Оскільки α не може бути більшою 180°, то $\alpha = 180°$. ■

45. Якщо при перетині двох прямих третьою внутрішні різносторонні кути рівні, то ці прямі паралельні.

▲ Припустимо, що прямі перетинаються у точці C. Накладемо трикутник ABC (мал. 66) на ліву (відносно прямої AB) півплощину так, щоб точка B сумістилася з точкою A, а точка C з точкою C'. Тоді пряма AC піде у напрямі прямої BY, а пряма BC —

у напрямі прямої AX, бо внутрішні різносторонні відносно AB кути рівні. Точці C при цьому відповідатиме деяка інша точка C' — ще одна точка перетину прямих AX і BY, а це суперечить аксіомам геометрії. Тому $AX \parallel BY$. ■

46. Парадокс Прокла (410—485). Перпендикуляр і похила, проведені до однієї прямої, не перетинаються.

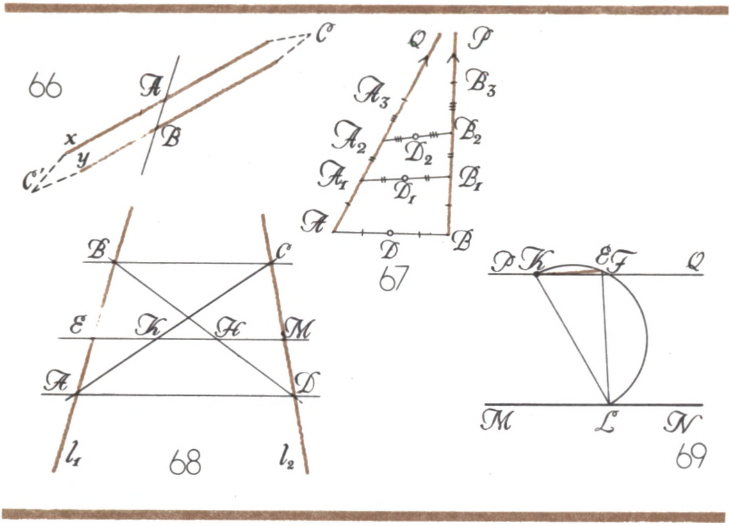
▲ Побудуємо в точках A і B прямої AB по один бік від неї похилу AQ і пряму BP, перпендикулярну AB. Візьмемо точку D на прямій AB так, щоб $AD=DB$ (мал. 67). Відкладемо на промені AQ $AA_1=\frac{1}{2}AB$ і на промені BP $BB_1=\frac{1}{2}AB$. Очевидно, що AA_1 і BB_1 не перетинаються. Справді, якщо ці прямі перетинался б в точці K, то в трикутнику AKB $AK+KB>AB$, що неможливо. Побудуємо відрізок A_1B_1 і, позначивши точку D_1 — його середину, відкладемо на відрізку A_1Q $A_1A_2=\frac{1}{2}A_1B_1$ і на промені B_1P $B_1B_2=\frac{1}{2}A_1B_1$. З наведених вище міркувань випливає, що відрізки A_1A_2 та B_1B_2 не перетинаються, і т. д. При цьому відкладання рівних відрізків $(A_nA_{n+1}=B_nB_{n+1}=\frac{1}{2}A_nB_n)$ на кожному з променів щоразу виконується в напрямі цього променя і завжди можливе.

Отже, цей процес буде нескінченним. Він міг би закінчитися, коли б зник відрізок $A_n B_n$, тобто сумістилися точки A_n і B_n (з однаковим номером), але це, як ми вже встановили, неможливо. Точки A_n і B_n не можуть суміститися ще й тому, що вийшов би прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнювала б катету. ■

47. Будь-які дві прямі, що лежать в одній площині, паралельні.

▲ Проведемо прямі $AD \parallel BC$ так, щоб вони перетинали дві дані прямі l_1 і l_2. Проведемо $EM \parallel AD$ і побудуємо відрізки BD і AC (мал. 68). З подібності трикутників AEK і ABC випливає, що $EK:BC=AK:AC$, а з подібності трикутників KCM і ACD — що $KM:AD=KC:AC$. Додавши почленно ці рівності, маємо: $EK:BC+KM:AD=1$.

Аналогічно з подібності трикутників BHE і BDA, BDC і HDM дістанемо: $EH:AD+HM:BC=1$. Тому $EK:BC+KM:AD=EH:AD+HM:BC$, звідки



Мал. 66—69

$KM:AD-EH:AD=HM:BC-EK:BC$, тобто $(KM-EH):AD=(HM-EK):BC$. Оскільки $KM-EH=(EM-EK)-(EM-HM)=HM-EK$, то $AD=BC$. Тому $AB \parallel CD$, або $l_1 \parallel l_2$. ■

48. Через точку поза прямою можна провести дві різні прямі, паралельні даній прямій.

▲ Нехай MN — дана пряма і точка K не належить їй. Проведемо через точку K пряму PQ, паралельну MN, і сполучимо цю точку з довільною точкою L прямої MN (мал. 69). Опишемо на відрізку KL, як на діаметрі, півколо. Побудуємо в точці L перпендикуляр, який перетне дугу півкола в деякій точці E. Маємо $KE \parallel MN$, бо $\angle KEL = 90°$. ■

П'ятий постулат був однією з найкраще замаскованих логічних пасток. У неї потрапляли не тільки випадкові мисливці за гучною славою колумбів математики, а й вчені, які понад усе цінували істинність відкритих у ній залежностей. Істина ж була безкомпромісна і не прощала найменшого відхилення від правильного шляху. Ну що там, здавалося б, точка, яка не має жодного виміру? І все ж коли знехтувати нею і вважати, що відрізок без кінців (без лише двох точок!) дорівнює відрізку з кінцями, то V постулат доводиться елементарно. Але ... ці міркування не мають жодної цінності.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

Математична задача іноді така ж цікава, як кросворд, і напружена розумова робота може бути настільки ж бажаною вправою, як стрімкий теніс.

Д. ПОЙА

49. У куб з ребром a вкладіть три однакових циліндри діаметром $\frac{a}{2}$ і висотою a так, щоб вони не могли рухатися в кубі.

50. Мандрівник розповідав, що побував у місті, розташованому на десяти островах. Вони сполучені між собою так, що з п'яти островів було перекинуто на материк по одному мосту. На чотирьох островах беруть початок по чотири мости, на трьох островах — по три мости, а на один острів можна дістатися лише одним мостом. Один із слухачів, шанувальник логіки, зауважив, що мандрівник помилився, описуючи розташування мостів. Де саме?

51. По стовбуру дерева вгору по прямій лізе гусінь до найближчої гілки. За першу хвилину вона проповзає 5 дм, за другу — $2\frac{1}{2}$ дм, за третю $1\frac{1}{4}$ дм, за четверту $\frac{5}{8}$ дм і т. д. До першої гілки трохи більше ніж 1 м. За скільки хвилин гусінь доповзе до гілки?

52. Нехай площа найбільшого білого квадрата дорівнює 1 кв. од. (мал. 70). Впишемо в нього чорний квадрат так, щоб вершини чорного квадрата лежали на серединах сторін білого. Так само в чорний квадрат впишемо білий і т. д. до нескінченності. Чому дорівнюватиме площа всіх білих, всіх чорних квадратів?

53. Цар Горох хотів розділити своє царство поміж п'ятьма синами так, щоб будь-які дві з п'яти частин мали спільну межу. За порадою він звернувся до Гео Метра. Що той відповів Горохові?

54. Червона Шапочка плаває в човні близько до центра озера, яке має форму круга. Берегом озера бігає Сірий Вовк із швидкістю, вчетверо більшою, ніж плаває Червона Шапочка. Якщо Червона Шапочка пристане до берега раніше, ніж туди добіжить вовк, то вона зуміє втекти від нього. Допоможіть Червоній Шапочці обрати такий план руху по озеру, щоб вона зуміла пристати до берега раніше, ніж туди прибіжить Вовк. (У будь-який момент вона знає своє положення відносно центра озера).

55. Нехай нам дано необмежений запас однорідних прямокутних паралелепіпедів, наприклад ідеальних цеглин. Якщо одну цеглину покладемо на іншу, то максимальною відстань, на яку можна зсунути верхню цеглину так, щоб вона не впала з нижньої, буде тоді, коли центр мас верхньої цеглини (A) проектуватиметься на бічну грань нижньої (мал. 71). Тепер можна обидві цеглини помістити на третю так, щоб їх спільний центр мас (B) проектувався на бічну грань третьої цеглини. Продовжуючи цю процедуру далі, матимемо половину східчастої арки. На скільки ліва грань верхньої цеглини може бути зсунута відносно лівої грані найнижчої цеглини?

56. Хлопчик тримає один кінець дошки, другий кінець якої лежить на циліндричному катку, і рухає дошку в горизонтальному положенні вперед (мал. 72). Циліндр котиться по площині без ковзання. Яку відстань має пройти хлопчик до зіткнення з циліндром, якщо довжина дошки становить l дециметрів?

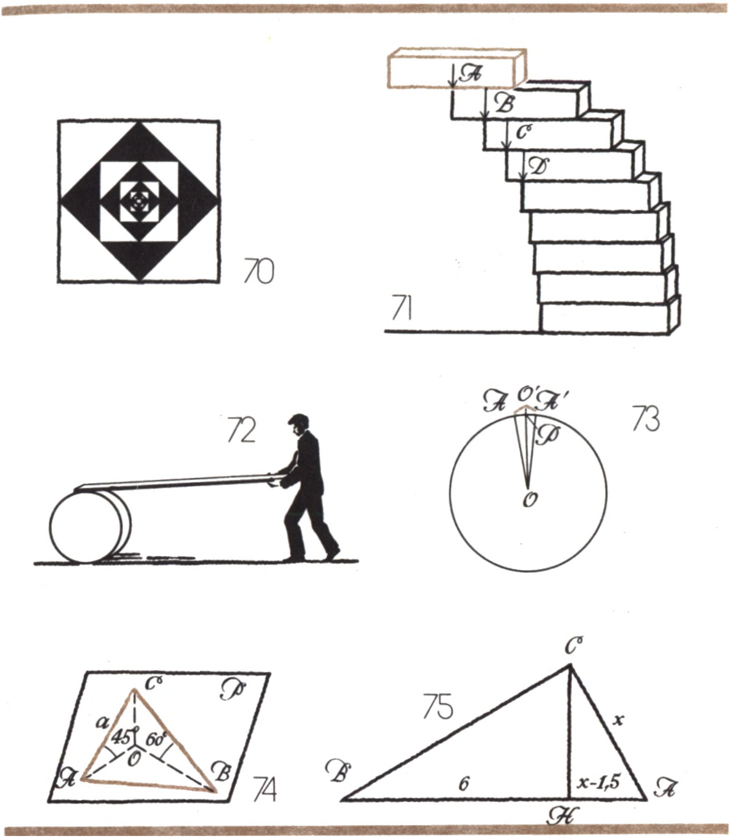
57. Якщо обтягнути дротом земну кулю по екватору, а потім добавити ще 1 м дроту, то між дротяним кільцем і Землею утвориться певний зазор. Чи зможе крізь нього пробігти миша?

58. Припустимо, що подовжений на 1 м дріт, яким ми обгорнули Землю (див. попередню задачу), в одному місці максимально відтягнули від земної поверхні (мал. 73). Чи зможе пройти крізь утворену щілину слон?

59. Обтягнемо земну кулю по екватору сталевим дротом. Припустимо, що він не рветься і не розтягується. Як глибоко за цих умов дріт вріжеться в землю, якщо його охолодити на 1 °C?

60. Учневі запропонували розв'язати таку задачу. Гіпотенуза прямокутного трикутника лежить у площині P, один катет утворює з площиною P кут 45°, другий — кут 60°. Більший катет дорівнює a. Знайти гіпотенузу.

Учень виконав креслення (мал. 74) і з прямокутного трикутника AOC знайшов $CO = a \sin 45° = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, з прямокутного трикутника BOC знайшов $BC = \frac{CO}{\sin 60°} = \frac{2CO}{\sqrt{3}} =$



Мал. 70—75

$=a\sqrt{\frac{2}{3}}$. За теоремою Піфагора обчислив гіпотенузу

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=a\sqrt{1+\frac{2}{3}}=a\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Чи правильно учень розв'язав задачу?

61. Класу запропонували розв'язати таку задачу. Знайти сторони прямокутного трикутника, коли відомо, що проекція одного катета на гіпотенузу дорівнює 6 см, а проекція другого катета на 1,5 см менша за довжину цього катета (мал. 75).

Учень А розв'язував задачу таким способом.

Нехай $AC=x$, тоді $AH=x-1{,}5$, а $BH=6$.

Оскільки $CH^2 = BH \cdot AH$, або $CH^2 = 6(x-1,5)$, то, застосувавши теорему Піфагора, матимемо $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2}$, тобто $\sqrt{x^2 - 6(x-1,5)} = x - 1,5$, $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 1,5$, $\sqrt{(x-3)^2} = x - 1,5$, $x - 3 = x - 1,5 - 3 = -1,5$ або $1,5 = 0$. Прийшовши до суперечності, він зробив висновок, що запропонована задача не має розв'язку. Але йому заперечив учень Б. Він сказав... Що сказав учень Б?

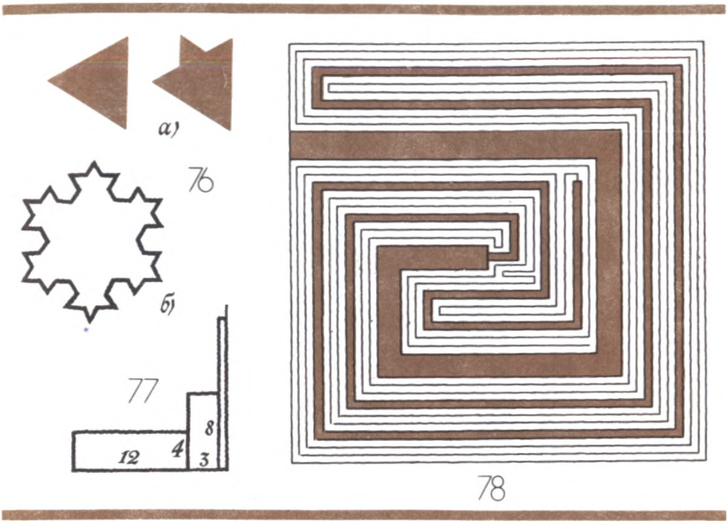
62. Задача Б. Л. Ван дер Вардена (нар. 1903). Візьмемо рівносторонній трикутник, периметр якого 3, і, поділивши, кожну його сторону на три рівні відрізки, викинемо середній відрізок, а на зовнішніх частинах середніх відрізків побудуємо нові рівносторонні трикутники. Кожну сторону зірчастого дванадцятикутника знову поділимо на три рівні частини і, викинувши середини, на зовнішній стороні кожного із середніх відрізків побудуємо правильний трикутник. На другому етапі побудов дістанемо замкнену «колючу» лінію (мал. 76). Чому дорівнюватиме периметр фігури, коли описану операцію продовжити до нескінченності?

63. Уявіть, що над всією числовою прямою від $-\infty$ до $+\infty$ іде дощ. Обчисліть, якої довжини має бути дах, щоб не намокло жодне раціональне число.

64. Обчисліть площу фігури, утвореної з нескінченної множини прямокутників, якщо довжини горизонтальних сторін зменшуються у відношенні $4:1$, а довжини вертикальних сторін збільшуються у відношенні $1:2$ (мал. 77).

65. Проведемо математичні іригаційні роботи. Побудуємо за перший день в одиничному квадраті канал так, щоб площа його була не більша за $\frac{1}{4}$ площі квадрата і берег каналу знаходився від межі квадрата не далі, ніж на $\frac{1}{2}$ од. довжини. Другого дня продовжимо прокладати канал так, щоб площа добудованої частини не перевищувала $\frac{1}{8}$ площі квадрата, а береги були не далі від межі квадрата ніж на $\frac{1}{2^2}$ од. довжини. На малюнку 78 показано канал, проведений за три перших дні роботи. Продовжимо цю роботу до нескінченності. Обчислити площу побудованого каналу.

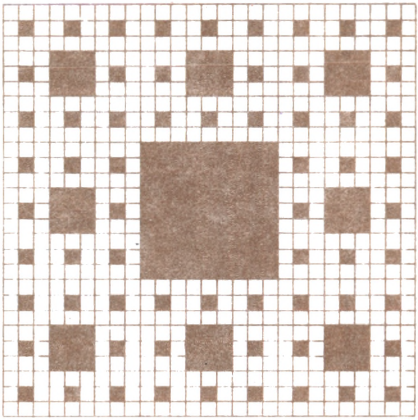
66. Одиничний квадрат розділили на дев'ять рівних



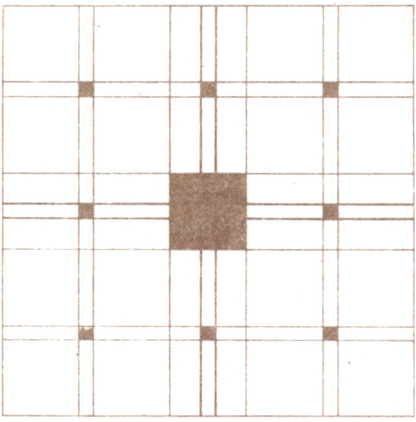
Мал. 76—78

квадратів і викинули внутрішність центрального (зафарбованого) квадрата (мал. 79). Потім кожен з восьми периферійних квадратів знову розділили на дев'ять рівних квадратів і з кожного з них викинули внутрішності (зафарбованих) квадратів другого покоління. Якщо описану процедуру математичного килимарства продовжити до нескінченності, то в границі матимемо так званий килим Серпінського. Чому дорівнює його площа?

67. Урізноманітнимо математичне килимарство. Поділимо тепер одиничний квадрат на 25 рівних квадратів і викинемо тільки внутрішню частину центрального з них, площа якого дорівнює $\frac{1}{25}$ (мал. 80). Продовжимо відрізки, які обмежували викинутий квадрат, до перетину із сторонами даного квадрата і в кожному з чотирьох нових квадратів і чотирьох прямокутників побудуємо взаємно перпендикулярні смуги шириною $\frac{1}{25}$. Викинемо тепер 8 квадратиків, по яких перетинаються смуги в 4 квадратах і в 4 прямокутниках. Площа викинутих квадратів дорівнює $\frac{8}{25^2}$. На третьому кроці виконаємо аналогічні побудови, щоб викинути 64 квадрати за-



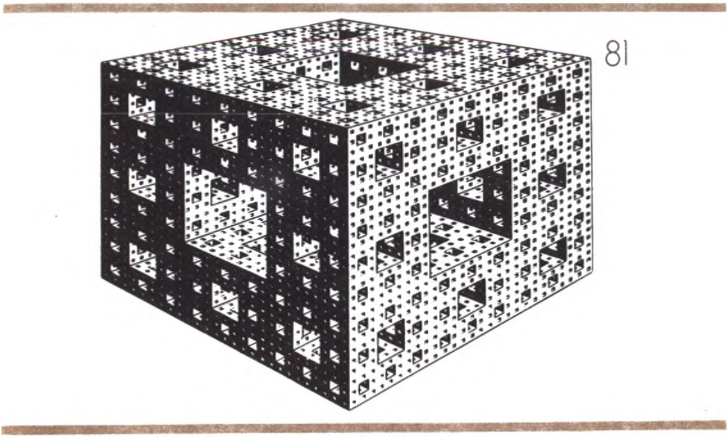
79



80

Мал. 79—80

гальною площею $\frac{64}{25^3}$. Обчисліть площу цього варіанта килима Серпінського.



Мал. 81

68. Вийдемо в простір. В одиничному кубі розділимо кожну його грань так, як в прикладі № 65, і продірявимо куб, викинувши частини його об'єму, обмежені шістьма центральними квадратами на кожній його грані. Потім кожен з восьми квадратів кожної грані знову поділимо на дев'ять рівних квадратів і викинемо частини об'єму, які обмежують $8 \cdot 6 = 48$ менших квадратів (мал. 81). Продовжимо так само дірявити куб до нескінченності. Обчисліть об'єм фігури, яка утвориться в результаті такої операції.

ВІДПОВІДІ, РОЗВ'ЯЗАННЯ

Недостатньо лише зрозуміти задачу, потрібне бажання розв'язати її. Без сильного бажання розв'язати складну задачу неможливо, а маючи його — можливо. Де є бажання, знайдеться й шлях!

Д. ПОЙА

3. Допущено почленне ділення рівності (2) на вираз $AE \cdot DE - BE \cdot CE$, який згідно з рівністю (1) дорівнює нулю.

4. В ланцюгу правильних висловлень допущено одну помилку, зумовлену замаскованим виконанням неможливої дії — ділення на нуль. Із пропорції $AE \cdot AC = DH \cdot FH$ (для сторін подібних трикутників ACE і HFD) випливає, що $AE \cdot FH - AC \cdot HD = 0$.

5. Планіметричний варіант міркувань. Не охоплено всіх можливих припущень. Може бути також, що: 1) точка O знаходиться всередині чотирикутника $ABCD$ і 2) точка O є серединою відрізка DC. Розглянутий у софізмі випадок теж потрібно розділити на два: тупий кут BCD і трикутник BOC лежать: а) по один бік від прямої BC, б) по різні боки від цієї прямої (мал. 82).

Як ми переконалися, перше припущення приводить до абсурдного висновку. При другому припущенні прямий кут ADC теж подається різницею кутів $ADO - ODC$, а тупий кут BCD доповнює до 360° суму двох таких самих кутів BCD та OCD, і міркування не приводить до абсурдного висновку. Міркуючи методом від супротивного, встановлюємо, що можливим є тільки друге припущення третього випадку.

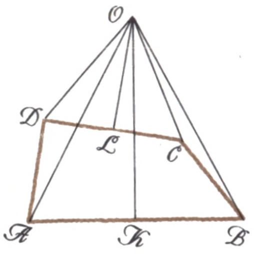
Стереометричний варіант. У використовуваному кресленні трикутник DSC є рівнобедреним, що й приводить до суперечності, бо при рівності похилих SD і SC їх проеції DF і FC не є рівними, справді, розглянувши трикутники DAF і CBF, бачимо, що $AF = FB$, $AD = BC$, але $DF > FC$, бо $\angle A < \angle B$. Отже, прямі SF та SE не перетинаються.

Джерелом утворення софізму стало те, що при виконанні креслення наперед постулювалося (вважалося очевидним) існування точки S — точки перетину площини, перпендикулярної до прямої DC, і прямої, яка перпендикулярна до даної площини та проходить через середину відрізка AB. Отже, припускали, що площина і пряма завжди перетинаються, тобто що існує точка перетину, яка в розглядуваному прикладі відсутня.

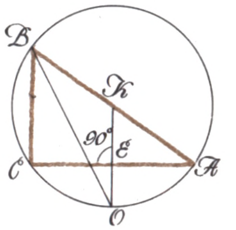
6. В міркуваннях розглянуто не всі можливі припущення, а тільки те, коли бісектриса кута B і вісь симетрії відрізка CA перетинаються всередині трикутника ABC. Необхідно розглянути ще два випадки: 1) точка перетину лежить на відрізку CA; 2) точка перетину знаходиться поза трикутником ABC — і з'ясувати, які з них можливі.

Доведемо, що можливим є тільки третій випадок: в будь-якому прямокутному трикутнику ABC бісектриса LB перетинається з віссю симетрії катета CA поза цим трикутником.

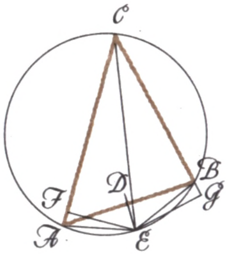
Опишемо навколо трикутника ABC коло (мал. 83). Його центром буде середина гіпотенузи AB — точка K. Радіус кола OK, перпендикулярний відрізку AC, поділить пополам і дугу COA, тобто точка O є се-



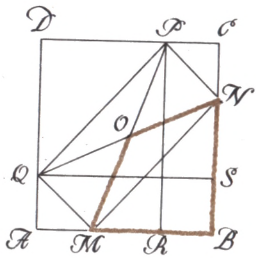
82



83



84



85

Мал. 82—85

рединою дуги CA. Побудуємо бісектрису LB. Оскільки точка B лежить на колі, а бісектриса ділить кут B пополам, то вона проходить через точку O. Звідси випливає, що точка перетину бісектриси LB й осі симетрії катета CA у будь-якого прямокутного трикутника ABC лежить поза цим трикутником.

Доведений факт усуває софізм і розкриває механізм його утворення.

8. На підставі висловлення $\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)$ можна зробити три припущення: 1) $\beta+\frac{\alpha}{2}=\gamma+\frac{\alpha}{2}$ або, що те саме, $\beta=\gamma$; 2) $\beta+\frac{\alpha}{2}=180°\cdot k-\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)$, або

$\alpha+\beta+\gamma=180°\cdot k$; 3) $\beta+\frac{\alpha}{2}=360°\cdot k+(\gamma+\frac{\alpha}{2})$, або $\beta-\gamma=360°\cdot k$ (k — натуральне число).

Перше припущення, як ми вже переконалися, приводить до абсурду, третє вимагає неможливого відношення: різниця двох кутів, величина кожного з яких менша від 180°, дорівнює $360°\cdot k$. Лишається друге припущення, яке при $k=1$ не суперечить умові задачі і виражає відоме співвідношення про суму внутрішніх кутів трикутника.

