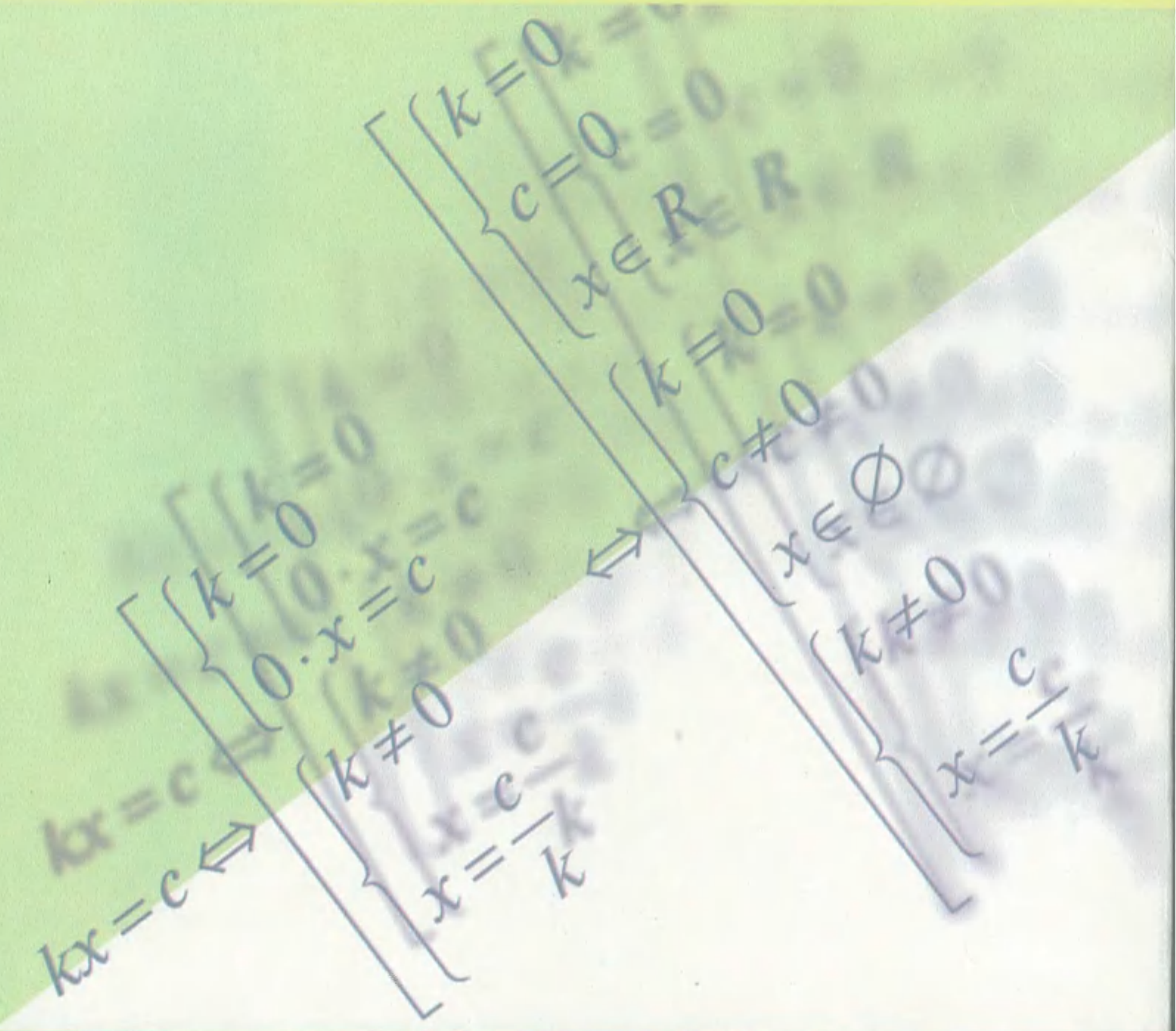
Г. В. Апостолова
В. В. Ясінський



Перші зустрічі з параметром

Міністерство освіти і науки України

Апостолова Г. В.
Ясінський В. В.

Перші зустрічі з параметром

(Видання третє)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ФАКТ
ВИДАВНИЦТВО
Факт-2008

УДК 511.235(075.4)
ББК 22.132я7
А76

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник (протокол засідання комісії з математики Науково-методичної ради з питань освіти Міністерства освіти і науки України від 29 січня 2004 р. № 1)

Рецензенти:
Член-кореспондент НАНУ В. С. Мельник;
Заслужений учитель України В. Б. Полонський.

Посібник присвячено традиційно важкому розділу шкільної математики — «Задачі з параметром». Матеріал посібника підібрано у послідовності, що сприяє поступовому формуванню логічного мислення розгалуження, вмінь і навичок роботи з параметрами. Посібник написано доступною для школярів мовою, він містить багато прикладів та розв'язань опорних задач. Видання буде корисним школярам при вивченні відповідних розділів математики та абітурієнтам при підготовці до вступу до вищих навчальних закладів.

ISBN 966-8408-95-0

Зміст

ПЕРЕДМОВА

В основі посібника — досвід багаторічної роботи авторів у системі доуніверситетської підготовки у Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут».

Задачі з параметрами традиційно входять до завдань вступних іспитів з математики до вищих навчальних закладів і мають за мету перевірку логічного мислення абітурієнтів.

Метою цього посібника є поступове адаптування читачів до завдань з параметрами, формування в них мислення розгалуження, вміння лаконічно і прозоро записувати розв'язання таких задач, формування елементарних навичок роботи з параметрами. Наприкінці посібника містяться опорні конспекти (ОК), які допоможуть повторити та узагальнити певний навчальний матеріал, полегшать його залучення до розв'язання задач.

Посібник може бути використаний при різних рівнях попередньої математичної підготовки учня.

Перші два параграфи — вступ до теми. У них обговорюється, що таке «параметр» і що означає «розв'язати задачу з параметром», розглядається застосування символіки теорії множин для скороченого запису математичних тверджень, елементи логіки висловлювань (виходячи з життєвих задач).

Далі пропонується алгоритм розв'язання лінійного рівняння з параметром і його опрацювання у задачах з одним та декількома параметрами та у рівняннях, що зводяться до лінійних. При первинному знайомстві цей матеріал сприятиме формуванню вихідних навичок розв'язування задач з параметром. Для більш підготовленого читача приклади задач, які містять декілька параметрів, допоможуть закріпити навички чіткого і лаконічного запису задач на розгалуження.

Поступово мова посібника стає все більш лаконічною, зменшується кількість однотипних прикладів, підвищується рівень їх складності.

Посібник вимагає послідовної самостійної роботи. Зауважимо, що засвоєння учнями тем першої частини цього посібника (§1—13) є гарантом того, що більш складні задачі з параметрами (§14—21) природно сприйматимуться, бо мислення учнів буде підготовленим.

Автори бажають читачеві терпіння і послідовності у роботі, тоді успіх обов'язково прийде.

Автори вдячні всім викладачам ФДП НТУУ «КПІ» за опрацювання першого видання посібника і зроблені ними зауваження.

§ 1. ГОТУЄМОСЬ ДО ЗУСТРІЧІ З ПАРАМЕТРАМИ

З'ясуємо, що таке «величина стала», що таке «величина змінна» і що означає «розв'язати задачу з параметром»

Якщо нагрівати газ у закритій посудині, то маса газу буде величиною сталою, а температура і тиск газу — змінними.

Якщо нагрівати газ, що знаходиться у посудині закритій поршнем, який може вільно рухатися, то тиск газу і його маса — сталі, а температура і об'єм — змінні величини.

Неважко уявити дослід, коли об'єм буде сталим, а, наприклад, значення тиску у рідині буде змінюватись.

Кажуть, що величина є

- ***сталою***, якщо вона приймає в даному розгляді одне й те ж саме значення;
- ***змінною***, якщо вона приймає в даному розгляді різні значення.

Розв'язати завдання з параметром *означає, що потрібно навести у відповіді сімейство розв'язків відносно невідомої величини (невідомих величин) для всіх можливих розглядів сталих величин (параметрів).*

Підкреслимо, що параметр у відповіді повинен «пробігти» всю числову вісь, або всі значення, що обумовлені умовою задачі. (Наприклад, може вимагатися знайти розв'язки для всіх невід'ємних значень параметра.)

Наведемо декілька прикладів.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2x = a$ відносно x.

Якщо поділити ліву і праву частини рівняння на 2 — отримаємо відповідь.

Відповідь: при $a \in R$ $x = a/2$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $ax = 2$ відносно x.

Рівняння можна поділити на a лише в випадку, коли $a \neq 0$. При $a = 0$ маємо $0 \cdot x = 2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Відповідь: при $a = 0$ $x \in \varnothing$; при $a \in (\infty; 0) \cup (0; \infty)$ $x = 2/a$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $ax = 2$ відносно x для всіх невід’ємних значень параметра a.

Відповідь: при $a = 0$ $x \in \varnothing$; при $a \in (0; \infty)$ $x = 2/a$.

Таким чином *відповідь* до завдань з параметрами має вигляд: *при «таких-то» значеннях параметра розв’язок є «таким-то».*

Наприклад, не є відповідю до задачі з параметром твердження: «при $x \neq a/2$ $x = a + b$». Потрібно заборону на певне значення x «перевести» у заборону певних значень параметричних величин. У наведеному прикладі «трагедія» $x = a + b = a/2$ трапляється при $b = -a/2$. Останнє співвідношення і потрібно заборонити у відповіді. Тоді правильною буде відповідь: «при $b = -a/2$ $x \in \varnothing$; при $b \neq a/2$ $x = a + b$».

Приклад 4.

$$\begin{cases} x \neq a \\ x = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in \{0;1\} \\ x \in \varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ x = a^2 \end{cases} \end{array} \right.$$

$a = a^2$ при $a \in \{0;1\}$

Відповідь: при $a \in \{0; 1\}$ $x \in \varnothing$; при $a \notin \{0; 1\}$ $x = a^2$.

Приклад 5.

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x \in \{k^2; k+3\} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 1 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} k = -1 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} k = -2 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} k \notin \{\pm 1; -2\} \\ x \in \{k^2; k+3\} \end{cases} \end{array} \right.$$

$x_1 = k^2 = 1$ при $k = \pm 1$;
$x_2 = k + 3\big|_{k=1} = 4 \neq 1$;
$x_2 = k + 3\big|_{k=-1} = 2 \neq 1$.

$x_2 = k + 3 = 1$ при $k = -2$;
$x_1 = k^2\big|_{k=-2} = 4 \neq 1$.

Відповідь: при $k\in\{1;-2\}$ $x=4$; при $k=-1$ $x=2$;

при $k\notin\{\pm1;-2\}$ $x\in\{k^2;k+3\}$.

Приклад 6.

$$\begin{cases} x\notin\{\pm1\} \\ x\in\{a+2;a\}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1\\ x\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases}a=-3\\ x=-3\end{cases} \\ \begin{cases}a=1\\ x=3\end{cases} \\ \begin{cases} a\notin\{\pm1;\ -3\} \\ x\in\{a+2;\ a\}\end{cases}\end{array}\right.$$

$x_1=a+2=1$ при $a=-1$;
$x_2=a\big|_{a=-1}=-1\in\{\pm1\}$
і не є розв'язком.

$x_1=a+2=-1$ при $a=-3$;
$x_2=a\big|_{a=-3}=-3\notin\{\pm1\}$.

$x_2=a=1$; $x_1\big|_{a=1}=3\notin\{\pm1\}$.

$x_2=a=-1$; $x_1\big|_{a=-1}=1\in\{\pm1\}$
і не є розв'язком.

Відповідь: при $a=-1$ $x\in\varnothing$; при $a=-3$ $x=-3$;

при $a=1$ $x=3$; при $a\notin\{\pm1;-3\}$ $x\in\{a+2;a\}$

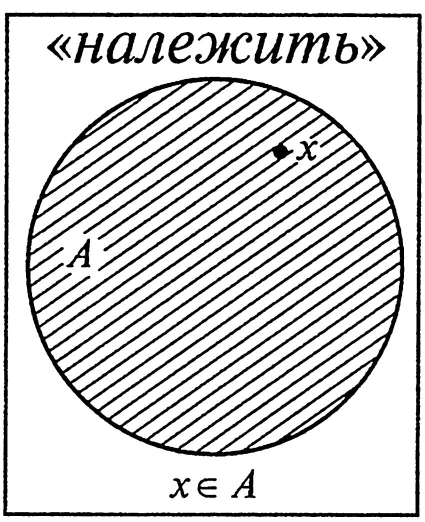
Завдання 1. Потрібно виправити помилки у відповідях до завдань з параметрами, які розв'язувалися відносно x:

1) при $x\neq2$ $x=a+3$;
2) при $x\neq a$ $x=a+b-1$;
3) при $x\neq b$ $x=a^2b$;
4) при $x\notin\{1;2\}$ $x=a+1$;
5) при $x\neq3$ $x\in\{a+1;a-1\}$;
6) при $x\notin\{1;0\}$ $x\in\{a;a+1\}$;
7) при $x\notin\{0;3\}$ $x\in\{a+3;a\}$;
8) при $x\notin\{1;2\}$ $x\in\{3;a-b\}$;
9) при $x\notin\{2;a\}$ $x\in\{a+b;0\}$;
10) при $x\notin\{1;-1\}$ $x\in\{a-1;a^2;4\}$.

§ 2. МОВА, ЯКОЮ МИ КОРИСТУЄМОСЬ

Запис розв'язання будь-якого завдання з математики у школі здійснюється, як правило, філологічною мовою, тобто нагадує усне пояснення розв'язання задачі біля дошки, або пояснення математичних тверджень у підручнику (останнє має за мету полегшити початкове сприймання навчального матеріалу). При розв'язанні завдань з параметрами легше чітко усвідомити умову задачі, побачити хід її розв'язання і зробити його опис спираючись на писемну математичну мову з використанням символіки теорії множин. Для цього треба пригадати що таке множина і усвідомити математичний зміст символів «і», «або», «рівносильно», «випливає» тощо.

***Множина** — це об'єднання у єдине ціле певних об'єктів, яке задають або переліком цих об'єктів (елементів множини), або через вказівку їхньої властивості.*



Кажуть, що об'єкт x **належить множині** A, якщо x **співпадає з одним із елементів множини** A.

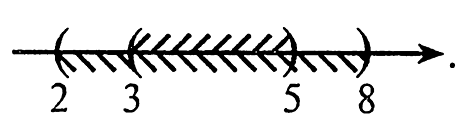
Наприклад, кіт належить множині вусатих.

Число 2 належить множині чисел інтервала $(0;4)$. Використовуючи символіку нашого словника, це має вигляд: $2\in(0;4)$.

Ще декілька прикладів: твердження «1 належить множині чисел 0, 1, 2» можна записати у вигляді:

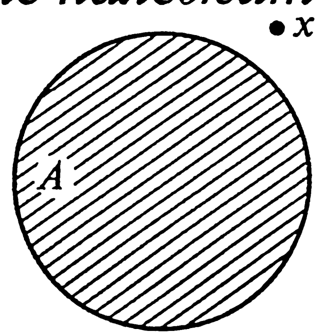
$$1\in\{0;1;2\};$$

$$\{0;1\}\in\{-1;0;1;2\};$$

$$(3;5)\in(2;8)$$ 

Запис «$B\in A$» читається: *B міститься у A; B включено до A; B є підмножиною A.* (Останнє твердження ще записують як $B\subset A$.)

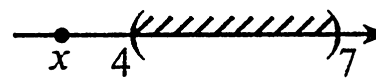
«не належить»



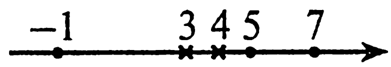
$x\overline{\in} A$ або $x \notin A$

Символ $\overline{\in}$ ($\notin$) означає **«не належить»**, тобто наше x **не входить до множини** A.

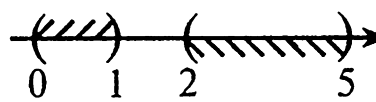
Наприклад: $2 \notin (3;10)$;

$x \notin (4;7)$ 

;

$\{3;4\} \overline{\in} \{-1;5;7\}$ 

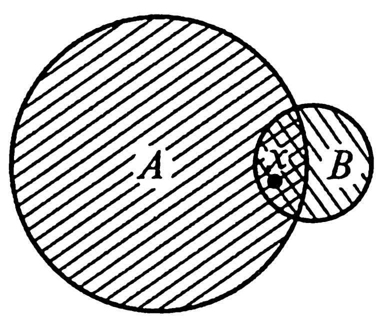
;

$(0;1) \notin (2;5)$ 

.

Запис $B \overline{\in} A$, або $B \notin A$, означає, що множина B *не міститься у* A.

«і»

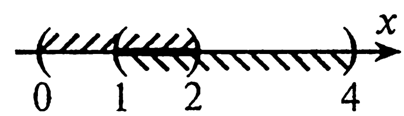


$A \cap B$ — перетин,

$\begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$

У математиці **«і»** означає **одночасне виконання двох умов**. Якщо точки x належать множинам A і B, то всі точки, що задовольняють такій умові належать ***перетину множин A і B*** (див. мал.). Позначається це або фігурною дужкою, або знаком $\cap$.

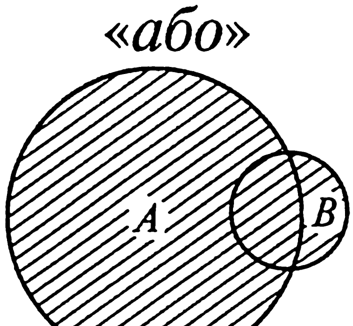
Наприклад:

$x \in (0;2) \cap (1;4)$ 

,

інакше $\begin{cases} x \in (0;2) \\ x \in (1;4) \end{cases}$, означає, що $x \in (1;2)$.

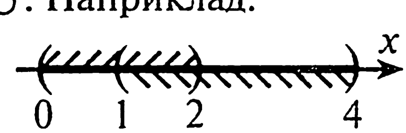
«або»



$A \cup B$ — об'єднання,

$\left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$

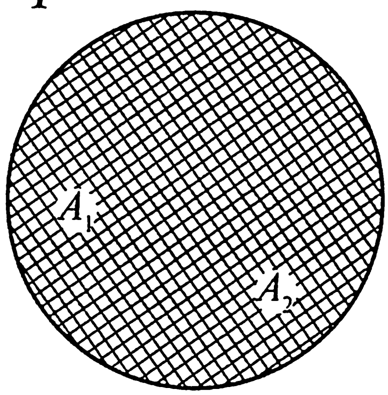
А $x \in A \cup B$ означає, що **виконується хоча б одна з умов**, тобто точка x належить множині A або множині B. В цьому випадку кажуть, що x належить ***об'єднанню множин A і B***. Позначається це або квадратною дужкою або знаком $\cup$. Наприклад:

$(0;2) \cup (1;4)$ 

,

інакше $\left[\begin{array}{l} x \in (0;2) \\ x \in (1;4) \end{array}\right.$, означає, що $x \in (0;4)$.

«рівносильно»



$A_1 = A_2$ або $A_1 = \varnothing = A_2$

$x \in A_1 \Leftrightarrow x \in A_2$

Нехай A_1 – множина всіх розв’язків рівняння (або нерівності)

$$f_1(x) \gtrless g_1(x),$$

а A_2 – множина всіх розв’язків

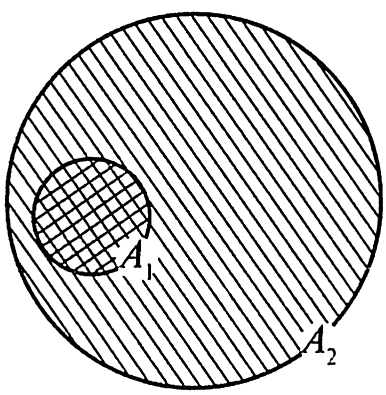
$$f_2(x) \gtrless g_2(x).$$

Кажуть, що ці вирази ***рівносильні***, якщо всі їхні розв’язки **співпадають**, або якщо **обидва вирази не мають сенсу**, тобто A_1 і A_2 – пусті множини. Позначається це так:

$$f_1(x) \gtrless g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) \gtrless g_2(x)$$

Наприклад: $4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; $|x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$; $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$.

«випливає»



$A_1 \subset A_2$

$x_1 \in A_1 \Rightarrow x_1 \in A_2$

Кажуть, що з виразу

$$f_1(x) \gtrless g_1(x)$$

випливає вираз $f_2(x) \gtrless g_2(x)$, якщо множина розв’язків другого виразу **містить всі розв’язки першого**.

Записується це таким чином:

$$f_1(x) \gtrless g_1(x) \Rightarrow f_2(x) \gtrless g_2(x)$$

Зверніть увагу: *те, що випливає – більш широке поняття.*

Дійсно, якщо є кіт, то звідси випливає, що він вусатий, але не навпаки! Множина вусатих містить «сторонні розв’язки» у вигляді козаків, моржів, дядька Василя тощо.

Наприклад: якщо $x = 2$, то звідси випливає, що $|x| = 2$, але не навпаки. (Тут $x = -2$ – сторонній корінь.)

$$\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \quad (\leftarrow \text{сторонній корінь}) \\ x_2 = -2 \end{array}\right.$$

Для того, щоб виключити «сторонні розв'язки» з множини вусатих і отримати котів, потрібно до умови «ВУСАТИЙ» додати умови: наші «вусаті» нявкають, полюбляють молоко, ловлять мишей... Тепер ми не сплутаємо кота з дядьком Василем, тобто одержимо рівносильні поняття.

Розв'язок рівняння, яке ми розглядали вище, можна, врахувавши область його визначення, записати через знак рівносильності наступним чином:

$$\frac{x^2}{x-2}=\frac{4}{x-2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=-2.$$

Завдання 2.

У (1—20) треба вставити знак $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ або $\Leftarrow$:

1) муха ... літає;
2) літає ... літак;
3) дві ноги ... курка;
4) кішка ... має хвіст;
5) бородатий ... козел;
6) ти зайшов в свій дім ... зайшов в свою квартиру;
7) $x<-3$ ... $x=-5$;
8) $x^2=9$ ... $x=3$;
9) $x<4$ ... $x<2$;
10) $x<3$ ... $|x|<3$;
11) $x^2=1$ ... $|x|=1$;
12) $x\in(4;\infty)$ ... $|x|>4$;
13) $x^2=0$ ... $x=0$;
14) $\sqrt{a^2}=3$ ... $a=3$;
15) $\begin{cases}x<3\\ x>1\end{cases}$ ... $x\in[2;3)$;
16) $x^3=1$ ... $x=1$;
17) $x\in(1;3)$ ... $\begin{cases}x\in(-3;3)\\ x>1\end{cases}$;
18) $\frac{x^2}{x-3}=\frac{9}{x-3}$ ... $x=-3$;
19) $5x=a$ ... $x=\frac{a}{5}$;
20) $ax=5$ ... $x=\frac{5}{a}$.