9. Помилку допущено при переході від рівності синусів до рівності кутів: синуси нерівних кутів можуть бути також рівними. Тому з рівності $\sin\left(C+\frac{B}{2}\right)=\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)$ випливає: $\angle C+\frac{\angle B}{2}=\angle A+\frac{\angle B}{2}+(-1)^k k\pi$, або $\angle C=\angle A+(-1)^k k\pi$.

10. Висловлення про те, що $H=\overrightarrow{AL}\ (E)$ є хибним. Щоб спростувати його і дати кількісну оцінку похибки, обчислимо HQ і LI: $HQ=KC=KD-CD=\sqrt{AD\cdot CD}-CD=\sqrt{\frac{a}{2}\sqrt{3}\frac{a}{2}}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}(\sqrt[4]{3}-1)$ (через a позначили сторону трикутника ABC): $AI=AD-ID=\frac{a}{2}\sqrt{3}-\sqrt{\frac{a}{2}\sqrt{3}\frac{a}{2}}=\frac{a}{2}(\sqrt{3}-\sqrt[4]{3})=\frac{a}{2}\sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{3}-1)$.

$$LI=\frac{AI\cdot CD}{AD}=\frac{\frac{a}{2}\sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{3}-1)\cdot\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}}=\frac{a}{2}(\sqrt[4]{3}-1)\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Звідки $HQ=KC=LI\sqrt[4]{3}\approx1{,}3\ LI$.

11. З пропорції $AC:CB=AD:DB$, переставивши крайні її члени, дістанемо пропорцію $DB:CB=AD:AC$. Оскільки $AD>AC$, то і $DB>CB$. А тому точка H, яка має бути серединою відрізка CD, лежить не всередині, а поза даним колом, справа від точки B. Парадоксальний висновок є результатом неправильно виконаного креслення, на якому точка H була нанесена там, де вона бути не може.

12. Оскільки в чотирикутнику $ABCD$ за умовою $\angle A+\angle C=180°$ і вершини A, B і D лежать на колі, то й четверта вершина C лежить на тому ж колі. Отже, точки E і C мають збігатися, а трикутник BCE не може існувати (він вироджується в сторону BC чотирикутника $ABCD$).

13. Причину суперечності можна виявити за допомогою акуратно виконаного креслення або шляхом логічних міркувань.

Опишемо навколо трикутника ABC коло і виконаємо уже відомі нам побудови (мал. 84). Вісь симетрії — відрізок DE, перпендикулярний відрізку AB, пройде також і через середину дуги AB, яку стягує хорда AB. Бісектриса трикутника ACB теж пройде через середину цієї дуги (інакше величини вписаних кутів ACE і BCE, які вимірюються половинами відповідних дуг, не були б рівні між собою). Звідси випливає, що середина дуги AB є спільною точкою бісектриси та медіани і — точкою E. Тому вона знаходиться обов'язково поза трикутником, і припущення перше і третє відпадають (мал. 18).

Згідно з проведеними вище міркуваннями чотирикутник $BCAE$ є вписаним в коло. А в будь-якого такого чотирикутника сума величин протилежних кутів дорівнює 360°. Тому про кути EAC і CBE можна сказати, що вони: 1) обидва прямі або 2) один з них гострий, а другий тупий. При першому припущенні перпендикуляри EF і EG, опущені відповідно на сторони AC і BC, збігаються із сторонами EA і BE, і прямокутні трикутники ACE та BCE рівні (у них спільна гіпотенуза і $AE=BE$). Тому $AC=BC$, що суперечить умові: $AC>BC$. Таким чином, ми прийшли до суперечності, а це означає, що припущення $\angle AEC=\angle CBE=180°$ є неправильним. З цих кутів один тупий, а другий гострий. А тому й розміщення трикутників AEF і BEG, показане на малюнку 18, не відповідає дійсності: точки F і G не можуть бути одночасно поза трикутником ABC, бо тоді кути EAC і CBE були б тупими. Правильним буде тільки розміщення, подане на малюнку 18, *в*, де одна з точок (а саме F) знаходиться на стороні AC трикутника ABC, а друга (G) — поза цим трикутником. Але тоді з рівностей $CF=CG$ і $AF=BG$ зовсім не випливає, що $AC=BC$ (бо $AC=AF+CF$, а $BC=CG-BG$), і ніякої суперечності з умовою $AC>BC$ немає.

14. При переході від правильної рівності (5) виконано в замаскованому вигляді неможливу дію — ділення на нуль, тому рівність (6) є вже неправильною. Справді, зменшуване і від'ємник різниці $S'ah_1a''h_1'' - S''a'h_1'bh_2$, на яку ми почленно розділили рівність (5), дорівнює $4\ SS'S''$, оскільки

$$S=\frac{1}{2}ah_1,\ S''=\frac{1}{2}a''h_1'',\ S'=\frac{1}{2}ah_1',\ S=\frac{1}{2}bh_2.$$

15. Парадокс виник через безпідставне застосування в проведених міркуваннях названої властивості ряду рівних відношень. Нагадаємо доведення цієї властивості. Нехай $a_1:b_1=a_2:b_2=q$, де b_1 і b_2 — довільні числа і $b_1\neq0$, $b_2\neq0$. Числа a_1 і a_2 визначаються рівностями: $a_1=b_1q$, $a_2=b_2q$, звідки $a_1+a_2=(b_1+b_2)q$ (1). Якщо $b_1+b_2\neq0$, то рівність (1) можна записати у вигляді $(a_1+a_2):(b_1+b_2)=q$, а звідси й дістати згадану властивість рівних відношень: $a_1:b_1=a_2:b_2=(a_1+a_2):(b_1+b_2)$.

Отже, використана властивість доведена при двох суттєвих обмеженнях: 1) $b_1\neq0$, $b_2\neq0$ і 2) $b_1+b_2\neq0$. Якщо ж $b_1+b_2=0$, то згідно з рівністю (1) $a_1+a_2=0$ і останнє відношення має вигляд $0:0$, тобто не має ніякого значення (інакше воно могло б мати будь-яке значення). Ми згідно з пропорцією $a:b=(x+y):z$ і відношенням $(x-z):(z-x)$ вважали, що останнє відношення дорівнює -1, але внаслідок рівності $x=z$ йому не можна приписати ніякого значення.

Тому, застосовуючи названу властивість ряду рівних відношень, завжди потрібно переконатися, що сума наступних членів не дорівнює нулю. Якщо ця умова не виконується, то властивість застосовувати не можна.

В наших міркуваннях ми дістали пропорції, які після звільнення від знаменників мали вигляд: $bx-az=-by$, $ax-bz=by$. Розв'язуючи ці два рівняння відносно x і z і припускаючи, що $a\neq b$, матимемо $x=by\ (a-b)$, $z=by\cdot(a-b)$. Отже, відрізки x і z рівні, а тому застосовувати названу властивість ряду рівних відношень в нашому випадку не можна (застосування її і зумовило виникнення софізму).

Якщо ж $a=b$, то пропорції дають $x+y=z$ і $x=y+z$, звідки $x=y+x+y$, $2y=0$ і $x=z$. І в цьому випадку відрізки x і z рівні.

16. Помилка поширення властивості певного виду на весь рід допущена при переході від рівності (1) до рівності (2). Розглядуване висловлення справджується тільки на множині цілих додатних чисел і не є істинним на числових множинах, які містять від'ємні числа, а саме цей випадок маємо при переході від (1) до (2).

17. Легко побудувати контрприклад, який покаже помилковість висновку. Достатньо вписати в квадрат прямокутник, сторони якого паралельні діагоналям квадрата, але при цьому вершини вписаного прямокутника не ділять пополам сторони квадрата (мал. 85).

Якщо $MB=BN=PD=DQ\neq\frac{1}{2}AB$, то чотирикутник $MNPQ$ є прямокутником, бо, наприклад, $\angle MQP=180°-45°-45°=90°$. Крім того, всі сторони чотирикутника $MNPQ$ нахилені до сторін квадрата під одним і тим самим кутом 45°, тому вони попарно паралельні діагоналям квадрата. Це є повним доведенням того, що чотирикутник $MNPQ$ — прямокутник.

Навіть без контрприкладу можна знайти логічну помилку в міркуванні. Тільки випадково одна проекція (R) точки P на відрізок AB і точки Q на відрізок BC лежить на стороні чотирикутника $MBNO$, а друга (S) на продовженні його сторони, тобто з двох рівних кутів OMR і ONS один є внутрішнім, а другий зовнішнім для чотирикутника $MBNO$. Ніякими доведеннями це положення точок не було і не могло бути обгрунтоване, адже з тими ж умовами теореми узгоджується й випадок, коли обидва названі кути є внутрішніми. Отже, ми поширили певну властивість виду на рід, що й привело до софістичного висновку. Виправлену теорему можна сформулювати в кількох варіантах, наприклад: *Якщо прямокутник вписаний в квадрат так, що одна із сторін його не паралельна жодній із сторін квадрата, то цей прямокутник є квадрат. Якщо прямокутник з нерівними сторонами вписаний в квадрат, то сторони прямокутника паралельні діагоналі квадрата.*

19. Трикутник ABD є граничною фігурою при перетворенні чотирикутника $ABCD$, коли $BC\to 0$, але це зовсім не означає, що властивості чотирикутника автоматично переносяться на цей трикутник. В ньому ми знайшли таку точку, що сума відстаней від неї до точок A і D та подвоєної відстані до точки B є мінімальною.

20. Якщо $k>2$, то можна навести скільки завгодно контрприкладів, а саме: знайти трійки точок, які не лежать на одній прямій і через які уже не можна провести прямої. Тому застосовувати принцип математичної індукції в дальших міркуваннях не можна (див. розв'язання задачі № 23, розділ IV).

21. Додавши рівняння (1) і (2), дістанемо рівняння $0x+0y+0z+2d=0$ (3). Звідки числова рівність $d=0$ справджується тільки за умови, що рівняння (3) має принаймні один розв'язок. Таким чином, наше «доведення» поширюється лише на таке твердження: «Якщо дві площини симетричні відносно початку координат O і перетинаються, то вони обидві проходять через точку O».

22. Допущено логічну помилку «не випливає» (лат. назва *non sequitur*), яка полягає в порушенні закону достатньої підстави — в процесі доведення тези висуваються аргументи, самі по собі правильні, але такі, що з них не випливає висловлення, істинність якого потрібно довести. З рівності $AD=AB+BD$ випливає, що $AB=AD-BD$, але зовсім не випливає, що $AB^2=AD^2-BD^2$. Мало б бути: $AB^2=AD^2-2AD\cdot BD+BD^2$.

23. Допущено ту саму помилку, що й в попередньому софізмі. З відношення $\angle A>\angle B+\angle C$ не випливає, що $\sin A>\sin B+\sin C$, а тому з наведеного аргументу не випливає, що $a>b+c$.

24. Маленький прямокутний трикутник не буде рівнобедреним. Справді, $\triangle AMP\infty\triangle ABN$ і $PM:AP=AB:BN=8:7$.

Тому $AP=1$, $PM=1\frac{1}{7}$. Довжина основи цього прямокутника дорівнює не $8+1$, а $8+1\frac{1}{7}=9\frac{1}{7}$, а його площа $7\times9\frac{1}{7}=64$.

25. Детальніше розглянувши, як діагональ перетинає даний прямокутник, переконуємося в тому, що чотирикутник $YPXS$ не є квадратом. Справді, $\triangle PQR\infty\triangle TQX$, тому $PR:QR=TX:QX$, $PR=\frac{TX\cdot QR}{QX}=\frac{11\cdot1}{13}=\frac{11}{13}$.

Отже, чотирикутник $YRXS$ є прямокутником, у якого $YR=11\frac{11}{3}$, $RX=12$, а площа $12\cdot11\frac{11}{13}=142\frac{2}{13}$. $S_{\triangle STU}=S_{\triangle PRQ}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{11}{13}=\frac{11}{26}$.

Таким чином, площа всієї фігури дорівнює: $142\frac{2}{13}+2\frac{11}{26}=143$.

26. Проаналізуємо варіанти перекроювання квадрата, при яких відбувається «приріст» і «втрата» площі, наприклад коли: а) $x=5$, $y=3$; б) $x=8$; $y=5$.

а) Якщо E_1 і F_1 належать прямій B_1D_1, то $\triangle A_1B_1D_1\infty\triangle ME_1D_1$, $A_1B_1:ME_1=A_1D_1:MD_1$, $5:3=13:8$, $40:24=39:24$. Але $\frac{40}{24}\neq\frac{39}{24}$, тому трикутники $A_1B_1D_1$ і ME_1D_1 не є подібними і точка E_1 не належить прямій

B_1D_1. Коли б вона належала цій прямій, то справджувалися б такі співвідношення:

$$5:E_1M=13:8, \quad E_1M=\frac{40}{13}=3\frac{1}{13}>3.$$

Аналогічно можна довести, що F_1 не належить прямій B_1D_1 (коли б F_1 належала цій прямій, то виконувалася б рівність $NF=3\frac{1}{13}$). Звідси випливає, що фігура $A_1B_1C_1D_1$ не є суцільною. Вона має всередині вузьку щілину у формі паралелограма B_1FD_1H (мал. 86, *а*), площа якого дорівнює 1. Площа ж фігури, утвореної з частин даного квадрата, дорівнює:

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8+2\cdot\frac{3+5}{2}\cdot 5=24+15+25=64.$$

б) Для випадку $S=169$ і $S_1=168$ матимемо не щілину в прямокутній фігурі, а навпаки — часткове перекриття площі (мал. 86, *б*).

Легко перевірити (зробіть це самостійно), що фігура перекриття має форму паралелограма, площа якого дорівнює 1.

Лишається відповісти ще на два запитання: 1) Чи можливий такий поділ сторін квадрата $ABCD$, при якому $S=S_1=S_2=S_3$? 2) Чому в розглянутих випадках $|S-S_1|=|S-S_2|=|S-S_3|=1$?

Як видно з малюнка 31, $S=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, $S_1=S_2=2x^2+xy$, $S_3=3xy+2y^2$, $S_1-S=x^2-xy-y^2$, $S_3-S=y^2+xy-x^2=-(x^2-xy-y^2)$. $S=S_1=S_2=S_3$ тоді і тільки тоді, коли $x^2-xy-y^2=0$, або (якщо $\frac{x}{y}=\varphi$) $\varphi^2-\varphi-1=0$ (1). $\varphi_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Отже, якщо вибрати натуральні x та y такими, щоб їх відношення з певним ступенем точності наближалося до величини $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, то S_1, S_2, S_3 будуть як завгодно близько наближатися до S — площі квадрата $ABCD$.

І тільки, коли $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то $S_1=S_2=S_3=S$.

Число φ надзвичайно популярне в математиці і її застосуваннях. Геометричний смисл його полягає в тому, що точка N здійснює «золотий переріз» відрізка AB. Справді, $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$, $xy+y^2=x^2$, $x^2-xy-y^2=0$. А додатним коренем останнього рівняння і є число φ.

Числове значення «золотого перерізу» позначають грецькою літерою φ (на честь визначного давньогрецького скульптора Фідія (III ст. до н. е.), який часто використовував його в своїх скульптурах, або τ (тау) від грецького τομη — переріз).

Довжини відрізків, на які ділили відрізок BD, у «сприятливих» випадках, виражалися теж популярними в математиці числами. Вони пов'язані із задачею про кролів визначного середньовічного математика Леонардо Пізанського (бл. 1170 — після 1228), відомого за прізвиськом Фібоначчі (син Боначчо). Розв'язання її приводить до адитивного ряду 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$, ... (чисел Фібоначчі). Хоча номери n і самі числа u_n натуральні, залежність u_n від n виражається формулою

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

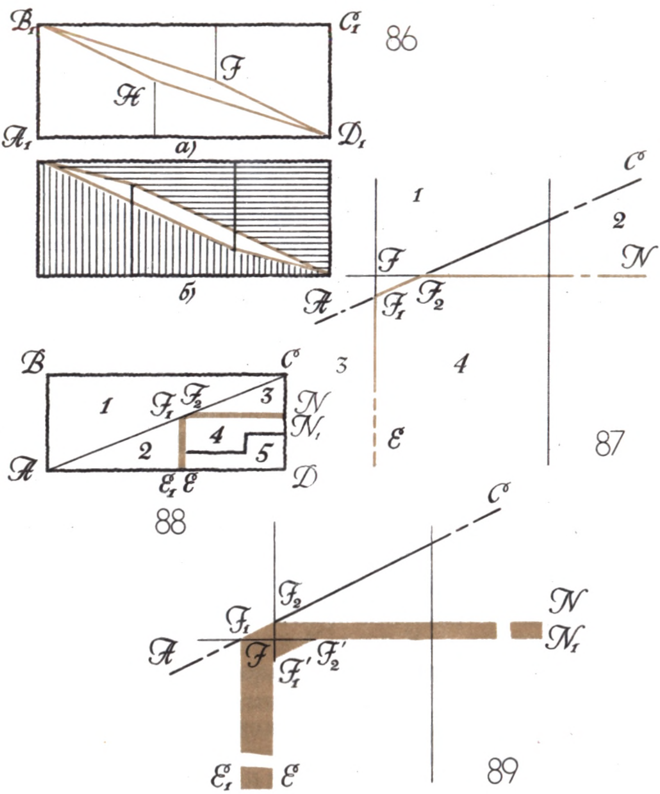
Формула дає $u_1 = u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$ і т. д. При цьому виявляється, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$.

Таким чином, парадокс виникає в тих випадках, коли при розрізуванні квадрата x і y будуть послідовними членами ряду Фібоначчі або будь-якого адитивного ряду виду a, b, $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$, ..., $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, ...

Якщо x і y — раціональні числа, то $S - S_1 \neq 0$, якщо ж вони натуральні, то $\min(S - S_1) = 1$. Ця найменша різниця досягається, коли x і y послідовні пари ряду Фібоначчі виду: $(y=3,\ x=5)$, $(y=8,\ x=13)$, $(y=13,\ x=21)$ і т. д. Це зрозуміло, оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} U_{n+1} : U_n = \varphi$.

Чим більшими будемо вибирати числа Фібоначчі для довжини сторони квадрата, тим менш помітним буде перекриття (щілина). Для малих чисел воно стає очевидним й ілюзія парадокса зникає.

Використовуючи різні ряди Фібоначчі, можна дістати як завгодно багато варіантів парадокса цього типу. Наприклад, квадрати, пов'язані з рядом 2, 4, 6, 10, 16, 26, ..., дають приріст або втрату чотирьох одиниць площі, а квадрати, пов'язані з рядом 3, 6, 9, 15, 24, 39, ..., — шести одиниць площі. В загальному випадку величину втрат або приростів площі можна обчислити як різницю: $u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1}$.



Мал. 86—89

Позначимо u_n, u_{n+1}, u_{n+2} через a, b, c, а втрату або приріст площі — через x. Матимемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a+b=c, \\ b^2=ac\pm x. \end{cases}$$

Підставивши замість x значення бажаного приросту або втрати площі, а замість b — значення довжини сторони квадрата, дістанемо рівняння, корені якого дадуть значення a і c, причому якщо квадрат перекроювати в фігури з раціональними довжинами сторін, то приріст або втрата площі ніколи не дорівнюватиме двом або трьом одиницям площі. Приріст або втрату в дві одиниці площі дає ряд Фібоначчі $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, ..., а втрату або приріст в три одиниці — ряд $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, ...

Можна довести, що $u_n^2=u_{n-1}\cdot u_{n+1}\pm 1$. Наприклад: $1^2=2-1$, $2^2=1\cdot 3+1$, $3^2=2\cdot 5-1$, $5^2=3\cdot 8+1$ і т. д.

Ця властивість чисел Фібоначчі і регулює появу або зникнення одиниці площі. Якщо $AD=5$, $x=3$, $y=8$, то $S=25$ кв. од., $S_1=24$ кв. од.; при $AD=8$ $x=13$, $y=5$, $S=64$, $S_1=65$ кв. од. Отже, вибираючи сторони квадрата із значеннями довжин з ряду 5, 13, 34, ..., ми втрачатимемо одиницю площі, а вибираючи їх з ряду 8, 21, 55, ..., маємо явний приріст.

$S=S_1$ лише тоді, коли $x:y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Це пояснюється тим, що тоді x і y беруться як послідовні члени адитивного ряду 1, φ, $\varphi+1$, $2\varphi+1$, $3\varphi+2$, ... (інший — «мультиплікативний» запис його буде таким: 1, φ, φ^2, φ^3, φ^4, ...). А це єдиний адитивний ряд, в якому відношення будь-яких послідовних членів стале і дорівнює φ.

Докладніше про число φ і числа Фібоначчі див.: Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М., 1978; Попов Є. Д. Алгебраїчні властивості відношення золотого перерізу.— У кн.: У світі математики. Вип. II. К., 1980; Реньи А. Трилогия о математике. М., 1980.

27. Малюнки 32, *а* і 32, *б* виконано неточно. Якщо припустити, що малюнок 32, *а* виконано правильно, то з подібності трикутників ABC, AEF і CNF матимемо:

$$AB:BC=EF:AE=CN:NF. \quad (1)$$

Тоді, прийнявши довжину сторони кожної клітки прямокутника за одиницю, згідно з рівністю 1, маємо $\frac{5}{13}=\frac{2}{5}=\frac{3}{8}$, що, очевидно, неправильно. Наше припущення привело до суперечності. Отже, трикутники ABC, AEF, CNF не можуть мати розмірів, заданих на малюнку 32, *а*. За умовою $AB=5$, $BC=13$. Припустимо, що довжини катетів AE і CN на цьому малюнку задано правильно, тобто $AE=5$, $CN=3$. Тоді пропорцію (1) можна записати так: $5:13=EF:5=3:NF$, звідки $EF=1\frac{12}{13}$ і $NF=7\frac{4}{5}$.

Ці результати свідчать про те, що точка F перетину перпендикулярів, проведених з точок N і E, не лежить

на діагоналі AC. Нехай F_1 — точка перетину відрізків EF і AC, а F_2 — точка перетину відрізків NF і AC (мал. 87). На малюнку 88 $E_1F=1\frac{12}{13}$ і $NF_2=7\frac{4}{5}$. Якщо точніше виконати цей малюнок, то всередині прямокутника $ABCD$ утвориться Γ-подібна щілина, причому $AF_1=7\frac{4}{5}$ і $CN=1\frac{12}{13}$. Площа цієї щілини дорівнює 1. Доведемо останнє твердження (див. мал. 89). $S_{\text{щіл.}}=S_{EE_1F_1F}+S_{FF_2NN_1}+S_{\triangle FF_1F_2}+S_{\triangle FF_1'F_2'}$
Але $\triangle F_1FF_2=\triangle F_1'FF_2'$, тому $S_{\text{щіл.}}=S_{EE_1F_1F}+S_{FF_2NN_1}+$ $+2S_{\triangle FF_1F_2}$, або $S_{\text{щіл.}}=FF_1\cdot EF+N_1F\cdot FF_2+FF_1\cdot FF_2$ (2). Обчислимо тепер FF_1 і FF_2; $FF_1=EE_1=AF-$ $-AF_1=8-7\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$, $FF_2=NN_1=CN_1-CN=2-$ $-1\frac{12}{13}=\frac{1}{13}$. Тепер, враховуючи, що $|EF|=3$ і $|N_1F|=$ $=5$, з рівності (2) дістанемо $S_{\text{щіл.}}=\frac{1}{5}\cdot 3+\frac{1}{13}\times$ $\times 5+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{13}=1$.

Таким чином, площа щілини дорівнює площі зафарбованого квадратика, і тому останній не зник, а перетворився в рівновелику йому фігуру — щілину.

Довжини сторін прямокутника в розглянутій задачі виражаються числами 5 і 13, які є членами числової послідовності — ряду Фібоначчі: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$, $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$. Кожний член ряду Фібоначчі, починаючи з третього, є сумою двох чисел, які безпосередньо йдуть перед ним.

Числа Фібоначчі стосуються софізмів «на розрізування фігур» і перерозподіл площі (докладніше див. розв'язування № 26).

28. Фігура $ABCD$ не квадрат, а опуклий восьмикутник. Справді, $\operatorname{tg}\angle AMQ=3:8=15:40$, $\operatorname{tg}\angle MFB=2:5=$ $=16:40$. Оскільки $BF\parallel MQ$, то AB — не відрізок прямої, а ламана, яка складається з ланок AM і MB, причому $\angle BMA<180°$. Аналогічно доводиться, що фігура $A_1M_1B_1N_1C_1O_1D_1P_1$ є вгнутим восьмикутником.

29. Так само, як і в парадоксі з розрізуванням квадрата (див. № 26), тут за довжину сторони прямокутника взято число Фібоначчі (8) з підпослідовності, члени якої зумовлюють збільшення площі утвореного прямокутника на 1.

30. Див. розв'язання № 26.

34. Легко переконатися, що розмір отвору при розрізуванні квадратів або прямокутників залежить від величини кута, утворюваного лініями розрізу із сторонами чотирикутника. Навіть при побіжному вивченні чотирикутника з отвором видно, що його сторони дещо більші, ніж даного.