У (21—30) треба записати вираз, рівносильній даному:

21) дівчатка $\bigcup$ хлопчики;
22) дівчатка $\bigcap$ хлопчики;
23) $\begin{cases}x\in(2;4]\\ x<-3\end{cases}$;
24) $\left[\begin{array}{l}x\in(2;4]\\ x<-3\end{array}\right.$;
25) $(0;5)\bigcap(3;6)$;
26) $(0;5)\bigcup(3;6)$;

27) $(x-2)^2>0$; 28) $(x-2)^2>-10$;

29) $\dfrac{2x^2}{x-2}=\dfrac{8}{x-2}$; 30) $\sqrt{a}=2$; 31) $\sqrt{a^2}=2$.

З'ясувати правильність логічного кроку інколи допомагає схематичне зображення множин об'єктів, про які йде мова. Їх називають *діаграмами Венна*.

Наприклад, розглянемо твердження:
«Усі гусениці їдять капусту. Я їм капусту. Тоді я – гусениця».

Представимо умовно множини гусениць, людей і тих, хто їсть капусту у вигляді схем (див малюнок). Відразу стає зрозумілим, що множини людей і гусениць не перетинаються. Тоді наведений висновок – хибний.

У (32—35) треба намалювати діаграми множин. Запишіть яка з них є підмножиною іншої.

32) C – множина учнів школи; B – множина учнів цієї школи, які вивчають німецьку мову.

33) K – множина риб; N – множина окунів.

34) M – множина трикутників; B – множина рівнобедрених трикутників.

35) L – множина прямокутників; P – множина паралелограмів.

У (36—44) з'ясуйте з допомогою діаграм Венна правильність, або хибність наступних тверджень:

36) Усі планети обертаються навколо своєї вісі, тоді деякі планети обертаються навколо своєї вісі.

37) Діти вчаться у школі, тоді всі діти – школярі.

38) Деякі люди – руді, тоді всі люди – руді.

39) Деякі коники є рибами. Усі риби вміють плавати. Тоді деякі коники вміють плавати.

40) Деякі діти полюбляють банани. Усі мавпи полюбляють банани. Тоді деякі діти – мавпи.

41) Деякі з дітей — школярі. Всі школярі ходять до школи. Тоді деякі діти ходять до школи.

42) Усі дерева мають листя. Усі кущі мають листя. Тоді всі кущі – дерева.

43) Усі квадрати є паралелограмами. Тоді паралелограм – квадрат.

44) Усі числа x діляться на 6. Тоді вони діляться на два.

45) Деякі трикутники — рівносторонні. Усі рівносторонні трикутники — гострокутні. Тоді деякі гострокутні трикутники мають рівні сторони.

46) Деякі чотирикутники — ромби. У ромбів діагоналі перетинаються під прямим кутом. Тоді всі чотирикутники, у яких діагоналі перетинаються під прямим кутом, — ромби.

47) Квадрат числа дорівнює 25, тоді це число дорівнює 5.

48) Число кратне 5, тоді його квадрат кратний 25.

49) Квадрат числа дорівнює 9, тоді модуль цього числа дорівнює 3.

50) Модуль від'ємного числа дорівнює a^2. Тоді це число дорівнює $\left(-a^2\right)$.

§ 3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

Будь-яке лінійне рівняння, яке розв'язується відносно невідомого x, якщо перенести всі доданки, які містять x, в ліву частину рівняння, а доданки, які не містять x – в праву, зводиться до рівняння виду $kx = c$.

Наше улюблене

$$kx = c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 0 \\ 0 \cdot x = c \end{cases} (1) \\ \begin{cases} k \neq 0 \\ x = \dfrac{c}{k} \end{cases} (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 0 \\ c = 0 \\ x \in R \end{cases} (3) \\ \begin{cases} k = 0 \\ c \neq 0 \\ x \in \varnothing \end{cases} (4) \\ \begin{cases} k \neq 0 \\ x = \dfrac{c}{k} \end{cases} (5) \end{array}\right.$$

Зверніть увагу, що умова (1) «розпалась» на дві: (3) і (4), а умова (2) – ні!

УМОВА ПРИ $k \neq 0$ «РОЗГАЛУЖУВАТИСЬ» НЕ БУДЕ!

А тепер, дивлячись на «наше улюблене», розв'яжемо разом декілька рівнянь, вважаючи невідомим x *.

Приклад 1.

$$ax = x - a + 1 \Leftrightarrow (a-1)x = (1-a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 1 = 0 \\ 0 \cdot x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a - 1 \neq 0 \\ x = \dfrac{1-a}{a-1} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ x \in R \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

---

* Тут і надалі маємо на увазі визначення лише дійсних розв'язків при дійсних значеннях параметрів.

Відповідь:

при $a=1$ $x\in R$; при $a\neq 1$ $x=-1$.

Приклад 2.

$$1+ax=2x-b \Leftrightarrow (a-2)x=-b-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-2=0 \\ 0\cdot x=-b-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a-2\neq 0 \\ x=\dfrac{-b-1}{a-2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ -b-1=0 \\ x\in R \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ -b-1\neq 0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 2 \\ x=-\dfrac{b+1}{a-2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ x\in R \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b\neq -1 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 2 \\ x=\dfrac{b+1}{2-a} \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:

при $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} x\in R$; при $\begin{cases} a=2 \\ b\neq -1 \end{cases} x\in\varnothing$; при $a\neq 2 x=\dfrac{b+1}{2-a}$.

Приклад 3.

$$2ax+m=bx+3n \Leftrightarrow (2a-b)x=3n-m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a-b=0 \\ 0\cdot x=3n-m \end{cases} \\ \begin{cases} 2a-b\neq 0 \\ x=\dfrac{3n-m}{2a-b} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=2a \\ m=3n \\ x\in R \end{cases} \\ \begin{cases} b=2a \\ m\neq 3n \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} b\neq 2a \\ x=\dfrac{3n-m}{2a-b} \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:

при $\begin{cases} b = 2a \\ m = 3n \end{cases}$ $x \in R$; при $\begin{cases} b = 2a \\ m \neq 3n \end{cases}$ $x \in \varnothing$; при $b \neq 2a$ $x = \dfrac{3n - m}{2a - b}$.

Завдання 3. Розв'яжіть рівняння, вважаючи за невідоме x:

1) $5(x-a) = 3(x-b)$;
2) $ax - 1 = x + a$;
3) $ax - 1 = x - a$;
4) $2x - ax + 3 = a$;
5) $(m+1)x = n - x$;
6) $ax - b = x - a$;
7) $ax + ab = ac$;
8) $a(a-1)x - ab = a$;
9) $mx - nx = 5m - 5n$;
10) $ax + x = a^2 + 2a + 1$;
11) $ax - 2x = a^2 - 4$;
12) $(a+b)x + a = c$;
13) $m^2x + 2mnx = 3m^2 - 3n^2 - n^2x$;
14) $a^2x + 1 = a + ax$;
15) $bx - abx = b^2c + ab^2$;
16) $a^2x + a = b^2x + b$.

§ 4. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ В ЗНАМЕННИКУ

Розв'яжемо разом рівняння $x+\frac{x}{a}=b$ відносно x.

З чого ви почали? Правильно, з області визначення виразу. Після того, як введено заборону на $a=0$, можна привести рівняння до спільного знаменника і відкинути його (тобто помножити ліву і праву частину рівняння на $a\neq 0$). А далі «під об'явою» «$a\neq 0$» розв'язуємо лінійне рівняння з параметром знайоме нам з попереднього параграфу*:

Приклад 1.

$$x+\frac{x}{a}=b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ (a+1)x=ab \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ 0\cdot x=-b \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ x=\dfrac{ab}{a+1} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ x\in R \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ b\neq 0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ x=\dfrac{ab}{a+1} \end{cases} \end{array}\right.$$

---

* **Примітка для вчителів**: якщо ви кажете, що цю задачу простіше розв'язати аналізуючи значення коефіцієнта $\left(1+\frac{1}{a}\right)$ перед x, то ви праві. Але учням краще спочатку розв'язувати такі рівняння запропонованим нами способом, бо пізніше це полегшить оволодіння темою «розв'язування рівнянь з параметром, що зводяться до лінійних і мають невідоме в знаменнику» (див. § 7.)

Відповідь:

при $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ \begin{cases} a=-1 \\ b\neq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $x\in\varnothing$; при $\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$ $x\in R$; при $\begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq -1 \end{cases}$ $x=\dfrac{ab}{a+1}$.

Розглянемо ще декілька прикладів розв'язування відносно x такого типу рівнянь.

Приклад 2.

$$\frac{x}{b-a}=\frac{2bx}{b^2-a^2}-\frac{5a}{a+b}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=\pm b \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq\pm b \\ (a-b)x=5a(a-b) \end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=\pm b \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq\pm b \\ x=5a \end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:

при $a=\pm b$ $x\in\varnothing$; при $a\neq\pm b$ $x=5a$

Приклад 3.

$$\frac{a+x}{a}-m=\frac{b+x}{b}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \\ x\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ (b-a)x=abm \end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \\ x\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ a=b \\ 0\cdot x=a^2m \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ a\neq b \\ x=\dfrac{abm}{b-a} \end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \\ x\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases} a=b\neq 0 \\ m=0 \\ x\in R \end{cases} \\ \begin{cases} a=b\neq 0 \\ m\neq 0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ a\neq b \\ x=\dfrac{abm}{b-a} \end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:

при $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ \begin{cases} a=b \\ m\neq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $x\in\varnothing$; при $\begin{cases} a=b\neq 0 \\ m=0 \end{cases}$ $x\in R$; при $\begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ a\neq b \end{cases}$ $x=\dfrac{abm}{b-a}$.

Тепер попрацюйте самостійно.

Завдання 4. Розв'яжіть рівняння, в яких невідоме позначене однією з літер x, y, z, u, t:

1) $\dfrac{x}{m}-x=n$

2) $t+\dfrac{at}{b}=1$

3) $\dfrac{u}{p}+\dfrac{u}{q}=m$

4) $\dfrac{z}{m}-\dfrac{z}{n}=1$

5) $\dfrac{y}{a}-b=\dfrac{y}{b}-a$

6) $t+\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{bt}{a}+a$

7) $\dfrac{x-m}{n}=\dfrac{x-n}{m}$

8) $\dfrac{a+x}{b}-2=\dfrac{x-b}{a}$

9) $\dfrac{z-a}{a}-m=\dfrac{z-b}{b}-n$

10) $m+\dfrac{n+y}{n}=n-\dfrac{m+y}{m}$

11) $\dfrac{t+p}{q}-\dfrac{q}{p}=\dfrac{t-q}{p}+\dfrac{p}{q}$

12) $\dfrac{a+t}{a}-m=\dfrac{b+t}{b}-n$

13) $\dfrac{x-m}{m}+p=\dfrac{x-n}{n}+q$

14) $\dfrac{y+d}{c}-\dfrac{y-c}{d}=2$

15) $\dfrac{x-m}{n+m}=\dfrac{x-n}{n-m}$

16) $\dfrac{a+bz}{a+b}=\dfrac{c+dz}{d+c}$

17) $\dfrac{n+nx}{m-n}=\dfrac{p+qx}{p-q}$

18) $\dfrac{y}{a-b}-\dfrac{3}{a+b}=\dfrac{4by}{a^2-b^2}$

19) $\dfrac{z}{a}+\dfrac{z}{b-a}=\dfrac{a}{a+b}$

§ 5. ПРЯМІ І КОЛА НА КООРДИНАТНІЙ ПЛОЩИНІ

В роботі з завданнями цього параграфу необхідно пам'ятати, що:

- *у рівнянні* $y = kx + l$ *коефіцієнт* k *є тангенсом кута нахилу заданої прямої до вісі* OX *;*
- *загальним виглядом прямої є вираз* $ax + by + c = 0$*, а у вигляді* $y = kx + l$ *можна задати пряму лише коли вона не є паралельною вісі* OY*, тобто при* $b \neq 0$ *(* $x \neq const$ *);*
- *прямі* $y = k_1x + l_1$ *і* $y = k_2x + l_2$ *паралельні, якщо* $k_1 = k_2$*;*
- *прямі* $y = k_1x + l_1$ *і* $y = k_2x + l_2$ *перпендикулярні, якщо* $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ *;*
- *на площині* (XOY) *маємо коло, якщо*

  $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

  при цьому точка $(a; b)$ *є його центром, а* R *— радіусом;*
- *взаєморозташування прямої* $y = kx + l$ *і кола* $(x-a)^2 + (x-b)^2 = R^2$ *на координатній площині аналізується або за допомогою графічної інтерпретації, або через кількість розв'язків квадратного рівняння* $(x-a)^2 + ((kx+l)-b)^2 = R^2$.

Завдання 5.

1) Складіть рівняння прямих, що проходять паралельно до прямої:

а) $2x - 3y - a = 0$;

б) $x = 3$;

в) $y = 2$;

г) $ax + 2y - 1 = 0$;

д) $2x + ay - 1 = 0$.

2) Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(a; 4)$ і паралельна:

а) вісі OX;

б) вісі OY.

3) Задайте формулою множину всіх прямих, що перетинають під кутом $60°$:

а) вісь OX;

б) вісь OY.

4) Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(0;2)$ перпендикулярно до прямої:

а) $2x-3y-a=0$;

б) $ax+2y-1=0$;

в) $2x+ay-1=0$.

5) При яких значеннях m прямі $mx-(m+3)y+m+6=0$ і $(m+1)x+(1-m)y+m-2=0$ мають спільну точку, яка міститься на:

а) вісі абсцис;

б) вісі ординат?

6) Задайте аналітично множину всіх кіл, що мають за центр:

а) початок координат;

б) точку $O(-1;1)$;

в) точку, що міститься на вісі OX;

г) точку, що міститься на вісі OY;

д) точку, що міститься на прямій $y=x$.

7) Скільки точок перетину мають коло та пряма, які задано виразами

а) $(x-a)^2+(y-a)^2=1$ і $y=x$;

б) $(x-a)^2+(y+a)^2=1$ і $y=-x$;

в) $(x-a)^2+(y-a)^2=1$ і $y=-x$.

У (8—15) треба визначити кількість розв'язків системи в залежності від значення параметра a:

8) $\begin{cases} y=ax \\ x^2-1=-y^2 \end{cases}$.

9) $\begin{cases} x=a \\ y^2-1=-x^2 \end{cases}$.

10) $\begin{cases} y = a \\ (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

11) $\begin{cases} y - x = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

12) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

13) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

14) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

15) $\begin{cases} x^2 + \left(y - \sqrt{a^2 - 2}\right)^2 = a^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

16) Задано коло $(x+3)^2 + y^2 = 4$. Записати рівняння прямих, що проходять через початок координат і:

а) не мають точок, спільних з даним колом;

б) мають лише одну спільну точку з даним колом;

в) перетинають коло у двох точках.

§ 6. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

Перше ніж розпочинати роботу за цим параграфом пригадайте, будь-ласка, графічне тлумачення розв'язання системи лінійних рівнянь і умови існування її розв'язків (ОК-7).

А тепер розглянемо декілька прикладів:

Приклад 1. Для всіх значень параметра a розв'язати систему:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ a^2x-y=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x-y=a \\ x-y=1 \end{cases} \tag{1}$$

Розв'язання:

Проаналізуємо відношення відповідних коефіцієнтів рівнянь системи:

$$\frac{a^2}{1}=\frac{-1}{-1} \text{ при } a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm 1;$$

$$\frac{a^2}{1}=\frac{-1}{-1}=\frac{a}{1} \text{ при } a=1 \text{ і } \frac{a^2}{1}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{a}{1} \text{ при } a=-1.$$

Тоді при $a=1$ система має безліч розв'язків: $\begin{cases} x\in R \\ y=x-1 \end{cases}$;

при $a=-1$ система не має розв'язків;

при $a\neq\pm 1$ система має єдиний розв'язок.

Знайдемо останній:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ a^2x-x+1=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ \left(a^2-1\right)x=a-1 \end{cases}.$$

За умови $a\neq\pm 1$ маємо

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{a+1} \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{a+1} \\ y=-\dfrac{a}{a+1} \end{cases}.$$

Відповідь:

при $a=1$ $\begin{cases} x\in R \\ y=x-1 \end{cases}$;

при $a=-1$ $\{x;y\}\in\varnothing$;

при $a\neq\pm1$ $\left(\dfrac{1}{a+1};-\dfrac{a}{a+1}\right)$.

Приклад 2. Для всіх значень параметра a розв'язати систему

$$\begin{cases} ax+(a+1)y=-3 \\ 2x-(a+1)y=-6 \end{cases}. \qquad (1)$$

Розв'язання:

1) $\dfrac{a}{2}=\dfrac{a+1}{-(a+1)}$ при $a=-2$;

2) $\left.\dfrac{a}{2}=\dfrac{a+1}{-(a+1)}\right|_{a=-2}\neq\dfrac{-3}{-6}$.

Висновок: при $a=-2$ $\{x;y\}\in\varnothing$.

3) Дії (1—2) правильні за умови $a\neq-1$. Тому випадок $a=-1$ розглянемо окремо:

$$\begin{cases} -1\cdot x=-3 \\ 2x=-6 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Висновок: при $a=-1$ $\{x;y\}\in\varnothing$.

4) При $a\notin\{-2;-1\}$ система має один розв'язок.

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases} (a+2)x=9 \\ (a+1)y=2x+6 \end{cases};$$

$a\notin\{-2;-1\}$, тому

$$\begin{cases} x=-\dfrac{9}{a+2} \\ y=\dfrac{6(a-1)}{(a+1)(a+2)} \end{cases}.$$

Відповідь:

при $a \in \{-2; -1\}$ $\{x;\ \ y\} \subset \varnothing$;

при $a \notin \{-2; -1\}$ $\left(-\dfrac{9}{a+2}; \dfrac{6(a-1)}{(a+1)(a+2)}\right)$.

Приклад 3. При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases}(a+1)x-3y=4\\2x-ay=3\end{cases}$$ не має розв'язків?

Розв'язання:

Умова виконується при $\dfrac{a+1}{2}=\dfrac{-3}{-a}\neq\dfrac{4}{3}$:

$$\frac{a+1}{2}=\frac{3}{a}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\a^2+a-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\a\in\{-3;2\}\end{cases}\Leftrightarrow a\in\{-3;2\};$$

$$\left.\frac{-3}{-a}\right|_{a=-3}=-1\neq\frac{4}{3};\ \left.\frac{-3}{-a}\right|_{a=2}=\frac{3}{2}\neq\frac{4}{3}.$$

При $a=0$ маємо 1 розв'язок.

Відповідь: $a\in\{-3;2\}$.

Приклад 4. При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases}(a-1)x+y=2\\(a-1)^3x+(3a-5)y=8\end{cases}\qquad(1)$$

не має розв'язків?

Розв'язання:

Умова виконується при

$$\frac{(a-1)^3}{a-1}=\frac{3a-5}{1}\neq\frac{8}{2}:$$

$$\frac{(a-1)^3}{a-1}=3a-5\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 1\\a^2-2a+1=3a-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 1\\a^2-5a+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\a=2\end{array}\right.;$$

$$\left.\frac{3a-5}{1}\right|_{a=3}=4=\frac{8}{2};\ \left.\frac{3a-5}{1}\right|_{a=2}=1\neq\frac{8}{2}.$$

В випадку $a=1$ (1) приймає вигляд:

$$\begin{cases} y=2 \\ -2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow y\in\varnothing.$$

Відповідь: $a\in\{2;1\}$.

Приклад 5. Знайти всі значення параметра a при яких система має розв'язки, знайти їх кількість

$$\begin{cases} a^2x+(2-a)y=4+a^3 \\ ax+(2a-1)y=a^5-2 \end{cases}. \qquad (1)$$

Розв'язання:

1) $\dfrac{a^2}{a}=\dfrac{2-a}{2a-1}\Leftrightarrow\begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq 1/2 \\ a(2a-1)=2-a \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq 1/2 \\ a^2=1 \end{cases}\Leftrightarrow a=\pm 1$;

2) $\left.\dfrac{a^2}{a}\right|_{a=1}=1\neq\left.\dfrac{4+a^3}{a^5-2}\right|_{a=1}=\dfrac{5}{-1}=-5$ і $\{x;\ y\}\subset\varnothing$;

3) $\left.\dfrac{a^2}{a}\right|_{a=-1}=-1=\left.\dfrac{4+a^3}{a^5-2}\right|_{a=-1}=\dfrac{3}{-3}=-1$ і $\begin{cases} x\in R \\ y=1-x/3 \end{cases}$;

4) При $a=0$ маємо $\begin{cases} 2y=4 \\ -y=-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in R \\ y=2 \end{cases}$.

Відповідь:

при $a\in\{-1;0\}$ – безліч розв'язків;

при $a=1$ – немає розв'язків;

при $a\notin\{\pm 1;0\}$ – один розв'язок.

Завдання 6.

У (1—4) для всіх значень параметра a знайдіть розв'язки системи.

1) $\begin{cases} 3x+6y=1-a \\ 2x+a^2y=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} ax+(a+1)y=-3 \\ 4x+(a+4)y=-6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (a+1)x+8y=4a \\ ax+(a+3)y=3a-1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} (1-a)x-2ay=2 \\ 2ax+(a-1)y=a-1 \end{cases}$

У (5—6) треба визначити при яких значеннях параметра a система має єдиний розв'язок. Знайдіть цей розв'язок.

5) $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ ax+12y=12 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} ax-(a-1)y=0{,}5 \\ (a-1)x-ay=a \end{cases}$

У (7—9) треба визначити при яких значеннях параметра a система не має розв'язків.

7) $\begin{cases} \dfrac{12}{a}x+3y=a-1 \\ 3ay+2x=0 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3ax+(a-2)^5 y=6 \\ ax+3(a-2)^3 y=2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} (a-3)^4 x+a(5-a)y=28 \\ (a-3)^2 x+ay=7 \end{cases}$

У (10—12) треба визначити при яких значеннях параметра a система має безліч розв'язків. Запишіть їх множину.

10) $\begin{cases} 2x+ay=a+2 \\ (a+1)x+2ay=2a+4 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} ax+y=2 \\ x+ay=2a \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2ax+y=6a^2-5a+1 \\ x+2ay=5a^2 \end{cases}$

У (13—17) треба визначити при яких значеннях b система має хоча б один розв'язок*.

13) $\begin{cases} bx+2y=x+1 \\ y=x+1 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} bx-y=1 \\ x=1+by \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 2x+by=b+3y-3 \\ 2x+4y=4 \end{cases}$

16) $\begin{cases} bx+2y=b+2 \\ 2bx+(b+1)y=2b+4 \end{cases}$; 17) $\begin{cases} (a-5)x-2ay=a-7 \\ (a-5)x+6y=3a \end{cases}$

---

* Зверніть увагу, що «хоча б один» означає «один або більше».

§ 7. РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО ЛІНІЙНИХ

Тепер розв'яжемо декілька рівнянь, які зводяться до лінійних, і в яких *невідоме* x міститься в *знаменнику*.

Приклад 1.

$$\frac{a}{x}-1=\frac{b}{x}-9. \qquad (1)$$

Знайдемо область визначення виразу (1): $D: x \neq 0$

Зведемо (1) до спільного знаменника. Із врахуванням умови $x \in D$ можна спільний знаменник відкинути. Маємо:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \\ 8x = b-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{b-a}{8} \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Останній запис ще не є відповіддю. Ми повинні заборону на певне значення х перевести у заборону на певні значення параметру (аналогічно тому, як ми це робили у § 1).