Як бачимо, геометричні софізми часто виникають тому, що ми приписуємо геометричним фігурам властивості, які ніби бачимо на кресленні, але які зовсім не випливають логічно з властивостей розглядуваних фігур. Тому завжди потрібно пам'ятати й виконувати пересторогу академіка О. В. Погорєлова, який пише: «При доведенні теорем дозволяється користуватися кресленням, як геометричним записом того, що ми виражаємо словами. Не дозволяється користуватися в міркуваннях властивостями фігур, які видно з креслення, якщо ми не можемо обґрунтувати їх, спираючись на аксіоми й теореми, доведені раніше».

35. Коло можна розглядати як границю послідовності вписаних в нього (або описаних навколо нього) правильних многокутників при необмеженому подвоєнні числа їх сторін. Чим більшу кількість сторін матиме розглядуваний многокутник, тим точніше вдасться змоделювати кочення кіл в софізмі Арістотеля. Кочення опуклого многокутника по прямій без ковзання означає перекладання його з однієї сторони на іншу в процесі обертання навколо центра многокутника. Розглянемо правильний восьмикутник $A_1A_2A_3...A_8$ у вихідному положенні якого сторона A_1A_2 лежить на прямій кочення (мал. 90). Якщо многокутник повернути навколо вершини A_2 на кут $\frac{360°}{8}$, то на пряму ляже сторона A_2A_3, а центр O многокутника займе положення O'.

В загальному випадку після $(n-1)$-го повороту правильного n-кутника центр його буде в точці $O^{(n-1)}$, вершина A_1 перейде в положення $A_1^{(n-1)}$, ..., A_n в $A_n^{(n-1)}$, а сторона $A_n^{(n-1)}A_1^{(n-1)}$ лежатиме на відрізку $A_1A_1^{(n-1)}$, який дорівнює периметру даного n-кутника, зокрема $A_1A_1^{(7)}$ дорівнює периметру восьмикутника $A_1A_2 \ldots A_8$.

Нехай скріпленими будуть не два концентричні кола, а два концентричні n-кутники з відповідно паралельними сторонами (мал. 91). Якщо більший котиться без ковзання, то в результаті повороту його навколо вершини A_2 на кут $\frac{360°}{n}$ він ляже на пряму кочення стороною A_2A_3 (нове положення її позначено $A_2'A_3'$) і відрізок $A_2'A_3'$ буде продовженням відрізка A_1A_2. У процесі кочення периметр многокутника «розгортатиметься» («спрямлятиметься») на відрізок $A_1A_1^{(n-1)}$.

Зовсім інакше рухатиметься при скріпленні з більшим многокутником менший. Він також повернеться навколо A_2 на кут $\frac{360°}{n}$, а його сторона a_2a_3 займе положення $a_2'a_3'$, яке зовсім не буде продовженням a_1a_2. В той час як многокутник $A_1A_2...A_n$ перекладатиметься з однієї сторони на іншу, многокутник $a_1a_2...a_n$ одночасно і перекладатиметься, і «перестрибуватиме» з одного положення в інше. Внаслідок цього многокутник $a_1a_2...a_n$, рухаючись уздовж прямої, покриє, вірніше «прострибає», відстань $a_1a_1^{(n-1)}$, більшу, ніж його периметр.

Неважко змоделювати кочення тих же многокутників у випадку, коли $a_1a_2...a_n$ котиться по прямій без ковзання. Після кожного повороту на кут $\frac{360°}{n}$ навколо вершини меншого многокутника сторона більшого многокутника частково накладеться на попередню сторону цього многокутника. У результаті шлях, пройдений при повному оберті, виявиться меншим від периметра.

На основі проведених міркувань приходимо до висновку, що коли більше коло котиться без ковзання по прямій MN (мал. 54), то менше коло (як і менший многокутник в попередніх міркуваннях) не може котитися без ковзання по прямій M_1N_1. При повному оберті його центр пройде шлях $M_1N_1 > 2\pi OM_1$. Якщо $M_1N_1 = 2\pi OM$, то $2\pi OM > 2\pi OM_1$.

Розглянутий софізм справив велике враження на Арістотеля. Він називав його найдивовижнішою проблемою механіки. Галілео Галілея (1564—1642) не задовольнило пояснення Арістотеля, і в «Бесідах з механіки» він запропонував своє розв'язання софізму, порівнюючи кочення круга і n-кутника.

Математична суть софізму полягає в тому, що він демонструє одну з характерних особливостей нескінченних множин. Якщо розглядати $P_1 = 2\pi OM_1$ і $P = 2\pi OM$ як точкові множини, то можна вважати, що $P_1 \subset P$ і водночас можна встановити взаємно однозначну відповідність між елементами (точками) цих множин, що саме й демонструє софізм «Арістотелеве колесо». А звідси випливає, що частина еквівалентна цілому. Цей висновок і здався парадоксальним, бо суперечив одній із аксіом Евкліда «частина менша цілого».

36. Цей софізм ілюструє надзвичайно важливу властивість довжини ламаної, так звану напівперервність довжини ламаної знизу. Для пояснення її введемо поняття r-околу фігури. Нехай M — деяка множина точок площини і r — додатне дійсне число. Для всіх $A \in M$ розглянемо відкритий круг радіуса r з центром у точці A. Об'єднання всіх таких кругів позначимо символом $O(M, r)$ і назвемо r-околом множини M, тобто $B \in O(M, r)$ тоді і тільки тоді, коли існує точка $B_1 \in M$, така, що $BB_1 < r$.

Нехай L — деяка, можливо, й дуже звивиста ламана і r — достатньо мале додатне дійсне число. Розглянемо $O(L, r)$ ламаної L. Кожна ламана L', яка проходить всередині $O(L, r)$ від одного до другого кінця L, має в основному повторити всі звиви лінії L (мал. 92) і тому довжина L' (позначатимемо $l(L')$) не може бути значно меншою від $l(L)$. Отже, якщо L — деяка ламана і $\varepsilon > 0$, то існує таке число $\delta > 0$, що для всякої ламаної L', якщо відхилення L' від L менше за δ (цей факт записуватимемо у вигляді $d(L', L) < \delta$), то $l(L) - l(L') < < \varepsilon$ (1).

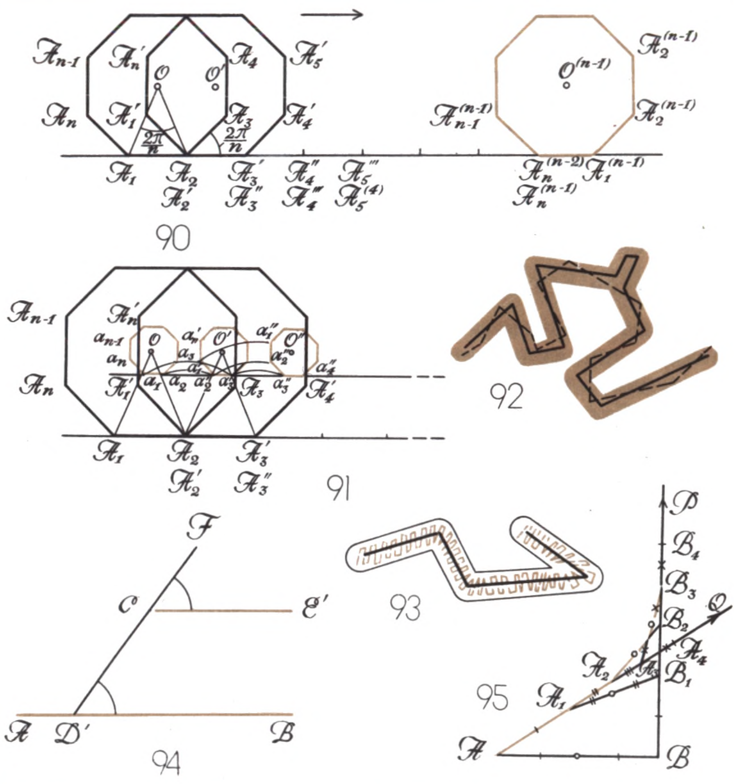
Умова $d(L', L) < \delta$ обмежує довжину ламаної L' знизу, але не накладає ніяких обмежень зверху, тобто для будь-якої ламаної (у тому числі і відрізка прямої) L і додатного числа δ існує ламана L' як завгодно великої довжини, хоча $d(L, L') < \delta$ (мал. 93). У зв'язку з цим властивість (1) і називається *напівнеперервністю довжини ламаної знизу.*

Отже, говорять, що послідовність ламаних $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ збігається до ламаної L, якщо $d(L, L_n) \to 0$. Але це зовсім не означає, що коли послідовність ламаних $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ збігається до L, то неодмінно $\lim\limits_{n\to\infty} l(L_n) = l(L)$ (2). Коли б це було так, то довжина ламаної мала б властивість неперервності. Ми тепер знаємо, що коли границя $\lim\limits_{n\to\infty} l(L_n)$ існує, то вона задовольняє тільки нерівність

$$\lim_{n\to\infty} l(L_n) \geqslant l(L). \qquad (3)$$

Нерівність (3) еквівалентна властивості (1).

В наших міркуваннях з правильного співвідношення



Мал. 90—95

$\lim\limits_{n\to\infty} d(AB,\ L_n)=0$ ми зробили висновок, що $\lim\limits_{n\to\infty} l(L_n)= =AB$. Але тут неявно використано рівність (2), яка в загальному випадку (і в нашому прикладі) не виконується. Тому й зроблений висновок є необгрунтованим. Справді, $\lim\limits_{n\to\infty} l(L_n)=AC+BC$, $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$, $AC+BC>\sqrt{AC^2+BC^2}$, що не суперечить умові (3).

37. Софізм відрізняється від попереднього тільки тим, що в ньому розглядається послідовність $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ не ламаних, а кривих ліній — дуг півкіл.

38. Вимірювання площ поверхонь — найскладніший розділ теорії вимірювання геометричних величин. Це пояснюється тим, що бувають надзвичайно складні геометричні фігури, площу яких не завжди можна обчислити. Логічна природа цього софізму та ж, що і двох попередніх. Тут теж не враховано властивість напівнеперервності площі (див. пояснення до № 36). Ми прийняли необгрунтований висновок: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$, який насправді є хибним. Оскільки $\pi r(h+r) = \pi r^2 + 2\pi(\frac{1}{2}r)h$, то границею P_n є не бічна поверхня конуса, а сума площі основи конуса і бічної поверхні циліндра з радіусом основи $\frac{1}{2}r$ і висотою h. Цей найпростіший приклад демонструє складність загальної задачі обчислення площ криволінійних поверхонь (див. розв'язання наступного прикладу).

39. Софізм німецького математика А. Шварца (1843—1921) розвиває ідею прикладу № 36. Він показує, що площі вписаних у дану поверхню многогранних поверхонь, усі грані яких необмежено зменшуються, можуть мати різні границі або й взагалі не мати границі. Приклад свідчить, що очевидність геометричного означення площі поверхні заснована на інтуїтивних уявленнях, які не відповідають складності розв'язуваної задачі.

Розглянута в прикладі многогранна поверхня дійсно необмежено наближається до циліндричної, але звідси (див. пояснення до № 36) зовсім не випливає, що границя площ послідовностей таких поверхонь дорівнює площі бічної поверхні циліндра. При запропонованій побудові теж можна було б вивести правильну формулу для площі бічної поверхні циліндра, поклавши, наприклад, $n=m$, $n=10m$, або взагалі $n=km$ (де k — натуральне число), зокрема при $n=10m$, матимемо:

$$S_m = 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2+400m^2R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}} = 2\pi R\,\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{H^2+\frac{25\pi^4R^2}{m^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4}.$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_m = 2\pi RH$.

Так буде у всіх випадках, коли $n=km$, бо при конструюванні вписаної многогранної поверхні частота поділок по колу і по висоті зростає приблизно однаково, пропорційно. Тому хоча многогранна поверхня й не є опуклою, проте її грані майже вертикальні, тобто кут, наприклад, грані MNP з горизонтальною площиною при $m \to \infty$ прямує до $\frac{\pi}{2}$ (див. мал. 60). Це означає, що коли $m \to \infty$, то відхилення між вписаною многогранною поверхнею та поверхнею циліндра прямує до нуля, але одночасно (і це надзвичайно важливо!) границя площі послідовності многогранних поверхонь прямує до площі бічної поверхні циліндра.

Інша ситуація складається, коли $n = m^2$ або $n = m^3$ і взагалі $n = m^k$ (k — натуральне). У цьому випадку частота ділення по висоті наростає значно швидше, ніж по колу. Від цього многогранна поверхня стає все більш зазубреною, шорсткою, що й зумовлює збільшення її площі. При цьому коли $n \to \infty$, то трикутні грані многогранної поверхні вже не наближаються до вертикалі, як у випадку $n = km$, а прямують до певного граничного кута (при $n = m^2$), а при $n = m^3$ навіть до горизонтального положення.

40. Софізм заснований на необгрунтованому висновку про те, що нескінченно вузький сферичний трикутник можна розгорнути на площині, тобто замінити його рівним плоским трикутником. Насправді ніякий сферичний трикутник не можна розгорнути на площині. Це видно з того, що сума внутрішніх кутів сферичного трикутника більша за 180°, в той час як у плоскому трикутнику вона завжди дорівнює 180°. В нашому ж прикладі (мал. 62) у сферичному трикутнику APB $A = B = 90°$. Плоским аналогом такого трикутника був би рівнобедрений трикутник з двома прямими кутами.

41. Допущено логічну помилку (підміну тези), яка полягає в тому, що, доводячи одну тезу, на певному етапі починають доводити іншу. Латинська назва помилки: *ignoratio elenchi* — нерозуміння того, що доведено.

Справді, що обгрунтовано в наведеному міркуванні? Доведено, що коли будувати вказаним способом паралельну пряму CE, то вона буде єдиною. Але звідки відомо, що сам запропонований спосіб побудови прямої CE єдиний? Добре відомо, що існують також інші способи побудови прямої, паралельної прямій AB. Наприклад, взявши на прямій AB довільну точку D' (мал. 94) $D' \neq D$, побудуємо промінь $D'C$ і на $D'C$ при точці C побудуємо $\angle FCE' = \angle CD'B$ так, щоб $CE' \uparrow\uparrow D'B$. Тоді на основі теореми (вона доводиться без використання V постулату) про паралельність прямих за умови рівності відповідних кутів можна стверджувати, що $CE' \parallel AB$. Але де гарантія, що CE збігається з CE'? Твердження, що в результаті різних побудов ми матимемо одну і ту саму пряму, еквівалентне V постулату, який ми доводили.

42. Ми припустили, що для будь-яких пар паралельних прямих, будь-яких січних і довільних пар внутрішніх односторонніх кутів сума їх завжди більша від π, дорівнює π або менша за π. Але тут, по-перше, далеко не вичерпані можливі варіанти: сума внутрішніх односторонніх кутів в одних випадках може бути меншою, а в інших — дорівнювати π. Таке припущення не приводить до суперечності. Наприклад, якщо $\angle 1 + \angle 4 > > \pi$, а $\angle 2 + \angle 3 < \pi$, то це не суперечить тому, що $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2\pi$. Крім того, неправомірність проведених міркувань можна було виявити ще й тому, що ми ніде не використали умову $AB \parallel CD$. Якби наші міркування були правильними, то тим самим було б доведено і таке напевне хибне твердження: «При перетині будь-яких двох прямих третьою прямою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює π». Саме коли відкинути припущення про паралельність прямих AB і CD, то, як правило, і здійснюватиметься четверта, не врахована нами в спростованому доведенні можливість: з одного боку від січної сума внутрішніх односторонніх кутів більша, а з другого — менша за π.

43. Допущено логічну помилку «круг в доведенні» (лат. *circulus in demonstrando*) або «те ж через те» (лат. *idem par idem*). При доведенні використано як очевидний той факт, що в будь-якому трикутнику сума внутрішніх кутів одна і та ж. А це висловлення є одним із еквівалентів V постулату.

45. При доведенні використано недоведене твердження про те, що точки C і C' різні. Наведені міркування не виключають того, що точки C і C' збігаються, а це позбавляє всі міркування переконливості і сили. Застосовано ознаку рівності трикутників ABC і ABC', хоча існування трикутника ABC' ще потрібно довести.

46. Допущено логічну помилку підміни тези (див. пояснення до № 40). Побудуємо креслення, на якому промінь AQ і відрізок BP перетинаються (мал. 95). Зробимо розриви при кресленні перпендикуляра і похилої. Назвемо відрізки AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... відповідно першим, другим, третім... відрізками похилої, а відрізки

BB_1, B_1B_2, B_2B_3, ... — першим, другим, третім ... відрізками перпендикуляра. В міркуваннях Прокла істинними будуть висловлення: 1) процес відкладання відрізків може бути продовжений як завгодно довго і можна дістати відрізки перпендикуляра і похилої як завгодно великих номерів; 2) пари відрізків перпендикуляра і похилої з однаковими номерами не перетинаються. Але це зовсім не виключає перетину відрізків перпендикуляра і похилої з різними номерами. Адже коли ми стверджуємо, що похила і перпендикуляр не перетинаються, то зобов'язані показати, що ні один з відрізків перпендикуляра не перетинає жодного з відрізків похилої. Коли ж звернутися до креслень, які виконані без навмисних порушень метричних відношень, то переконуємося, що вже 2-й відрізок перпендикуляра перетне 4-й відрізок похилої. Зрозуміло, що, висновок, зроблений на основі креслення, не спростовує міркувань Прокла. Ми зробили це раніше. Крім того, знаючи величину кута A і використавши формули тригонометрії, можна обчислити номери відрізків, які перетинаються. А одного контрприкладу теж досить, щоб спростувати певні міркування в нашому прикладі.

47. Якщо позначити $EK=x$, $KH=y$, $HM=z$, то $KM-EH=(y+z)-(x+y)=z-x$, $HM-EK=z-x$, а $z=x$. Тому маємо рівність $0:AD=0:BC$, звідки нема підстав робити висновок, що $AD=BC$ (AD і BC можуть мати будь-яке значення).

48. Хибний висновок зроблено на основі помилки у кресленні: точки E і F, які збігаються, розглядаються як різні. Оскільки $LE \perp PQ$ (за побудовою $LE \perp MN$), а пряма MN паралельна PQ і є стороною вписаного кута, який спирається на діаметр, то вершина вписаного кута має належати і прямій PQ і дузі півкола, тобто точці їх перетину — F. Таким чином, $E=F$.

50. Кожний міст має два кінці, тому число всіх кінців мостів має бути парним. З розповіді ж мандрівника випливає, що число всіх кінців мостів дорівнює $4\cdot4+3\cdot3+1\cdot1+5=31$, тобто є числом непарним, чого не може бути.

51. Гусінь переміститься на відстань: $(5+2\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{5}{2^{n-1}})$ дм. Сума цього нескінченного ряду дорівнює $5:(1-\frac{1}{2})=10$. Тому гусінь ніколи не доповзе до гілки.

53. Такий розподіл неможливий. Справді, припустимо протилежне. Назвемо одну з частин першою. Пройдемо по її границі й пронумеруємо решту частин у тому порядку, в якому вони будуть зустрічатись: 2-*а*, 3-*я*, 4-*а*, 5-*а*. Пройдемо по такому замкненому маршруту: з 1-ї частини в 2-у, потім прямо у 4-у (бо в них є спільна межа), потім знову у 1-у. Цей замкнений маршрут ділить площину на дві області. Доведення цієї очевидної теореми досить складне, його дав французький математик Каміль Жордан (1838—1922). Але тоді 3-я частина лежить в одній з цих областей, а 5-а в другій, а тому вони не мають спільної межі.

54. Наближаючись до берега, Червона Шапочка має плисти так, щоб центр озера знаходився між нею і Сірим Вовком на одній прямій. Якщо вона віддалиться від центра на 0,25 радіуса озера, то має плисти далі до найближчої точки берега (тобто рухатися по радіусу). Тоді Червоній Шапочці лишиться пропливти $0{,}75\ r$, а Сірому Вовкові доведеться пробігти $\pi r \approx 3{,}14\ r$, а $3{,}14\ r > 0{,}75\ r$.

55. Якщо припустити, що довжина цеглини дорівнює 1 і в нас є необмежений запас цегли, то відстань між лівими гранями нижньої і верхньої цеглин побудованої арки дорівнюватиме сумі ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right).$$

Оскільки в дужках є вже відомий нам розбіжний гармонійний ряд, то й цей ряд розбіжний. Звідси випливає, що шукана відстань може бути як завгодно великою.

56. Час руху хлопчика і циліндра однакові. Швидкість руху верхньої точки циліндра вдвічі більша від швидкості переміщення його осі. Отже, коли хлопчик пройде відстань l, циліндр переміститься на $0{,}5\ l$. Тому хлопчикові доведеться пройти до циліндра шлях $2l$.

57. Звичайно відповідають, що ні.

Здавалося б, що може означати 1 м дроту порівняно із 40 мільйонами метрів земного екватора! Позначимо радіус земної кулі через r ($r=6400$ км), довжину дроту до подовження l_0 ($l_0=2\pi r$), а після подовження l_1 ($l_1=l_0+\Delta l$). Тоді

$$r_1=\frac{l_1}{2\pi}=\frac{l_0+\Delta l}{2\pi}=\frac{l_0+1\text{м}}{2\pi}=r+\frac{1\text{м}}{2\pi},$$

$h=r_1-r=1\ \text{м} : 2\pi \approx 100\ \text{см} : 6{,}28=16$ см.
Пробіжить не тільки миша, а й кіт!

58. Позначимо $\angle AOO' = \angle A'OO' = \alpha$ (мал. 73). Тоді $l_1 = (2\pi - 2\alpha)r + 2b$, де $b = AO' = O'A' = r\operatorname{tg}\alpha$. Оскільки кут α малий, можна використати наближення $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$.

Тоді $l_1 = (2\pi - 2\alpha)r + 2r(\alpha + \frac{\alpha^3}{3}) = 2\pi r + \frac{2}{3} r\alpha^3 = l_0 + \frac{2}{3} r\alpha^2$.

Звідки $\Delta l = \frac{2}{3} r a^3$ і $\alpha = \sqrt[3]{\frac{3\Delta l}{2r}}$.

Шукана висота $h = O'P = O'O - OP = \frac{OA}{\cos\alpha} - OP = r\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$.

Для малих α $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ і $\frac{1}{\cos\alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{2}$, тому $h = r\frac{\alpha^2}{2} = \sqrt[3]{\frac{9}{32}(\Delta l)^2 r}\,^2 \approx 122$ м.

Цей дивовижний результат стане зрозумілим, якщо пригадати явище провисання проводів ліній електропередачі. При збільшенні температури до 40 °С проводи подовжуються на 5% своєї довжини. Тоді вони провисають униз на десятки сантиметрів. Так само поводять себе шківи в передачах. В усіх цих випадках величина провисання визначається не тільки величиною подовження, але й повною довжиною подовженого дроту, вірьовки чи шківа.

59. При охолодженні на 1 °С сталевий дріт скорочується на 0,0001 своєї довжини. При довжині 40 000 000 м (довжина земного екватора), дріт скоротиться в результаті охолодження на 4000 м, а радіус кільця з дроту на $4000 : 2\pi \approx 640$ м. На стільки ж метрів врізався б дріт в землю при зроблених нами припущеннях і охолодженні на 1 °С

61. Задача має розв'язок. Її можна розв'язати, наприклад, так: з $AC^2 = AB \cdot AH$ маємо $x^2 = (x + 4{,}5)(x - 1{,}5)$, $3x = 4{,}5 \cdot 1{,}5$, $x = 2{,}25$, тобто $AC = 2{,}25$ см, тоді $AB = 6{,}75$ см, а $BC = 4\sqrt{2}$ см. Учень А припустився помилки, добуваючи квадратний корінь. Мало бути: $\sqrt{(x-3)^2} = x - 1{,}5$; $x - 3 = -1{,}5$; $3 - x = x - 1{,}5$, $2x = 4{,}5$, $x = 2{,}25$ (см).

62. Периметр даного трикутника дорівнює 3, периметр фігури після першої побудови 4, після другої

$\frac{48}{9}$, після третьої $\frac{192}{9}$. Послідовність периметрів замкнених ламаних можна записати так: $3=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^0$, $4=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)$, $\frac{48}{9}=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2$, $\frac{192}{9}=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n\to\infty$, то периметр лінії Ван дер Вардена має нескінченну довжину. В це важко повірити, оскільки вона не просто обмежена, а й вся вміщується в кільці, утвореному двома колами, одне з яких описане навколо зірчастого шестикутника, а друге — вписане в даний трикутник.

63. По-перше, потрібно якимось чином перелічити множину раціональних чисел, адже вона не тільки нескінченна, а ще й усюди щільна, тобто між будь-якими двома нерівними раціональними числами r_1 і r_2 завжди міститься інше раціональне число, наприклад $\frac{r_1+r_2}{2}$. Справді, якщо $r_1\neq r_2$, то $r_1<\frac{r_1+r_2}{2}<r_2$. Звідси відразу випливає, що між будь-якими двома нерівними раціональними числами міститься нескінченна множина раціональних чисел. І все ж це не завадить нам полічити всі раціональні числа, зіставляючи кожне з них з натуральним.

Запишемо додатні раціональні числа в таку нескінченно продовжену вправо і вниз таблицю.