$x=\dfrac{b-a}{8}=0$ при $b=a$ тоді:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ x \in \varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq b \\ x = \dfrac{b-a}{8} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Відповідь: при $a=b$ $x \in \varnothing$; при $a \neq b$ $x=\dfrac{b-a}{8}$.

Приклад 2.

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{2x}=\frac{2x+a}{2a}-\frac{a}{x} \qquad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \{a,x\} \subset D \\ ax = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ x \in \varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x \neq 0 \\ x = a \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ x \in \varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = a \end{cases} \end{array} \right.$$

$$D: \begin{cases} a \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$x = a = 0$ при $a = 0$

Відповідь: при $a=0$ $x \in \varnothing$; при $a \neq 0$ $x = a$.

Приклад 3.

$$a^2 - \frac{a}{x} + \frac{b^2}{ax} = \frac{a^2}{bx} - \frac{b}{x} + b^2 \qquad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \{a,b,x\} \subset D \\ ab(a-b)(a+b)x = (a-b)(a+b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{a, b, x\} \subset D \\ (a-b)(a+b)x = (a-b)(a+b)^2 (ab)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$D: \begin{cases} a \neq 0 \\ x \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

$x = \dfrac{a+b}{ab} = 0$

при $a = -b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{a, b, x\} \subset D \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \pm b \\ x \in R \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq \pm b \\ x = \dfrac{a+b}{ab} \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}.$$

Відповідь:

при $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array} \right.$ $x \in \varnothing$;

при $a = \pm b \neq 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

при $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a \neq \pm b \end{cases}$ $x = \dfrac{a+b}{ab}$.

Приклад 4.

$$\frac{a-bm}{mx}-\frac{c-bn}{nx}=1 \qquad (4)$$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} \{m, n, x\} \subset D \\ mnx = an-cm \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \{m, n, x\} \subset D \\ x = \dfrac{an-cm}{mn} \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} m \neq 0 \\ n \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{an-cm}{mn} = 0$$

при $an-cm$

$$(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=0 \\ n=0 \\ an=cm \end{array} \right. \\ x \in \varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} m \neq 0 \\ n \neq 0 \\ an \neq cm \\ x = \dfrac{a}{m}-\dfrac{c}{n} \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь:

при $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ n=0 \\ an=cm \end{array} \right.$ $x \in \varnothing$; при $\begin{cases} m \neq 0 \\ n \neq 0 \\ an \neq cm \end{cases}$ $x = \dfrac{a}{m}-\dfrac{c}{n}$.

Приклад 5.

$$\frac{a+b}{x}-c=d-\frac{a-b}{x} \qquad (5)$$

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (c+d)x = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \neq 0 \\ c=-d \\ 0 \cdot x = 2a \end{cases} \\ \begin{cases} x \neq 0 \\ c \neq -d \\ x = \dfrac{2a}{c+d} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$D: x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=-d \\ a=0 \\ x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} c=-d \\ a\neq 0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} c\neq -d \\ a=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} c\neq -d \\ a\neq 0 \\ x=\dfrac{2a}{c+d} \end{cases} \end{array}\right.$$

$x=\dfrac{2a}{c+d}=0$ при $a=0$

Відповідь:

при $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=-d \\ a\neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} c\neq -d \\ a=0 \end{cases} \end{array}\right.$ $x\in\varnothing$;

при $\begin{cases} c=-d \\ a=0 \end{cases}$ $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$;

при $\begin{cases} c\neq -d \\ a\neq 0 \end{cases}$ $x=\dfrac{2a}{c+d}$.

Приклад 6.

$$\frac{a+b}{x}+\frac{a}{b}=-1 \qquad (6)$$

$$(6)\Leftrightarrow \begin{cases} \{b;x\}\subset D \\ (a+b)x=-b(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \{b;x\}\subset D \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-b \\ 0\cdot x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq -b \\ x=-b \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$D:\begin{cases} x\neq 0 \\ b\neq 0 \end{cases}$

$x=-b=0$ при $b=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a=-b\neq 0 \\ x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} b\neq 0 \\ a\neq -b \\ x=-b \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
при $b=0$ $x\in\varnothing$;
при $a=-b\neq 0$
$x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$;
при $\begin{cases} b\neq 0 \\ a\neq -b \end{cases}$ $x=-b$.

Приклад 7.

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}. \qquad (7)$$

$$(7)\Leftrightarrow\begin{cases}\{b;x\}\subset D\\(a+b)x=a-b\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\{b;x\}\subset D\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-b\\0\cdot x=-2b\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq -b\\x=\dfrac{a-b}{a+b}\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=0\\x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a=-b\\x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq -b\\b\neq 0\\x=\dfrac{a-b}{a+b}\end{cases}\end{array}\right.$$

$D:\begin{cases}x\neq 1\\b\neq 0\end{cases}$

$x=\dfrac{a-b}{a+b}=1$ при $a+b=a-b$, тобто якщо $b=0$

Відповідь:

при $\left[\begin{array}{l}a=-b\\b=0\end{array}\right.$ $x\in\varnothing$;

при $\begin{cases}a\neq -b\\b\neq 0\end{cases}$ $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

Приклад 8.

$$\frac{x+a}{a}+\frac{x}{x-a}=\frac{x-a}{a} \qquad (8)$$

$$(8)\Leftrightarrow\begin{cases}\{a,x\}\subset D\\3ax=2a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\{a,x\}\subset D\\x=\dfrac{2a}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq 0\\x\neq a\\x=\dfrac{2a}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

$D:\begin{cases}a\neq 0\\x\neq a\end{cases}$

$x=\dfrac{2a}{3}=a$ при $a=0$

Відповідь:

при $a=0$ $x\in\varnothing$; при $a\neq 0$ $x=\dfrac{2a}{3}$.

Приклад 9.

$$\frac{3}{x-a}+\frac{2}{x+a}=\frac{4x+7a}{x^2-a^2} \qquad (9)$$

$$(9)\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm a\\ x=6a\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq 0\\ x=6a\end{cases}\end{array}\right.$$

$D: x\neq\pm a$

$x=6a=\pm a$ при $a=0$

Відповідь:
якщо $a=0$ $x\in\varnothing$;
якщо $a\neq 0$ $x=6a$.

Приклад 10.

$$\frac{a+b}{x-a}-\frac{a-b}{x+a}=0 \qquad (10)$$

$$(10)\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm a\\ bx=-a^2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\neq\pm a\\ \begin{cases}b=0\\ 0\cdot x=-a^2\end{cases}\\ \begin{cases}b\neq 0\\ x=-\dfrac{a^2}{b}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$D: x\neq\pm a$

$x=-\dfrac{a^2}{b}=a$ при $ab+a^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=-a\end{array}\right.$;

$x=-\dfrac{a^2}{b}=-a$ при $ab-a^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=a\end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ a=0 \\ x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} b=0 \\ a\neq 0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} b\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=\pm a \end{array}\right. \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} b\neq 0 \\ a\neq 0 \\ b\neq\pm a \\ x=-\dfrac{a^2}{b} \end{cases} \end{array}\right.$$

> **Відповідь:**
>
> якщо $\begin{cases} b=0 \\ a=0 \end{cases}$ $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$;
>
> якщо $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ a\neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=\pm a \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$ $x\in\varnothing$
>
> якщо $\begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ b\neq\pm a \end{cases}$ $x=-\dfrac{a^2}{b}$

Приклад 11.

$$\frac{x+m}{x-n}+\frac{x+n}{x-m}=2 \qquad (11)$$

$$(11)\Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ (n+m)x=\dfrac{1}{2}(m+n)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in D \\ m=-n \\ 0\cdot x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\in D \\ m\neq -n \\ x=\dfrac{m+n}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$D:\begin{cases} x\neq m \\ x\neq n \end{cases}$

$x=\dfrac{m+n}{2}=n$ при $m+n=2n\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m=n$.

$x=\dfrac{m+n}{2}=m$ при $n=m$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=-n \\ x\in R \\ x\neq \pm n \end{cases} \\ \begin{cases} m\neq \pm n \\ x=\dfrac{1}{2}(m+n) \end{cases} \\ \begin{cases} m\neq -n \\ m=n \\ x\in\varnothing \end{cases} \end{array}\right.$$

> **Відповідь:**
> якщо $m=-n$
> $x\in(-\infty;-|n|)\cup(-|n|;|n|)\cup(|n|;\infty)$;
> якщо $m=n\neq 0$ $x\in\varnothing$;
> якщо $m\neq\pm n$ $x=\dfrac{1}{2}(m+n)$.

Приклад 12.

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{m+a}{m-a}=2 \qquad (12)$$

$D:\begin{cases} x\neq a \\ m\neq a \end{cases}$

$$(12)\Leftrightarrow \begin{cases} \{m;x;a\}\subset D \\ ax=a(2a-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \{a;m;x\}\subset D \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ 0\cdot x=0\cdot(-m) \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ x=2a-m \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x=2a-m=a$ при $m=a$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=a \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} m\neq a \\ a=0 \\ x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} m\neq a \\ a\neq 0 \\ x=2a-m \end{cases} \end{array}\right.$$

> **Відповідь:**
> при $m=a$ $x\in\varnothing$;
> при $\begin{cases} a=0 \\ m\neq 0 \end{cases}$
> $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$;
> при $\begin{cases} m\neq a \\ a\neq 0 \end{cases}$
> $x=2a-m$.

Приклад 13.

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=2 \qquad (13)$$

$$(13)\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D\\ (a+b)x=2ab\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in D\\ a=-b\\ 0\cdot x=-2a^2\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x\in D\\ a\neq -b\\ x=\dfrac{2ab}{a+b}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$D:\begin{cases}x\neq a\\ x\neq b\end{cases}$$

$$x=\frac{2ab}{a+b}=a \text{ при}$$
$$ab+a^2=2ab\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a(a-b)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=b\end{array}\right..$$

$$x=\frac{2ab}{a+b}=b \text{ при }\left[\begin{array}{l}b=0\\ a=b\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-b=0\\ x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a=-b\\ a\neq 0\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq -b\\ \left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\\ a=b\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq -b\\ a\neq 0\\ b\neq 0\\ a\neq b\\ x=\dfrac{2ab}{a+b}\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:
якщо $a=b=0$
$x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$;

якщо $\left[\begin{array}{l}a=\pm b\neq 0\\ a=0\neq b\\ b=0\neq a\end{array}\right.$
$x\in\varnothing$;

якщо $\left[\begin{array}{l}a\neq\pm b\\ a\neq 0\\ b\neq 0\end{array}\right.$
$x=\dfrac{2ab}{a+b}$.

Приклад 14.

$$\frac{n+x}{d+x}=\frac{n}{d}+\frac{1}{b} \qquad (14)$$

$$(14)\Leftrightarrow\begin{cases}\{b,d,x\}\subset D\\ \big((d-n)b-d\big)x=d^2\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\{b,d,x\}\subset D\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}d=(d-n)b\\ 0\cdot x=d^2\end{cases}\\ \begin{cases}d\neq(d-n)b\\ x=\dfrac{d^2}{(d-n)b-d}\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$D:\begin{cases}d\neq 0\\ b\neq 0\\ x\neq -d\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}d=0\\ b=0\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}d=(d-n)b\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}d\neq(d-n)b\\ d\neq 0\\ d\neq n\\ b\neq 0\\ x=\dfrac{d^2}{(d-n)b-d}\end{cases}\\ \begin{cases}d\neq(d-n)b\\ d=n\\ x\in\varnothing\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}d\neq(d-n)b\\ \dfrac{d^2}{(d-n)b-d}=-d\end{cases}\ \text{при}\ \left[\begin{array}{l}d=0\\ b=0\\ d=n\end{array}\right.$$

Відповідь:

якщо $\left[\begin{array}{l}d=0\\ b=0\\ d=(d-n)b\\ d=n\end{array}\right.$ $x\in\varnothing$;

якщо $\begin{cases}d\neq 0\\ b\neq 0\\ d\neq(d-n)b\\ d\neq n\end{cases}$ $x=\dfrac{d^2}{(d-n)b-d}$.

І, нарешті, декілька рівнянь для самостійного розв'язання:

Завдання 7.

Розв'яжіть рівняння відносно x:

1) $\frac{5-a}{4b-x}-\frac{5+a}{4b+x}=0$;

2) $\frac{x+a}{2}-\frac{2}{x+a}=\frac{x-a}{2}$;

3) $\frac{d}{x}-\frac{b}{cx}=\frac{d}{cx}-\frac{b-d}{c}$;

4) $\frac{1}{m+n}+\frac{m+n}{x}=\frac{1}{m-n}+\frac{m-n}{x}$;

5) $\frac{c+x}{cx}=\frac{1}{c}+\frac{c}{c+x}$;

6) $\frac{a}{x-a}=\frac{a}{2a-x}+\frac{2a}{2a+x}$;

7) $\frac{x}{3a+x}-\frac{x}{x-3a}=\frac{a^2}{9a^2-x^2}$;

8) $\frac{m^2}{m-x}-\frac{b^2}{(m-x)c}=\frac{mc-b^2}{c}$;

9) $\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x}$;

10) $\frac{1}{kx-1}=\frac{2}{2x-k}$;

11) $\frac{2}{a(x-3)}+\frac{3}{(a-1)(x+1)}=\frac{2x-4}{a(x-3)(x+1)}$;

12) $\frac{a+3}{a+2}=\frac{2}{x}-\frac{5}{(a+2)x}$;

13) $\frac{1}{m}=\frac{1}{n}+\frac{m-1}{m(x-1)}$;

14) $\frac{a}{ac+bc}+\frac{a-b}{2bx}=\frac{a+b}{2bc}-\frac{b}{ax+bx}$.

§ 8. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ ТА СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ЇХНІМИ КОРЕНЯМИ

Розв'язання квадратного рівняння з параметром треба розпочинати з питання «А чи є воно квадратним?» Дійсно, якщо коефіцієнт перед x^2 може приймати нульове значення то наше рівняння може перетворитись на лінійне.

А от, якщо коефіцієнт перед x^2, не нуль, то наявність розв'язків та їхня кількість залежать від значення дискримінанту рівняння (дивись ОК-8).

Наприклад, розв'яжемо наступне рівняння відносно x.

Приклад 1.

$$kx^2 + 2x + 1 = 0 \tag{1}$$

Розв'язання:

Розв'язання почнемо з випадку, коли $k = 0$. Тоді (1) перетвориться на лінійне рівняння $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$.

Якщо $k \neq 0$, то обрахуємо $D/4 = 1 - k$ і проаналізуємо його значення:

$$D < 0 \text{ при } k > 1;$$
$$D = 0 \text{ при } k = 1;$$
$$D > 0 \text{ при } k < 1.$$

$$\text{Тоді } (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k=0 \\ x=-1/2 \end{cases} \\ \begin{cases} k>1 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} k=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} k<1 \\ k\neq 0 \\ x\in\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{1-k}}{k}\right\} \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
при $k>1$ $x\in\varnothing$;
при $k=0$ $x=-1/2$;
при $k=1$ $x=-1$;
при $k\in(-\infty;0)\cup(0;1)$
$x\in\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{1-k}}{k}\right\}$.

Розв'яжемо разом ще одне рівняння відносно x.

Приклад 2.

$$\left(a^2-1\right)x-2(a-1)x-a^2+2a-1=0 \qquad (1)$$

Розв'язання:

1) При $a^2-1=0$ маємо:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ 0=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ 4x-4=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ x\in R \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ x=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

2) При $a\notin\{-1;1\}$:

$$D/4=(a-1)^2+\left(a^2-1\right)(a-1)^2=(a-1)^2\cdot a^2\geq 0;$$

$$x_{1.2}=\frac{a-1\pm a(a-1)}{a^2-1}=\left[\begin{array}{l} 1 \\ \dfrac{1-a}{1+a} \end{array}\right..$$

Тоді

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ x \in R \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=0 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a \notin \{\pm 1; 0\} \\ x \in \left\{1; \dfrac{1-a}{1+a}\right\} \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
при $a=1$ $x \in R$;
при $a \in \{-1; 0\}$ $x=1$;
при $a \notin \{\pm 1; 0\}$ $x \in \left\{1; \dfrac{1-a}{1+a}\right\}$.

Начебто просто, і алгоритм розв'язання квадратного рівняння з параметром прозорий:

1.Коефіцієнт перед x^2 дорівнює нулю – розв'язуємо лінійне рівняння.

2.Коефіцієнт перед x^2 не дорівнює нулю – аналізуємо значення дискримінанту.

А тепер розглянемо завдання на співвідношення між коренями квадратного рівняння з параметром. Їх зручно розв'язувати не виписуючи значення коренів рівняння через дискримінант, а використовуючи теорему Вієта (ОК-9). Потрібно пам'ятати, що теорема Вієта «працює» лише у випадку, коли корені квадратного рівняння дійсно існують, тобто коли дискримінант невід'ємний.

Приклад 3. При якому значенні параметра a один з коренів рівняння $x^2 - ax + 1 = 0$ в два рази більший за другий?

Розв'язання:

За теоремою Вієта маємо

$$x_1 + x_2 = a \text{ , } x_1 \cdot x_2 = 1$$

при умові $a^2 - 4 \geq 0$.

Позначимо менший з коренів через t, тоді

$$\begin{cases} 3t = a \\ 2t^2 = 1 \\ a^2 \geq 4 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} a^2 = \dfrac{9}{2} \\ a^2 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: $a = \pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 4. При якому значенні параметра k сума коренів рівняння $x^2 + (k^2 + 4k - 5)x - k = 0$ дорівнює нулю?

Розв'язання:

Нехай x_1 та x_2 – корені даного рівняння. Тоді за теоремою Вієта виконується

$$x_1 + x_2 = -(k^2 + 4k - 5) = 0$$

при умові, що

$$(k^2 + 4k - 5)^2 + 4k \geq 0.$$

Тобто розв'язками задачі є множина значень k:

$$\begin{cases} k^2 + 4k - 5 = 0 \\ 4k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \{-5; 1\} \\ k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1.$$

Відповідь: $k = 1$.

Приклад 5. При якому значенні параметра m сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (2 - m)x - m - 3 = 0$ найменша?

Розв'язання:

При умові

$$D = (2 - m)^2 + 4(m + 3) \geq 0$$

за теоремою Вієта маємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -m - 3 \end{cases}.$$

Тоді

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m - 2)^2 + 2(m + 3) =$$

$$= m^2 - 2m + 10 = (m - 1)^2 + 9$$

приймає найменше значення при $m = 1$.

При $m = 1$ корені існують, бо $D\big|_{m=1} = 1^2 + 4(1 + 3) > 0$

Відповідь: $m=1$.

Приклад 6. При якому значенні параметра a корені рівняння $x^2-ax+a-1=0$ мають однаковий знак?

Розв'язання:

За теоремою Вієта, враховуючи умову існування коренів, маємо:

$$\begin{cases} a-1>0 \\ a^2-4a+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ (a-2)^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a>1.$$

Відповідь: $a>1$.

Приклад 7. Знайти, всі значення параметра a при яких рівняння $(1-2a)x^2-6ax-1=0$ та $ax^2-x+1=0$ мають принаймні один спільний корінь.

Розв'язання:

Нехай $x=z$ – спільний корінь даних рівнянь. Тоді, при умові існування коренів цих рівнянь

$$\begin{cases} 9a^2+(1-2a)\ge 0 \\ 1-4a\ge 0 \end{cases},$$

виконується співвідношення

$$\begin{cases} (1-2a)z^2-6az-1=0 \\ az^2-z+1=0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Якщо додати рівняння останньої системи, матимемо

$$(1-a)z^2-(6a+1)z=0.$$

За допомогою перевірки переконаємось, що $z=0$ не є коренем заданих умовою рівнянь і що при $a=1$ ці рівняння не мають спільних коренів. Тому $z=\dfrac{6a+1}{1-a}$.

Після підстановки цього значення z у друге рівняння системи (*) отримаємо умову на a

$$a\left(\frac{6a+1}{a-1}\right)^2+\frac{6a+1}{a-1}+1=0,$$

звідки $36a^3+19a^2-6a=0 \Leftrightarrow a\in\{0;2/9;-3/4\}$.

Перевіркою переконуємось, що всі ці значення параметра a задовольняють умові існування коренів.

Відповідь: $a\in\{0;2/9;-3/4\}$.

Завдання 8.

Розв'язати рівняння (1—6) відносно x:

1) $x^2-2mx+1=0$;

2) $x^2+2(k-1)x+3k+1=0$;

3) $ax^2+3x-4=0$;

4) $bx^2-x+2=0$;

5) $(b+1)x^2+2bx-b+1=0$;

6) $(4-a^2)x^2+2(a+2)x-1=0.$

Наступні завдання допоможе виконати ОК-9.

7) Доведіть, що коли відношення коренів рівняння

$$ax^2+bx+c=0$$

дорівнює 3, то коефіцієнти a, b і c пов'язані умовою

$$3b^2-16ac=0.$$

8) При яких значеннях k добуток коренів квадратного рівняння

$$x^2+3x+k^2-7k+12=0$$

дорівнює нулю?

9) В рівнянні

$$x^2-2x+a=0$$

квадрат різниці коренів дорівнює 16. Знайти a.

10) При яких значеннях a сума коренів рівняння

$$x^2-2a(x-1)-1=0$$

дорівнює сумі квадратів його коренів?

11) При якому значенні m сума квадратів коренів рівняння

$$x^2+(m-1)x+m^2-1{,}5=0$$

найбільша?

12) Не розв'язуючи рівняння

$$x^2-(2a+1)x+a^2+2=0$$

знайти, при якому a один з коренів у два рази більший за другий.

13) Знайти таке значення a, при якому один з коренів рівняння

$$2x^2-5ax+2a^2=0$$

є кубом другого кореня.

14) Нехай x_1 і x_2 — корені рівняння

$$ax^2+x+2=0\,.$$

Скласти квадратне рівняння, коренями якого є числа $\frac{1}{x_1+1}$ та $\frac{1}{x_2+1}$.

15) При яких значеннях параметра a квадрат різниці коренів рівняння

$$x^2-ax+a-6=0$$

буде найменшим?

16) При яких a сума обернених величин коренів рівняння

$$2x^2-2ax+a^2+2=0$$

дорівнює $2/3$?

17) При яких значеннях a різниця коренів рівняння

$$2x^2-(a+2)x+2a-1=0$$

дорівнює їх добутку?

18) При яких значеннях a корені квадратного рівняння

$$(a+2)x^2-2ax+3a=0$$

мають однаковий знак?

19) При яких значеннях a обидва корені рівняння

$$x^2-(a+1)x+a+4=0$$

від'ємні?

20) При яких значеннях a всі корені рівняння

$$(a+1)x^2+2ax+a+3=0$$

додатні?

21) При яких значеннях a всі корені рівняння

$$ax^2+2(a+3)x+a+2=0$$

невід'ємні?

22) При яких значеннях a рівняння

$$x^2-2(a-2)x+a^2-2a-3=0$$

має два різних додатних кореня?

23) При яких значеннях a рівняння

$$a^2+a(x-1)=2+\frac{3,5}{x}$$

має два різних рівних за абсолютною величиною кореня?

24) При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння

$$x^2+ax+a-2=0$$

буде найменшою?

25) При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння

$$x^2-ax+a^2-3a-2=0$$

буде найбільшою?

26) При яких значеннях a рівняння

$$x^2-8x+5a=0 \text{ і } 2x^2+x-7a=0$$

мають хоча б один спільний корінь?

27) При яких значеннях a рівняння

$$x^2-2ax+a+1=0 \text{ і } x^2+ax-a-1=0$$

мають хоча б один спільний корінь?

28) Знайти всі значення a, при яких рівняння

$$x^2+ax+1=0 \text{ і } x^2+x+a=0$$

мають принаймні один спільний корінь.

29) Знайти всі значення a для яких рівняння

$$ax^2+x+1=0 \text{ і } x^2+ax-1=0$$

мають принаймні один спільний корінь.

30) Дано два твердження:

1) рівняння $x^2+(k+2)x+1=0$ має два різних від'ємних корені;
2) рівняння $x^2+(1-k)x+4=0$ має два різних додатніх корені.

При яких значеннях параметра k обидва твердження

а) є правильними;

б) є неправильними;

в) одне є правильним, а одне неправильним?

§ 9. ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРОМ

Якщо ви опанували попередні параграфи, то зараз ми вас злякати не зможемо. Аналогічно тому як ми робили у § 3, оберемо собі «улюблену» нерівність і, розв'язуючи задачі даної теми, будемо зводити їх до «улюбленої» або до аналогічної їй.

Улюблена

$$kx<c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} k=0 \\ 0\cdot x<c \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} k>0 \\ x<\dfrac{c}{k} \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} k<0 \\ x>\dfrac{c}{k} \end{cases} & (3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} k=0 \\ c>0 \\ x\in R \end{cases} & (4) \\ \begin{cases} k=0 \\ c\le 0 \\ x\in \varnothing \end{cases} & (5) \\ \begin{cases} k>0 \\ x<\dfrac{c}{k} \end{cases} & (6) \\ \begin{cases} k<0 \\ x>\dfrac{c}{k} \end{cases} & (7) \end{array}\right.$$

Якщо в випадку рівності (§ 3) ми починали розв'язання з міркувань: коефіцієнт перед x дорівнює нулю або не дорівнює нулю, то при розв'язанні нерівності ми відштовхуємося від

***трьох випадків*:**

$$k=0;\; k>0;\; k<0.$$

Ви зрозуміли, чому?

Аналогічно розв'язанню лінійного рівняння **УМОВИ (2) І (3) «РОЗМНОЖУВАТИСЯ» НЕ БУДУТЬ! «РОЗГАЛУЖУВАТИСЯ» МОЖЕ ЛИШЕ УМОВА (1)** (в даному випадку – на сукупність систем (4) та (5)).

А тепер, озираючись на «улюблену» нерівність, розв'яжемо кілька нерівностей, вважаючи за невідоме x.

Приклад 1.

$$(m-1)x \le 5m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=1 \\ 0\cdot x \le 5\cdot 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m>1 \\ x \le \dfrac{5m}{m-1} \end{cases} \\ \begin{cases} m<1 \\ x \ge \dfrac{5m}{m-1} \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
якщо $m=1$ $x \in R$;
якщо $m>1$ $x \le \dfrac{5m}{m-1}$;
якщо $m<1$ $x \ge \dfrac{5m}{m-1}$

Приклад 2.

$$3(2a-x) < ax+1 \Leftrightarrow (a+3)x > 6a-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-3 \\ 0\cdot x > -18-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a>-3 \\ x > \dfrac{6a-1}{a+3} \end{cases} \\ \begin{cases} a<-3 \\ x < \dfrac{6a-1}{a+3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
якщо $a=-3$ $x \in R$;
якщо $a>-3$ $x > \dfrac{6a-1}{a+3}$;
якщо $a<-3$ $x < \dfrac{6a-1}{a+3}$

Приклад 3.

$$5(3b+x) < bx-7 \Leftrightarrow (b-5)x > 15b+7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=5\\0\cdot x>15\cdot5+7\end{cases}\\\begin{cases}b>5\\x>\dfrac{15b+7}{b-5}\end{cases}\\\begin{cases}b<5\\x<\dfrac{15b+7}{b-5}\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:
якщо $b=5$ $x\in\varnothing$;
якщо $b>5$ $x>\dfrac{15b+7}{b-5}$;
якщо $b<5$ $x<\dfrac{15b+7}{b-5}$.

А що ж нам робити, якщо параметр опинився в знаменнику? Проаналізувати область визначення виразу. Потім у лівій частині нерівності зібрати всі доданки, що містять x, а в правій – всі, що без x. Після того винести x множником за дужки, а «компанію» в дужках умовно позначити через k і озирнутися на «улюблену» нерівність, тобто розглянути три випадки: «компанія» дорівнює нулю, більша за нуль і менша за нуль.

Наприклад:

Приклад 4.

$$\frac{x}{a-1}<5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-1=0\\x\in\varnothing\end{cases}\\\begin{cases}a-1>0\\x<5(a-1)\end{cases}\\\begin{cases}a-1<0\\x>5(a-1)\end{cases}\end{array}\right.$$

$D: a\neq1$

Відповідь:
якщо $a=1$ $x\in\varnothing$;
якщо $a>1$ $x<5(a-1)$;
якщо $a<1$ $x>5(a-1)$.

Приклад 5.

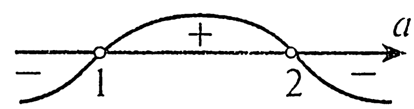
$$\frac{x}{a-1}<x+1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a-1}-1\right)x<1\Leftrightarrow\frac{2-a}{a-1}x<1\Leftrightarrow$$

$D: a\neq1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ 0\cdot x<1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{2-a}{a-1}>0 \\ x<\dfrac{a-1}{2-a} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{2-a}{a-1}<0 \\ x>\dfrac{a-1}{2-a} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ x\in R \end{cases} \\ \begin{cases} a\in(1;2) \\ x<\dfrac{a-1}{2-a} \end{cases} \\ \begin{cases} a\in(-\infty;1)\cup(2;\infty) \\ x>\dfrac{a-1}{2-a} \end{cases} \end{array} \right.$$

Досліджуємо знак виразу

$$\frac{2-a}{a-1} \gtrless 0$$



якщо $a\in(1;2)$

$$\frac{2-a}{a-1}>0\,;$$

якщо $a\in(-\infty;1)\cup(2;\infty)$

$$\frac{2-a}{a-1}<0\,.$$

Відповідь:
якщо $a=1$ $x\in\varnothing$;
якщо $a=2$ $x\in R$;
якщо $a\in(1;2)$ $x<\dfrac{a-1}{2-a}$;
якщо $a\in(-\infty;1)\cup(2;\infty)$ $x>\dfrac{a-1}{2-a}$.

Приклад 6.

$$\frac{x}{a^2-4}\ge 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2-4=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a^2-4>0 \\ x\ge 3(a^2-4) \end{cases} \\ \begin{cases} a^2-4<0 \\ x\le 3(a^2-4) \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |a|=2 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} |a|>2 \\ x\ge 3(a^2-4) \end{cases} \\ \begin{cases} |a|<2 \\ x\le 3(a^2-4) \end{cases} \end{array} \right.$$

$D: a^2\ne 4$

Відповідь:
якщо $a\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$ $x\ge 3(a^2-4)$;
якщо $a\in(-2;2)$ $x\le 3(a^2-4)$;
якщо $a=\pm 2$ $x\in\varnothing$.

Приклад 7.

$$\frac{x}{m+2}-\frac{x}{m-2}>3m \Leftrightarrow \frac{4x}{m^2-4}<-3m \Leftrightarrow \qquad D: m\neq\pm2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=\pm2 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} m^2>4 \\ x<\frac{-3}{4}m\left(m^2-4\right) \end{cases} \\ \begin{cases} m^2<4 \\ x>\frac{-3}{4}m\left(m^2-4\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=\pm2 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} |m|>2 \\ x<\frac{-3}{4}m\left(m^2-4\right) \end{cases} \\ \begin{cases} |m|<2 \\ x>\frac{-3}{4}m\left(m^2-4\right) \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
якщо $m=\pm2$ $x\in\varnothing$;
якщо
$m\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$
$x<\frac{-3}{4}m\left(m^2-4\right)$;
якщо $m\in(-2;2)$
$x>\frac{-3}{4}m\left(m^2-4\right)$.

Приклад 8.

$$\frac{x}{k-1}\leq k+1-x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{k-1}+1\right)x\leq k+1 \Leftrightarrow \frac{k}{k-1}x\leq k+1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{k}{k-1}\vee 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k=1 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} k=0 \\ 0\cdot x\leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{k}{k-1}>0 \\ x\leq\frac{(k+1)(k-1)}{k} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{k}{k-1}<0 \\ x\geq\frac{(k+1)(k-1)}{k} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k=1 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} k=0 \\ x\in R \end{cases} \\ \begin{cases} k\in(-\infty;0)\cup(1;\infty) \\ x\leq\frac{k^2-1}{k} \end{cases} \\ \begin{cases} k\in(0;1) \\ x\geq\frac{k^2-1}{k} \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
якщо $k=1$ $x\in\varnothing$;
якщо $k=0$ $x\in R$;
якщо
$k\in(-\infty;0)\cup(1;\infty)$
$x\leq\frac{k^2-1}{k}$;
якщо $k\in(0;1)$
$x\geq\frac{k^2-1}{k}$.

Приклад 9.

$$\frac{x}{b-1}>2b+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b-1=0\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}b-1>0\\ x>(2b+1)(b-1)\end{cases}\\ \begin{cases}b-1<0\\ x<(2b+1)(b-1)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=1\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}b>1\\ x>(2b+1)(b-1)\end{cases}\\ \begin{cases}b<1\\ x<(2b+1)(b-1)\end{cases}\end{array}\right. \quad D: b\neq 1$$

Відповідь:
якщо $b=1$ $x\in\varnothing$;
якщо $b>1$ $x>(2b+1)(b-1)$;
якщо $b<1$ $x<(2b+1)(b-1)$.

Приклад 10.

$$2mx-x\le\frac{5}{m} \Leftrightarrow (2m-1)x\le\frac{5}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=0\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}m=\frac{1}{2}\\ 0\le 10\end{cases}\\ \begin{cases}m>\frac{1}{2}\\ x\le\frac{5}{m(2m-1)}\end{cases}\\ \begin{cases}m<\frac{1}{2}\\ m\neq 0\\ x\ge\frac{5}{m(2m-1)}\end{cases}\end{array}\right. \quad D: m\neq 0$$

Відповідь:
якщо $m=0$
$x\in\varnothing$;
якщо $m=\frac{1}{2}$
$x\in R$;
якщо $m>\frac{1}{2}$
$x\le\frac{5}{m(2m-1)}$;
якщо
$m\in(-\infty;\,0)\cup$
$\cup\left(0;\,\frac{1}{2}\right)$
$x\ge\frac{5}{m(2m-1)}$.

Приклад 11. $kx-\frac{1}{k+1}x>k \Leftrightarrow \frac{k^2+k-1}{k+1}x>k \Leftrightarrow$

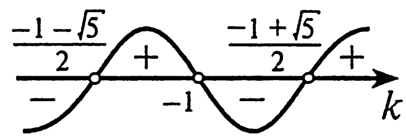
$D: k\neq -1$

$k^2+k-1=0$

$d=1+4=5$

$k_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\frac{k^2+k-1}{k+1}\vee 0$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=-1\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}k^2+k-1=0\\ 0\cdot x>k\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{k^2+k-1}{k+1}>0\\ x>\dfrac{k(k+1)}{k^2+k-1}\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{k^2+k-1}{k+1}<0\\ x<\dfrac{k(k+1)}{k^2+k-1}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}k=-1\\ k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}k=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ x\in R\end{cases}\\ \begin{cases}k\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\,-1\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\infty\right)\\ x>\dfrac{k(k+1)}{k^2+k-1}\end{cases}\\ \begin{cases}k\in\left(-\infty;\,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(-1;\,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\\ x<\dfrac{k(k+1)}{k^2+k-1}\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:

якщо $k\in\left\{-1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ $x\in\varnothing$;

якщо $k=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $x\in R$;

якщо $k\in\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\,-1\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$ $x>\frac{k(k+1)}{k^2+k-1}$;

якщо $k\in\left(-\infty;\,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(-1;\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ $x<\frac{k(k+1)}{k^2+k-1}$.

Завдання 9.

Розв'язати нерівність відносно x:

1) $ax<2$;

2) $(a-2)x>2$;

3) $(k-3)x<7k$;

4) $(k-3)x>7k$;

5) $3(2a-x)<ax+1$;

6) $5(3b+x)>bx-7$;

7) $ax+1-a<\frac{x}{a}$;

8) $\frac{kx}{k^2-9}>2+k$;

9) $\frac{a-1}{a}(x+1)>a$;

10) $\frac{m-1}{m-2}(x+1)<m$;

11) $ax+bx>b^2$;

12) $\frac{a+2}{a-1}x-\frac{2}{3}<2x-\frac{1}{3}$;

13) $\frac{2x-5}{n-1}-\frac{x+10}{3}\le 1$;

14) $\frac{ax}{b-1}>ab$;

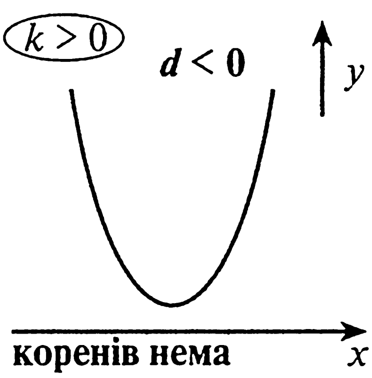
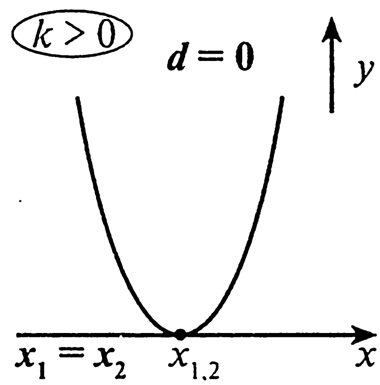
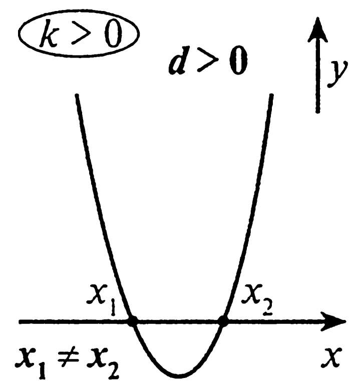
15) $\frac{x-1}{a-1}+x<\frac{1}{a-1}$.

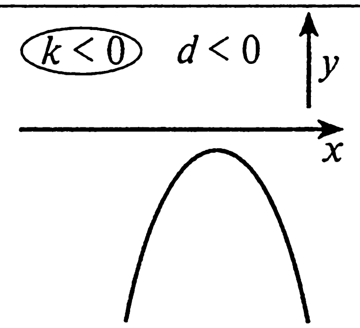
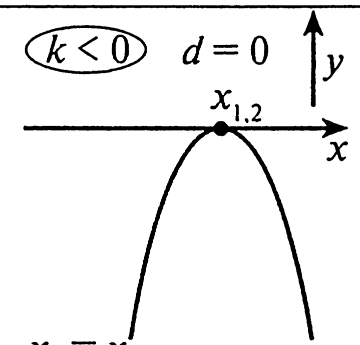
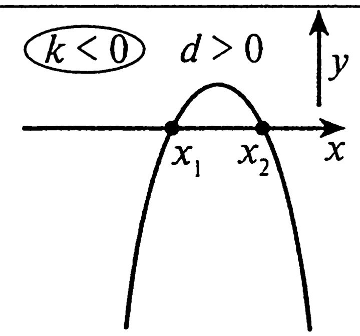
§ 10. КВАДРАТНІ НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРОМ

У цьому параграфі ми розглянемо нерівності вигляду

$$kx^2+bx+c \gtrless 0 .$$

Розв'язання такої нерівності відносно x почнемо з питання — чи є задана нерівність насправді квадратною? Дійсно, якщо $k=0$, то вираз kx^2+bx+c стає лінійним. Далі доцільно розглянути випадки $k>0$, $k<0$. Якщо $k>0$ гілки параболи $y=kx^2+2x+1$ дивляться вгору, якщо $k<0$, то донизу. Корисно уявити собі ескіз графіка лівої частини нерівності залежно від значення дискримінанта d:

		
$y=kx^2+bx+c>0$ при $x\in R$	$y=kx^2+bx+c>0$ при всіх $x\neq x_в$ $\left(x_в=x_{1.2}=-\dfrac{b}{2k}\right)$	$y=kx^2+bx+c>0$ при $x\in(-\infty;x_1)\cup$ $\cup(x_2;\infty)$
коренів нема	$y=kx^2+bx+c=0$ при $x=-\dfrac{b}{2k}$	$y=kx^2+bx+c=0$ при $x\in\{x_1;x_2\}$
	$y=kx^2+bx+c\geq 0$ при $x\in R$	$y=kx^2+bx+c<0$ при $x\in(x_1;x_2)$

 коренів нема	 $x_1 = x_2$	 $x_1 \neq x_2$
$y = kx^2 + bx + c < 0$ при $x \in R$	$y = kx^2 + bx + c < 0$ при всіх $x \neq x_в$ $\left(x_в = x_{1,2} = -\dfrac{b}{2k}\right)$	$y = kx^2 + bx + c < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup \cup (x_2; \infty)$
коренів нема	$y = kx^2 + bx + c = 0$ при $x = -\dfrac{b}{2k}$	$y = kx^2 + bx + c = 0$ при $x \in \{x_1; x_2\}$
	$y = kx^2 + bx + c \leq 0$ при $x \in R$	$y = kx^2 + bx + c > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$

Тоді порівняння квадратичної функції з нулем зводиться до дослідження знаку її дискримінанта при заданому нами (або умовою задачі) знаку коефіцієнта перед x^2. Розглянемо декілька прикладів розв'язування нерівностей відносно x.

Приклад 1.

$$kx^2 + 2x - 1 \leq 0 \qquad (1)$$

Розв'язання:

При $k = 0$ маємо лінійну нерівність $2x - 1 \leq 0$, $x \leq \frac{1}{2}$.

При $k \neq 0$ розглянемо дискримінант квадратного тричлена лівої частини нерівності:

$$\frac{d}{4} = 1 + k \quad \begin{array}{l} d < 0 \text{ якщо } k < -1; \\ d = 0 \text{ якщо } k = -1; \\ d > 0 \text{ якщо } k > -1. \end{array}$$

Корені квадратного тричлена $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+k}$. Очевидно, що

$$x_1=-1-\sqrt{1+k}\le x_2=-1+\sqrt{1+k}\,.$$

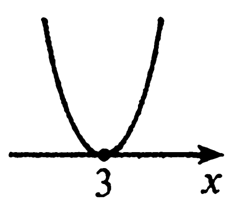
$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=0\\ 2x-1\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}k>0\\ d>0\\ x\in[x_1;x_2]\end{cases}\\ \begin{cases}-1<k<0\\ d>0\\ x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}k\le -1\\ d\le 0\\ x\in R\end{cases}\end{array}\right.$$

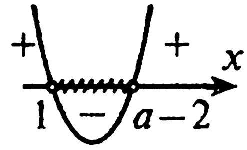
Відповідь:
якщо $k=0$ $x\in(-\infty;0{,}5]$
якщо $k>0$
$x\in\left[-1-\sqrt{1+k};\ -1+\sqrt{1+k}\right]$;
якщо $k\in(-1;0)$
$x\in\left(-\infty;\ -1-\sqrt{1+k}\right]\cup$
$\cup\left[-1+\sqrt{1+k};\infty\right)$;
якщо $k\le -1$ $x\in R$.

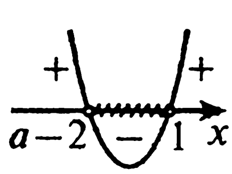
Інколи при розв'язанні задачі треба спочатку провести дослідження на порівняння коренів, а потім малювати ескіз графіка параболи.

Приклад 2. $x^2-(a-1)x+a-2<0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=3\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a>3\\ x\in(1;a-2)\end{cases}\\ \begin{cases}a<3\\ x\in(a-2;1)\end{cases}\end{array}\right.$$







$$d=(a-1)^2-4(a-2)=$$
$$=a^2-6a+9=(a-3)^2$$
$$x_{1,2}=\frac{a-1\pm(a-3)}{2}=\left[\begin{array}{l}a-2\\ 1\end{array}\right.$$

Який корінь більше?

$a-2\vee 1\Leftrightarrow a\vee 3$

при $a=3$ $a-2=1$;
при $a>3$ $a-2>1$;
при $a<3$ $a-2<1$.

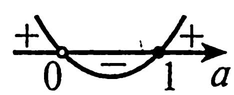
> **Відповідь:**
> якщо $a>3$ $x\in(1;a-2)$; якщо $a<3$ $x\in(a-2;1)$;
> якщо $a=3$ $x\in\varnothing$.

Приклад 3. $ax^2-(3a-1)x+2a-1>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0\\ x-1>0\end{cases} \\ \begin{cases} a>0\\ x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty)\\ x_1\le x_2\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ x\in(x_1;x_2)\\ x_1<x_2\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ x\in R\\ x\ne x_{1,2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$d=(3a-1)^2-4a(2a-1)=$$
$$=a^2-2a+1=(a-1)^2$$
$$x=\frac{3a-1\pm(a-1)}{2a}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{2a-1}{a}\\ 1\end{array}\right.$$

$$\frac{2a-1}{a}\gtrless 1 \Leftrightarrow \frac{a-1}{a}\gtrless 0$$



при $a\in(-\infty;\ 0)\cup(1;\infty)$ $\dfrac{2a-1}{a}>1$;

при $a\in(0;\ 1)$ $\dfrac{2a-1}{a}<1$;

при $a=1$ $\dfrac{2a-1}{a}=1$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0\\ x>1\end{cases} \\ \begin{cases} a\in(0;1)\\ x\in\left(-\infty;\dfrac{2a-1}{a}\right)\cup(1;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(1;\infty)\\ x\in(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{2a-1}{a};\infty\right)\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-\infty;0)\\ x\in\left(1;\dfrac{2a-1}{a}\right)\end{cases}\end{array}\right.$$

> **Відповідь:**
> якщо $a=0$ $x\in(1;\infty)$;
> якщо $a\in(0;1)$
> $x\in\left(-\infty;\dfrac{2a-1}{a}\right)\cup(1;\infty)$;
> якщо $a=1$ $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$;
> якщо $a\in(1;\infty)$
> $x\in(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{2a-1}{a};\infty\right)$;
> якщо $a\in(-\infty;0)$ $x\in\left(1;\dfrac{2a-1}{a}\right)$.