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \ldots \\[2ex]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \ldots \\[2ex]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \ldots \\[2ex]
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \ldots \\[2ex]
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Кожне раціональне число в цій таблиці зустрічатиметься нескінченне число разів, але це не біда. Зате коли продовжити таблицю вправо і вниз до нескінченності, жодне з чисел не буде пропущено. Тепер, якщо випишемо числа в порядку, вказаному стрілками:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$$

то жодне з раціональних чисел не буде опущено, і ми навіть знатимемо, на якому місці в нашому ряду стоїть будь-яке раціональне число. Наприклад, дріб $\frac{1977}{1917}$ стоїть на місці з номером $n=1946\cdot3892+1917=7\,575\,909$.

Підготовча робота закінчена і тепер будуватимемо дах над всіма додатними раціональними числами, вишикуваними нами уже в одну нескінченну шеренгу. Нехай вас не турбує той факт, що кожне раціональне число зустрічається там нескінченну кількість разів. У нас вистачить матеріалу на всіх.

Візьмемо як завгодно мале додатне дійсне число $\varepsilon(\varepsilon\in R$ і $\varepsilon>0)$ і побудуємо над одиницею дах довжиною $\frac{\varepsilon}{2}$, над двійкою дах довжиною $\frac{\varepsilon}{2^2}$, над $\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2^3}$, ... над числом з номером $n(n\in N)-\frac{\varepsilon}{2^n}$ і т. д. Тоді загальна довжина даху, який захистить від дощу всі числа нашого ряду, дорівнюватиме

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\frac{\varepsilon}{2^3}+\ldots+\frac{\varepsilon}{2^n}+\ldots=\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\varepsilon.$$

Порівняйте цей результат з результатом попередньої задачі.

64. Задача зводиться до обчислення суми членів нескінченної спадної геометричної прогресії: 48, 24, 12, 6, ...

$$S=\frac{48}{1-\frac{1}{2}}=96.$$

Задача належить визначному французькому математику Орему. У трактаті «Про конфігурацію якостей» Орем ввів також інші конструкції фігур нескінченних розмірів, які мають скінченну площу.

Для побудови теорії вимірювання площ плоских фігур вводяться певні обмеження, оскільки на площині можна побудувати такі складні фігури, до яких уже не можна застосувати поняття площі. Площа розглядається на множині квадровних фігур. Множина M квадровна тоді і тільки тоді, коли вона обмежена і її границя M_1 є лінією, яка не має площі. Прикладами таких ліній будуть всі лінії, які вивчаються в курсі математики середньої школи. Оскільки фігура Ніколя Орема необмежена, то вона не є квадровною і до неї не може бути застосоване поняття площі.

65. В результаті нескінченно продовжених ірригаційних робіт буде збудовано нескінченно продовжену і нескінченно звивисту фігуру, площа якої не перевищуватиме $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}$ (площі квадрата).

Кожна точка суходолу буде віддалена уже в n-й день не далі, ніж на відстані $\frac{1}{2^{n+1}}$ від води, а в границі в кожній точці будуть як завгодно близько знаходитися поруч суходіл і канал. Тому всі точки, які не є площею каналу, будуть його межею. Але оскільки площа каналу не перевищує половини площі одиничного квадрата, то звідси випливає, що межа каналу має ненульову площу, яка не менша за половину площі одиничного квадрата.

Таким чином, ми дістали обмежену і все ж таки не квадровну фігуру, бо границя її не є множиною з нульовою площею. Така фігура називається континуумом Вада, за ім'ям японського математика, який її відкрив.

66. На першому кроці ми викинули $\frac{1}{9}$ площі одиничного квадрата, на другому $8\cdot\frac{1}{81}$. Після цього залишиться фігура, площа якої дорівнює $1-\frac{1}{9}-\frac{8}{81}=\frac{64}{81}=\left(\frac{8}{9}\right)^2$. Після n-го кроку залишиться фігура, площа якої дорівнюватиме $\left(\frac{8}{9}\right)^n$. А оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n=0$, то площа так «зітканого» килима Серпінського дорівнюватиме нулю, хоча це буде й не лінія, а плоска область з межею і внутрішніми точками.

Килим Серпінського, як і крива Ван дер Вардена та континуум Вада,— це лише деякі з численних прикладів незвичних математичних об'єктів. Наприклад, у 1890 році італійський математик Д. Пеано (1858—1932) опублікував приклад лінії — «кривої Пеано», яка проходить через усі точки даного квадрата. Приклад Пеано справив величезне враження на сучасників. Визначний французький математик А. Пуанкаре (1854—1912), ознайомившись з кривою Пеано, з жалем вигукнув: «Як могла інтуїція так обдурити нас!». Справді, приклад Пеано і численні інші відкриття дивовижних кривих ліній і поверхонь показували, що інтуїтивне означення лінії, поверхні і тіла потребують уточнення і нового уточненого означення. (Детальніше див.: (6), (21, 1974, № 8), (10, 25, 30).

67. З площі одиничного квадрата тепер викидаємо квадрати, сума площ яких на кожному етапі побудов дорівнює сумі членів спадної геометричної прогресії:

$$\frac{1}{25}+\frac{8}{25^2}+\frac{8^2}{25^3}+\dots+\frac{8^n}{25^{n+1}}$$

Якщо продовжити описані побудови до нескінченності, то сума площ всіх викинутих квадратів дорівнюватиме:

$$\frac{1}{25}+\frac{8}{25^2}+\frac{8^2}{25^3}+\dots+\frac{8^n}{25^{n+1}}+\dots=\frac{1}{17}.$$

Площа цього варіанта килима Серпінського (хоча б його й дірявити до нескінченності) буде завжди не менша за $\frac{16}{17}$.

ЛОГІКА 5

Мислити послідовно, судити переконливо, спростовувати неправильні висновки повинен уміти кожний: фізик і поет, тракторист і хімік.

Е. КОЛЬМАН

СЛІДАМИ ЛОГІЧНИХ КАТАСТРОФ

Логіка інколи породжує чудовиська.

А. ПУАНКАРЕ

Подані далі приклади мають особливий характер. Вони призначені не стільки для розв'язування, скільки для того, щоб дати поштовх до роздумів про круті перевали людської думки, яка часто прокладала шлях до істини в лабіринтах здогадів і помилок, у важких поєдинках з очевидністю, що, траплялося, як міраж в пустелі, заманювала на манівці. Значна частина з наведених далі парадоксів належить до знаменитої колекції тупиків, які протягом усієї історії розвитку науки час від часу викликали катастрофи в логіці, філософії та математиці.

Парадокси майже завжди з'являлися в грозовій атмосфері передчуття якісного стрибка в пізнанні і залишали на величній споруді науки сліди страшних руйнувань. Але водночас вони стимулювали й грандіозні ремонтні роботи у фундаменті науки, в результаті яких учені зміцнювали основи теоретичних знань, глибше проникали в таємниці досліджуваних явищ.

Парадоксам присвячено величезну літературу. При цьому автори не однозначно відповідають на питання про джерела виникнення, природу і роль в науці цих дивовижних витворів людської думки. Ми обмежимося поясненнями, поданими в енциклопедичних виданнях (24; 37; 50) та найголовніших монографіях з історії і основ математики (18; 22; 54).

Апорії Зенона Елейського (бл. 490 — бл. 430 до н. е.).

Зенон Елейський, давньогрецький філософ доводив неможливість мислимої множинності речей та існування руху. Відомий своїми славнозвісними парадоксами, або апоріями (грецьк. αлоρία — тупик, безвихідне становище), які завдали багато турбот філософам, логікам і математикам. Усього Зенон Елейський сформулював 45 апорій, з них найвідоміші чотири, що розкривають суперечливість поняття руху: «Дихотомія», «Ахіллес», «Стріла», «Стадій».

1. Дихотомія (розтин навпіл). Тіло, яке рухається від точки A до точки B ($AB=1$), ніколи не досягне кінця шляху, оскільки воно має спочатку дійти до середини AB, потім до середини половини AB і так до нескінченності, тобто має пройти через нескінченну множину середин відрізків, довжина яких 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ..., $\frac{1}{2^n}$, ... A, тому воно й не зрушить з місця. Отже, рух неможливий, бо він не може розпочатися.

2. Ахіллес і черепаха. Прудконогий Ахіллес ніколи не дожене черепаху, якщо на початку руху черепаха перебуває на деякій відстані попереду від нього. Справді, нехай спочатку їх розділяє відстань $AB=1$, а Ахіллес біжить у 100 раз швидше за черепаху. Коли Ахіллес пробіжить відстань 1, черепаха проповзе відстань $\frac{1}{100}$; Ахіллес пробіжить $\frac{1}{100}$, черепаха проповзе $\frac{1}{100^2}$ і т. д., до нескінченності. Отже, скільки не продовжувалася б погоня, черепаха завжди буде на деякій відстані ($\frac{1}{100^n}$, де $n \in \boldsymbol{N}$) попереду Ахіллеса. Звідси випливає, що руху нема, бо коли б він розпочався, то ніколи б не закінчився.

3. Якщо простір і час уявляти утвореними із неподільних частинок, то стріла, яка летить, нерухома. Справді, в кожну неподільну далі мить (атом) часу стріла займає рівне собі положення, і в цю мить вістря її, наприклад, перебуває в якомусь атомі простору, де рух вже неможливий, бо атом простору далі неподільний. Але тоді весь шлях стріли складається із суми таких станів спокою. Оскільки в стані спокою стріла не рухається, то шлях, пройдений нею кожної миті, дорівнює 0, а отже, й весь шлях дорівнює $0+0+0+...=0$, тобто стріла нерухома.

4. Стадій (стадіон). Нехай на стадіоні тіла A_1, A_2, A_3 рівномірно рухаються вправо, а тіла B_1, B_2, B_3 — вліво. Уявимо, що всі тіла, далі неподільні, є атомами і що за один атом часу вони проходять один атом простору. Якщо на початку руху тіл, наприклад A_1 і B_1, вони знаходяться один від одного на відстані $2n+1$ $(N \in \boldsymbol{N})$ атомів простору, то їх зустріч відбудеться на середині шляху, через $\frac{1}{2}(2n+1)$ атомів часу, причому кожне з цих тіл пройде до зустрічі відстань $\frac{1}{2}(2n+1)$ атомів простору. Отже, коли уявити рух в дискретному просторі — часі, то приходимо до суперечності. Отже, рух неможливий.

Парадокси Евбуліда із Мілета (IV ст. до н. е.). Евбулід із Мілета, філософ-ідеаліст із мегарської школи, прагнув довести, що чуттєві сприймання реального світу — хибні і що взагалі пізнання неможливе, бо воно суперечливе. Для обгрунтування своїх ідей сформулював ряд софізмів і парадоксів, вульгаризуючи ідею Зенона Елейського.

5. Парадокс «Брехун».

Крітянин Епіменід сказав: «Усі крітяни — брехуни». Епіменід — сам крітянин. Отже, він брехун. Але якщо Епіменід — брехун, тоді його висловлення «Всі крітяни — брехуни» *хибне*. Звідси випливає, що крітяни не брехуни, отже, й Епіменід не брехун, і тому його висловлення «Всі крітяни — брехуни» *істинне*.

Яке ж насправді висловлення Епіменіда: істинне чи хибне?

6. Купа. Одне зерно купи не становить, додавши ще зернину, купи знову не матимемо. Як же дістати купу, додаючи кожного разу по одному зерну, з яких ні одне не становить купи?

7. Вкритий. «Чи знаєш ти цього вкритого чоловіка?» «Ні». «Але цей вкритий чоловік — твій батько; отже, ти не знаєш свого батька».

8. Софізм Еватла. Еватл брав уроки софістики у давньогрецького софіста Протагора (бл. 481—411 до н. е.) з тією умовою, що гонорар він сплатить тільки в тому випадку, коли виграє свій перший судовий процес. Але після навчання Еватл не взявся вести жодного судового процесу і тому вважав, що може не платити гонорару Протагорові. Вчитель, погрожуючи подати на Еватла в суд, сказав:

— Незалежно від того, присудять судді платити мені гонорар чи не присудять, ти його обов'язково сплатиш. У першому випадку ти сплатиш за вироком суду, в другому — за нашою домовленістю.

На це Еватл, навчений Протагором мистецтву софістики, відповів:

— Ні в тому, ні в іншому випадку гонорару я не буду платити. Якщо мені присудять платити, то я не заплачу відповідно до нашої домовленості, бо програю свій перший судовий процес, у другому випадку я не платитиму відповідно до вироку суду.

Парадокси теорії множин.

В 70-х роках XIX ст. визначний німецький математик Георг Кантор (1845—1918) розробив нову математичну дисципліну — теорію множин, створення якої стало революційним переворотом у математиці і філософії. Теорія множин збагатила математику новими, надзвичайно важливими відкриттями і мала стати теоретичною основою всієї математики. Але саме тоді, коли після періоду невизнання теорія множин святкувала перемогу, в ній були відкриті парадокси (антиномії). Вони справили приголомшливе враження на вчених, оскільки показували, що теорія, яка мала бути логічним фундаментом математики, сама логічно суперечлива. Парадокси теорії множин зумовили третю кризу методологічних основ математики, з якої вона остаточно не вийшла й до цього часу.

Перший парадокс відкрив сам Кантор близько 1895 року, через два роки його знову відкрив італійський математик Ч. Буралі-Форті (1861—1931), після чого цей парадокс став відомий математикам. У 1899 році Кантор відкрив другий парадокс, а потім вони посипалися як з рогу достатку, викликаючи замішання й паніку у математиків. Особливо сильне враження на вчених справив блискучий за формою і надзвичайно потужний за руйнівною силою парадокс англійського математика, логіка і філософа Бертрана Рассела (1872—1970).

Багато парадоксів побудовано на матеріалі спеціальних розділів теорії множин. Ми наведемо кілька найпростіших з них, розуміння яких не вимагає вивчення додаткових розділів математики.

9. Парадокс Г. Кантора (1895 р.). Для скінченних і нескінченних множин справедливою є така теорема. Множина M_1 усіх підмножин даної множини M має потужність, більшу за потужність множини M. Нехай тепер A є множина всіх можливих множин і A_1 — множина всіх підмножин множини A. Тоді A_1 є підмножиною A, оскільки A — множина всіх множин, а тому потужність A_1 не більша за потужність A. Крім того, згідно з наведеною вище теоремою Кантора, потужність A_1 більша за потужність A. І ми прийшли до суперечності.

10. Парадокс Рассела (відкритий в 1902 р., опублікований в 1903 р.). Для довільної даної множини цілком осмислено постає питання про те, чи є ця множина своїм власним елементом. Наприклад, множина абстрактних понять є також абстрактним поняттям, множина текстів є також текстом. Але більшість множин не є своїм власним елементом. Наприклад, множина зірок не є зіркою, множина корів не буде коровою, множина олівців не буде олівцем і т. д. Розіб'ємо тепер усі множини на два класи: до першого (M_1) віднесемо ті множини, які включають себе як власний елемент; до другого (M_2) — які не є власними елементами. Розглянемо тепер множину M_2^* всіх множин типу M_2. Припустимо, що $M_2^* \notin M_2$, але тоді негайно маємо, що $M_2^* \in M_2$, а з припущення $M_2^* \in M_2$, в свою чергу, випливає, що $M_2^* \notin M_2$.

Дістали приголомшливий результат. Виявляється, що $M_2^* \in M_2 \Leftrightarrow M_2^* \notin M_2$. Ми потрапили в логічну пастку.

Пізніше Б. Рассел популяризував свій парадокс на прикладі сільського цирульника. Єдиний цирульник села A дістав суворий наказ, що він має голити всіх тих чоловіків села, які не голяться самі, і тільки їх. Чи може цирульник голити себе?

11. Парадокс Рішара (1905). Візьмемо якусь мову, наприклад українську, засобами якої можна описувати і визначати всі арифметичні властивості натуральних чисел, і розглянемо означення, які можна сформулювати українською мовою. Кожне таке означення складається лише із скінченного числа слів, а отже, і з скінченної кількості букв алфавіту. Тому для словесних означень можна ввести відношення порядку, вважаючи одне відношення таким, що передує іншому, якщо число букв, якими записано перше означення, менше за число букв, якими записано друге означення; якщо два означення записані однаковою кількістю букв, одне з них вважатимемо таким, що передує другому в звичайному (алфавітному) порядку.

Упорядкуємо тепер всі розглядувані означення в прийнятому нами порядку у вигляді послідовності. Тоді якесь найкоротше означення дістане номер 1, наступне за ним 2, потім 3 і т. д. Оскільки з кожним означенням зіставляється деяке натуральне число — його номер, то може трапитися, що в деяких випадках число (номер означення) саме має ту властивість, яка означується відповідним означенням. Нехай, наприклад, означення простого числа дістало номер 17, яке саме є простим числом, тобто номер означення має властивість, яка описується відповідним означенням. І нехай, наприклад, означення точного квадрата дістало номер 21, а це число саме не є точним квадратом.

Назвемо число n_i ($n_i \in N$) рішаровим, якщо n_i не має властивості, сформульованої в означенні з номером

n_i в нашій алфавітній нумерації означень. Число 17 з першого прикладу не є рішаровим, а число 21 з другого прикладу — рішарове. Але саме означення рішарового числа є формулюванням певної властивості натуральних чисел, тому буде записане в нашій послідовності означень і дістане якийсь номер, наприклад число n_j.

Парадокс Рішара виникає, як тільки ми захочемо відповісти на цілком природне питання: чи є число n_j рішаровим? Спробуйте відповісти на нього і переконаєтеся, що потрапили в пастку.

12. Парадокс Греллінга (1908 р.). Деякі українські прикметники, наприклад «український» і «багатоскладове», мають ту ж властивість, яку вони називають: прикметник «український» — сам український, а слово «багатоскладове» — саме багатоскладове. Більшість же прикметників (наприклад, «французький», «солодкий», «колючий», «холодний») не мають самі властивостей, які вони називають. Назвемо прикметники другого ряду гетерологічними. Парадокс виникає відразу, як тільки ми захочемо довідатися, чи буде гетерологічним прикметник «гетерологічний»: «гетерологічний» буде гетерологічним тоді і тільки тоді, коли «гетерологічний» не є «гетерологічним».

ІНШІ СОФІЗМИ І ПАРАДОКСИ

Однажды начал он при мне излагать свои любимые парадоксы.

О. С. ПУШКІН

13. «Крокодилів» парадокс. Коли крокодил викрав у матері дитину і та просила, щоб він віддав її, крокодил обіцяв виконати прохання, якщо жінка скаже правду.

— Але ж ти не повернеш мені дитину,— не повірила мати.

— Отже, я не повинен повертати тобі твою дитину,— відповів їй крокодил.— Якщо ти сказала правду, то я не повинен повертати її тобі відповідно до твоїх слів, бо вийде, що ти сказала неправду. Якщо ж ти сказала неправду, то я теж не повинен повертати тобі дитину, бо, сказавши неправду, ти не виконала нашої домовленості.

14. Давньокитайські літературні джерела розповідають, що один мудрець, щоб переїхати на своєму білому коні через кордон, який переходити з кіньми заборонялося, застосував у розмові з прикордонником такі міркування:

Кінь може бути рудим. Білий кінь не може бути рудим. Отже, білий кінь не є конем.

Прикордонник був так вражений правдоподібністю цього умовиводу, що пропустив хитрого мудреця через кордон.

Де схитрував мудрець?

15. Із «Дон-Кіхота» М. Сервантеса. Серед справ, які, будучи губернатором острова Бараторія, вирішував Санчо Панса, одна має пряме відношення до нашої теми.

«— Сеньйор! — звернувся до Санчо один із відвідувачів,— деяке помістя ділиться на дві частини багатоводною річкою. (Прошу вашу милість вислухати мене з увагою, тому що ця справа важлива і досить складна). Так ось, через цю річку перекинуто міст, і тут же з краю стоїть шибениця і знаходиться щось на зразок суду, в якому звичайно засідають четверо суддів, і судять вони на основі закону, виданого власником річки, мосту і всього помістя, причому цей закон складено таким чином: «Кожний, хто проходить по мосту через цю річку, зобов'язаний сказати під присягою, куди і чого він іде, і хто скаже правду, тих пропускати, а хто збреше, тих без всякої поблажливості відправляти на шибеницю, яка знаходиться тут же, і страчувати». З того часу, коли цей закон у всій своїй суворості було оголошено, багато хто встиг пройти через міст, бо тільки-но переконувалися, що перехожі кажуть правду, то пропускали їх. І ось якось один чоловік, приведений до присяги, поклявся і сказав: він клянеться, що прийшов, аби його повісили на цій самій шибениці, і ні за чим іншим. Клятва ця збентежила суддів, і вони сказали: «Якщо дозволити цьому чоловікові без перешкод слідувати далі, то це означатиме, що він порушив клятву і відповідно до закону заслуговує смерті; якщо ж ми його повісимо, то він же клявся, що прийшов тільки за тим, щоб його повісили на цій шибениці, тому клятва його виходить нехибна, і на основі того ж самого закону його належить відпустити».

І ось, я вас запитую, сеньйор губернатор: що робити суддям з цим чоловіком? Вони до цього часу дивуються і вагаються. Начувшись же про благородний і гострий розум вашої милості, вони послали мене, щоб я від їхнього імені звернувся до вас з проханням висловити свою думку з приводу цієї заплутаної і незрозумілої справи.

Санчо йому на це відповів так:

— Слово честі, пани судді сміливо могли не посилати тебе до мене, бо я людина скоріше тупа, ніж гостра, одначе ж при всьому тому виклади мені ще раз цю справу, щоб я схопив її суть: дивись і попаду в ціль.

Прохач розповів все з самого початку, і тоді Санчо виголосив своє рішення.

— Я, думається мені, розв'язав би цю справу відразу, а саме: згадуваний чоловік клянеться, що прийшов, аби його повісили, якщо ж його повісять, то, виходить, клятва його не хибна, і за законом його належить пропустити на той берег, а коли не повісити, то виходить, що він збрехав, і за тим же самим законом його належить повісити.

— Сеньйор губернатор розсудив вельми розумно,— зауважив посланець,— краще зрозуміти і повніше охопити цю справу просто немислимо, і в цьому нема ніякого сумніву.

— Так ось я й кажу,— продовжував Санчо,— ту половину чоловіка, яка сказала правду, нехай пропустять, а ту, яка збрехала, нехай повісять, і, таким чином, правило переходу через міст буде виконано по всій формі.

— В такому випадку, сеньйор губернатор,— заперечив посланець,— доведеться розрізати чоловіка на дві частини: на правдиву і на брехливу, якщо ж його розрізати, то він неодмінно умре, і тоді ні та, ні друга стаття закону не будуть виконані, між тим закон вимагає, щоб його дотримувались у всій повноті». (Мигель де Сервантес Сааведра. Хитроумний идальго Дон-Кихот Ламанчский. М., 1963, ч. II, с. 436—437).

Санчо Панса прийшов до висновку, що у перехожого стільки ж шансів, щоб умерти, скільки й для того, щоб лишитися в живих, звідси випливає, що є однакові підстави, щоб його засудити і виправдати. Але оскільки робити добро завжди правильніше, ніж зло, то він запропонував відпустити дивака. А що запропонуєте ви?

16. Туристи мали вийти на маршрут. Тренер оголосив, що вони вийдуть в один із днів наступного тижня, але за неодмінної умови, що учасники походу довідаються про це тільки вранці в день виходу. Тренер був педантом і завжди вимагав неухильного виконання своїх вказівок. Один з туристів — любитель точної думки, поміркувавши, заявив, що в такому разі похід не може відбутися зовсім. Він сказав:

— Очевидно, що в наступну суботу ми не можемо вийти. Субота — останній день тижня, і в п'ятницю ми знали б напевне, що вийдемо в суботу. Таким чином, про день виходу стало б відомо до офіційного повідомлення в суботу вранці, тобто умову тренера було б порушено. Оскільки субота відпадає, то останнім днем початку походу лишається п'ятниця. Але й у п'ятницю ми не зможемо вирушити. Бо після четверга залишилися б тільки п'ятниця і субота. Субота не може бути днем виходу, то почати похід можна тільки в п'ятницю. Але про це стане відомо вже в четвер, тобто вимогу тренера знову буде порушено. Таким чином, п'ятниця теж відпадає. Тому останнім днем початку походу лишається четвер, але цей день теж не підходить, бо, не вирушивши в середу, ми знали б, що вирушаємо в четвер. Точно так виключаються середа, вівторок і понеділок. Лишається лише завтрашній день. Але завтра ми напевне не вирушимо, тому що ми знаємо про це вже сьогодні. Вимога тренера внутрішньо суперечлива. З одного боку, в двох її твердженнях, з яких вона складається, нема нічого логічно суперечливого, з другого — здійснити її неможливо.

17. Пряма теорема рівносильна теоремі, протилежній оберненій,— сказав X.— Якщо $A \Rightarrow B$ пряма теорема, то разом з нею справджується або не справджується теорема $\neg B \Rightarrow \neg A$.

— Що таке $\neg B$ і $\neg A$? — запитав Y.

— Так позначають заперечення висловлень B і A.

— Ти тільки кажеш, що теореми $A \Rightarrow B$ і $\neg B \Rightarrow \neg A$ рівносильні, чи можеш це й довести?

— Будь ласка. Припустимо, що теорема $A \Rightarrow B$ — правильна, а $\neg B \Rightarrow \neg A$ неправильна. Тоді правильна теорема $\neg B \Rightarrow A$. А з неї і з правильної прямої теореми випливає, що $\neg B \Rightarrow B$. Але ти ж розумієш, що так не буває! Тому теорема $\neg B \Rightarrow \neg A$ — правильна.

— У твоєму доведенні щось мені не подобається,— заперечив Y,— зате я можу довести, що з істинності прямої теореми випливає істинність оберненої.

— От цього точно не може бути,— енергійно заперечив X.

— Чому ж, ось слухай. Нехай теорема $A \Rightarrow B$ — правильна. Нам потрібно довести правильність теореми

$B \Rightarrow A$. Припустимо, що це не так. Тоді правильною буде теорема $B \Rightarrow \neg A$, ти сам це говорив. Але їй рівносильна теорема $A \Rightarrow \neg B$. Маємо, що правильні такі дві теореми: $A \Rightarrow B$ і $A \Rightarrow \neg B$, а це неможливо, тому теорема $B \Rightarrow A$ — правильна.

— Не розумію, де ти помиляєшся, але такого не може бути.

— Я міркував так, як і ти.

Чи правильне доведення X? Чи правильне доведення Y? Чи правильна остання заява Y?

18. Не викликає сумніву таке логічне правило: якщо з висловлення А випливає висловлення B, а з B випливає висловлення C, то з A випливає C.

Застосуємо це правило до речень: «Сократ — неспокійна людина» (A), «Сократ — людина» (B), «Я кажу правду» (C). Очевидно, що коли я стверджую, що Сократ — неспокійна людина, то тим самим я кажу, що Сократ — людина. Але коли я кажу, що Сократ — людина, то я, зрозуміло, кажу правду. Виходить, що коли я кажу, що Сократ — неспокійна людина, то я кажу правду. Де помилка?

19. Уряд Колумбії знизив курс перуанського долара, прирівнявши його до 90 колумбійських центів. Уряд Перу в свою чергу прирівняв 1 колумбійський долар до 90 перуанських центів.

На кордоні двох країн живе мірошник. Він іде в Перу, випиває там кухоль пива (ціною 10 центів), подає перуанський долар, і на здачу йому пропонують 90 перуанських центів або колумбійський долар. Він бере долар. Потім повертається в Колумбію, випиває кухоль пива, платить колумбійський долар і одержує на здачу перуанський долар (рівноцінний 90 колумбійським центам), і так скільки схоче. Хто платить за всі кухлі пива?

Кожна сторінка цієї книжки розкривала нові грані світу логіко-математичних несподіванок. Деякі з них швидко знімали маску і ставали добрими знайомими. Інші вперто пропонували нові сюрпризи. І все ж шеренга несподіванок, що пройшли перед вами,— лише невеликий острівець галактики софістично-парадоксальних конструкцій думки, автори яких — невтомні шукачі істини або випадкові мандрівники в логічних лабіринтах.

ЛОГІЧНІ ЗАДАЧІ

Для шукача істини немає нічого кращого за саму істину, і не потрібно нехтувати істиною і зверхньо дивитися на тих, хто висловив її або передав: істиною нікого не можна принизити — навпаки, істина облагороджує кожного.

АЛЬ-КІНДІ

20. Взяли шість аркушів паперу. Деякі з них розірвали на сім частин. Потім деякі з частин знову розірвали на сім частин. Після цього усіх клаптиків виявилося 67. Доведіть, що під час підрахунку допущено помилку.

21. У Змія Горинича 1000 голів. Богатир може відтяти за один раз 33, 21, 17 або 1 голову, але негайно відростають відповідно 40, 0, 14 або 10 голів. Якщо ж відтяти всі голови, то нові голови вже не виростуть. Чи може богатир перемогти Змія Горинича?

22. У бідного лицаря було дві дуже правдиві дочки Ельза і Жанна. Навіть 1 квітня вони говорили правду. Тільки в день народження сестри могли сказати неправду, і то лише тоді, коли у них запитували про день народження. 6 квітня 1442 року якийсь подорожній запитав про день їхнього народження. Ельза відповіла: «Він був учора», Жанна сказала: «Він буде завтра». Наступного дня подорожній повторив своє запитання. Ельза знову відповіла: «Він був учора», Жанна мовила: «Він буде завтра». Коли ж у Ельзи і Жанни був день народження?

23. *Задача-диверсія.* Під час другої світової війни група англійських математиків запропонувала скинути на територію фашистської Німеччини листівки з текстом такої задачі: «На столі лежать 10 гаманців. У кожному з них 10 однакових монет. У дев'яти гаманцях монети справжні (масою по 10 г кожна), а в одному гаманці всі монети фальшиві (масою по 11 г кожна). Як за допомогою терезів і набору важків визначити лише одним зважуванням гаманець із фальшивими монетами?»

На розв'язування цієї задачі співробітники одного англійського науково-дослідного центру витратили понад 10 000 годин, чим, за підрахунками керівника центру, завдали значних збитків воєнному потенціалу Англії. Тому, очевидно, скоріше жартома, ніж всерйоз, англійські математики й запропонували нанести таких же збитків задачею-диверсією своєму противникові. Задача складна і водночас елементарна. Сподіваємося, що ви розв'яжете її швидше, ніж англійські математики.

24. *Жертва «товстої Берти».* В першу світову війну німці обстрілювали Париж з велетенської гармати, яку французи прозвали «товстою Бертою». Ефект бомбардувань був невеликий. Інколи доходило до курйозів. Якось в останній день одного з місяців війни снаряди впали на старовинне кладовище. Все обійшлось. Снаряди зруйнували лише гробницю якогось воїна часів Відродження, прикрашену статуєю воїна з мечем, виконану в натуральну величину. Одна з вечірніх паризьких газет відгукнулась на цю подію логічною задачею, яка викликала справжню сенсацію. Ось її умова. Якщо помножити число місяця, коли це трапилося, на довжину (в ліктях) списа, який був в руці статуї, потім результат помножити на половину віку похованого воїна, а новий результат — на половину років від смерті воїна до часу, коли в його гробницю влетів снаряд товстої Берти, то буде 451 066.

Скільки років прожив воїн і в якому році його поховано?

25. *Задача Льюїса Керролла.* Як тільки король дізнався, що його казна майже порожня і гроші, які лишилися, доведеться витрачати економно, він відразу ж вирішив прогнати як можна більше своїх радників-мудреців. Їх у короля було дуже багато. Всі мудреці мали вельми імпозантну зовнішність, благородні сивини і носили розкішні мантії із зеленого оксамиту з золотими гудзиками. Єдине, що можна було б поставити їм у провину,— це суперечливість порад, які вони давали королю з будь-яких питань, і надмірну пристрасть до їди і питва з королівського столу (апетит у всіх мудреців був чудовий!).

Але за давнім законом, порушити якого не міг ні один король, при дворі завжди мало бути стільки мудреців, щоб серед них неодмінно знайшлися: сім сліпих на двоє очей, два сліпих на одне око, п'ять зрячих на обоє очей, дев'ять зрячих на одне око.

Скільки мудреців довелося королю залишити при дворі, щоб не порушити давнього закону?

26. *Задача Льюїса Керролла.* Одному чоловікові дуже хотілося потрапити до театру. Квиток коштував 1 шилінг 6 пенсів, а грошей в цього чоловіка було лише 1 шилінг (1 шилінг становить 12 пенсів). Подумавши, чоловік вирішив закласти свій шилінг у лихваря.

Лихвар уважно оглянув монету і, переконавшись, що вона не фальшива, дав чоловікові під заклад 8 пенсів. З 9 пенсами і квитанцією на 1 шилінг у кишені чоловік вийшов від лихваря і зустрів на вулиці приятеля, якому запропонував купити квитанцію за 9 пенсів. Тепер у чоловіка було 9 пенсів від лихваря і 9 пенсів від продажу квитанції. Цієї суми саме вистачило, щоб купити квиток у театр. Питається, хто і скільки втратив внаслідок усіх операцій?

27. Добрий чоловік порадив Іллі Муромцю: «Вирушиш в дорогу — дістанешся до розвилки доріг. Поїдеш однією з доріг — коня загубиш, другою — сам загинеш». Вирішив Ілля пожертвувати конем, але, діставшись до роздоріжжя, задумався: яка із доріг чим загрожує? Аж бачить на стовпчику написано: «Якщо хочеш дізнатися, якою дорогою тобі їхати, постав зустрічному мандрівникові одне запитання, на яке ти почуєш відповідь «так» або «ні». Але знай, що мандрівник може бути чоловіком, який завжди говорить тільки правду або тільки неправду. Зумієш поставити правильне запитання, із відповіді мандрівника довідаєшся, що на якій дорозі тебе чекає». Озирнувся Ілля, а біля роздоріжжя стоїть дідусь-мандрівник. Яке запитання Ілля йому поставив?

28. Кожум'яку мали покарати за те, що, розсердившись, він подер багато шкір, які виробляв для багатія. Суддя був аматором логіки і вважав, що у всьому винуваті ті, хто розсердив Кожум'яку. Щоб виручити доброго молодця, запропонував йому таку задачу: «Перед тобою двоє дверей, одні ведуть на волю, другі — в неволю. Біля кожних стоїть охоронець. Вони абсолютно схожі, але один говорить тільки правду, а другий — тільки неправду. Постав лише одне запитання будь-якому охоронцеві і за його відповіддю знайди двері, які ведуть на волю. Знайдеш — будеш вільний, не знайдеш — бути біді». Кожум'яка знайшов, які двері вели на волю, і був звільнений. Яке запитання він поставив охоронцеві?

29. Логік потрапив на острів, на якому жили два племені — правдолюби і брехуни. Перші говорили тільки правду, а другі — тільки неправду.

Опинившись на роздоріжжі, логік запитав у зустрічного остров'янина, яка з двох доріг веде в село. Логіку не було відомо, з представником якого племені він розмовляє. Все ж він поставив лише одне запитання, з відповіді на яке точно довідався, якою дорогою потрібно йти, щоб потрапити в село. Яке запитання він поставив?

30. Логік опинився на острові, заселеному трьома племенами. Люди одного племені говорили завжди правду, другого — тільки неправду, а третього — чергували у відповідях правду з неправдою. Зустрівши остров'янина, логік поставив перед ним два запитання, які вимагали точних відповідей («так» або «ні»), і тут же дізнався, з представником якого племені він розмовляв. Які питання поставив логік?

31. На острові Трисільському було всього три села: Правдиве, Напівправдиве і Неправдиве. Зрозуміло, що жителі першого села завжди говорили правду, другого — чергували у відповідях правду з неправдою (перша відповідь мешканця цього села могла бути як правдою, так і неправдою), жителі Неправдивого завжди говорили неправду.

Логік зустрів відразу п'ятьох остров'ян: Косого, Бороду, Кирпаня, Аваса і Довговуха. Бажаючи довідатися, хто з них з якого села, логік попросив перших двох розповісти йому по порядку, хто з якого села родом. Косий відповів, що Борода — напівправдивець, Кирпань — правдивець, Авас — напівправдивець, а Довговух — неправдивець; Борода відповів, що Косий — напівправдивець, Кирпань — неправдивець, Авас — правдивець, Довговух — напівправдивець. З цих відповідей логік встановив, хто з п'яти остров'ян з якого села. Як він міркував?

32. Стомившись від суперечок і літньої спеки, три давньогрецьких мудреці прилягли спочити і заснули. Поки вони спали, хтось із перехожих вимазав сажею їхні лоби. Прокинувшись і подивившись один на одного, мудреці розвеселились і почали сміятися, бо кожному здавалось, що двоє інших сміються один над одним. Нараз один з мудреців перестав сміятися: він здогадався, що його власний лоб також вимазаний. Як він міркував?

33. Засперечалися три мудреці: хто з них мудріший? Випадковий подорожній поклав край суперечці, запропонувавши їм таку логічну задачу:

— Ось у мене п'ять капелюхів: три чорних і два білих. Закривайте очі!

Потім він надів на голову кожному мудрецеві чорний капелюх, а два білі заховав у мішок

— Відкривайте очі,— сказав подорожній.— Хто відгадає, якого кольору капелюх на його голові, той може вважати себе наймудрішим.

Довго сиділи мудреці, дивлячись один на одного. Нарешті, один сказав:

— На мені чорний капелюх!

Як він здогадався?

34. Коли мудреці залишилися незадоволені таким вирішенням справи (див. попередню задачу), подорожній запропонував іншу задачу.

— Ось перед вами три однакові коробки. В одній з них лежать три чорні кульки, в другій — дві чорні і одна біла, а в третій — три білі. На коробках наклейки: «3 чорні», «2 чорні, 1 біла», «3 білі». Але жодний з ярликів не відповідає тому, що покладено в коробку, на яку він наклеєний. Я ставлю коробки так, що наклейки на них вам не видно. Нехай кожний з вас візьме з коробки по дві кульки. Прочитайте наклейку на коробці і, не заглядаючи в коробку, визначте колір кульки, яка там залишилася.

Один із мудреців вийняв дві кульки і, прочитавши напис на наклейці, сказав: «Я дістав дві чорні кульки і можу визначити, якого кольору кулька там лишилася». Другий, вийнявши дві кульки і прочитавши напис на своїй коробці, сказав: «Я дістав дві чорні кульки, але визначити, яка залишилася в коробці, не можу». Третій, слухаючи своїх товаришів, сказав: «Мені не потрібно виймати кульки. Я і так знаю колір кожної кульки, яка лежить в третій коробці». Як він міркував?

35. Ася повернулася із школи і розповідала дома, як вона одна в класі розв'язала логічну задачу.

— Спочатку учителька викликала до дошки Катю, Зіну і мене. Вона поставила нас одну за одною перед класом: мене попереду, за мною Зіну, за Зіною Катю, при цьому не дозволила нам обертатися. Потім учителька показала нам відкриту коробочку, в якій було 5 бантиків: 2 білих і 3 чорних. Один бантик учителька прикріпила до моїх кіс, другий — Зіні, а третій — Каті. Ні одна з нас не знала, який бант у кого на голові і які банти лишилися в коробці. Каті було найпростіше, бо вона бачила і мене і Зіну. Зіна бачила тільки мене, а я нікого не бачила. Тому вчителька запитала Катю, чи знає вона, який бант у неї на голові. Катя відповіла, що не знає. Зіна теж не знала. Тоді я шляхом логічних міркувань прийшла до правильної відповіді.

Ніхто не вірив, що це можна було зробити, і тоді Ася докладно розповіла, як вона міркувала. Як?

36. Логік пообіцяв своєму співрозмовникові, що продемонструє першого квітня неймовірні ситуації, коли правдолюби ніби поступаються своїми принципами і говорять речі, яким не хочеться вірити. Прогулюючись, співрозмовники зустріли знайомого і відомого правдолюба П. Логік задав йому два однакових запитання, на які дістав протилежні відповіді: «Ні» і «Так». Потім вони втрьох з П. зустріли Б., від якого й не першого квітня не почуєш правди. Але логік поставив правдолюбові і брехунові одне й те саме запитання, на яке вони обидва відповіли йому «Так». Потім він запитав їх ще раз те ж саме, й обоє відповіли «Ні». Які запитання ставив логік першого квітня?

37. Дуже здивував логік учнів — учасників гуртка юних логіків, коли підрахував, скільки днів на рік вони навчаються. Ось що в нього виходило.

На підготовку до сну, сон і підйом ви витрачаєте $\frac{2}{3}$ доби, тобто 146 днів. На все інше лишається 366— —146=220 днів. Сніданок, обід, вечеря забирають $\frac{5}{96}$ доби, що за рік дає 20 днів, після чого лишається 220—20=200 днів. Одну годину учні витрачають щодоби на читання цікавих книг, перегляд фільмів, телепередач, спектаклів. За рік це ще 15 неробочих днів. На дорогу до школи і відпочинок відпустимо 90 хвилин, що за рік становитиме 20 днів. Лишається 165. Коли вирахуємо 52 неділі та 21 день зимових та 84 дні літніх канікул, залишається 8 святкових днів. Після того коли і їх учні відгуляють, на навчання лишається 0 днів.

38. Астролог французького короля Людовіка XI (XV ст.) мав нещастя завбачити смерть однієї фаворитки короля. Коли вона справді померла, король звелів покликати астролога і наказав катам, як тільки він подасть знак, негайно вчинити криваву розправу над віщуном. До астролога, який з'явився на виклик, король звернувся зі словами: «Ти вважаєш себе настільки вправним, що знаєш дуже добре долю інших, скажи ж негайно, скільки залишилося тобі самому жити?»

Почувши відповідь астролога, король змінив гнів на милість: він не тільки відпустив астролога, а й наказав берегти дорогоцінне тепер життя віщуна.

Що відповів астролог королю?

39. Якось в одному середньовічному місті об'явився віщун, який за платню повідомляв майбутнім батькам, хто в них народиться — хлопчик чи дівчинка. Слава про віщуна швидко поширилася, і від клієнтів не було відбою. Віщун ніколи не помилявся, але — дивна річ — з часом нагромаджувалося все більше і більше відвідувачів, які неправильно розуміли віщуна і помилялися в своїх сподіваннях. Один з таких відвідувачів, схильний до логічних міркувань, скоро встановив, як віщун обдурював клієнтів. В чому полягав секрет віщуна?

40. Колись дуже давно в суді розглядалася справа про спадщину. Суддя звернувся до свідка, дев'яностолітнього дідуся.

— Скажіть, у вас є брати?

— Сто сорок років тому,— відповів дідусь,— у мене був брат.

— Як це так? — здивувався суддя.

— Дуже просто. У мене був брат, але сто сорок років тому він помер.

— Ви помиляєтесь. Ви, очевидно, не можете покладатися на вашу пам'ять,— сказав суддя.— Адже вам дев'яносто два роки.

— Ні, я нітрохи не помиляюся, і пам'ять у мене відмінна,— наполягав свідок.— Це ви не вмієте лічити і міркувати логічно,— єхидно зауважив дідусь.

— Утримуйтесь від подібних висловлень, інакше на вас буде накладено штраф за зневажливе ставлення до судді.

— Але ось доведення моєї правоти,— наполягав дідусь, показуючи папір про смерть свого брата і власну метрику.— Просто мій батько...

Що розповів дідусь?

41. Задача Джерома К. Джерома. Підійшов кондуктор одержати гроші за проїзд. Одна з дам простягла йому шестипенсову монету й сказала:

— До Пікаділлі-Серкус,— що коштувало два пенси.

— Ні,— озвалася друга.— Адже я вам винна шість пенсів. Ви дайте мені чотири пенси, і я заплачу за нас обох,— і вона подала кондукторові шилінг (шилінг дорівнює 12 пенсів).

Кондуктор взяв і цю монету, видав два двопенсових квитки й став міркувати, скільки він має дати здачі.

— Дуже добре,— промовила та дама, що дала йому шилінг.— Дайте моїй приятельці чотири пенси.

Кондуктор так і зробив.

— Тепер ви дайте ці чотири пенси мені.— Приятелька віддала.— А ви,— звернулась дама знову до кондуктора,— дайте мені вісім пенсів, і ми з вами розрахуємось.

Кондуктор недовірливо відлічив їй вісім пенсів — одну монету в шість пенсів, одержану від першої дами, та одне пенні і ще дві монетки по півпенні, які він дістав зі своєї сумки, і відійшов, забурмотівши собі під ніс, що він не арифмометр і не повинен уміти лічити з блискавичною швидкістю.

— Тепер,— обернулася старша дама до молодшої,— я винна вам шилінг.

Я думав, що епізод цим і вичерпається, аж раптом один червонолиций добродій, що сидів по другий бік проходу, заявив на весь голос:

— Кондукторе, ви недодали цим дамам чотири пенси!

— Хто це кому недодав чотири пенси? — обернувся кондуктор з горішньої сходинки.— Квиток коштує два пенси.

— Двічі по два пенси — це не вісім пенсів! — заперечив червонолиций добродій.— Скільки ви йому дали, пані? — звернувся він до першої дами.

— Шість пенсів,— відповіла дама, перевіривши свій гаманець.— А потім, пригадуєте, я дала ще чотири пенси вам,— додала вона, обертаючись до приятельки.

— Дорогенькі ж у вас вийшли квитки,— зауважив простакуватий на вигляд пасажир, що сидів ззаду.

— Та що ви, голубонько, хіба це могло бути?! — здивувалася друга дама.— Адже я з самого початку була винна вам шість пенсів.

— Але ж я вам дала чотири пенси! — наполягала перша.

— Ви дали мені шилінг,— сказав кондуктор, підійшовши ближче і осудливо позираючи на старшу даму. Та кивнула головою.— А я вам дав одну монету в шість пенсів і дві по пенсу, так?

Дама підтвердила.

— А їй,— кондуктор показав на другу даму,— я дав чотири пенси. Правильно?

— І ці чотири пенси, пригадуєте, я віддала вам,— підхопила молодша дама, звертаючись до старшої.

— Стривайте, так тоді виходить, що я віддав зайвих чотири пенси! — зняв крик кондуктор.

У цю хвилину знову втрутився червонолиций добродій:

— Але ж друга дама ще раніше заплатила вам шість пенсів.

— А я їх віддав їй.— І кондуктор удруге тицьнув пальцем на старшу даму.— Нема в мене цих клятих шести пенсів! Дивіться ось у сумку, як хочете! Жодного шестипенсовика нема!

На цей час уже ніхто не міг пригадати, як усе відбулося насправді, кожний кричав щось своє і суперечив сам собі та іншим». (З оповідання «Людина, що прагнула керувати».— Див.: Джером К. Джером. Троє в одному човні (як не рахувати собаки). К., 1974, с. 215—217.)

Хто ж міркував правильно, а хто помилявся в цій суперечці?

ВІДПОВІДІ, РОЗВ'ЯЗАННЯ, КОМЕНТАРІ

Розуміння причин, від яких все походить, означає набагато більше, ніж просте знання факту...

Г. ГАЛІЛЕЙ

1, 2. З великої літератури, присвяченої апоріям Зенона Елейського, ми використаємо насамперед фундаментальні видання: «Историю математики» (18, т. 1), «Математическую энциклопедию» (37, т. 1), «Философскую энциклопедию» (50, т. 1, 2) і «Логический словарь-справочник» Н. И. Кондакова (24).

Математична модель неперервного руху легко розв'язує обидва парадокси. Сума нескінченного ряду

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)=AB.$$

Суттєву роль при цьому відіграють аксіоми додатних скалярних величин: 1) Які б не були величини a і натуральне число n, існує така величина b, що $nb=a$ (можливість необмеженого ділення) і 2) Для будь-яких величин a та b існує таке $n\in N$, що $a<nb$ (аксіома Евдокса — Архімеда). Ця аксіома дає змогу за допомогою будь-якої малої одиниці вимірювання виразити будь-яке велике значення величини або вимірювати великі проміжки відстані, часу, площі, об'єми і т. д. (37, т. 1, с. 652).

І все ж математична модель неперервного руху не вичерпує проблеми, поставленої Зеноном. Німецький математик Г. Вейль (1885—1955), щоб пояснити, в чому суть дихотомії, наводив такий приклад. Уявимо обчислювальну машину, яка виконує першу операцію за $\frac{1}{2}$ хв, другу — за $\frac{1}{2^2}$ хв, третю — за $\frac{1}{2^3}$ хв і т. д. Така машина могла б до кінця першої хвилини «перелічити» всі числа натурального ряду, тобто задати набором усіх своїх елементів (актуально) нескінченну множину N. Цим самим вводиться поняття актуальної нескінченності, тому що N постає вже побудованою, завершеною. Тоді логічно ввести нові, трансфінітні числа, які ідуть за натуральними. Перше ω — безпосередньо йде за всіма натуральними числами, за ним $\omega+1$, $\omega+2$ і т. д. Саме так міркував Г. Кантор. Але побудована ним теорія множин не усувала парадоксів, пов'язаних з актуальною нескінченністю, вони виникли в формі антиномій теорії множин (див. № 1—4).

Дихотомія показує, як важко пояснити рух в логіці понять, якщо вважати простір і час нескінченно подільними (неперервними). Справді, щоб подолати шлях $AB=1$, потрібно пройти кожний з актуально нескінченної множини відрізків $\ldots+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}$ без першого елемента. Якого ж фізичного смислу можна надати цьому першому елементу? З одного боку, він повинен мати протяжність, бо становить якусь частину AB, а з другого — дорівнювати нулю, бо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

В дихотомії нескінченна, актуально задана множина відрізків не мала першого відрізка ($\frac{1}{2^n}$, коли $n\to\infty$), з якого мав розпочинатися рух, у парадоксі про Ахіллеса й черепаху нема останнього відрізка, на якому рух має закінчуватися. Адже скільки не триває погоня в нескінченно подільному просторі і часі, черепаха завжди на деякій відстані попереду Ахіллеса. Друга апорія акцентує увагу ще на одній парадоксальній властивості нескінченних множин. Припустимо, що в деякий момент t_ω Ахіллес дожене черепаху. Запишемо шлях, який пройдуть до t_ω Ахіллес (S_A) і черепаха ($S_ч$): $S_A=1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots$; $S_ч=\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3}+\ldots$. Кожному відрізку $\frac{1}{100^k}$ шляху Ахіллеса, відповідає відрізок $\frac{1}{100^{k+1}}$ шляху черепахи. Якщо позначити кількість відрізків, пройдених черепахою до моменту t_ω через α, то, з одного боку, S_A і $S_ч$ складаються з «однакової» кількості відрізків, бо між ними можна встановити взаємно-однозначну відповідність $\frac{1}{100^k} \leftrightarrow \frac{1}{100^{k+1}}$, а з другого — $\alpha+1=\alpha$, бо Ахіллес пробігає за той самий час на один відрізок більше, ніж черепаха. Отже, $S_ч \subset S_A$ і $S_ч \sim S_A$. Це суперечило очевидному факту, який набув статусу незаперечної наукової істини у формі восьмої аксіоми «Начал» Евкліда: «І ціле більше частини». Коли ж припустити, що Ахіллес дожене черепаху, то звідси випливає висновок, який суперечить цій аксіомі,— частина дорівнює цілому. Пізніше Галілео Галілей відкрив також інші приклади, які демонстрували цей неприємний факт. Над ним багато думали, прагнули знайти різні тлумачення. Тільки в кінці XIX ст. вчені відкрили, що це парадоксальне відношення справджується для всіх нескінченних множин і є характеристичною властивістю таких множин. Тому саме на основі цієї властивості можна дати строго наукове означення нескінченної множини: множина M називається нескінченною, якщо з неї можна виділити принаймні одну власну її підмножину M_1 (тобто $M_1 \subset M$), еквівалентну всій множині M ($M_1 \sim M$).