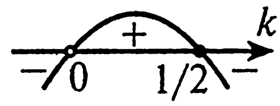
Приклад 4. $kx^2 - x + 1 - k \le 0 \Leftrightarrow$

$$d = 1 - 4(1-k)k = 4k^2 - 4k + 1 = (2k-1)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm (2k-1)}{2k} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ \dfrac{1-k}{k} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 0 \\ -x + 1 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} k > 0 \\ x \in [x_1; x_2] \\ x_1 \le x_2 \end{cases} \\ \begin{cases} k < 0 \\ x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty) \\ x_1 \le x_2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-k}{k} \gtrless 1 \Leftrightarrow \frac{1-2k}{k} \gtrless 0$$



при $k \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ $\frac{1-k}{k} < 1$;

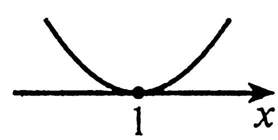
при $k \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ $\frac{1-k}{k} > 1$;

при $k = \frac{1}{2}$ $\frac{1-k}{k} = 1$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 0 \\ x \ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} k = 1/2 \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} k \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \\ x \in \left[1; \frac{1-k}{k}\right] \end{cases} \\ \begin{cases} k \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right) \\ x \in \left[1; \frac{1-k}{k}\right] \end{cases} \\ \begin{cases} k < 0 \\ x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{1-k}{k}; \infty\right) \end{cases} \end{array}\right.$$

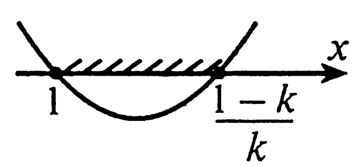
при $k = \frac{1}{2}$

$x_1 = x_2 = 1$;



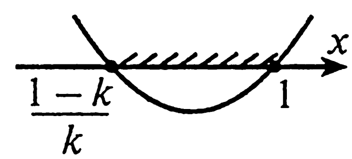
при $k \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

$x_1 = \frac{1-k}{k} > x_2 = 1$;



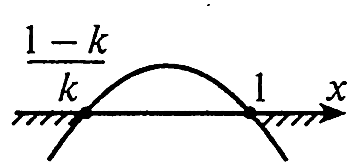
при $k \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

$x_1 = 1 > x_2 = \frac{1-k}{k}$;



при $k < 0$

$x_1 = 1 > x_2 = \frac{1-k}{k}$



Відповідь:

якщо $k=0$ $x\ge 1$; якщо $k=\dfrac{1}{2}$ $x=1$;

якщо $k\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ $x\in\left[1;\dfrac{1-k}{k}\right]$;

якщо $k\in\left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$ $x\in\left[\dfrac{1-k}{k};1\right]$;

якщо $k\in(-\infty;0)$ $x\in\left(-\infty;\dfrac{1-k}{k}\right]\cup[1;\infty)$.

Приклад 5. $a(a+1)x^2+x-a(a-1)\ge 0\Leftrightarrow$

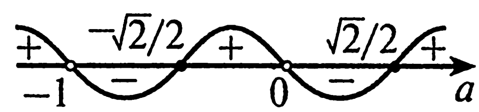
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\ x-2\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}a(a+1)>0\\ x\in(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ \infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a(a-1)<0\\ x\in[x_1;\ x_2]\end{cases}\end{array}\right.$$

$a(a+1)\vee 0$

$$d=1+4a^2(a^2-1)=(2a^2-1)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm(2a^2-1)}{2a(a+1)}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{a-1}{a}\\ -\dfrac{a}{a+1}\end{array}\right.$$

$$\frac{a-1}{a}\vee-\frac{a}{a+1}\Leftrightarrow\frac{2a^2-1}{a(a+1)}\vee 0$$



при $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $x\in R$;

при $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $x=x_{1,2}=\dfrac{-a}{a+1}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=1+\sqrt{2}$$

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} a=0 \\ x\ge 0 \end{cases} \\
\begin{cases} a=-1 \\ x\ge 2 \end{cases} \\
\begin{cases} a=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x\in R \end{cases} \\
\begin{cases} a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=1+\sqrt{2} \end{cases} \\
\begin{cases} a\in(-\infty;\ -1)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \infty\right) \\ x\in\left(-\infty;\ -\dfrac{a}{a+1}\right)\cup\left[\dfrac{a-1}{a};\ \infty\right) \end{cases} \\
\begin{cases} a\in\left(0;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ x\in\left(-\infty;\ \dfrac{a-1}{a}\right]\cup\left[-\dfrac{a}{a+1};\ \infty\right) \end{cases} \\
\begin{cases} a\in\left(-1;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ x\in\left[\dfrac{a-1}{a};\ -\dfrac{a}{a+1}\right] \end{cases} \\
\begin{cases} a\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right) \\ x\in\left[-\dfrac{a}{a+1};\ \dfrac{a-1}{a}\right] \end{cases}
\end{array}\right.$$

Відповідь:

при $a=0$ $x\in[0;\infty)$;

при $a=-1$ $x\in[2;\infty)$;

при $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $x\in R$;

при $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $x=1+\sqrt{2}$;

при $a\in(-\infty;\ -1)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \infty\right)$

$x\in\left(-\infty;\ -\dfrac{a}{a+1}\right]\cup\left[\dfrac{a-1}{a};\ \infty\right)$;

при $a\in\left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x\in\left(-\infty;\ \dfrac{a-1}{a}\right]\cup\left[-\dfrac{a}{a+1};\ \infty\right)$;

при $a\in\left(-1;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x\in\left[\dfrac{a-1}{a};-\dfrac{a}{a+1}\right]$;

при $a\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$

$x\in\left[-\dfrac{a}{a+1};\dfrac{a-1}{a}\right]$.

Зауважимо, що інколи лінійно-дробову нерівність з параметром легко розв'язати, якщо звести її до квадратної.

Приклад 6.

$$\frac{x-a}{x+a}<0 \Leftrightarrow (x-a)(x+a)<0 \Leftrightarrow x^2-a^2<0 \Leftrightarrow x^2<a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x|<|a| \Leftrightarrow x\in(-|a|;\ |a|) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a>0 \\ x\in(-a;\ a) \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ x\in(a;\ -a) \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
при $a=0$ $x\in\varnothing$;
при $a>0$ $x\in(-a;a)$;
при $a<0$ $x\in(a;-a)$.

Завдання 10. Розв'язати нерівність відносно x:

1) $x^2-a(1+a^2)x+a^4<0$;
2) $(2a+1)x^2-ax+a\geq0$;
3) $(a+1)x^2-(a-1)x-2a\leq0$;
4) $(a+1)x^2-2ax+a-2>0$;
5) $2a^2x^2-ax-1\geq0$;
6) $(2a-2)x^2+(a+1)x+1\leq0$;
7) $\dfrac{x-2a-3}{x-a+2}<0$;
8) $\dfrac{x^2}{m}-2x-\dfrac{x}{m}+m+1>0$;
9) $ax>\dfrac{1}{x}$.

§ 11. ДРОБОВО-ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРОМ (І НЕ ТІЛЬКИ ВОНИ)

Перейдемо до розв'язання дробово-лінійних нерівностей, тобто коли дріб, чисельник і знаменник якого є лінійними виразами відносно невідомого x, порівнюється з нулем.

Розв'язування будемо здійснювати методом інтервалів[*].

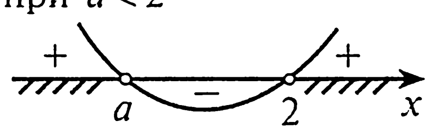
Приклад 1. $\dfrac{x-a}{x-2} > 0$.

Ми б легко розв'язали цю нерівність, якщо б могли відмітити на числовій осі точки $x=2$ та $x=a$. Але ми не знаємо значення a, воно може бути менше двох, може співпадати з двійкою і може бути більше двох?! **Стоп!** Ці міркування і є «рецептом» розв'язування:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<2 \\ \dfrac{x-a}{x-2}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ \dfrac{x-a}{x-2}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} a>2 \\ \dfrac{x-a}{x-2}>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<2 \\ x\in(-\infty;a)\cup(2;\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ x\in(-\infty;2)\cup(2;\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} a>2 \\ x\in(-\infty;2)\cup(a;\infty) \end{cases} \end{array}\right.$$

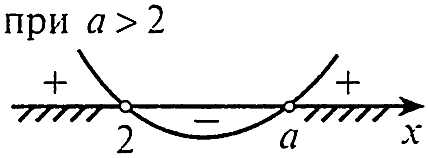
$D:\ x\neq 2$

при $a<2$



при $a=2$ маємо $1>0$, тобто $\begin{cases} x\in R \\ x\neq 2 \end{cases}$.

при $a>2$



Відповідь: якщо $a<2$ $x\in(-\infty;a)\cup(2;\infty)$;
якщо $a=2$ $x\in(-\infty;2)\cup(2;\infty)$; якщо $a>2$ $x\in(-\infty;2)\cup(a;\infty)$.

---

[*] Розв'язання дробово-лінійної нерівності завжди можна звести до розв'язання квадратичної нерівності. При тому коренями квадратичної функції будуть нулі чисельника і знаменника; нуль знаменника не входить в область визначення виразу. Розв'язання таких завдань методом інтервалів дозволяє підготувати учнів до роботи з прикладами типу прикладів 10–12.

Зрозуміли ідею? Тоді розв'яжіть разом з нами ще декілька нерівностей відносно x.

Приклад 2. $\dfrac{x-k^2}{x-1}\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k\in(-1;1) \\ x\in\left(-\infty;k^2\right]\cup(1;\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} k=\pm 1 \\ x\in D \end{cases} \\ \begin{cases} k\in(-\infty;\,-1)\infty(1;\infty) \\ x\in(-\infty;1)\cup[k^2;\infty) \end{cases} \end{array}\right.$$

$D: x\neq 1$

Порівняємо числа k^2 та 1

$k^2 \vee 1 \Leftrightarrow |k| \vee 1$.

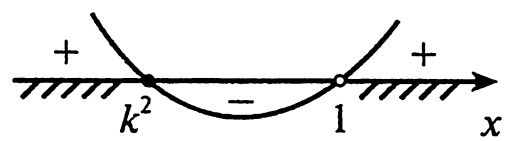
Отримали «довідник»:

при $k\in(-1;1)$ $k^2<1$;

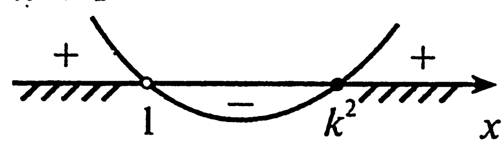
при $k=\pm 1$ $k^2=1$;

при $\left[\begin{array}{l} k>1 \\ k<-1 \end{array}\right.$ $k^2>1$.

$k^2<1$



$k^2>1$



Відповідь:

якщо $k\in(-1;1)$ $x\in\left(-\infty;k^2\right]\cup(1;\infty)$;

якщо $k=\pm 1$ $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$;

якщо $k\in(-\infty;\,-1)\cup(1;\infty)$;

$x\in(-\infty;1)\cup\left[k^2;\infty\right)$.

Приклад 3. $\dfrac{2x+b}{x-4}>0 \Leftrightarrow \dfrac{x+\frac{b}{2}}{x-4}>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b<-8 \\ x\in(-\infty;4)\cup\left(-\dfrac{b}{2};\infty\right) \end{cases} \\ \begin{cases} b>-8 \\ x\in\left(-\infty;\,-\dfrac{b}{2}\right)\cup(4;\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} b=-8 \\ 1>0 \\ x\neq 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$D: x\neq 4$

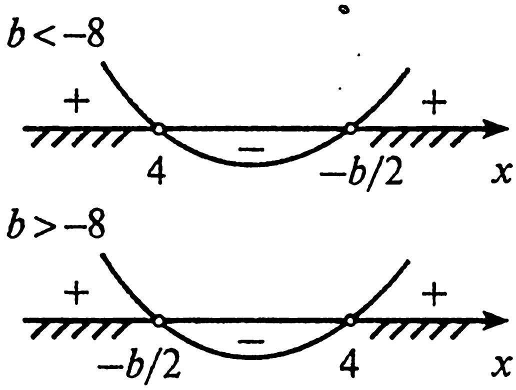
$-b/2 \vee 4 \Leftrightarrow b/2 \wedge -4 \Leftrightarrow b \wedge -8$:

якщо $b<-8$ $-b/2>4$;

якщо $b>-8$ $-b/2<4$;

якщо $b=-8$ $-b/2=4$.

Відповідь:
якщо $b=-8$ $x\in(-\infty;4)\cup(4;\infty)$;
якщо $b<-8$ $x\in(-\infty;4)\cup\left(-\frac{b}{2};\infty\right)$;
якщо $b>-8$ $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{2}\right)\cup(4;\infty)$.



Приклад 4.

$$\frac{ax}{x+2}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ x\in R \\ x\neq -2 \end{cases} \\ \begin{cases} a>0 \\ \dfrac{x}{x+2}\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ \dfrac{x}{x+2}\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ x\in R \\ x\neq -2 \end{cases} \\ \begin{cases} a>0 \\ x\in(-2;\ 0] \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ x\in(-\infty;-2)\cup \\ \cup[0;\infty) \end{cases} \end{array}\right.$$

Досліджуємо $\frac{x}{x+2}\vee 0$:

Відповідь:
якщо $a=0$ $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;\infty)$;
якщо $a>0$ $x\in(-2;0]$;
якщо $a<0$ $x\in(-\infty;-2)\cup[0;\infty)$.

Аналогічно попередньому розв'яжіть наступний приклад самостійно:

Приклад 5. $\frac{ax}{x+2}>0$.

Ви зрозуміли, що робити, якщо в чисельнику або в знаменнику дробово-лінійної функції, міститься добуток параметричної величини та невідомого? Якщо ні, поверніться до прикладу № 4 і розв'яжіть нерівність методом інтервалів, «призначивши» a конкретним від'ємним числом, потім – додатнім, а потім розгляньте випадок $a=0$.

У прикладах 6—12 треба розв'язати нерівності відносно x.

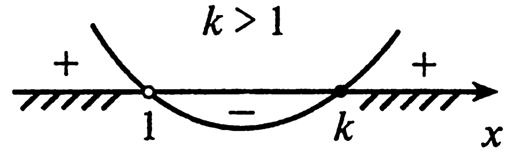
Приклад 6.

$$\frac{kx-k^2}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}k=0\\ 0\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}\\ \begin{cases}k>0\\ \dfrac{x-k}{x-1}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}k<0\\ \dfrac{x-k}{x-1}\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

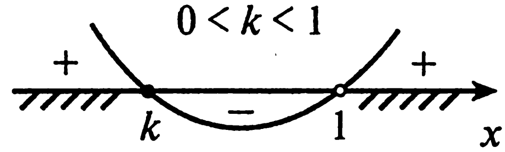
$D: x\ne 1$

Досліджуємо $\dfrac{x-k}{x-1}\vee 0$:

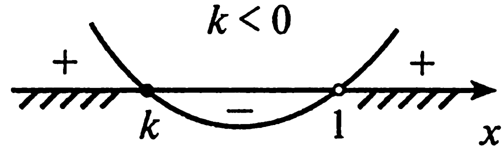
$k>1$



$0<k<1$



$k<0$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}k=0\\ x\in D\end{cases}\\ \begin{cases}k>1\\ x\in(-\infty;1)\cup[k;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}k=1\\ x\in D\end{cases}\\ \begin{cases}0<k<1\\ x\in(-\infty;k]\cup(1;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}k<0\\ x\in[k;1)\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:

якщо $k\in\{0;1\}$ $x\in(-\infty;\ 1)\cup(1;\infty)$;

якщо $k>1$ $x\in(-\infty;1)\cup[k;\infty)$;

якщо $0<k<1$ $x\in(-\infty;k]\cup(1;\infty)$;

якщо $k<0$ $x\in[k;1)$.

Приклад 7. $\dfrac{ax-2x+4}{x-2}<0$

$$\frac{ax-2x+4}{x-2}<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-2)x+4}{x-2}<0\Leftrightarrow$$

$D: x\ne 2$

$$-\frac{4}{a-2}\vee 2\Leftrightarrow\frac{4}{a-2}\wedge -2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{a-2}+2\wedge 0\Leftrightarrow\frac{a}{a-2}\wedge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ \dfrac{4}{x-2}<0 \end{cases} \\ \begin{cases} a>2 \\ \dfrac{x+\dfrac{4}{a-2}}{x-2}<0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<2 \\ \dfrac{x+\dfrac{4}{a-2}}{x-2}>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

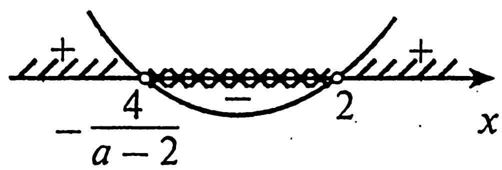
якщо $a\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)$

$-\dfrac{4}{a-2}<2$;

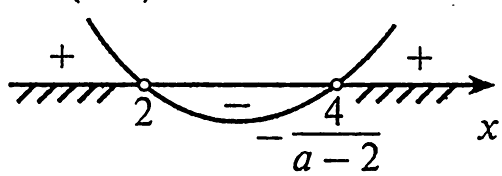
якщо $a\in(0;2)$ $-\dfrac{4}{a-2}>2$;

якщо $a=0$ $-\dfrac{4}{a-2}=2$.

$a\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)$



$a\in(0;2)$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ x<2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=0 \\ x\in D \end{cases} \\ \begin{cases} a>2 \\ x\in\left(-\dfrac{4}{a-2};2\right) \end{cases} \\ \begin{cases} a\in(0;2) \\ x\in(-\infty;2)\cup\left(-\dfrac{4}{a-2};\infty\right) \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ x\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{a-2}\right)\cup(2;\infty) \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:

якщо $a=2$ $x\in(-\infty;2)$;

якщо $a=0$ $x\in(-\infty;2)\cup(2;\infty)$;

якщо $a>2$ $x\in\left(-\dfrac{4}{a-2};2\right)$;

якщо $a\in(0;2)$

$x\in(-\infty;2)\cup\left(-\dfrac{4}{a-2};\infty\right)$;

якщо $a<0$

$x\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{a-2}\right)\cup(2;\infty)$.

Приклад 8.

$$\frac{mx-1}{x+1}\le 2 \Leftrightarrow \frac{mx-1-2(x+1)}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(m-2)x-3}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=2 \\ -\dfrac{3}{x+1}\le 0\end{cases} \\ \begin{cases} m>2\\ \dfrac{x-\frac{3}{m-2}}{x+1}\le 0\end{cases} \\ \begin{cases} m<2 \\ \dfrac{x-\frac{3}{m-2}}{x+1}\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=2\\ x>-1\end{cases}\\ \begin{cases} m>2\\ x\in\left(-1;\dfrac{3}{m-2}\right]\end{cases}\\ \begin{cases} m\in(-1;2)\\ x\in\left(-\infty;\dfrac{3}{m-2}\right]\cup(1;\infty)\end{cases} \\ \begin{cases} m=-1\\ x\in D\end{cases}\\ \begin{cases} m\in(-\infty;-1)\\ x\in(-\infty;-1)\cup\left[\dfrac{3}{m-2};\infty\right)\end{cases}\end{array}\right.$$

$D: x\ne -1$

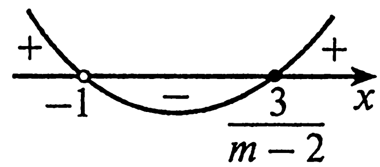
$$\frac{3}{m-2} \vee -1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m-2}\vee 0$$

при $\left[\begin{array}{l} m<-1\\ m>2\end{array}\right.$ $\dfrac{3}{m-2}>-1$;

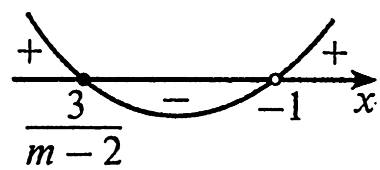
при $m\in(-1;2)$ $\dfrac{3}{m-2}<-1$;

при $m=-1$ $\dfrac{3}{m-2}=-1$.

$m\in(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$



$m\in(-1;2)$



Відповідь:

якщо $m=2$ $x\in(-1;\infty)$;

якщо $m>2$ $x\in\left(-1;\dfrac{3}{m-2}\right]$;

якщо $m\in(-1;2)$

$$x\in\left(-\infty;\frac{3}{m-2}\right]\cup(1;\infty);$$

якщо $m=-1$ $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$;

якщо $m\in(-\infty;-1)$

$$x\in(-\infty;-1)\cup\left[\frac{3}{m-2};\infty\right).$$

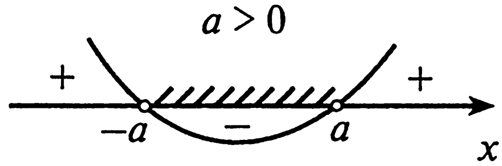
Приклад 9. $\dfrac{1}{x-a}<\dfrac{1}{x+a} \Leftrightarrow \dfrac{2a}{(x-a)(x+a)}<0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ x\in D\\ 0<0\end{cases}\\ \begin{cases}a>0\\ (x-a)(x+a)<0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ (x-a)(x+a)>0\end{cases}\end{array}\right.$$

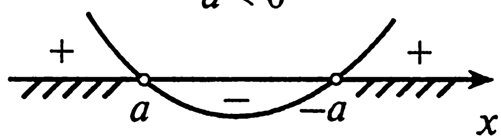
$D: x\neq \pm a$

Очевидно, що
при $a>0$ $a>-a$;
при $a<0$ $-a>a$.

$a>0$



$a<0$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a>0\\ x\in(-a;a)\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ x\in(-\infty;a)\cup(-a;\infty)\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:
якщо $a=0$ $x\in\varnothing$;
якщо $a>0$ $x\in(-a;a)$;
якщо $a<0$ $x\in(-\infty;a)\cup(-a;\infty)$.

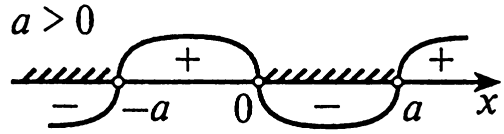
Приклад 10. $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{a}{x+a}<0 \Leftrightarrow \dfrac{ax}{(x-a)(x+a)}<0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ x\in D\\ 0<0\end{cases}\\ \begin{cases}a>0\\ \dfrac{x}{(x-a)(x+a)}<0\end{cases}\Leftrightarrow\\ \begin{cases}a<0\\ \dfrac{x}{(x-a)(x+a)}>0\end{cases}\end{array}\right.$$

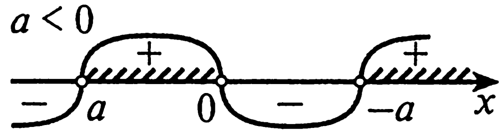
$D: x\neq \pm a$

при $a>0$ $-a<0<a$;
при $a<0$ $a<0<-a$.

$a>0$



$a<0$



$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a>0\\x\in(-\infty;\,-a)\cup(0;a)\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\x\in(a;0)\cup(-a;\infty)\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:
якщо $a=0$ $x\in\varnothing$;
якщо $a>0$ $x\in(-\infty;\,-a)\cup(0;a)$;
якщо $a<0$ $x\in(a;0)\cup(-a;\infty)$.

Приклад 11.

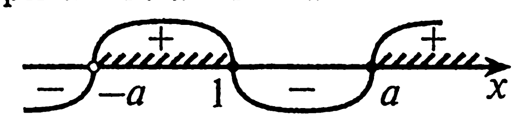
$$\frac{(x-1)(x-a)}{x+a}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\x\in(-a;1]\cup[a;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\x\in(-a;a]\cup[1;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}-1<a<0\\x\in[a;-a)\cup[1;\infty)\end{cases}\end{array}\right.$$

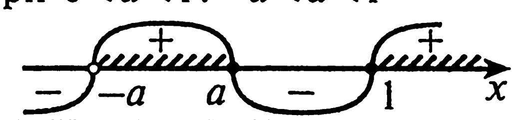
$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<-1\\x\in[a;\ 1]\cup(-a;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\\dfrac{(x-1)^2}{x+1}\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}a=0\\\dfrac{(x-1)x}{x}\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

Розташуємо на числовій вісі (OX) *числа 1, a, $-a$:*

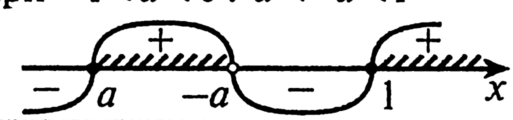
при $a>1$: $a>1>-a$



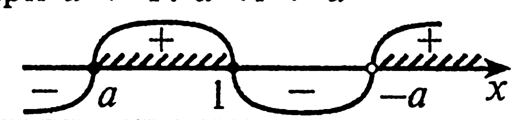
при $0<a<1$: $-a<a<1$



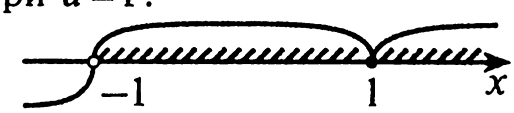
при $-1<a<0$: $a<-a<1$



при $a<-1$: $a<1<-a$

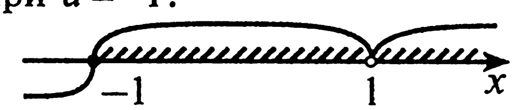


при $a=1$:



при $a=0$:

при $a=-1$:



$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\ x\in(-a;1]\cup[a;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\ x\in(-a;a]\cup[1;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}-1<a<0\\ x\in[a;-a)\cup[1;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a<-1\\ x\in[a;1]\cup(-a;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ x\in(-1;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\ x\in[-1;1)\cup(1;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a=0\\ x\in[1;\infty)\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь*:
при $a>1$ $x\in(-a;1]\cup[a;\infty)$;
при $0<a<1$ $x\in[-a;a]\cup[1;\infty)$;
при $-1<a<0$
$x\in[a;-a)\cup[1;\infty)$;
при $a<-1$ $x\in[a;1]\cup(-a;\infty)$;
при $a=1$ $x\in(-1;\infty)$;
при $a=-1$ $x\in[-1;1)\cup(1;\infty)$;
при $a=0$ $x\in[1;\infty)$.

Приклад 12. $\dfrac{1}{kx-1}>\dfrac{1}{x-k}$ (1) $D:\begin{cases}kx\neq 1\\ x\neq k\end{cases}$

$$\frac{1}{kx-1}-\frac{1}{x-k}>0\Leftrightarrow\frac{(1-k)x+(1-k)}{(kx-1)(x-k)}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=1\\ 0>0\end{cases}\\ \begin{cases}k<1\\ \dfrac{x+1}{(kx-1)(x-k)}>0\end{cases}\\ \begin{cases}k>1\\ \dfrac{x+1}{(kx-1)(x-k)}<0\end{cases}\end{array}\right.$$

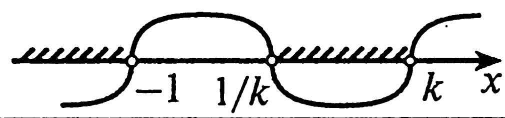
* Треба пам'ятати, що у відповіді параметр зобов'язаний «пробігти» всю числову вісь. (Тоді легко знаходяться «загублені» значення параметра.)

В залежності від розташування чисел k, $\frac{1}{k}$ і -1 на числовій вісі (OX) можлива сукупність випадків:

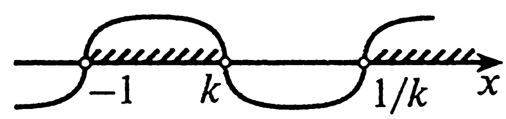
$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} k=1 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\
\begin{cases} k>1 \\ \dfrac{x+1}{\left(x-\frac{1}{k}\right)(x-k)}<0 \end{cases} \\
\begin{cases} 0<k<1 \\ \dfrac{x+1}{\left(x-\frac{1}{k}\right)(x-k)}>0 \end{cases} \\
\begin{cases} k=0 \\ \dfrac{x+1}{-1\cdot x}>0 \end{cases} \\
\begin{cases} -1<k<0 \\ \dfrac{x+1}{\left(x-\frac{1}{k}\right)(x-k)}<0 \end{cases} \\
\begin{cases} k=-1 \\ \dfrac{x+1}{(x+1)^2}<0 \end{cases} \\
\begin{cases} k<-1 \\ \dfrac{x+1}{\left(x-\frac{1}{k}\right)(x-k)}<0 \end{cases}
\end{array}\right.$$

Порівняємо числа k ; $\frac{1}{k}$ *та* -1:

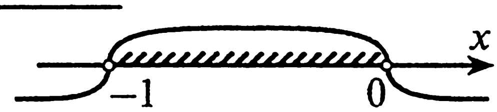
<u>при $k>1$</u>: $-1<\frac{1}{k}<k$



<u>при $0<k<1$</u>: $-1<k<\frac{1}{k}$

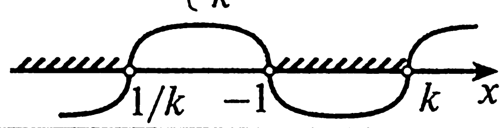


<u>при $k=0$</u>:



<u>при $-1<k<0$</u>: $\frac{1}{k}<-1<k$, бо

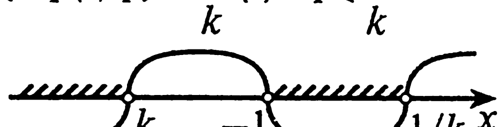
$$-1<k<0 \Leftrightarrow \begin{cases} k<0 \\ \dfrac{-1}{k}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{k}<-1$$



<u>при $k=-1$</u>: $k=\frac{1}{k}=-1$, $x+1<0$;

<u>при $k<-1$</u>: $k<-1<\frac{1}{k}$, бо

$$k<-1 \Leftrightarrow 1>-\frac{1}{k} \Leftrightarrow -1<\frac{1}{k}$$



$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=1\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}k=0\\ x\in(-1;0)\end{cases}\\ \begin{cases}k\in(0;1)\\ x\in(-1;k)\cup\left(\frac{1}{k};\infty\right)\end{cases}\\ \begin{cases}k>1\\ x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{k};k\right)\end{cases}\\ \begin{cases}k\in(-1;0)\\ x\in\left(-\infty;\frac{1}{k}\right)\cup(-1;k)\end{cases}\\ \begin{cases}k=-1\\ x\in(-\infty;-1)\end{cases}\\ \begin{cases}k<-1\\ x\in(-\infty;k)\cup\left(-1;\frac{1}{k}\right)\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:
якщо $k=1$ $x\in\varnothing$;
якщо $k=0$ $x\in(-1;0)$;
якщо $k=-1$ $x\in(-\infty;-1)$;
якщо $k\in(0;1)$
$x\in(-1;k)\cup\left(\frac{1}{k};\infty\right)$;
якщо $k\in(1;\infty)$
$x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{k};k\right)$;
якщо $k\in(-1;0)$
$x\in\left(-\infty;\frac{1}{k}\right)\cup(-1;k)$;
якщо $k\in(-\infty;-1)$
$x\in(-\infty;k)\cup\left(-1;\frac{1}{k}\right)$.

Завдання 11. Розв'яжіть нерівності відносно x:

1) $\frac{x+2}{x+a}\le 0$; 2) $\frac{x-k}{x-5}\le 2$; 3) $\frac{x-3}{ax}<0$; 4) $\frac{(k-1)^2x}{x+1}\ge 0$;

5) $\frac{(k-1)^2x}{x-k}<0$; 6) $\frac{kx}{kx-3}\ge 0$; 7) $\frac{kx}{kx+2}>1$; 8) $\frac{ax}{ax-2}\le 3$;

9) $\frac{x^2}{x+1}\le\frac{k^2}{x+1}$; 10) $\frac{1}{ax+1}<\frac{1}{x-a}$; 11) $\frac{ax+1}{ax-1}\ge\frac{a+1}{a-1}$;

12) $\begin{cases}\frac{-4x^2+ax-6}{x^2-x+1}<-6\\ \frac{2x^2-ax+4}{x^2-x+1}>4\end{cases}$; 13) $\frac{2a}{x}-\frac{1}{x-1}<1$.

§ 12. РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНОГО

Якщо *квадратне рівняння містить параметр у знаменнику,* то його розв'язання відрізняється від моделі, яку ми обговорювали у § 8 лише врахуванням області визначення. А саме, у відповіді з'являється твердження відсутності розв'язків при умові нульового значення виразів з параметрами, які є знаменниками.

Приклад 1. $\frac{x^2}{m}-2x-\frac{x}{m}+m+1=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$D: m \neq 0$$

$$d=(2m+1)^2-4m^2-4m=1>0$$

$$x_{1,2}=\frac{2m+1\pm 1}{2}=\left[\begin{array}{l} m+1 \\ m \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=0 \\ x \in \varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} m \neq 0 \\ x \in \{m+1;\ m\} \end{cases} \end{array}\right. ;$$

Відповідь:
при $m=0$ $x \in \varnothing$;
при $m \neq 0$ $x \in \{m+1; m\}$.

Перші кроки розв'язання *рівняння, що зводиться до квадратного і містить невідоме у знаменнику* будуть такими самими, як у наведеному вище. Тобто, після врахування області визначення рівняння, ми приводимо його до вигляду, зручному для подальшої роботи, і розв'язуємо вже звичне для нас квадратне рівняння. Але, після цього, на відміну від попереднього прикладу, відповідь писати ще зарано, бо область визначення містить умови до яких входить невідоме. Потрібно заборону на певні значення невідомого перевести на заборону певних значень параметрів, аналогічно тому, як ми то робили у завданнях § 1.

Приклад 2.

$$\frac{x}{2a+3}+\frac{2a-1}{x}=\frac{2(2a+1)}{2a+3}\Leftrightarrow \qquad D:\begin{cases}x\neq 0\\ a\neq -3/2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\{x,a\}\in D\\ x^2-2(2a+1)x+4a^2+4a-3=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-3/2\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq -3/2\\ x\neq 0\\ x\in\{2a+3;\ \ 2a-1\}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$d/4=(2a+1)^2-4a^2-4a+3=4$

$x_{1,2}=2a+1\pm 2=\left[\begin{array}{l}2a+3\\ 2a-1\end{array}\right.$

$x_1=2a+3=0$ при $a=-3/2\notin D$;

$x_2=2a-1=0$ при $a=1/2$;

$x_1\big|_{a=1/2}=2a+3\big|_{a=1/2}=4\in D$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-3/2\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a=1/2\\ x=4\end{cases}\\ \begin{cases}a\notin\{-3/2;\ \ 1/2\}\\ x\in\{2a+3;\ \ 2a-1\}\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:
при $a=-3/2$ $x\in\varnothing$;
при $a=1/2$ $x=4$;
при $a\notin\{-3/2;1/2\}$ $x\in\{2a+3;2a-1\}$.

Зверніть увагу, якщо при певному значенні параметра один з коренів випадає з області визначення, то це ще не означає, що розв'язків в цьому випадку немає. Потрібно з'ясувати належить, чи не належить другий корінь при цьому значенні параметра області визначення.

Приклад 3.

$$\frac{2a-1}{x+2}+\frac{5a}{x^2-4}=1+\frac{a^2+6}{x^2-4}\Leftrightarrow \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D\\ x^2-(2a-1)x+a^2-a=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm 2\\ x\in\{a;\ \ a-1\}\end{cases}$$

$D: x\neq\pm 2$

$d=(2a-1)^2-4a^2+4a=1$

$x_{1,2}=\dfrac{2a-1\pm 1}{2}=\left[\begin{array}{l}a\\ a-1\end{array}\right.$

Проаналізуємо умови при яких $x_{1,2} = \pm 2$:

$x_1 = a = 2$ при $a = 2$, $x_2\big|_{a=2} = a - 1\big|_{a=2} = 1 \in D$;

$x_1 = a = -2$ при $a = -2$, $x_2\big|_{a=-2} = a - 1\big|_{a=-2} = -3 \in D$;

$x_2 = a - 1 = 2$ при $a = 3$, $x_1\big|_{a=3} = a\big|_{a=3} = 3 \in D$;.

$x_2 = a - 1 = -2$ при $a = -1$, $x_1\big|_{a=-1} = a\big|_{a=-1} = -1 \in D$.

Тоді

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2 \\ x = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 3 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1 \\ x = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} a \notin \{\pm 2;\ 3;\ -1\} \\ x \in \{a;\ a - 1\} \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
при $a = 2$ $x = 1$;
при $a = -2$ $x = -3$;
при $a = 3$ $x = 3$;
при $a = -1$ $x = -1$;
при $a \notin \{\pm 2; 3; -1\}$ $x \in \{a; a - 1\}$.

Приклад 4.

$$(1)\ \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x + a} = 1 \Leftrightarrow$$

$D: x \neq \pm a$

$d/4 = 1 + a^2 > 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + a^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{x,\ a\} \subset D \\ x^2 - 2x - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm a \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{a^2 + 1} \\ x = 1 - \sqrt{a^2 + 1} \end{array}\right. \end{cases}$$

Проаналізуємо умови при яких x_1 або x_2 дорівнюють $\pm a$:

1) $x_1 = 1 + \sqrt{a^2 + 1} = a$ виконується при

$$\sqrt{a^2 + 1} = a - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ a^2 + 1 = a^2 - 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing;$$

2) $x_1 = 1+\sqrt{a^2+1} = -a$ виконується при

$$\sqrt{a^2+1} = -a-1 \Leftrightarrow \begin{cases} -a-1 \ge 0 \\ a^2+1 = a^2+2a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -1 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing .$$

3) $x_2 = 1-\sqrt{a^2+1} = a$ виконується при

$$\sqrt{a^2+1} = 1-a \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a \ge 0 \\ a^2+1 = 1-2a+a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 1 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0 ,$$

$$x_1\Big|_{a=0} = 1+\sqrt{a^2+1}\Big|_{a=0} = 2 \ne \pm a\Big|_{a=0} ;$$

4) $x_2 = 1-\sqrt{a^2+1} = -a$ виконується при

$$\sqrt{a^2+1} = a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 \ge 0 \\ a^2+1 = a^2+2a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -1 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0 .$$

Тоді

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a \ne 0 \\ x \in \left\{1 \pm \sqrt{a^2+1}\right\} \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь:
при $a=0$ $x=2$;
при $a \ne 0$ $x \in \left\{1 \pm \sqrt{a^2+1}\right\}$.

Приклад 5.

$$\frac{1}{a(x+1)} + 1 = \frac{x-1}{a} - x \Leftrightarrow \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{a;\ x\} \in D \\ (a-1)x^2 + 2ax + a + 2 = 0 \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} a \ne 0 \\ x \ne -1 \end{cases}$$

$$d/4 = a^2 - (a-1)(a+2) = 2 - a \ge 0$$

при $a \le 2$;

$$x_{1.2} = \frac{-a \pm \sqrt{2-a}}{a-1}$$

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>2\\ a=0\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ x=-3/2\end{cases}\\ \begin{cases}a\le 2\\ a\notin\{0;\ 1\}\\ x\ne -1\\ x\in\left\{\dfrac{-a\pm\sqrt{2-a}}{a-1}\right\}\end{cases}\end{array}\right.$$

Проаналізуємо коли $\begin{cases}x_{1,2}=-1\\ a\notin\{0;1\}\end{cases}$:

1) $x_1=\dfrac{-a+\sqrt{2-a}}{a-1}=-1$

при $\sqrt{2-a}=1\Leftrightarrow a=1\in\{0;\ 1\}$;

2) $x_2=\dfrac{-a-\sqrt{2-a}}{a-1}=-1$

при $\sqrt{2-a}=-1\Leftrightarrow a\in\varnothing$.

Відповідь:

при $a\in\{0;(2;\infty)\}$ $x\in\varnothing$;

при $a=1$ $x=-3/2$;

при $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;2]$ $x\in\left\{\dfrac{-a\pm\sqrt{2-a}}{a-1}\right\}$.

Приклад 6.

$$\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=2 \qquad (1)$$

$D:\begin{cases}x\ne b\\ x\ne a\end{cases}$

Позначимо $\dfrac{x-a}{x-b}\triangleq t$,

тоді $t+\dfrac{1}{t}=2\Leftrightarrow t=1$, і $\dfrac{x-a}{x-b}=1$.

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D\\ x-a=x-b\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=b.\\ x\in(-\infty;b)\cup(b;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a\ne b\\ x\in\varnothing\end{cases}\end{array}\right.$$

Скористалися властивістю взаємно обернених величин:

$$t+\frac{1}{t}\le 2.$$

При тому рівність виконується лише в випадку

$$t=\frac{1}{t}=1.$$

Відповідь:
при $a=b$ $x\in(-\infty;b)\cup(b;\infty)$;
при $a\neq b$ $x\in\varnothing$.

Приклад 7.

$$\frac{x^2+ax+a^2}{x^2-ax+a^2}=\frac{a^2}{x^2} \qquad (1)$$

$$D: x\neq 0$$

Підстановкою переконуємося, що $|x|=|a|$ не задовольняє (1).

Використаємо властивість пропорції:

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}\neq 1 \Leftrightarrow \frac{m+n}{m-n}=\frac{p+q}{p-q}.$$

Тоді

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq 0 \\ x^2\neq a^2 \\ \dfrac{\left(x^2+ax+a^2\right)+\left(x^2-ax+a^2\right)}{\left(x^2+ax+a^2\right)-\left(x^2-ax+a^2\right)}=\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\notin\{\pm a;\ 0\} \\ \dfrac{a^2+x^2}{ax}=\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\notin\{\pm a;\ 0\} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ x^2+ax-a^2=0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$d=a^2+4a^2=5a^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-a\pm a\sqrt{5}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-a\pm a\sqrt{5}}{2}=0 \text{ при } a=0;$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ x=-\dfrac{a}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right) \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
при $a=0$ $x\in\varnothing$;
при $a\neq 0$ $x\in\left\{\dfrac{a}{2}\left(\sqrt{5}\pm1\right)\right\}$.

Завдання 12. Розв'яжіть рівняння відносно x:

1) $\dfrac{x^2-1}{a+1}+\dfrac{x-1}{a-1}=0$;

2) $\dfrac{2x-1}{m+1}=\dfrac{x^2}{m-1}$;

3) $ax=\dfrac{1}{x}$;

4) $1+\dfrac{b(b+9)}{x^2-9}=\dfrac{2b+3}{x+3}+\dfrac{12b}{x^2-9}$;

5) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}$;

6) $\dfrac{x^2+ax+a^2x+a^3}{x^2-a^2}=0$;

7) $\dfrac{ax^2}{x-1}-2a=a^2+1$;

8) $\dfrac{x-a}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-a}=2$.

§ 13. НАВКРУГИ КВАДРАТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Ми вже будували графіки квадратичної функції, розв'язували квадратні нерівності з параметром. Тепер, опираючись на отриманий досвід та властивості квадратичної функції, зовсім неважко розв'язати наступні задачі (якщо, безумовно, трошки поміркувати, пригадати ОК-11 і, окрім того, скористатися порадами розділа «Відповіді і поради»):

Завдання 13.

1) Знайти p та q, якщо відомо, що точка $A(1;-2)$ є вершиною параболи $y=x^2+px+q$.

2) Знайти k та m, якщо відомо, що точка $B(-2;-8)$ є вершиною параболи $y=kx^2+8x+m$.

3) Знайти a, b та c, якщо відомо, що точка $M(-1;5)$ є вершиною параболи $y=ax^2+bx+c$, яка перетинає вісь ординат у точці $N(0;1)$.

4) Знайти a, b та c якщо відомо, що точка $M(-1;16)$ є вершиною параболи $y=ax^2+bx+c$, яка перетинає вісь абсцис у точці $N(1;0)$.

5) Побудувати графік функції $y=ax^2-(a+b)x+12$, якщо відомо, що пряма $x=2$ є віссю його симетрії.

6) Побудувати графік функції $y=x^2-6x+a$, якщо відомо, що її найменше значення дорівнює 1.

7) Побудувати графік функції $y=-x^2+4x+b$, якщо відомо, що її найбільше значення дорівнює 2.

8) Дано дві функції $f(x)=2x^2$ і $g(x)=5x-c$. Не виконуючи побудови графіків функцій

а) з'ясуйте, чи перетинаються вони, якщо $c=2$;

б) проаналізуйте взаєморозташування графіків цих функцій в залежності від c.

9) Графіки функцій $y=2x-x^2$ і $y=2x^2-20x+48$ перетинаються прямою $y=a$. Знайдіть кількість точок перетину в залежності від значення a.

10) При яких значеннях c вершина параболи $y=x^2-6x+c$ розташована на відстані 5 від початку координат?

11) При яких значеннях b вершина параболи $y=bx^2+2x+1$ розташована на відстані $2\sqrt{2}$ від точки $A(1;2)$?

12) Знайти зображення на кординатній площині множини точок, відстань кожної з яких до прямої $y=-1$ дорівнює відстані до точки $M(-4;1)$.

13) Знайти зображення на кординатній площині множини точок, відстань кожної з яких до точки $F(-1;\,-2)$ дорівнює відстані до прямої $x=1$.

14) Відомо, що $f(x)=x^2-3x+2$ при $x\geq 0$, а пряма $x=0$ є віссю симетрії графіка функції $y=f(x)$. Задайте дану функцію однією формулою та побудуйте її графік.

15) Відомо, що $f(x)=x^2-4x$ при $x\geq 0$, а точка $O(0;0)$ є точкою симетрії графіка функції $y=f(x)$. Побудуйте графік функції $y=f(x)$ та задайте цю функцію однією формулою.

16) Знайдіть всі значення параметра b, при яких рівняння $\frac{x^2-(2b+3)x+b^2+3b}{x^2-9}=0$ має лише один розв'язок.

17) Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $\frac{x^2-(2a-1)x+a^2-a}{x^2-4}=0$ має лише один розв'язок.

18) Знайдіть всі значення параметра k, при яких рівняння $\frac{x^2+(1-2k)x+4k-6}{\sqrt{2x^2-3x+1}}=0$ має лише один розв'язок.

19) Знайдіть всі значення параметра c, при яких рівняння $\frac{x^2+(1-2c)x-4c-2}{\sqrt{x^2-2x-3}}=0$ має лише один розв'язок.

20) При якому значенні a область визначення функції $y = \sqrt{-x^2 + 6x - a} + \sqrt[4]{1 - x}$ складається з однієї точки?

21) Серед усіх квадратних тричленів $y = x^2 + px + q$, які набувають тільки невід'ємних значень, знайти той, в якого сума $p + q$ – найменша.