3, 4. Стріла і стадіон розкривають труднощі, пов'язані з описуванням руху, який відбувається в дискретному просторі — часі. Стріла показує суперечливість уявлень про те, що неперервну величину (в нашому прикладі — відстань) можна розглядати як суму нескінченного числа якихось надзвичайно малих, але неподільних далі частинок. Учені епохи Зенона вважали, що така сума неодмінно буде нескінченно великою.

Чотири знамениті апорії Зенона дійшли до нас у викладі Арістотеля, вони розглядаються в шостому розділі шостої книги «Фізики» цього визначного філософа античного світу (3, т. 3, с. 192—194). Полемізуючи з елеатом, Арістотель згадує про них і в багатьох місцях своїх праць. Зокрема, в трактаті «Про виникнення і знищення» він писав: «В міркуваннях це, очевидно, виходить складно, одначе на ділі подібні погляди близькі до божевілля» (3, т. 3, с. 408). Потім апорії породили величезну літературу. Відомий американський історик математики Д. Я. Стройк справедливо зауважив, що апорії Зенона «створили сенсацію, залишки якої можна спостерігати й сьогодні» (Д. С т р о й к. Коротка історія математики. К., 1960, с. 37).

Радянський філософ академік АН Ест. РСР Г. Й. Наан писав про апорії Зенона: «Уважний аналіз показує, що на кожному даному рівні знань Зенона дійсно можна спростувати «на 99 процентів», лишається «тільки» один процент. Але потім з'ясовується, що в цьому одному проценті вся сіль, зародок нових труднощів, нових суперечностей і нового знання. Не дивно тому, що й тепер, через двадцять чотири століття, аналіз парадоксів продовжується...

Можливо, що людство взагалі ніколи не зуміє спростувати елеата «на всі 100» процентів: нескінченність невичерпна, а Зенон, як нам здається, зумів схопити в наївній, але геніальній формі три «вічні» проблеми, тісно пов'язані між собою і проблемою нескінченності: проблему *ніщо,* проблему *неперервності* і проблему *існування»* (39, с. 10).

Глибокий аналіз апорій Зенона дав В. І. Ленін. Конспектуючи «Лекції з історії філософії» Гегеля, В. І. Ленін зазначив: «Це можна і треба *о б е р н у т и:* питання не про те, чи є рух, а про те, як його виразити в логіці понять» (2, т. 29, с. 213).

Зрозуміло, що математичні моделі неперервного руху є тільки наближеними моделями таких надзвичайно складних фізичних явищ, якими є різні рухи. Математичні (як і інші) моделі відокремлюють і абсолютизують певні з нескінченної сукупності характеристик рухів. Аналізуючи апорії Зенона, В. І. Ленін висловив свій геніальний афоризм про неминучість, продуктивність і обмеженість спрощень, схематизації досліджуваних явищ: «Ми не можемо уявити, виразити, виміряти, зобразити рухи, не перервавши неперервне, не спростивши, огрубивши, не поділивши, не омертвивши живе. Зображення руху думкою є завжди огрублення, омертвлення,— і не тільки думкою, а й відчуттям, і не тільки руху, а й **всякого** поняття» (2, т. 29, с. 216).

Легко знайти тривіальні приклади характеристик кожного конкретного виду фізичного руху, які залишаються поза його математичною моделлю. Зенон підмітив такі глибинні і загальні характеристики широкого класу рухів, які залежать від фундаментальних властивостей простору — часу, його топологічної структури в масштабах мікросвіту. Саме тому його геніальні творіння безсмертні.

Визначний радянський математик і філософ С. О. Яновська (1896—1966) свою статтю з характерною назвою «Чи подолані в сучасній науці труднощі, відомі під назвою «Апорії Зенона»?» (на думку автора статті, труднощі лишаються) закінчує такими словами: «Повертаючись до класичної механіки, потрібно зауважити ще, що заперечення супротивників діалектики, які стверджують, ніби рух є знаходження тіла в дану мить в даному місці, в другу мить — в другому місці, обходить саму суть справи, в тому числі й правомірність тих припущень про «точки» і «миттєвості», на яких воно засноване. А проте явна оцінка правомірності ідеалізованих припущень, які дозволяють, з одного боку, заперечувати реальне існування непротяжних «точок» і «миттєвостей», а з другого — ототожнювати ті або інші реальні, протяжні в часі події з «миттєвостями», ті або інші «матеріальні тіла» (на зразок планет і Сонця в космографії) з «точками», з'ясування меж цієї правомірності (меж різних в різних умовах) набуває особливого значення в зв'язку з розвитком сучасних (особливо ядерних) фізики і техніки. Доводиться таким чином, на безмірно вищому рівні розвитку науки повертатися знову до проблем, пов'язаних з апоріями Зенона» (54, с. 234).

(Детальніше про апорії Зенона див.: 7, с. 173—220; 18, т. 1, с. 87—93; 37, т. 1, с. 292—293, 54, т. 2, с. 169—174; 54, с. 214—235).

У сучасній фізиці говорять вже про вимірювання простору — часу. «...Коли досягнуто межі нашої здатності ділити відрізок інтервалу, що лишився, на частини й визначати раціональне десяткове число, ми все ж таки припускаємо, що *в принципі* можливо винайти більш чутливий інструмент, щоб ділити інтервал, який лишився, на дрібніші частини, потім ще чутливіший прилад і т. д. до нескінченності. Вважають, що довжини просторових інтервалів, які вимірюються завжди з допомогою *скінченного* числа етапів, ми можемо вимірювати з допомогою нескінченної кількості кроків доти, поки решта інтервалу не стане «нескінченно малою». Де ж ми робимо таке припущення? Воно робиться відразу, коли результати наших вимірювань починають використовуватися як числові значення в формулах диференціального та інтегрального числення. Числення нескінченно малих — це саме та математична модель, в якій реалізується припущення, щойно нами зроблене.

Таким чином, у фізиці вважають, що простір — час є неперервний континуальний об'єкт. Вважається логічно можливим, що можна розглядати як завгодно малі інтервали в просторі — часі (навіть нескінченно малі).

Проте ми повинні пам'ятати, що немає ніякої причини, яка б змусила нас розглядати нескінченно малі інтервали, крім тієї, що математично описувати неперервний континуум простіше. Досі не побудовано послідовної фізичної теорії, яка брала б до уваги дискретність структури простору — часу» (Акоста В., Кован К., Грэм Б. Основы современной физики. М., 1981, с. 14—15).

Радянський логік А. С. Ахманов, аналізуючи апорії Зенона, писав: «Логічний інтерес цих парадоксів полягає в тому, що в їх основі, як і в основі всіх багатьох інших парадоксів, лежить спроба осмислити новий факт в категоріях і поняттях, що відбивають старий досвід і старі факти. Тому нове осмислюється в поняттях, недостатніх або навіть... чужих новому досвіду і новим фактам.

Така властивість наших понять, що вони завжди відбивають якийсь певний і обмежений досвід і тому нездатні до нескінченного розширення. Спроба поширити їх застосування за межі того досвіду, який вони відбивають, часто виявляється причиною того, що новий досвід осмислюється в чужорідних йому категоріях, і це породжує парадокси, які можна усунути в тому випадку, якщо будуть знайдені нові поняття, що відбивають новий досвід» (Ахманов А. С. Логическое учение Аристотеля. М., 1960, с. 22).

Апорії Зенона знайшли широке відображення в художній літературі. Л. М. Толстой розпочинає третю частину третього тому «Війни і миру» роздумами про проблеми, поставлені давньогрецьким філософом, і шляхи їх розв'язання засобами вищої математики (див.: Квант, 1978, № 10, с. 3).

5. Парадокс Епіменіда, відомий також як парадокс «Брехун», зустрічається і в сильнішій формі, коли дехто говорить, що «висловлення, яке я тепер виголошую, хибне». Цей парадокс приписують Евбуліду. Аналіз Евбулідового «Брехуна» стимулював у середні віки авторів логічних трактатів про нерозв'язуванні висловлення. Антиномії цього типу відіграють велику роль у сучасній математичній логіці і теорії множин. Зокрема, ідея парадокса «Брехун» використана при доведенні знаменитої теореми К. Геделя про неповноту формалізованих теорій (40). Детальніше про нечіткі множини і операції над ними, а також про інші проблеми, пов'язані з обчисленням нечітких і частинних істин, див.: Заде Л. А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений.— В кн.: Математика сегодня. М.: Знание, 1974, с. 5—48. Стаття розрахована на читачів, які володіють вищою математикою.

6. Проблема виникає при спробі знайти відповідь на питання, коли «не купа» переходить в «купу», тобто чи існує фіксована кількість елементів, коли здійснюється названий перехід. Аналіз (50, т. 4, с. 208) показує, що в парадоксі наявне припущення про можливість використання математичної індукції від n до $n+1$. В математичній енциклопедії (37, т. 1, с. 293) пояснюється, що в парадоксі, по суті, використано повну математичну індукцію, що й приводить до суперечності, бо метод повної математичної індукції не можна застосувати до понять, обсяг яких нечітко визначений, а саме таким і є поняття «купи». В сучасній математиці такі поняття уже використовуються (див. коментар до попереднього прикладу), але при цьому властивості їх досліджуються точними методами, що позбавляє вчених від парадоксів. Крім того, в парадоксі ігнорується також об'єктивна закономірність будь-якого явища, в процесі перебігу якого кількісні зміни на певному етапі зумовлюють якісні зміни. При цьому нова якість (множини певних об'єктів, хоч би піску, бути «купою») зовсім не відгороджена від старої якості («не купи»).

7. М. І. Кондаков (24, с. 452) пояснює, що коли розглядати цей парадокс з погляду традиційної логіки, то він являє собою софізм, в якому є ніби двозначність дієслова «знати». Про вкриту людину не можна сказати, знаємо ми її чи не знаємо. Тому на питання потрібно відповідати так: «Оскільки ця людина вкрита, то мені невідомо, знаю я її чи не знаю». При такому підході софізм розв'язується легко.

Якщо розглядати внутрішній зміст парадокса, то розв'язання його становить значно складнішу задачу. Тільки німецький математик і логік Г. Фреге (1848—1925) зумів розв'язати цей парадокс за допомогою розробленої ним теорії опосередкованого використання імен предметів.

8. З погляду традиційної логіки софістичний висновок виник внаслідок порушення закону тотожності. Одну і ту ж домовленість Еватл розглядав у різних відношеннях. У першому випадку Еватл мав виступати на суді юристом, який програє свій перший судовий процес, у другому випадку — відповідачем, якого суд виправдав.

9. Відомий сучасний математик і логік С. К. Кліні писав про парадокси типу, відкритого в 1895 році Кантором: «Можна припустити, що у парадоксах (А) і (С) помилка полягає у використанні таких надто широких множин, як множина всіх множин або множина всіх кардинальних чисел, або в дозволі розглядати множини як елементи самих себе, що знову-таки служить запереченням проти множини всіх множин. Відкидати ці припущення не обов'язково, але тільки їх не можна вважати простими. Вони ставлять нас перед проблемою перебудови теорії множин на цілком зміненій основі, деталі якої містяться в ній хіба що як натяк. Наприклад, якщо ми заборонимо множину всіх кардинальних чисел, ми не зможемо розглядати множину всіх натуральних чисел, доки нам не стане відомо, що цими числами вичерпуються всі натуральні числа, і та ж сама трудність виникає на вищих ступенях. Якщо ми заборонимо множину всіх множин, то одержимо конфлікт з канторівським означенням множини. Щоб взагалі була теорія множин, потрібно мати теореми, істинні для всіх множин, а всі множини, за канторівським означенням, утворюють множину. Якщо це не так, то ми маємо вказати, яким означенням множини ми будемо користуватися замість (канторівського.— *А.К.*), або ж доповнити канторівське означення деяким дальшим критерієм, який встановлює, коли описана в його означенні сукупність об'єктів утворює множину» (22, с. 42—43).

Як бачимо, парадокси теорії множин були внутрішніми трудношами теорії і лежали в самих її основах, способах міркувань і поняттях, якими при цьому користувалися. Нескінченні множини розглядалися заданими всім набором своїх елементів, тобто як актуально існуючі. А цим самим у міркуваннях використовувалася абстракція актуальної нескінченності, яка є абстракцією високого порядку, коли не накладати певних обмежень на міркування, в яких вона використовується, то можна легко прийти до різних парадоксів.

В аксіоматичних теоріях множин розроблені різні способи уникнення парадокса Кантора. Наприклад, доводять теорему Кантора про потужності тільки в деякій спеціальній формі, яка допомагає уникнути парадокса.

10. З позицій канторівської теорії множин природно вважати, що кожна точно описана властивість (A) об'єктів визначає (задає) певну множину (B) об'єктів, які задовольняють властивість A. Цим широко користувалися в практиці теоретико-множинної математики і у математиці взагалі. Парадокс Рассела наніс нищівний удар по таких поглядах і саме тому особливо приголомшив учених. Довелося визнати, що деякі і навіть, на перший погляд, досить прості властивості, на зразок задання множини M_2^*, слід вважати неточними, некоректними або допустити, що існують точні означення, які не визначають ніяких математичних об'єктів. Тоді виникає ряд нових складних і надзвичайно важливих проблем: 1) Які властивості вважати точними означеннями, а які ні? 2) Які властивості визначають певні математичні об'єкти, а які ні? 3) Де гарантія, що ті властивості, які широко використовуються в математиці, не ведуть до парадоксів? 4) Чи можна описати якусь надійну область математики, в якій можна вважати себе достатньо убезпеченим від парадоксів і одночасно досить велику, щоб вона включала в себе звичну нам практику математики? А в підсумку з усього цього випливало, що при побудові математичних теорій, які претендували на логічний фундамент усієї математики, використано загальновідомі або очевидні істини й інтуїтивна ясність ідей є далеко не надійним аргументом.

Четверту з названих проблем вдалося розв'язати, створивши точні логіко-математичні мови. Що стосується першої і другої проблем, то досягнення сучасної математики свідчать про те, що остаточного розв'язання їх, можливо, не існує. І все ж ситуація не безнадійна. Хоча проблеми, поставлені парадоксом Рассела, далекі від розв'язання, розроблено різні шляхи уникнення парадоксів. Ці профілактичні засоби проливають світло на природу парадоксів і на логічні зв'язки різних теоретико-множинних систем. Найбільші успіхи були досягнуті математиками у створенні аксіоматичних теорій множинної математики.

Розглянемо тепер побудований у 1919 році Расселом парадокс «Сільський цирульник». Позначимо жителів села через m_i ($i=1, 2, ..., n$), а всю множину їх — M, тобто $M=\{m_1, m_2, ..., m_n\}$, і цирульника через m_1. З умови випливає, що всю множину жителів села (тобто M) поділено на дві підмножини: ті, які голяться самі (M_1), і ті, які не голяться самі (M_2). Такий поділ задовольняє вимоги: 1) $M_1 \neq \varnothing$ і $M_2 \neq \varnothing$; 2) для всіх $m_i \in M_1$, або $m_i \in M_2$; 3) $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ (це зрозуміла вимога, бо кожний житель села голиться сам або не голиться, третього не дано) і 4) $M_1 \cup M_2 = M$. Оскільки цирульник — житель села, то $m_1 \in M$, він має обов'язково належати одній і тільки одній із підмножин множини $M - M_1$ або множини M_2. Тут не може бути якогось винятку, неоднозначності, бо тоді просто не виконувалася б умова парадокса.

Тепер звернемося до логіки, пам'ятаючи, що наявність законів формальної логіки, які складалися в тривалому процесі теоретичного узагальнення величезного практичного досвіду, не гарантують від логічних помилок, і це трапляється не з вини законів логіки, а з вини тих, хто їх порушує. Отже, маємо висловлення:

A: Цирульник голить тих і тільки тих жителів свого села, які не голяться самі. *B*: Цирульник голить себе тоді і тільки тоді, коли він сам себе не голить. При цьому складається враження, що тут є логічне слідування $A \Rightarrow B$. Чи так це насправді?

Наказ цирульникові (m_1) — це власне означення його як об'єкта, з яким ми оперуватимемо в наших міркуваннях. Легко бачити, що висловлення *B*, яке, по суті, є продовженням означення m_1, містить дві взаємно протилежні характеристики, відношення між якими можна записати за допомогою формули: $m_1 \in M_1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow m_1 \in M_2$. Це нізвідки не випливає, нічого чудесного в цьому нема. І природно, що цирульника, який задовольняв би такі вимоги, не існує. Як не існує в геометрії «квадратного кола», в алгебрі «кубічного рівняння другого степеня», в арифметиці «двоцифрового числа, меншого від числа 10» і т. д.

А. А. Ханагов (51, с. 118—124) також вважає, що парадокс «Сільський цирульник» не є парадоксом. Але в своїх міркуваннях він вводить, по суті, розмиті множини — розглядає альтернативу $m_1 \in M_1$ або $m_1 \in M_2$. Проти цього слід зробити два зауваження. По-перше, введення поняття розмитої множини зовсім не випливає з умови парадокса і, по-друге, операції над розмитими множинами підпорядковано іншим законам (див., наприклад, статтю: З а д е Л. А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений.— В кн.: Математика сегодня. М.: Знание, 1974).

У примітці перекладача монографії С. К. Кліні (22, с. 40) також вказується, що парадокса можна уникнути за допомогою висновку, що такого цирульника не може існувати, і цей висновок якраз доводиться цим парадоксом.

На практиці виявлений факт не загрожує якимись неприємностями. Життєві ситуації далеко не завжди бувають чітко встановленими і надійно сформульованими. Інша справа в математичних міркуваннях. Від них ми вимагаємо чіткості, переконливості і насамперед внутрішньої несуперечливості. Парадокс Рассела став грізною пересторогою: і в найточнішій з галузей теоретичного знання — математиці — ці природні умови виконуються не завжди.

Рассел сформулював свій парадокс в листі від 16.6.1902 р. до німецького математика Г. Фреге. Останній віддав понад 20 років теоретико-множинному обгрунтуванню арифметики. Перший том його великої праці «Основні закони арифметики» був опублікований в 1893 році, другий том друкувався, коли до Фреге надійшов лист Рассела, з його парадоксом, який означав, що в першому томі в неявній формі вже була формально-логічна суперечність.

Цікаві розповіді про трагічні події, драму ідей, які пережили вчені, ознайомившись з парадоксом Рассела, ви знайдете в книжках: 6, с. 81—104; 25, с. 78—83.

11. Парадокс Рішара належить до семантичних парадоксів. Він виник тому, що в наведених міркуваннях неявно використано одне припущення. Ми розглядали чисто арифметичні властивості натуральних чисел, тобто властивості, сформульовані в термінах арифметичних дій, законів дій, властивостей чисел і т. д. А потім включили до послідовності означень висловлення, сформульоване за допомогою деякого способу запису арифметичних властивостей. Тому, строго кажучи, саме означення рішарового числа не належить до послідовності означень, які ми спочатку описали, бо воно використовує такі нематематичні поняття, як номер букви (або взагалі знака) в деякій послідовності.

Парадокса Рішара можна уникнути, коли чітко розрізняти висловлення самої арифметики і висловлення про арифметику (наприклад, про арифметичні формули і т. д.). Ці висловлення належатимуть вже не арифметиці, а метаарифметиці — науці, яка розглядає різні висловлення про арифметику.

12. Семантичний парадокс, який має ту ж природу, що й парадокс Рішара.

13. Парадокс утворено за тією ж схемою міркувань, що й софізм Еватла (див. № 8).

14. У першому реченні софізму йдеться про підмножину множини коней (множину рудих коней), а в останньому реченні маємо усю множину коней. Таким чином, у міркуваннях допущено помилку еквівокації, яка й зумовила неправильний висновок «білий кінь не є конем».

15. Перехожий, який так збентежив суддів, означив своєю відповіддю певну множину об'єктів (перехожих), бо так відповісти міг би не він один. Як і у випадку парадокса Рассела (див. № 10), перехожий сформулював внутрішньо суперечливе означення певної підмножини множини перехожих. Справді, ця підмножина порожня, бо не існує жодного об'єкта (в нашому випадку перехожих на мосту), який мав би властивості, описані в його означенні. (Детальніше див. пояснення до № 10).

18. Якщо ще можна сперечатися про те, чи є висловленнями речення A і B (справді, істинне чи хибне речення A?), то речення C без додаткових уточнень вважати висловленням не можна. Речення C є скороченням речення «Говорячи x, я говорю правду», а висловленням це речення стає тільки після конкретизації x (при одних значеннях x воно стає істинним висловленням, а при інших — хибним).

Причину помилки можна пояснити і так: у реченнях «$B \to C$» і «$A \to C$» C має різний смисл.

19. Ця задача була опублікована в журналі «Техника — молодежи» (1969, № 3) з оголошенням, що ні професорові А. Буткевичу, який надіслав її, ні редакції журналу розв'язання її невідоме. Не знає його й автор.

20. Кожного разу, коли один аркуш паперу рвали на сім частин, кількість клаптиків збільшувалася на шість. Оскільки спочатку було шість аркушиків паперу, то й остаточне число їх мало бути кратним шести.

21. Богатир міг відтяти голову Змієві в такій послідовності: $1000 - 21 \cdot 47 \to 13 - 1 \to 12 + 10 \to 22 - 21 \to$ $\to 1 - 1 = 0$.

22. 6 квітня — день народження Ельзи, її відповідь у цей день була неправильною. З тих же міркувань встановлено, що день народження Жанни — 7 квітня.

23. З першого гаманця потрібно взяти одну монету, з другого — дві, з третього — три, ... , з десятого — десять, усього 55 монет. Якщо їх маса становитиме $(550+n)$, де $n \in N$ і $1 \leqslant n \leqslant 10$, то фальшиві монети в гаманці з номером n.

24. Якщо розкласти число 451 066 на прості множники, то дістанемо $2 \times 7 \times 11 \times 29 \times 101$. Пам'ятаючи, що все трапилося в останній день місяця, приходимо до висновку, що бомбардування відбулося 29 числа: інші множники або комбінації їхніх добутків не задовольняють умови задачі. Оскільки 29 — останній день місяця, то це було в лютому високосного року. Протягом першої світової війни був тільки один високосний рік — 1916.

Довжина списа, очевидно, становила 7 ліктів: спис завдовжки 2 лікті був би занадто коротким, а 11 ліктів — занадто довгим. Лишаються три співмножники: 2, 11 і 101. Число 101 не може бути половиною років, які прожив солдат: 202 роки — нереальна тривалість життя. Отже, йому могло бути або 22 роки, або 44. Тоді 101 — це половина років, які минули від дня його смерті до 1916 року. Це означає, що він помер у 1714 році $(1916-2 \cdot 101)$. Але це суперечить тій частині умови задачі, де говориться, що статуя була в стилі Відродження. Адже французьке Відродження закінчилося значно раніше 1714 р. Тому остаточний висновок має бути таким. Воїн прожив 22 роки. Половина років, які минули від дня його смерті, це: $2 \times 101 = 202$ роки. Минуло, таким чином, 404 роки. Тому помер він у $1916-404=1512$ році.

25. Розв'язання Льюїса Керролла:

Хоть суров закон, но он
Королем был обойден:
Кто хитер, сумеет ловко
Обойти закон уловкой.
Семь слепых и зрячих пять
Дважды стал король считать.
Мысли ход своей чудак
Объяснить изволил так:
«Тот, кто слеп на оба глаза,
Явно слеп на глаз один.

Тот, кто видит в оба сразу,
Может видеть и одним».
Дальше ясно все без слов:
Лишь шестнадцать мудрецов
Остается при дворе
Наносить урон казне.

26. Відповідь Льюїса Керролла:

Ви, зрозуміло, думаєте, що в збитку виявився приятель заповзятого театрала і що втратив він 6 пенсів? Мій юний друже! Ваша відповідь неправильна, але робить вам честь, бо показує, що ви не маєте ні найменшого уявлення про те, як діють лихварі: адже в своєму розв'язанні ви виходили із того, ніби лихварі займаються своїм ремеслом безкорисливо.

28. Можливі чотири варіанти комбінацій дверей і охоронців:

1. Двері на волю. Охоронець — правдолюб.
2. Двері на волю. Охоронець говорить неправду.
3. Двері в неволю. Охоронець — правдолюб.
4. Двері в неволю. Охоронець говорить неправду.