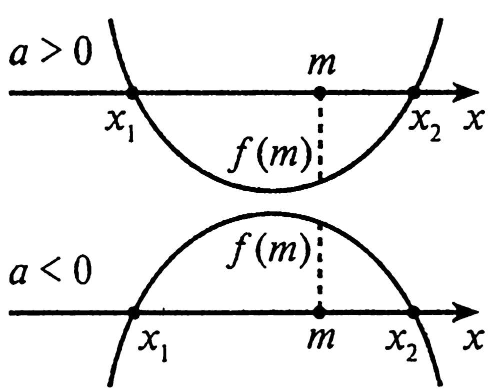
§ 14. РОЗМІЩЕННЯ КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА ВІДНОСНО ЧИСЛА

Позначимо квадратний тричлен через $f(x) \triangleq ax^2 + bx + c$, а корені його через $x_{1,2}$.*

Розглянемо випадок, коли вимагається розташувати число m між коренями цього тричлену, тобто

$$\textbf{коли } x_1 < m < x_2$$

Очевидно, що існують два корені $x_1 \neq x_2$, тобто $a \neq 0$ і нам потрібно розглянути два випадки: $a > 0, a < 0$. Запишемо умови, що відповідають малюнкам:



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ f(m) < 0 \end{cases} (1) \\ \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(m) > 0 \end{cases} (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow af(m) < 0 \;(3)$$

Умова на дискримінант зайва, бо коли гілки параболи спрямлені догори (вниз), а $f(x)$ при деякому значенні x приймає від'ємне (додатнє) значення, то графік функції $y = f(x)$ «зобов'язаний» перетинати вісь Ox, і корені $x_{1,2}$, існують.

Очевидно, що сукупність систем (1) та (2) можна розглядати як умову, що a та $f(m)$ мають однакові знаки і записати це у вигляді (3).

---

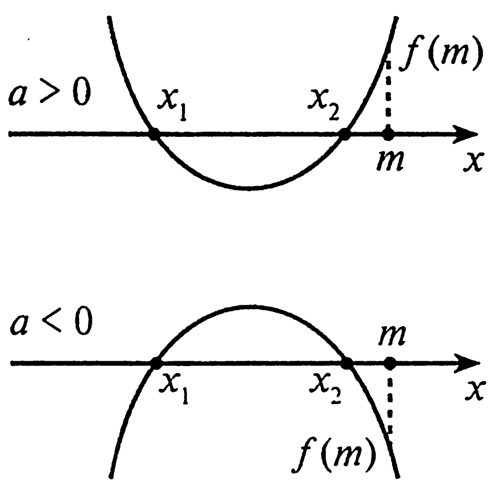
* Символ «$\triangleq$» означає «позначимо».

Розглянемо випадок, коли вимагається розташувати число m правіше обох коренів квадратного тричлена x_{12}, тобто

$$\boxed{\textbf{коли } x_{1,2} < m\,.}$$

Зауважимо, що як і у попередньому випадку, мова іде саме про корені квадратного тричлена, тобто $a \neq 0$. Якщо в умові задачі мова йде про розв'язання рівняння, то треба починати з випадку $a = 0$, а вже потім з'ясовувати, що буде коли $a > 0, a < 0$.

Як і раніше, спробуємо записати умови, які відповідають геометричній інтерпретації нашого твердження:

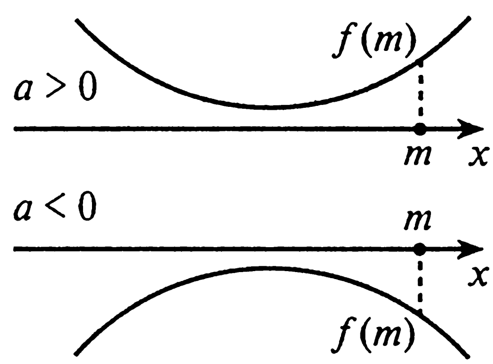


$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ f(m)>0\\ D\ge 0\\ x_{\text{в}}<m\end{cases}\quad(4)\\ \begin{cases}a<0\\ f(m)<0\\ D\ge 0\\ x_{\text{в}}<m\end{cases}\quad(5)\end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}af(m)>0\\ D\ge 0\\ -\dfrac{b}{2a}<m\end{cases}}\quad(6)$$

Дійсно, тут треба вимагати існування коренів, тобто виконання умови на дискримінант $D \geq 0$, бо сукупності

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ f(m)>0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ f(m)<0\end{cases}\end{array}\right.$$

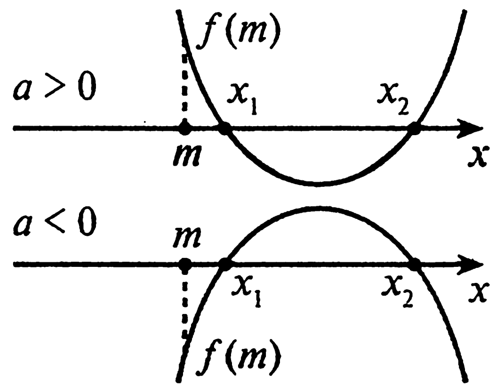
відповідають, окрім наших, ще й такі графічні зображення:



Окрім того, треба додати ще й умову на положення вершин параболи $x_b < m$, бо сукупності

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>0 \\ f(m)>0 \\ D\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ f(m)<0 \\ D\ge 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

відповідають, окрім наших, ще й такі графічні зображення:



У сукупності систем (4) та (5) останні дві умови однакові, а перші дві означають, що знаки виразів a та $f(m)$ співпадають. Тому останню сукупність дійсно можна представити у вигляді (6).

Аналогічно попередньому розташування числа m лівіше коренів $x_{1,2}$ на числовій осі, тобто

коли $m < x_{1,2}$.

означає виконання умов:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>0 \\ f(m)>0 \\ D\ge 0 \\ x_в > m \end{cases} \quad (7) \\ \begin{cases} a<0 \\ f(m)<0 \\ D\ge 0 \\ x_в > m \end{cases} \quad (8)\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} af(m)>0 \\ D\ge 0 \\ -\dfrac{b}{2a}>m \end{cases} \qquad (9)$$

Зверніть увагу, що при умові $D=0$ квадратне рівняння $f(x)=0$ має **один розв'язок**, а квадратний тричлен $f(x)$ має **два корені, що збігаються.**

Перед тим, як приступити до розв'язування задач цієї теми радимо довести (від супротивного) самостійно такі теореми про розташування коренів квадратного тричлена.

Теорема 1. *Умова розташування на числовій осі числа т між коренями* $x_{1,2}$ *квадратного тричлена*

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

рівносильна виконанню умови $af(m)<0$.

Теорема 2. *Умова розташування на числовій осі числа т праворуч коренів* $x_{1,2}$ *квадратного тричлена*

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

рівносильна виконанню умови

$$\begin{cases} af(m)>0 \\ D\geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a}<m \end{cases}.$$

Теорема 3. *Умова розташування на числовій осі числа т ліворуч від коренів* $x_{1,2}$ *квадратного тричлена*

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

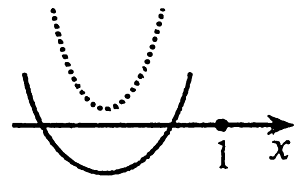
рівносильна виконанню умови

$$\begin{cases} af(m)>0 \\ D\geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a}>m \end{cases}.$$

Нагадаємо, що довести рівносильність двох тверджень означає довести, що з першого твердження випливає друге і навпаки.

А тепер наведемо декілька прикладів розв'язання задач цієї теми.

Приклад 1. При яких значеннях a обидва корені квадратного тричлена x^2+ax+a менші за 1?



Розв'язання:

$f(x) \triangleq x^2+ax+a.$

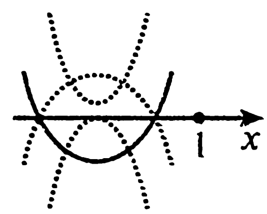
$$\begin{cases} f(1)>0 \\ D\geq 0 \\ x_в<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a+a>0 \\ a^2-4a\geq 0 \\ -\dfrac{a}{2}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-0{,}5 \\ a\in(-\infty;0]\cup[4;\infty) \\ a>-2 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-0{,}5;0]\cup[4;\infty)$$

Відповідь: $a\in(-0{,}5;0]\cup[4;\infty)$.

Приклад 2. При яких значеннях a обидва корені квадратного рівняння

$$ax^2-4x+3a+1=0$$

менші за 1?



Розв'язання:

$f(x) \triangleq ax^2-4x+3a-1.$

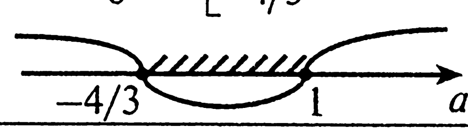
З умови випливає, що рівняння має два корені, тобто $a\neq 0$.

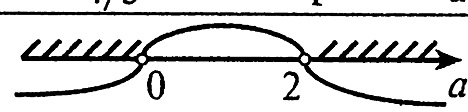
$$\begin{cases} af(1)>0 \\ \dfrac{D}{4}\geq 0 \\ x_b<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(1-4+3a+1)>1 \\ 4-a(3a+1)\geq 0 \\ \dfrac{2}{a}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(3a-2)>0 \\ 3a^2+a-4\leq 0 \Leftrightarrow \\ \dfrac{2-a}{a}<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{2}{3};\infty\right) \\ a\in\left[-\dfrac{4}{3};1\right] \\ a\in(-\infty;0)\cup(2;\infty) \end{cases}$$

$3a^2+a-4\leq 0,\ d=1+4\cdot 4\cdot 3=49$

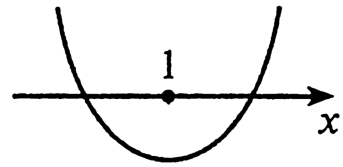
$$a_{1,2}=\frac{-1\pm 7}{6}=\left[\begin{array}{l} 1 \\ -4/3 \end{array}\right.$$





Відповідь: $a\in\left[-\dfrac{4}{3};0\right)$.

Приклад 3. При яких значеннях a один з коренів рівняння $2x^2+(2a-3)x+a-8=0$ менший за 1, а другий більший за 1?



Розв'язання:

$f(x)\triangleq 2x^2+(2a-3)x+a-8.$

$$f(1)<0 \Leftrightarrow 2+2a-3+a-8<0 \Leftrightarrow a<3$$

Відповідь: $a<3$

Приклад 4. При яких значеннях a один з коренів рівняння

$$\left(a^2+a+1\right)x^2+(2a-3)x-a^2-5=0$$

менший за 1, а другий більший за 1?

Розв'язання:

$f(x)\triangleq\left(a^2+a+1\right)x^2+(2a-3)x-a^2+5.$

$$\left(a^2+a+1\right)f(1)<0 \Leftrightarrow f(1)<0 \Leftrightarrow 3a-7<0 \quad \vdots\ a^2+a+1>0 \text{ при } a\in R$$

Відповідь: $a<\frac{7}{3}$.

Приклад 5. При яких значеннях a для коренів $x_{1,2}$ рівняння

$$(2a+1)x^2-ax+a-2=0$$

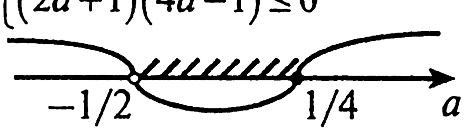
виконується умова $x_1\le -1\le x_2$?

Розв'язання:

$f(x)\triangleq(2a+1)x^2-ax+a-2.$

$$\begin{cases}2a+1\ne 0\\(2a+1)f(-1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ne-\frac{1}{2}\\(2a+1)(2a+1+a+a-2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\ne-\frac{1}{2}\\(2a+1)(4a-1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right]$$



Відповідь: $a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$.

Приклад 6. При яких значеннях параметра a корені рівняння $(a-1)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0$ більші за 2?

Розв'язання:

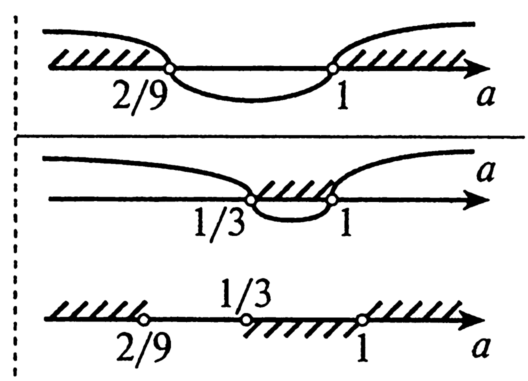
При $a=1$ маємо $4x-1=0$ і розв'язком буде число $x=\frac{1}{4}<2$. Тобто $a=1$ не задовольняє умові задачі.

$f(x) \triangleq (a-1)x^2 + 2(a+1)x + a - 2$.

При $a \neq 1$:

$$\begin{cases} (a-1)f(2)>0 \\ \frac{D}{4} \geq 0 \\ x_{\text{в}} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)\left(4(a-1)+4(a+1)+a-2\right)>0 \\ (a+1)^2-(a-1)(a-2)\geq 0 \\ -\frac{a+1}{a-1}>2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(9a-2)>0 \\ 5a-1\geq 0 \\ \frac{3a-1}{a-1}<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\in\left(-\infty; \frac{2}{9}\right)\cup(1; \infty) \\ a\geq\frac{1}{5} \\ a\in(1/3; 1) \end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing$$

Відповідь: $a\in\varnothing$.

Приклад 7. При яких значеннях a корені рівняння

$$(2a-2)x^2+(a+1)x+1=0$$

не більше 2?

Розв'язання:

При $a=1$ маємо $2x+1=0$ і розв'язком рівняння буде число $x=-\frac{1}{2}$, менше за 2. Тобто $a=1$ задовольняє умові задачі.

При $a\neq 1$ $f(x)\triangleq 2(a-1)x^2+(a+1)x+1$:

$$\begin{cases} a\neq 1 \\ 2(a-1)f(2)\geq 0 \\ D\geq 0 \\ x_в \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(2a-1)\geq 0 \\ (a-3)^2\geq 0 \\ \dfrac{9a-7}{a-1}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup(1;\infty)$$

Відповідь: $a\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;\infty)$.

Далі попрацюйте самостійно. В роботі вам допоможуть геометрична інтерпретація умов та ОК-19.

Завдання 14. У (1-8), з'ясуйте при яких значеннях параметра a корені $x_{1,2}$ рівняння задовольняють вказаній умові.

1) $x^2-6ax+2-2a+9a^2=0$, $x_1<3<x_2$?
2) $x^2+ax+a=0$, $x_1\leq 1\leq x_2$?
3) $x^2-(a+1)x+a+4=0$, $x_{1,2}>0$?
4) $(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$, $x_{1,2}\leq 0$?
5) $(a+1)x^2-3ax-4a=0$, $x_{1,2}>-1$?
6) $(a+1)x^2-3ax+4a=0$, $x_{1,2}\leq -1$?
7) $(2a+1)x^2-ax+a-2=0$, $x_1<2<x_2$?
8) $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2=0$, $x_{1,2}\geq 1$?

9) При яких значеннях a тільки один розв'язок рівняння

$$x^2+2ax-2a-1=0$$

задовольняє нерівності $x>2$?

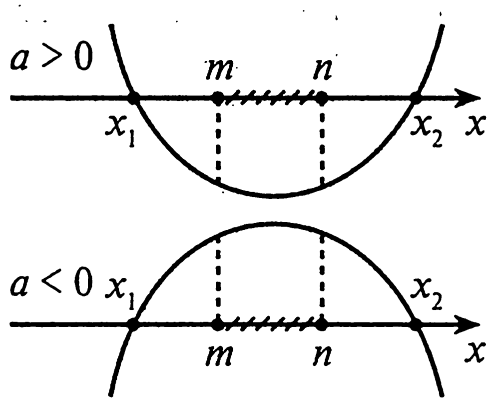
§ 15. РОЗМІЩЕННЯ КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА ВІДНОСНО ІНТЕРВАЛА

Знову позначимо квадратний тричлен через $f(x) \triangleq ax^2 + bx + c$, а його корені через $x_{1,2}$.

Розглянемо випадок, коли інтервал $(m;n)$ міститься у інтервалі $(x_1;x_2)$, тобто

$$\text{коли } (m;\, n) \in (x_1;\, x_2)$$

Спираючись на графічну інтерпретацію цього твердження для випадків $a > 0$ та $a < 0$ отримаємо умови:



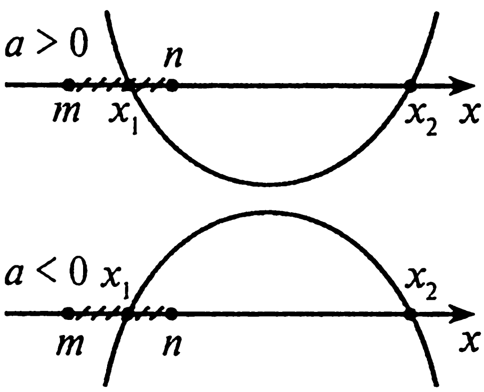
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ f(m) < 0 \ (1) \\ f(n) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(m) > 0 \ (2) \\ f(n) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} af(m) < 0 \\ af(n) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ви, мабуть, вже зрозуміли, що міркування схожі на міркування попереднього параграфа, але тепер між коренями $x_{1,2}$ ми повинні розташувати не одне число, а два.

У випадку, коли лише один з коренів, наприклад менший, належить інтервалу $(m;n)$, тобто

$$\boxed{\text{коли } x_1 \in (m;\, n),\ x_2 \notin (m;\, n)}$$

ми повинні поставити умову, що число n належить $(x_1; x_2)$, а m - не належить $(x_1; x_2)$:

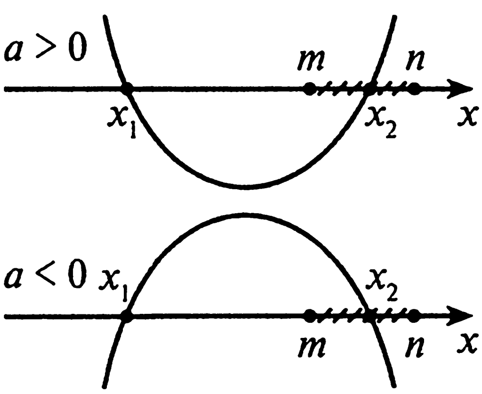


$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ f(m)>0\ (4)\\ f(n)<0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ f(m)<0\ (5)\\ f(n)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}af(m)>0\\ af(n)<0\end{cases}} \quad (6)$$

Аналогічно,

коли $x_1 \notin (m; n)$, $x_2 \in (m; n)$

маємо:



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ f(m)<0\ (7)\\ f(n)>0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ f(m)>0\ (8)\\ f(n)<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}af(m)<0\\ af(n)>0\end{cases}} \quad (9)$$

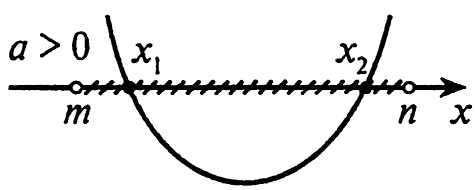
Зверніть увагу на те, що у всіх трьох розглянутих вище випадках хоча б одне з чисел $\{m; n\}$, які обмежують заданий інтервал $(m; n)$, знаходилось між коренями квадратного тричлена, і тому зайвою були умови існування коренів (на дискримінант) **та на розташування вершини параболи** (на x_b).

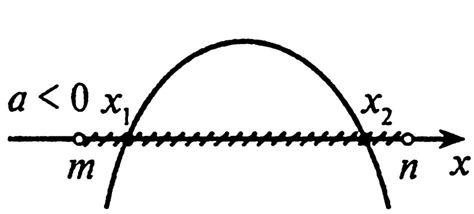
Очевидно, що випадок розташування коренів праворуч (ліворуч) інтервалу зводиться до випадку розташування числа ліворуч (праворуч) $x_{1,2}$, який ми розглядали у попередньому параграфі.

Таким чином, нам залишилось проаналізувати лише випадок, коли інтервал $(m;n)$ містить у собі інтервал $[x_1;x_2]$, тобто

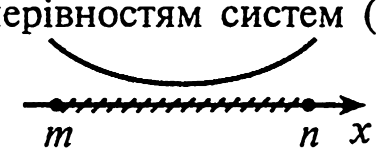
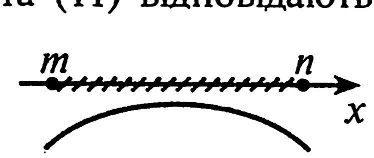
$$\text{коли } [x_1;x_2]\subset(m;n)$$

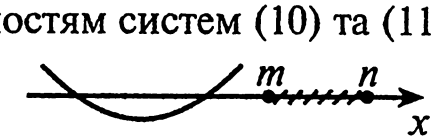
Як і раніше, будемо відштовхуватись від геометричної інтерпретації цього твердження при $a>0$ та $a<0$:





$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>0\\ f(m)>0\\ f(n)>0 \quad (10)\\ D\geq 0\\ x_{\text{в}}\in(m;n)\end{cases}\\ \begin{cases} a<0\\ f(m)<0\\ f(n)<0 \quad (11)\\ D\geq 0\\ x_{\text{в}}\in(m;n)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} D\geq 0\\ x_{\text{в}}\in(m;n)\\ af(m)>0\\ af(n)>0\end{cases} \quad (12)$$

У зв'язку з тим, що числа m та n розташовані поза інтервалом $[x_1;x_2]$, ми повинні сформулювати умову існування коренів, бо першим трьом нерівностям систем (10) та (11) відповідають також конфігурації  та  відповідно.

Окрім того, треба додати умову розташування вершини параболи, бо першим чотирьом нерівностям систем (10) та (11) відповідають також конфігурації  та  відповідно.

Сукупність нерівностей (10) та (11) можна представити у вигляді (12), бо останні дві умови в них повторюються, а перші три означають, що $\operatorname{sign} a = \operatorname{sign} f(m)$ і $\operatorname{sign} a = \operatorname{sign} f(n)$ («*sign*» означає «знак»).

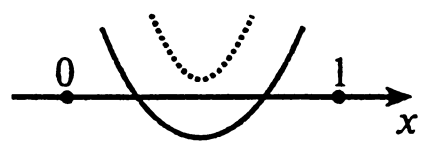
Перш, ніж приступати до розв'язування задач з цієї теми, корисно, як і в попередньому параграфі, спочатку сформулювати теореми про розташування коренів квадратного тричлену відносно інтервала $(m; n)$ і довести їх.

Ну, а тепер, давай розв'яжемо разом декілька задач. В роботі нам будуть допомагати **ОК-20** та **ОК-9**.

Приклад 1. При яких a корені рівняння

$$2x^2 - (2a-5)x + a - 3 = 0$$

розташовані між числами 0 і 1?



Розв'язання:

$f(x) \triangleq 2x^2 - (2a-5)x + a - 3$

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) > 0 \\ D \geq 0 \\ 0 < x_b < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 > 0 \\ 4 - a > 0 \\ (2a-7)^2 \geq 0 \\ 0 < \dfrac{2a-5}{4} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 3 \\ a < 4 \\ a > 2{,}5 \\ a < 4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (3; 4)$$

Відповідь: $a \in (3; 4)$

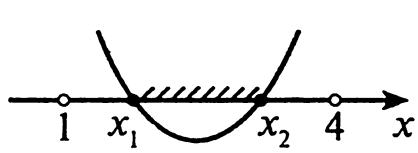
Приклад 2. При яких значеннях a будь-який розв'язок нерівності

$$x^2 - (2a+1)x + 3a \leq 0$$

міститься між числами 1 і 4?