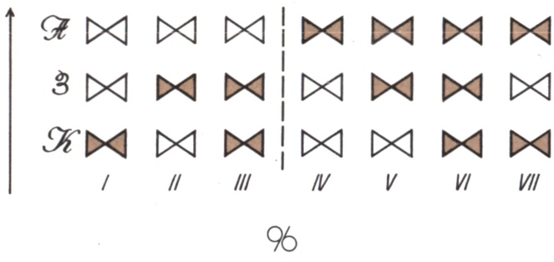
Кожум'яка запитав одного з охоронців: «Що скаже твій товариш про двері, які ти охороняєш?» У першому і другому випадку він би почув відповідь: «Він скаже, що вони ведуть в неволю». У третьому і четвертому випадку відповідь буде: «Він скаже, що вони ведуть на волю».

29. Одне з можливих запитань може бути таким: «Якщо запитати будь-якого твого одноплемінника, чи веде ця дорога в село, чи відповість він «так»?» Якщо при цьому логік покаже на дорогу, яка веде в село, то кожний острів'янин відповість «так», якщо на дорогу, яка не веде в село, то кожний відповість «ні».

30. Логік двічі запитав острів'янина: «Чи чергуєш ти правду з неправдою?» Почувши у відповідь двічі «ні», логік дізнався б, що перед ним представник племені правдолюбів, дві стверджувальні відповіді говорили б про те, що перед ним представник закоренілих брехунів, відповісти «так» і «ні» міг лише представник третього племені.

31. Косий, Борода і Авас — неправдивці, Кирпань — напівправдивець, Довговух — правдивець.

32. Кожний з мудреців міг думати, що його лоб чистий. Перший переконаний, що його лоб чистий, і сміється над забрудненим обличчям другого і третього.



Мал. 96

Але якби перший побачив, що його лоб чистий, то він здивувався б сміхові другого, оскільки у цьому випадку у другого не було б причин для сміху. Одначе перший не здивований, отже, він може думати, що другий сміється над ним. Отже, лице першого теж вимазане.

34. З білих, бо його товариші виймали чорні кульки.

35. Є сім різних варіантів прикріплених бантиків (мал. 96). Перший потрібно відкинути, бо тоді Катя бачила б перед собою два білих банти і відразу б здогадалася, що на її голові темний бант. А як ми знаємо вона відповіла, що не знає, який бант на її голові. Другий і третій варіанти відпадають теж. Бо тоді Зіна відповіла «Знаю». Вона міркувала б так. Я бачу перед собою білий бант. Якби на мені був білий бант, то Катя, яка стоїть за мною, відповіла б «Знаю», бо вона бачила б два білих банти. А якщо вона відповіла «Не знаю», то виходить, що на мені темний бант. Отже, другий і третій варіанти виключаються. Залишилися четвертий, п'ятий, шостий і сьомий варіанти, при яких на мені мав бути тільки темний бант. Тому після відповідей Каті і Зіни, я була впевнена, що у мене темний бант.

36. П. не поступився принципом правдолюба. Логік двічі запитав П.: «Чи запитував я вас про що-небудь сьогодні?» Першого разу була правильною відповідь «Ні», другого разу «Так».

Перед П. і Б. логік поставив одне й те ж запитання: «Ви завжди говорите правду?» Потім він запитав: «Ви завжди говорите неправду?»

37. Логік по кілька разів враховував час на сон, читання книг, дозвілля, дорогу тощо. Вони входили в нього у всі дні року, в тому числі у вихідні, канікули, свята тощо.

38. Астролог відповів: «Я помру за три дні до вашої смерті».

Астрологи інколи вдавалися до відчайдушних і небезпечних вчинків, щоб підтримати свою честь і авторитет лженауки — астрології, в яку часто вони й самі не вірили, але розуміли, що вона є засобом їхнього існування. Переказують, що італійський математик Джіроламо Кардано (1501—1576), який сучасникам був відомий насамперед як лікар і астролог, напророкував свою смерть на 1576 рік. А оскільки життю Кардано в цей час ніщо не загрожувало, то щоб не затьмарити слави астролога, він уморив себе голодом.

Один із синів знаменитого в свій час астролога Мішеля Нострадама (1503—1566), на ім'я теж Мішель, успадкував професію батька. Коли завбачена ним на 1575 р. пожежа м. Пузена, блокованого в той час королівськими військами, не трапилася, астролог-син сам підпалив місто. Пильні городяни стежили за віщуном. Астролога спіймали на місці злочину і стратили.

39. Віщун вів облік тих, хто до нього звертався. Він записував імена майбутніх батьків і говорив їм, наприклад: «У вас буде хлопчик», а в свою книгу записував: «Дівчинка».

Якщо через деякий час у клієнтів народжувався хлопчик, вони дивувалися точності віщуна і своїми розповідями зміцнювали його репутацію. Якщо ж народжувалася дівчинка і розгнівані батьки приходили до віщуна, він люб'язно приймав їх, просив заспокоїтися, запитував їхні імена, розкривав книгу, знаходив запис і казав: «Все вірно, у вас мала народитися дівчинка. Ось тут у мене так і записано». Збентежені батьки йшли з нічим, дивуючись, як вони могли недочути чи не зрозуміти віщуна і, звичайно, нікому не розповідали про те, що з ними трапилося.

40. Батько 92-літнього дідуся одружився дуже молодим і в 18 років став батьком. У нього народився син, який в тому ж році помер. Батько одружився вдруге в 65 років і через рік у нього народився син, який тепер виступав свідком у суді. Від смерті першого сина до народження другого пройшло 48 років ($65+1-18=48$), отже, від смерті брата до судового процесу справді пройшло 140 років ($92+48=140$), хоча на перший погляд це здається неймовірним.

Наша мандрівка у світ парадоксів підійшла до кінця. Ми побачили, що парадокси — це свого роду «захисна реакція болю» системи понять, зокрема й формалізованої теорії (коли застосовують цю систему за межами звичної для неї сфери, тобто виходять за межі застосовності її понять). При цьому потрібно мати на увазі, що в новій понятійній системі можуть виникнути нові парадокси, які також потрібно буде усувати. Така діалектика процесу пізнання як нескінченного наближення до істини. І нехай вас не спиняє те, що не все на цьому шляху буде зрозумілим. «Працюйте, працюйте,— а розуміння прийде потім»,— радив визначний французький математик Д'Аламбер (1717—1783). Користуйтесь цією порадою, пам'ятаючи також слова видатного радянського математика і різностороннього вченого М. О. Лаврентьєва (1900—1980): «Питання «чому?» — одне із самих плідних. Задавайтеся ним почастіше!»

ВИКОРИСТАНА ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Книга — добрий плуг, який повільно,
але неухильно піднімає шар за шаром.

О. Ю. ШМІДТ

1. Маркс К., Енгельс Ф. Твори. В 46-ти т. К.: Політвидав України, 1958—1982.

2. Ленін В. І. Повне зібрання творів. В 55-ти т. К.: Політвидав України, 1972—1975.

3. Аристотель. Сочинения в 4-х т. М.: Мысль, 1976—. Т. 2, 1978.— 678 с.; Т. 3, 1981.— 613 с.

4. Бизам Д., Герцег Я. Игра и логика. М.: Мир, 1974.— 358 с.

5. Бизам Д., Герцег Я. Многоцветная логика. М.: Мир, 1978.— 435 с.

6. Бирюков Б. В., Тростников В. Н. Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики. М.: Знание, 1977.— 191 с.

7. Бобров Л. В. По следам сенсаций. М.: Молодая гвардия, 1966.— 271 с.

8. Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях. 3-е изд. М.: Просвещение, 1967.— 191 с.

9. Бурова И. Н. Парадоксы теории множеств и диалектика. М.: Наука, 1978.— 176 с.

10. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. 2-е изд. М.: Наука, 1969.— 159 с.

11. Гарднер Мартин. Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1971.— 510 с.

12. Гарднер Мартин. Математические досуги. М.: Мир, 1972.— 496 с.

13. Гарднер Мартин. Математические новеллы. М.: Мир, 1974.— 454 с.

14. Гарднер Мартин. Математические чудеса и тайны. 3-е изд. М.: Наука, 1977.— 127 с.

15. Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах. 4-е изд. М.: Наука, 1969.— 63 с.

16. Еленьский Щепан. По следам Пифагора. М.: Детгиз, 1961.— 486 с.

17. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки. 2-е изд. М.: Наука, 1979.— 207 с.

18. История математики с древнейших времен до начала нового времени. М.: Наука, 1970—1972. Т. 1.— 351 с.; Т. 2, 1971.— 300 с.; Т. 3, 1972.— 495 с.

19. Кармин А. С. Познание бесконечного. М.: Мысль, 1981.— 229 с.

20. Касымжанов Л. Х., Кельбуганов А. Ж. О культуре мышления. М.: Политиздат, 1981.— 128 с.

21. Квант, 1970—1981.

22. Клини С. К., Введение в метаматематику. М.: Иностр. лит., 1957.— 526 с.

23. Коваль С. От развлечений к знаниям. Математическая смесь. Варшава: Изд-во Научно-техническое, 1972.— 539 с.

24. Кондаков Н. И. Логический словарь-справочник. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1974.— 720 с.

25. Конфорович А. Г. Нескінченність у математиці. К.: Рад. школа, 1978.— 93 с.

26. Кудрин А. К. Логика и истина. М.: Политиздат, 1980 — 144 с.
27. Кэрролл Л. История с узелками. М.: Мир, 1973.— 408 с.
28. Кэрролл Л. Приключения Алисы в Стране чудес. Сквозь зеркало и что там увидела Алиса, или Алиса в Зазеркалье. М.: Наука, 1978.— 359 с.
29. Ланге В. Н. Физические парадоксы и софизмы. 3-е изд. М.: Просвещение, 1978.— 176 с.
30. Литцман В. Веселое и занимательное о числах и фигурах. М.: Физматгиз, 1963.— 264 с.
31. Литцман В. Где ошибка? М.: Физматгиз, 1962.— 192 с.
32. Макеева Г. П., Цедрик М. С. Физические парадоксы и занимательные задачи. Минск: Народная асвета, 1981.— 144 с.
33. Маленков А. Г. Логические «парадоксы» как путь познаний закономерностей формирования понятий.— Природа, 1978, № 10, с. 124—126.
34. Маркушевич А. И. Ряды. Элементарный очерк. 4-е изд. М.: Наука, 1978.— 187 с.
35. Математика в школе, 1948—1981.
36. Математики о математике. Сб. статей / Сост. проф. В. И. Левин. М., Знание, 1972.— 47 с.
37. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1977, т. 1.— 1152 кол.; 1979, т. 2.— 1104 кол.
38. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. М.: Наука, 1965.— 232 с.
39. Наан Г. И. Понятие бесконечности в математике и космологии.— В кн.: Бесконечность и Вселенная. М.: Мысль, 1969, с. 7—77.
40. Нагель Э., Ньюмен Д. Теорема Геделя. М.: Знание, 1970.— 63 с.
41. Обреимов В. И. Математические софизмы. 2-е изд. Петербург, изд. Ф. Павленкова, 1889—79 с.
42. Перельман Я. І. Жива математика. К.: Техніка, 1968.— 150 с.
43. Перельман Я. І. Цікава алгебра. К.: Техніка, 1973.— 187 с.
44. Перельман Я. И. Занимательная геометрия. 11-е изд. М.: Наука, 1959.— 303 с.
45. Петер Р. Игра с бесконечностью. М.: Просвещение, 1968.— 271 с.
46. Радунская И. Л. Крушение парадоксов. М.: Молодая гвардия, 1971.— 224 с.
47. Тульчинский М. Е. Занимательные задачи, парадоксы и софизмы по физике. М.: Просвещение, 1971.— 160 с.
48. Сухотин А. К. Парадоксы науки. М.: Молодая гвардия, 1978.— 239 с.
49. Уемов А. М. Истина и пути ее познания. М.: Политиздат, 1975. 88 с.
50. Философская энциклопедия. В 5-ти т. М.: Сов. энцикл., 1960—1970.
51. Ханагов А. А. Существуют ли в формальной логике парадоксы? — Природа, 1978, № 10, с. 118—124.
52. Шевченко В. Е. Некоторые способы решения логических задач. К.: Вища школа, 1979.— 79 с.
53. Штейнгауз Г. Задачи и размышления. М.: Мир, 1974.— 400 с.
54. Яновская С. А. Методологические проблемы науки. М.: Мысль, 1972.— 280 с.

ЗМІСТ

Андрей Григорьевич Конфорович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ И ПАРАДОКСЫ
(на украинском языке)

Издательство «Радянська школа». 252053. Киев, Ю. Коцюбинского, 5.

Зав. редакцією математики *О. П. Бондаренко*. Редактор *Л. Л. Розумова*. Літредактор *Г. В. Брезницька*. Художній редактор *І. О. Савчук*. Технічний редактор· *Н. М. Горбунова*. Коректори *Г. П. Наказнюк, Л. В. Шуминська*.

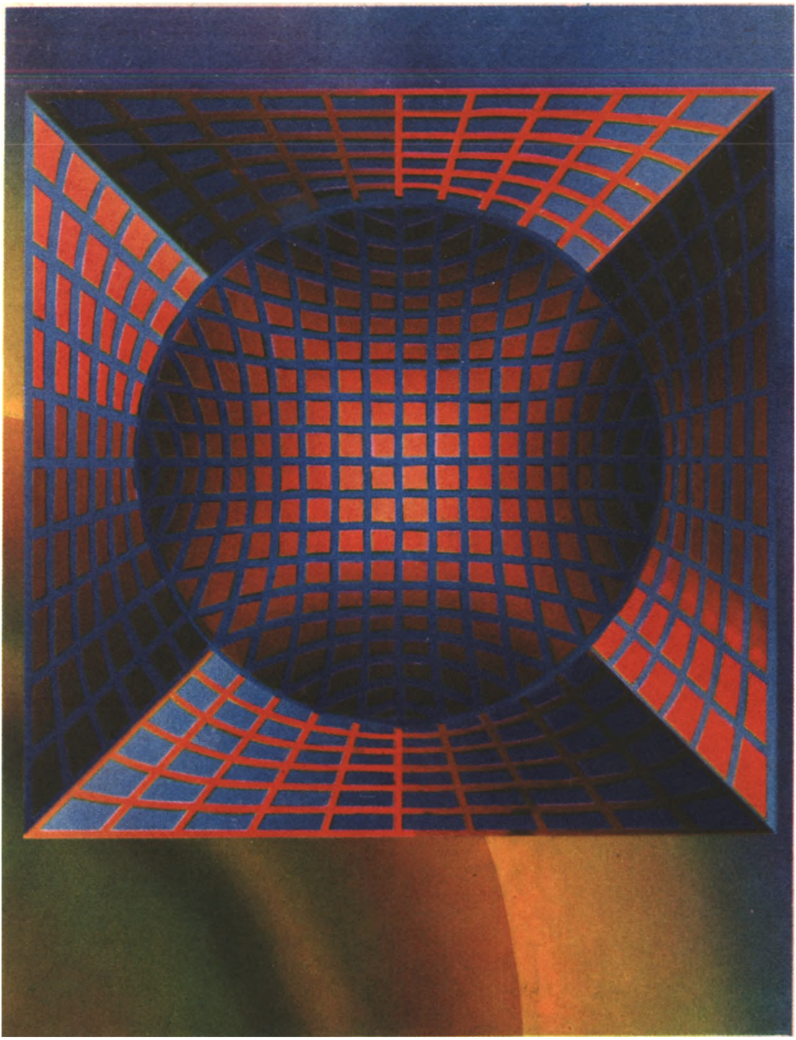
Інформ. бланк № 3415.

Здано до набору 22.10.82. Підписано до друку 11.08.83 БФ 04228. Формат $84\times100^1/_{32}$. Папір № 1 офсетн. Гарнітура літерат. Спосіб друку офсетн. Умовн. арк. 10,14+ +0,78 вкл.+0,20 форз. Умовн. фарбо-відб. 23,60. Обл.-видавн. арк. 10,34+0,87 вкл.+0,30 форз. Тираж 70 000 пр. Видавн. № 28162. Зам. № 2—359. Ціна 80 к.

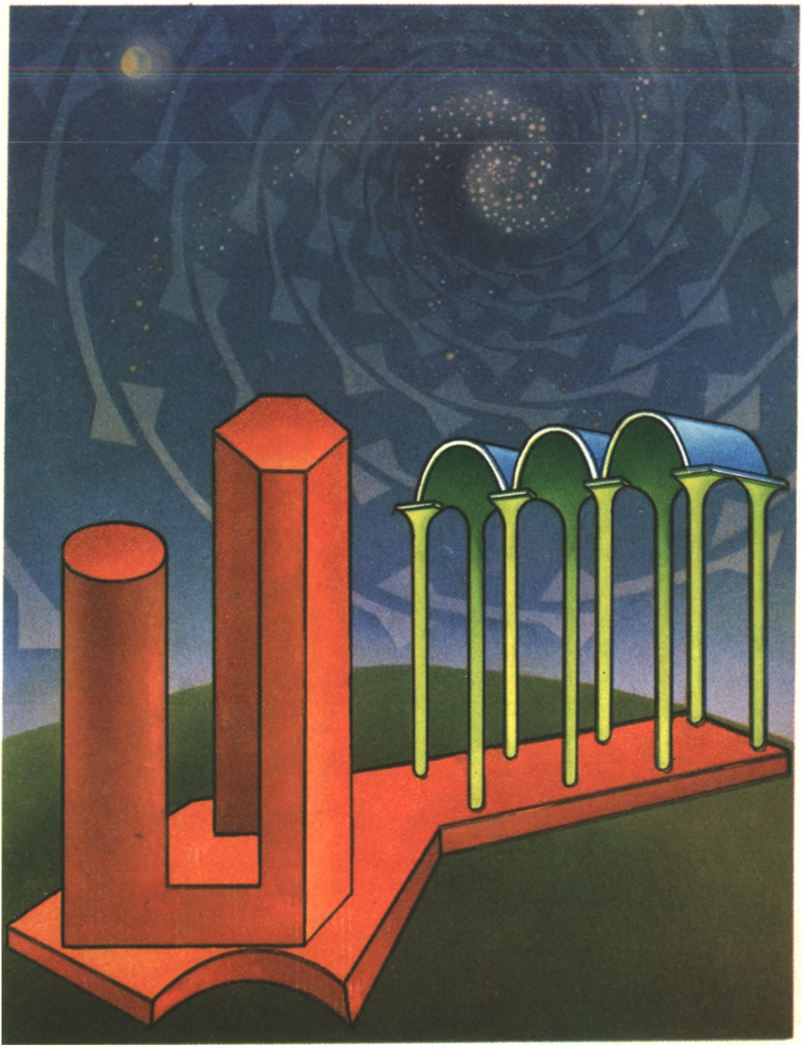
Видавництво «Радянська школа».252053.
Київ, Ю. Коцюбинського, 5.

Головне підприємство республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига», 252057, Київ, Довженка, 3.

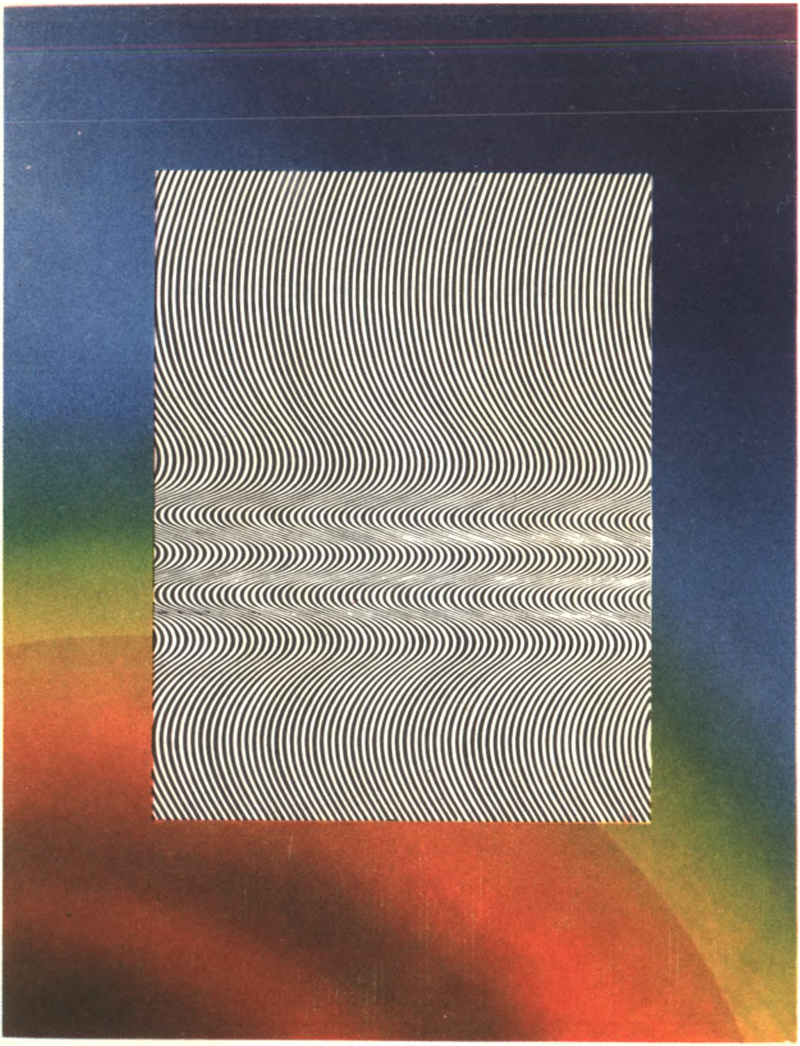
Віддруковано з текстових діапозитивів на київській книжковій фабриці «Жовтень». 252053, Київ, Артема, 25.

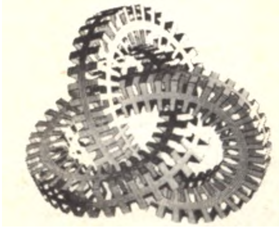


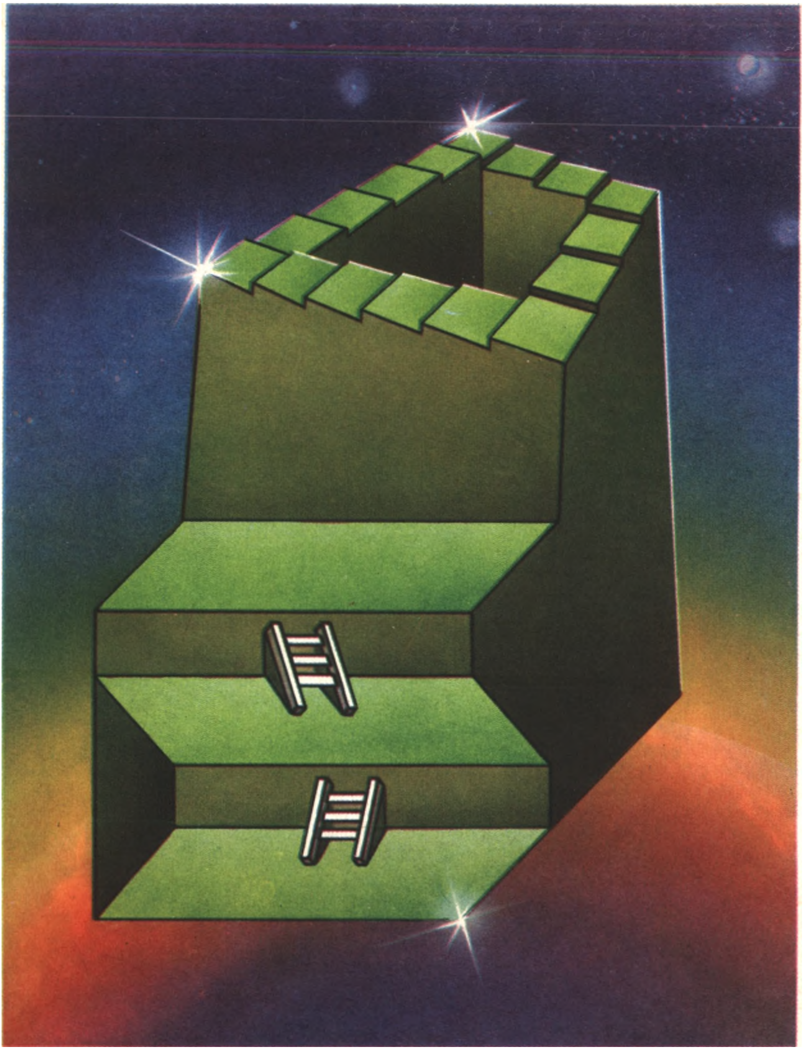
За певних умов зір дає нам неправильні або ненадійні відомості про реальні предмети. І все ж в звичайних умовах зір людини є надійним засобом орієнтації в просторі. Коли б людина не могла правильно зорієнтуватися в просторі з допомогою своїх органів чуття, то вона просто загинула б у важкій і тривалій боротьбі за своє існування.



Іноді говорять: «Побачити — означає перевірити». Проте часто буває навпаки: побачити — означає обманутися. Підніміться на підвищення, пройдіть повз дещо дивну фігуру і, спинившись під склепінням альтанки, помилуйтесь геометричним небосхилом. Здається, все як слід? Та ні, щось у всьому, що оточує тут нас, не зовсім так ...

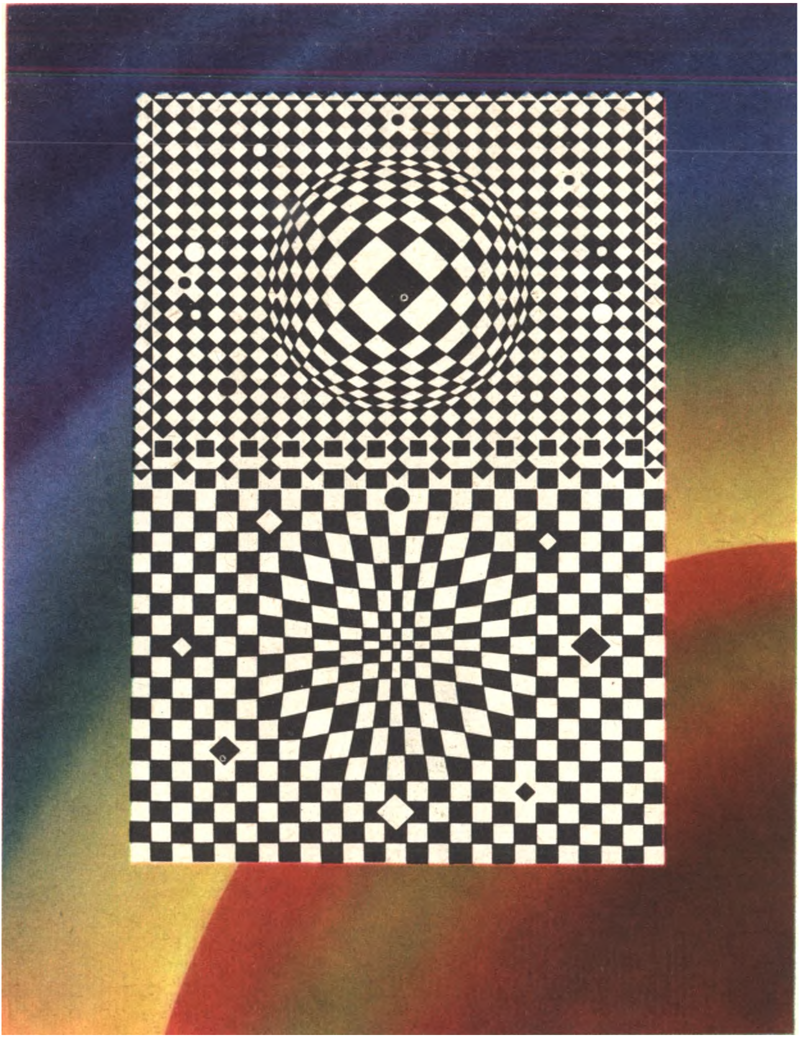


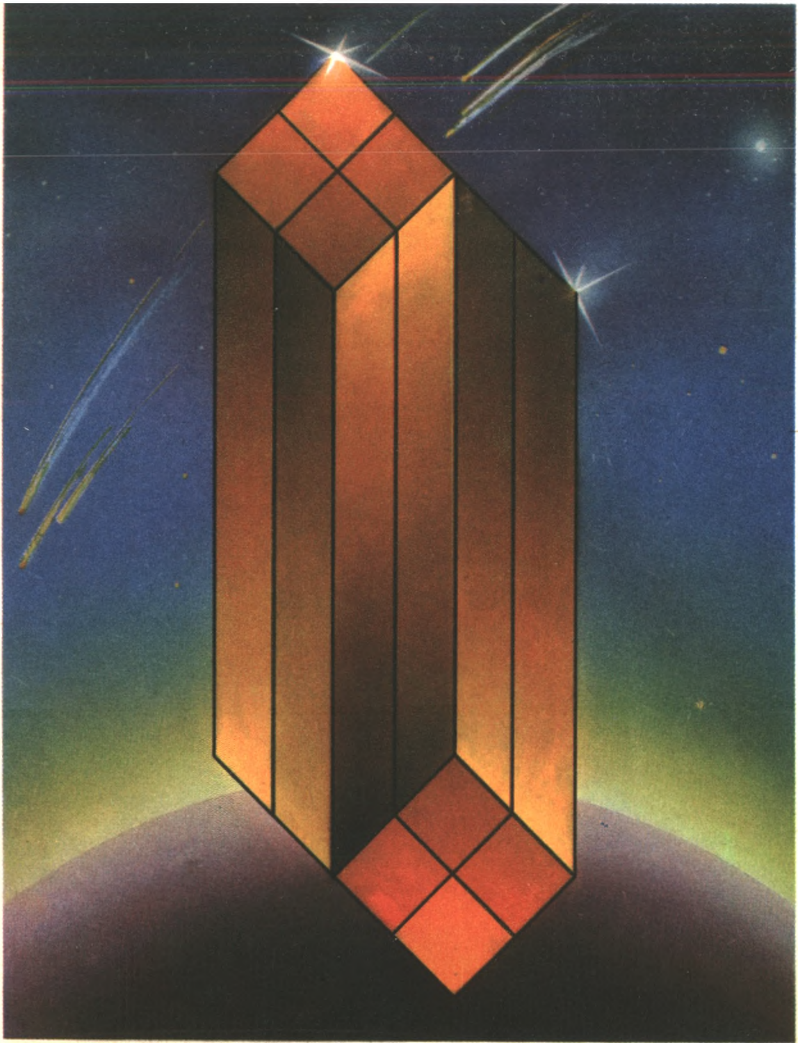




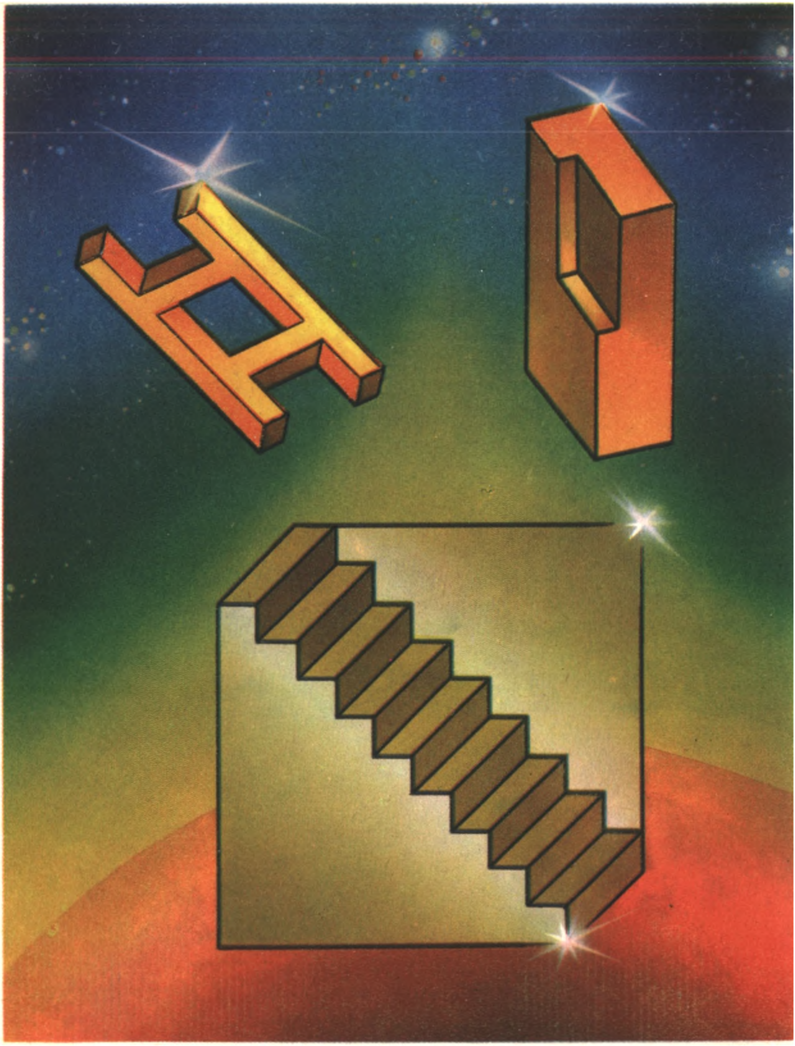
Два невеликі підйоми — і ми біля вежі, яку довершують чарівні сходи. Наліво — нескінченний спуск. Підемо праворуч все вгору і вгору. Такого не може бути? А хіба історія людства — не вічний підйом? Від першого розщепленого каменя, з якого народилося зубило, до розщепленого атомного ядра ...

Одначе, до цієї вежі не піднятися, зауважить дехто. Вгнутість виявляється опуклістю, а стіна — проваллям. Природі теж не легко було піднятися до Homo sapiens.

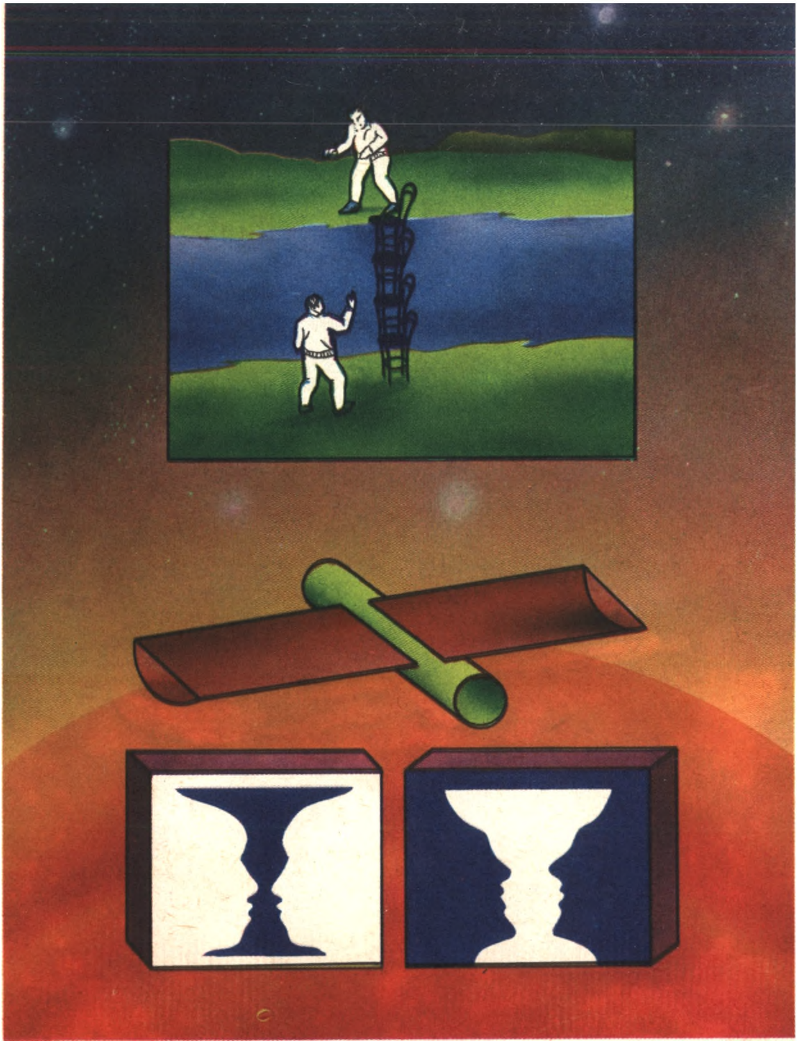




Видатний архітектор і теоретик архі-ектури Ле Корбюзьє писав: «Що було б, якби людина винайшла систему, що сама по собі абсолютно логічна і водночас суперечить законам природи, і перейшла б від позірних побудов до їх практичного втілення? Вона відразу спіткнулася б, не встигнувши зробити ні кроку». Те саме чекає й тих, хто спробує відтворювати на практиці такий об'єкт.



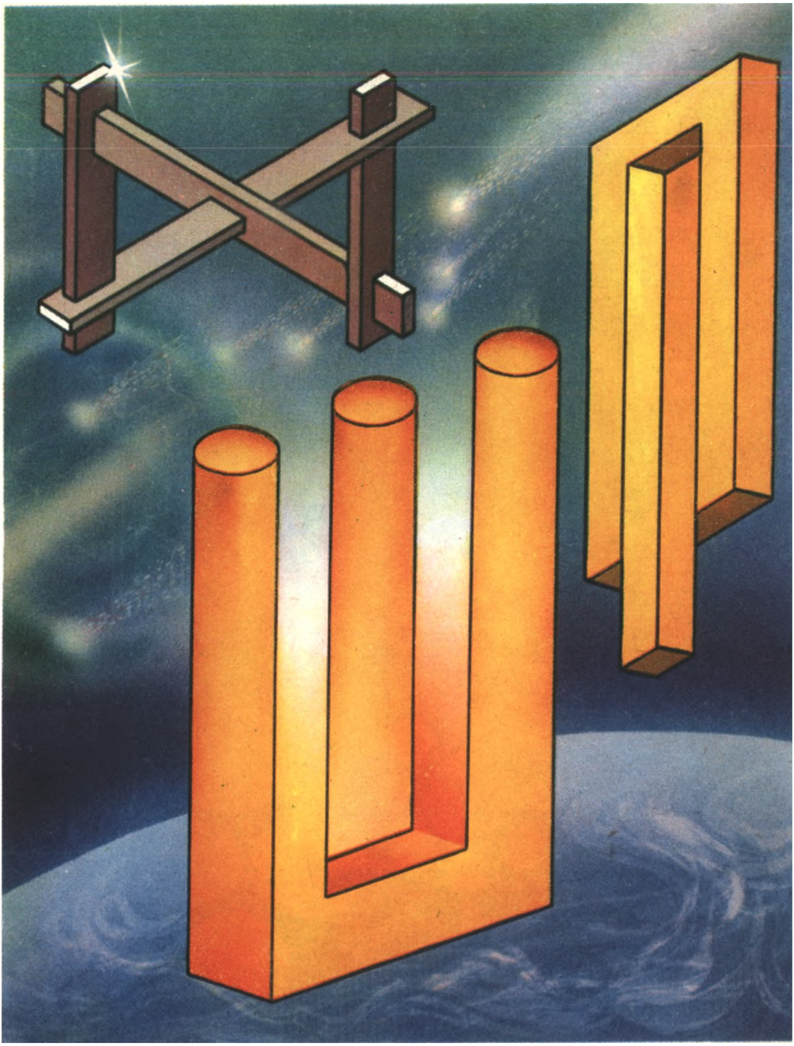
Широко популярні такі оптичні ілюзії, як неможливі об'єкти і фігури-перевертні. Коли уважніше придивитися до звичайної драбини з двома перетинками, помічаємо, що насправді такого виробу бути не може. На малюнку поруч з ним бачимо брусок із заглибленням, цілий брусок, до якого приставлено менший, або три стінки ящика, до яких притиснуто менший брусок.

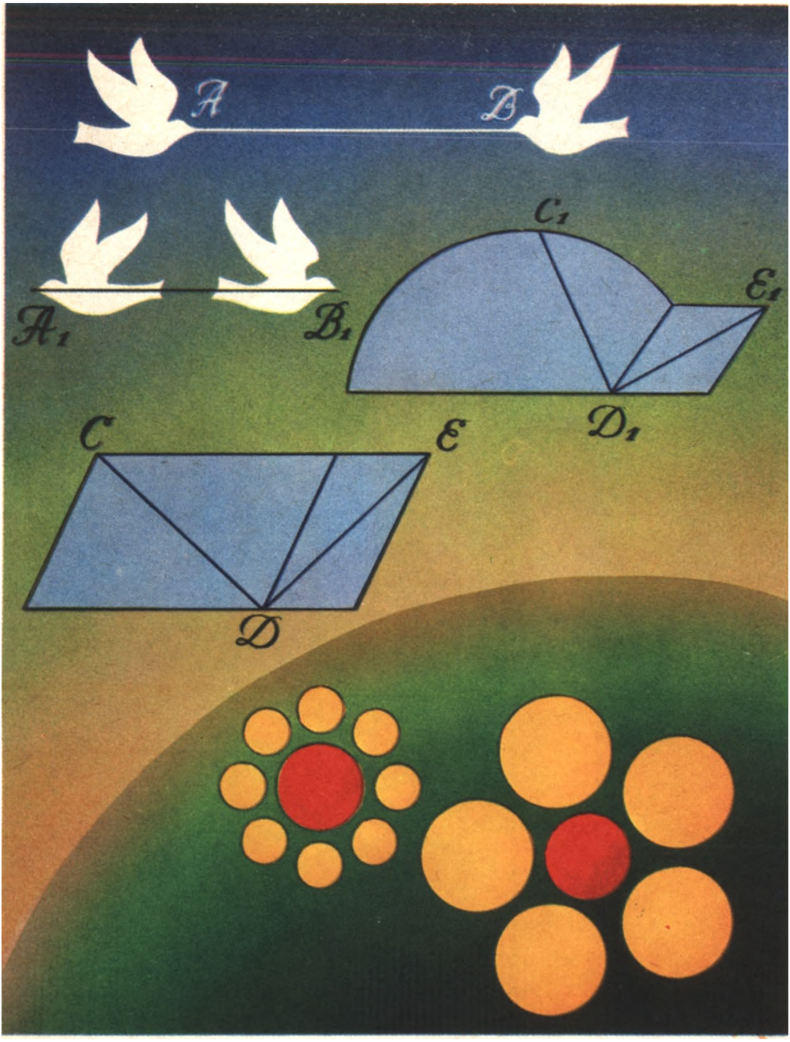


Стільці ніби поставили так, що по них можна перейти річку. Проте можна подумати також, що стільці стоять на березі один на одному.

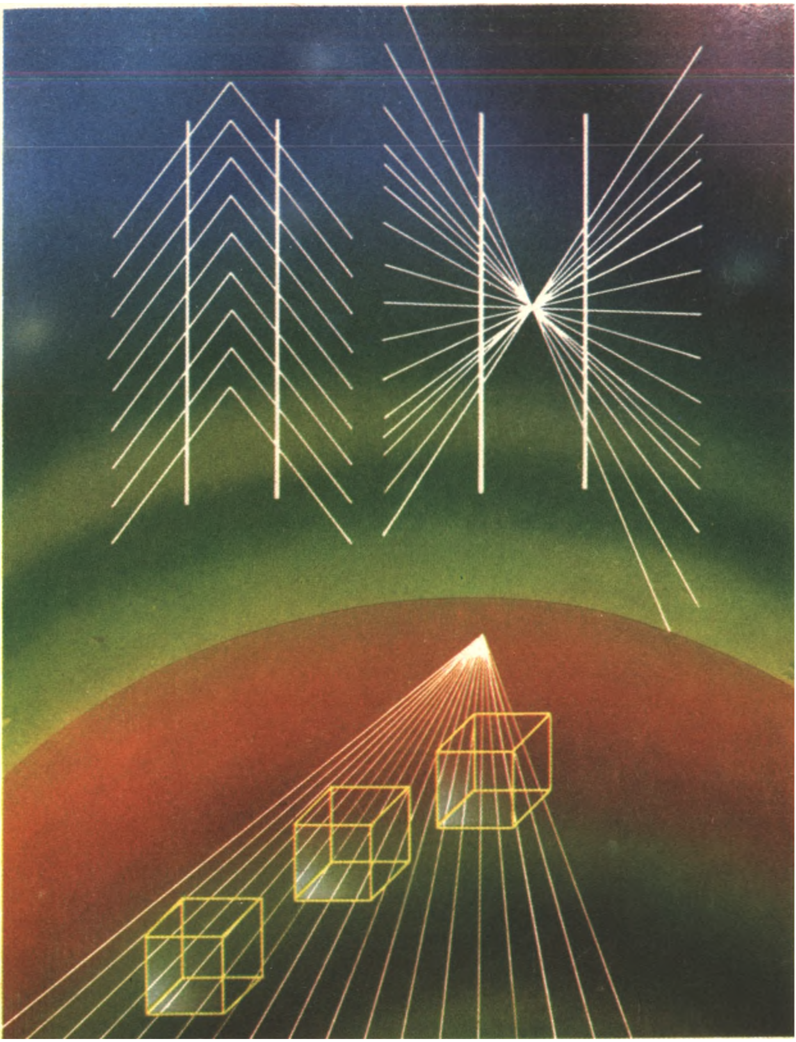
Чудова гойдалка, але, на жаль, на ній не можна погойдатися. Чому?
Насамперед більшість бачить на нижньому малюнку вазу, а вже потім два силуети. Те ж саме відбувається, якщо змінити яскравість фігури і фону.

Людське око — надзвичайно тонкий природний інструмент. І все ж сприйняття — лише перший і не найголовніший ступінь пізнання.
На перший погляд нічого дивного не помічаємо. Але трохи уваги — і виявляється, що всі фігури є лише по-різному замаскованими неможливими об'єктами.

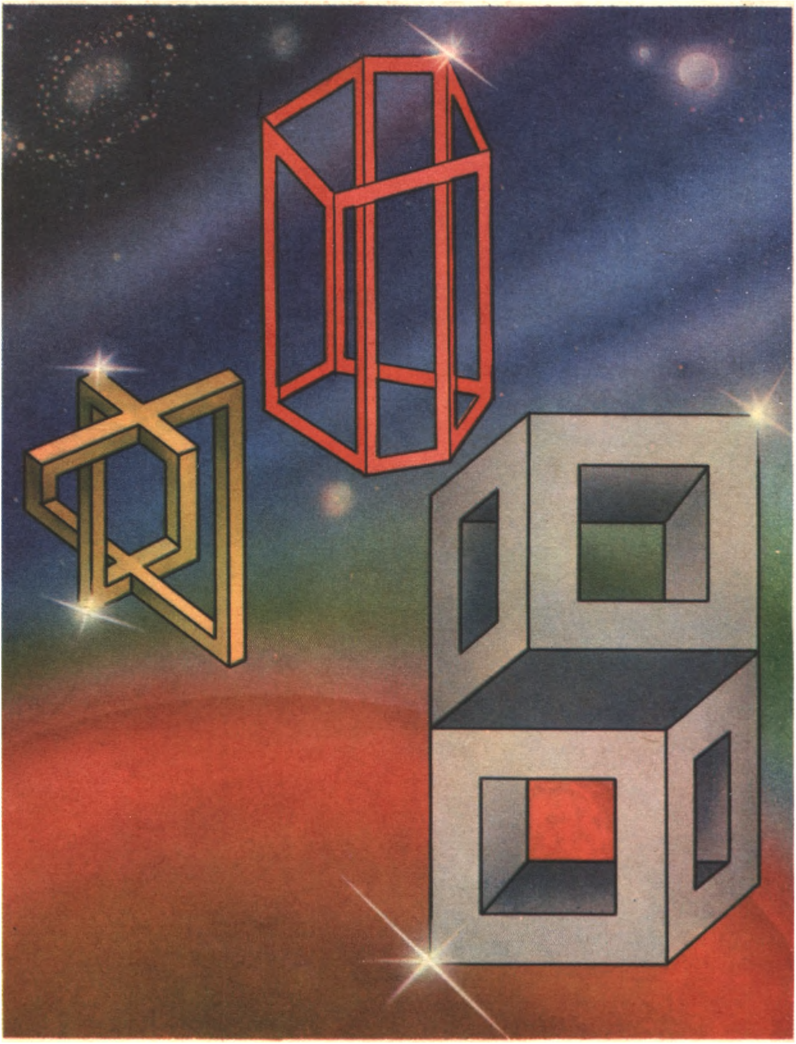




Помилкові зорові враження часто зумовлені тим, що ми сприймаємо об'єкти і їх частини не ізольовано, а в зв'язку з фігурами, що їх оточують, і на певному фоні.
Відрізки AB та A_1B_1 рівні, хоча здається, що $AB > A_1B_1$, $CD = DE$ і $C_1D_1 = D_1E_1$. Круг в оточенні малих кругів здається більшим за рівний йому круг, оточений великими кругами.



Дві пари вертикальних ліній паралельні, але фон з інших ліній зумовлює цікаву ілюзію: зліва лінії ніби розходяться, а справа здаються вгнутими кривими, які перетинаються зверху і знизу. На фоні пучка променів правий куб здається більшим за лівий, хоча всі три куби однакові. Лінії, які сходяться, створюють ілюзію глибини простору.



Звідки б ми не розглядали людські творіння, вони сприймаються нами як різноманітні поєднання геометричних фігур, причому найчастіше не таких, якими вони є в дійсності. Тому психологія сприймання просторових об'єктів і виявлені при цьому ілюзії відіграють важливу роль в архітектурі, аерофотозніманні, військовій справі. Цікава математика теж взяла ці ілюзії до свого активу.

80 к.

Парадокс... Ми так часто чуємо це слово у найрізноманітніших контекстах: парадокси НТР, парадокси еволюції, парадоксальні ситуації, парадоксальні результати... Завжди, коли якесь явище не вдається пояснити в межах певної системи понять, говорять, що зіткнулися з парадоксом. Трапляється це так часто, що люди вже в глибокій давнині змушені були близько познайомитися з цим несподіваним і вельми примхливим супутником своєї пізнавальної діяльності. Хто він? Ворог, приятель чи надто вимогливий союзник? Що віщує його поява? На ці і багато інших питань читачі знайдуть відповідь в цій книжці. Їм надається можливість ознайомитися з великою шеренгою парадоксів і софізмів, які завжди турбували і турбують всіх, хто шанує точну думку.

Радянська школа