Розв'язання:

Запишемо задану нерівність у вигляді $f(x) \leq 0$, де $f(x) \triangleq$ $\triangleq x^2 - (2a+1)x + 3a$. Умова означає, що корені квадратного тричлена $f(x)$ розташовані між числами 1 і 4.



$$\begin{cases} f(1)>0 \\ f(4)>0 \\ D\ge 0 \\ x_в \in (1;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ 12-5a>0 \\ 4a^2-8a+1\ge 0 \\ 1<\dfrac{2a+1}{2}<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in\left(0;\dfrac{12}{5}\right) \\ a\in\left(-\infty;1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[1+\dfrac{\sqrt{3}}{2};\infty\right) \\ 0{,}5<a<3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\in\left(0;1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[1+\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{12}{5}\right) \\ a\in(0{,}5;3{,}5) \end{cases}$$

Відповідь: $a\in\left(0{,}5;1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[1+\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{12}{5}\right)$.

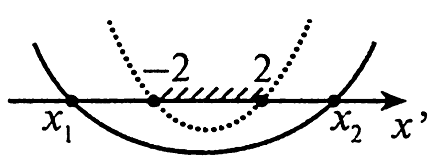
Приклад 3. При яких значеннях a корені рівняння

$$x^2-2ax-1=0$$

за модулем не менші за 2?

Розв'язання:

Умова означає, що $|x_{1,2}|\ge 2$, або інтервал $[-2;2]$ належить інтервалу $[x_1;x_2]$:



$f(x)\triangleq x^2-2ax-1.$

Тоді розв'язком задачі буде розв'язок системи

$$\begin{cases} f(-2)\le 0 \\ f(2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+4a\le 0 \\ 3-4a\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le -\dfrac{3}{4} \\ a\ge \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing .$$

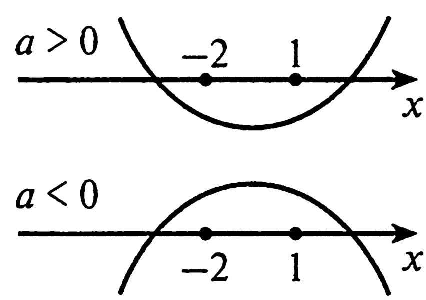
Відповідь: $a\in\varnothing$.

Приклад 4. При яких значеннях a один з коренів квадратного рівняння $ax^2-(3a-2)x+a-2=0$ менший -2, а другий – більший 1?

Розв'язання:

За умовою задачі $a \neq 0$. Тоді маємо відповідно до графічної інтерпретації:

$f(x) \triangleq ax^2-(3a-2)x+a-2$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ f(-2)<0\\ f(1)<0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ f(-2)>0\\ f(1)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}af(-2)<0\\ af(1)<0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a(11a-6)<0\\ a(-a)<0\end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(0;\frac{6}{11}\right)$$

Відповідь: $a \in \left(0;\dfrac{6}{11}\right)$.

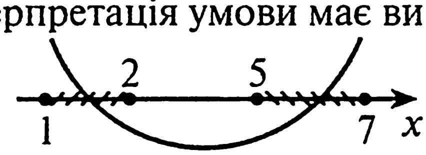
Приклад 5. Для яких p існує q таке, що рівняння

$$x^2+px+q=0$$

має один корінь на відрізку $[1;2]$ і один корінь на відрізку $[5;7]$?

Розв'язання:

Геометрична інтерпретація умови має вигляд:



$f(x) \triangleq x^2+px+q$.

Тоді

$$\begin{cases}f(2)\le 0\\ f(5)\le 0\\ f(1)\ge 0\\ f(7)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4+2p+q\le 0\\ 25+5p+q\le 0\\ 1+p+q\ge 0\\ 49+7p+q\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}q\le -2p-4\\ q\le -5p-25\\ q\ge -p-1\\ q\ge -7p-49\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p \le -8 \\ -7p-49 \le q \le -2p-4 \end{cases} \\ \begin{cases} -8 \le p \le -7 \\ -p-1 \le q \le -2p-4 \end{cases} \\ \begin{cases} p \ge -7 \\ -p-1 \ge q \le -5p-25 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\underline{-2p-4 \vee -5p-25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3p \vee -21 \Leftrightarrow p \vee -7$

при $p > -7 \quad -2p-4 > -5p-25$;

при $p = -7 \quad -2p-4 = -5p-25$;

при $p < -7 \quad -2p-4 < -5p-25$.

$\underline{-p-1 \vee -7p-49} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6p \vee -48 \Leftrightarrow p \vee -8$

при $p > -8 \quad -p-1 > -7p-49$;

при $p = -8 \quad -p-1 = -7p-49$;

при $p < -8 \quad -p-1 < -7p-49$.

Проаналізуємо існування розв'язків системи:

а) $\begin{cases} p \le -8 \\ -7p-49 \le -2p-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \le -8 \\ 5p \ge -45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \le -8 \\ p \ge -9 \end{cases} \Leftrightarrow p \in [-9; -8]$;

б) $\begin{cases} p \in (-8; -7] \\ -p-1 \le -2p-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \in (-8; -7] \\ p \le -3 \end{cases} \Leftrightarrow p \in (-8; -7]$;

в) $\begin{cases} p \ge -7 \\ -p-1 \le -5p-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \ge -7 \\ 4p \le -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \ge -7 \\ p \le -6 \end{cases} \Leftrightarrow p \in [-7; -6]$.

Відповідь: $p \in [-9; -6]$.

Приклад 6. При яких значеннях a корені рівняння

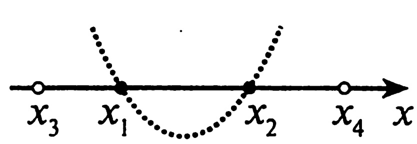
$$x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$$

лежать між коренями рівняння

$$x^2 - 2(a+1)x + a(a+1) = 0\,?$$

Розв'язання:

Позначимо перше рівняння через (1), а його корені через $x_{1,2}$; друге рівняння через (2), а його корені через $x_{3,4}$. Розташуємо корені рівнянь на числовій вісі згідно з умовою:



Знайдемо $x_{1,2}$ і розглянемо умову розташування інтервалу $[x_1;x_2]$ між коренями $x_{3,4}$ функції

$$f(x)\triangleq x^2-2(a+1)x+a(a+1).$$

Неважко бачити, що $x_{1,2}=1\pm a$. Тоді маємо:

$$\begin{cases} f(1+a)<0 \\ f(1-a)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+a)^2-2(1+a)^2+a(a+1)<0 \\ (a-1)^2+2(a^2-1)+a(a+1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(a+1)<0 \\ 4a^2-a-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-1 \\ a\in\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{8};\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\in\left(\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{17}\right);\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{17}\right)\right)$$

Відповідь: $a\in\left(\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{17}\right);\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{17}\right)\right)$.

Завдання 15.

1) При яких a всі розв'язки рівняння

$$(1+a)x^2-3ax+4a=0$$

задовольняють умові $1<x<5$?

2) При яких a обидва корені рівняння

$$x^2-2ax+a^2-1=0$$

задовольняють нерівності $-2<x<4$?

3) Знайти всі значення a, при яких рівняння

$$(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$$

має два корені, один з яких більший за 3, а другий меншій за 2.

4) При яких a корені рівняння

$$x^2-2ax-1=0$$

за модулем не перебільшують 2 ?

5) Знайти найбільше ціле a, при якому рівняння

$$x^4-2x^2+\frac{a}{8}=0$$

має чотири різні корені.

6) При яких a корені рівняння

$$x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$$

мають різні знаки і обидва за модулем менші за 4 ?

7) При яких a будь-яке x, що задовольняє

$$ax^2 + \left(1 - a^2\right)x - a > 0$$

за модулем не перебільшує 2 ?

8) Знайти всі m, при яких один з коренів рівняння

$$x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 2 = 0$$

розташований на числовій осі між числами 0 та 2, а другий — між числами 3 та 5.

9) При яких m

$$x^2 + (2m-1)x + m^2 + m - 2 < 0$$

містить $[0; 2]$?

10) Знайдіть всі значення a, при яких рівняння

$$4x^2 - 2x + a = 0$$

має два корені, кожен з яких належить інтервалу $(-1; 1)$.

11) Знайти всі значення a, при яких корені рівняння

$$(2a+3)x^2 + (a+1)x + 4 = 0$$

містяться між 0 та -2.

§ 16. ВПІЗНАЙ УМОВУ

Багато завдань з параметрами зводяться до розташування коренів квадратного тричлена відносно числа або інтервала. Треба лише «впізнати» знайому умову.

Наприклад, коли з квадратної нерівності випливає певне твердження, або навпаки – це завдання на розташування коренів квадратного тричлена лівої частини нерівності.

Треба пам'ятати, що ***множина, яка є наслідком, повинна містити вихідну множину***. Окрім того така умова, в свою чергу, може бути сформульована і іншим чином (див. ОК-21).

Приклад 1. При яких значеннях m нерівність

$$(m-1)x^2-2(m+1)x+m-3<0$$

матиме своїм наслідком нерівність $|x-2|<3$?

Розв'язання:

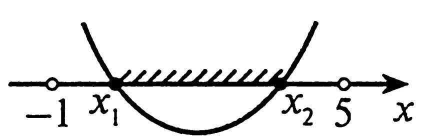
Друга множина

$$|x-2|<3 \Leftrightarrow x\in(2-3;\ \ 2+3)\Leftrightarrow x\in(-1;\ \ 5)$$

і повинна містити всі розв'язки першої нерівності. Це можливо, коли останні є обмеженим інтервалом, тобто коли $m-1>0$. Якщо позначити через

$$f(x)=(m-1)x^2-2(m+1)x+m-3\,,$$

то графічна інтерпретація умови має вигляд:



,

тобто корені квадратичної функції $f(x)$, при умові $m>1$ повинні належати інтервалу $(-1;\ \ 5)$. А таку задачу ми розв'язувати вміємо (див. ОК-19):

$$\begin{cases} m-1>0 \\ f(-1)>0 \\ f(5)>0 \\ D/4>0 \\ -1<x_в<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m>\dfrac{1}{2} \\ m>\dfrac{19}{8} \\ m>1/3 \\ m\in(-\infty;\,1)\cup(3/2;\infty) \\ m\in(-\infty;\,0)\cup(1;\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{19}{8}$$

Відповідь: $m>\dfrac{19}{8}$.

Приклад 2. Знайти всі a, при кожному з яких нерівність

$$ax^2-4x+3a+1>0$$

виконується при всіх $x>0$.

Розв'язання:

Умова означає (ОК-21), що інтервал $(0;\infty)$ міститься у розв'язку нерівності

$$ax^2-4x+3a+1>0.$$

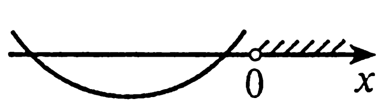
Напівнескінченний інтервал не може міститись у обмеженому інтервалі $(x_1;x_2)$. тому a не може бути від'ємним.

Нехай $a=0$. Тоді перша нерівність має розв'язок

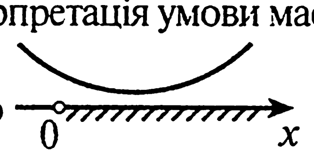
$$-4x+1>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{4},$$

який не містить $(0;\infty)$.

Нехай $a>0$. Тоді графічна інтерпретація умови має вигляд:



або



,

тобто

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(0)>0\\ \dfrac{D}{4}\ge 0\\ x_{\text{в}}<0\end{cases}\\ \dfrac{D}{4}<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3a+1>0\\ -3a^2-a+4\ge 0\\ \dfrac{2}{a}<0\end{cases}\\ -3a^2-a+4<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>-\dfrac{1}{3}\\ -\dfrac{4}{3}\le a\le 1\\ a<0\end{cases}\\ a\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right)\cup(1;\infty)\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\in\left(-\dfrac{1}{3};0\right)\\ a\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right)\cup(1;\infty)\end{array}\right.$$

Відповідь: $a\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup(1;\infty)$.

Приклад 3. Знайти всі a, при кожному з яких нерівність

$$\frac{x+3a-5}{x-a}<0$$

виконується при всіх $x\in[0;4]$.

Розв'язання:

Умова означає, що з $x\in[0;4]$ (1) випливає

$$\frac{x+3a-5}{x-a}<0\,, \qquad (2)$$

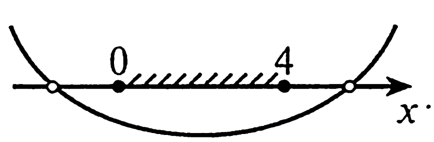
тобто множина розв'язків (2) містить (1) (див. **ОК-21**).

$$(2)\Leftrightarrow(x+3a-5)(x-a)<0$$

і є квадратичною нерівністю.

Позначимо $f(x)\triangleq(x+3a-5)(x-a)$.

Тоді графічна інтерпретація умови задачі має вигляд



$$\begin{cases} f(0)<0 \\ f(4)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(3a-5)a<0 \\ (3a-1)(4-a)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{5}{3};\infty\right) \\ a\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(4;\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a\in(-\infty;0)\cup(4;\infty)$

Відповідь: $a\in(-\infty;0)\cup(4;\infty)$.

Приклад 4. При яких a з нерівності $0\le x\le 1$ випливає нерівність

$$\left(a^2+a-2\right)x^2-(a+5)x-2\le 0.$$

Розв'язання:

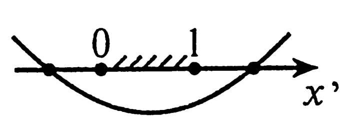
Позначимо першу нерівність через (1), а другу через (2). Умова $(1)\Rightarrow(2)$ означає, що множина розв'язків (2) містить множину (1).

1) Нехай $a^2+a-2=0$, тобто $a\in\{-2;1\}$.

Якщо $a=-2$, (2) має вигляд $-3x-2\le 0 \Leftrightarrow x\ge -\frac{2}{3}$ і містить (1).

Якщо $a=1$, (2) має вигляд $-6x-2\le 0 \Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{3}$ і містить (1).

2) Нехай $a^2+a-2>0$, тобто $a\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$. Тоді графічна інтерпретація умови задачі має вигляд

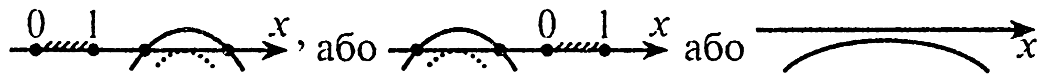


тобто, якщо позначити $f(x)\triangleq\left(a^2+a-2\right)x^2-(a+5)x-2$:

$$\begin{cases} a\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty) \\ f(0)\le 0 \\ f(1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty) \\ -2\le 0 \\ a^2-9\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty) \\ |a|\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[-3;-2)\cup(1;3].$$

3) Нехай $a^2+a-2<0$, тобто $a\in(-2;1)$. Тоді графічна інтерпретація має вигляд:



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-2;1)\\ D\ge 0\\ f(0)\le 0\\ f(1)\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x_в\ge 1\\ x_в\le 0\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-2;1)\\ D<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-2;1)\\ 9(a+1)^2\ge 0\\ -2\le 0\\ a^2-9\le 0\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{a+5}{2(a^2+a-2)}\ge 1\\ \dfrac{a+5}{2(a^2+a-2)}\le 0\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-2;1)\\ 9(a+1)^2<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}a\in(-2;1)\\ a\in[-3;3]\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{2a^2+a-9}{a^2+a-2}\le 0\\ \dfrac{a+5}{a^2+a-2}\le 0\end{array}\right.\end{cases} \qquad (*)$$

Розв'язком останніх двох нерівностей є умова невід'ємності їхніх чисельників (бо у випадку 3 маємо $a^2+a-2<0$). Тоді

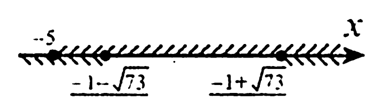
$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(-2;1)\\ a\in[-3;3]\\ \left[\begin{array}{l}a\in\left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{73}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{73}}{4};\infty\right)\\ a\in[-5;\infty)\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\in(-2;1)$$

$$\frac{-1-\sqrt{73}}{4}<\frac{-1-\sqrt{64}}{4}<-2$$

$$\frac{-1+\sqrt{73}}{4}>\frac{-1+\sqrt{64}}{4}>1$$

$$\frac{-1-\sqrt{73}}{4}>\frac{-1-\sqrt{81}}{4}>$$



Шуканими a є сукупність
$a\in\{-2;1\}\cup[-3;-2)\cup(1;3]\cup(-2;1)$.

Відповідь: $a\in[-3;3]$.

Розглянемо декілька прикладів коли властивості квадратного тричлену інколи допомагають при розв'язанні рівнянь, які можна звести до квадратних.

Приклад 5. Знайти всі значення a при яких рівняння

$$(1)\ x^4+(1-2a)x^2+a^2-1=0$$

а) не має дійсних розв'язків;
б) має лише один дійсний розв'язок;
в) має два дійсні розв'язки;
г) має три дійсні розв'язки;
д) має чотири дійсні розв'язки.

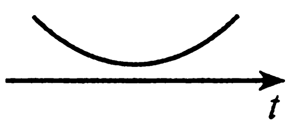
Розв'язання:

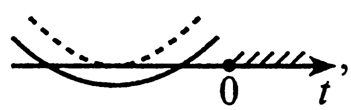
Позначимо

$$x^2 \triangleq t,\ t^2+(1-2a)t+a^2-1 \triangleq f(t)$$

і врахуємо, що $t \ge 0$. Тоді

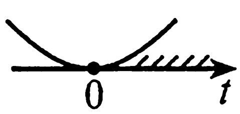
а) Умова (а) виконується коли рівняння $f(t)=0$ не має коренів або коли обидва корені від'ємні, тобто при умові

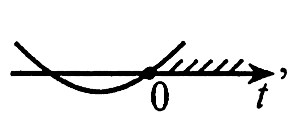


або


$$\left[\begin{array}{l} D<0 \\ \begin{cases} D\ge 0 \\ f(0)>0 \\ t_в<0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

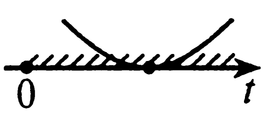
б) Будь-якому додатньому кореню рівняння $f(t)=0$ відповідає два значення x. Розв'язок (1) буде єдиним лише у випадках

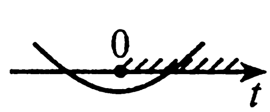
коли


або


$$\begin{cases} f(0)=0 \\ t_в \le 0 \end{cases} .$$

в) Аналогічно попередньому маємо графічну інтерпретацію

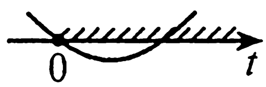


або


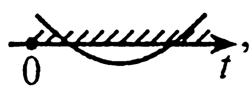
, тобто

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=0 \\ t_в>0 \end{cases} \\ f(0)<0 \end{array}\right. .$$

г) Умові існування рівно трьох розв'язків (1) відповідає єдина графічна інтерпретація $f(t)$, коли один корінь $f(t)$ нуль а другий додатній:

, тобто $\begin{cases} f(0)=0 \\ t_в > 0 \end{cases}$.

д) Чотири розв'язки рівняння (1) матимемо при наявності двох додатніх коренів $f(t)$:

, $\begin{cases} f(0)>0 \\ D>0 \\ t_в > 0 \end{cases}$.

Радимо провести самостійно відповідні обрахунки.

Відповідь:

а) $a \in (-\infty; -1) \cup (5/4; \infty)$;

б) $a = -1$;

в) $a \in \{5/4; (-1; 1)\}$;

г) $a = 1$;

д) $a \in (1; 5/4)$.

Приклад 6. При яких значеннях a рівняння

$$4^x - a \cdot 2^x - a + 3 = 0$$

має хоча б один розв'язок*?

Розв'язання:

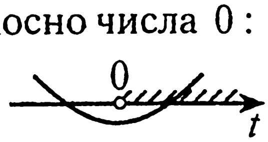
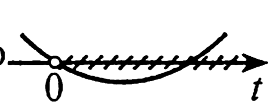
Якщо позначити

$$2^x \triangleq t \in (0;\ \infty),$$

то задача зводиться до розташування коренів квадратного тричлена

$$f(t) = t^2 - at - a + 3$$

відносно числа 0:

, або , або .

Тобто коли

* Нагадаємо: маємо на увазі лише дійсні розв'язки.

$$\left[\begin{array}{l} f(0)<0 \\ \begin{cases} f(0)>0 \\ D\ge 0 \\ t_в>0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(0)=0 \\ t_в>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>3 \\ \begin{cases} a<3 \\ a^2+4a-12\ge 0 \\ a/2>0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=3 \\ a/2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow a\in[2;\infty).$$

Відповідь: $a\in[2;\ \infty)$.

Приклад 7. При яких a рівняння

$$\sqrt{x-a}=2x-1$$

має лише один розв'язок?

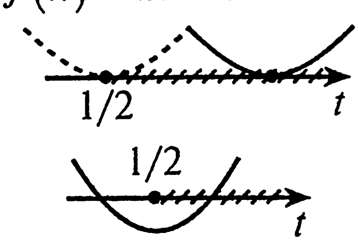
Розв'язання:

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases} x-a\ge 0 \\ 2x-1\ge 0 \\ x-a=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1/2 \\ x-a=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1/2 \\ 4x^2-5x+1+a=0 \end{cases}$$

Маємо 1 розв'язок у випадках:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=0 \\ x_b\ge 1/2 \end{cases} \\ f(1/2)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{9}{16} \\ \dfrac{5}{8}\ge\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ 1-\dfrac{5}{2}+1+a<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{9}{16} \\ a<\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$f(x)\triangleq 4x^2-5x+1+a$$



$$D=25-16(1+a)=9-16a$$

$$x_в=\frac{5}{8}$$

Відповідь:

$$a\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left\{\frac{9}{16}\right\}.$$

За завданням № 16 радимо працювати наступним чином. Спочатку спробувати самостійно розв'язати задачу і отриману відповідь порівняти з відповіддю наприкінці посібника. У випадку невдачі ретельно (з олівцем) розібрати вказівки до розв'язання, закрити посібник і приступити до другої спроби розв'язання задачі. Можна звертатися по допомогу і до опорних конспектів (особливо ОК-21).

Завдання 16.

1) Якими мають бути значення m, щоб нерівність

$$\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} \le 3$$

справджувалась при всіх дійсних значеннях x?

2) Знайти всі значення m, при яких нерівність

$$(m-1)x^2 + 2mx + 3m - 2 > 0$$

справджується при всіх дійсних значеннях x, більших від $-\frac{1}{2}$.

3) При яких значеннях m нерівність

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 < 0$$

матиме своїм наслідком нерівність $|x-2| < 3$?

4) При яких значеннях a нерівність

$$\frac{x + 2a + 1}{x - a} < 0$$

виконується при всіх x проміжку $1 \le x \le 2$?

5) Знайти всі значення параметра m, при яких система нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + 2x + m \le 0 \\ x^2 - 4x - 6m \le 0 \end{cases}$$

має тільки один розв'язок.

6) Знайти всі значення a, при яких рівняння

$$\frac{x^2 + (3a+1)x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$$

має єдиний розв'язок.

7) При яких значеннях a нерівність

$$\frac{x^2-ax-2}{x^2-3x+4}>-1$$

виконується для будь-яких $x\in R$?

8) Знайти всі значення a при кожному з яких всі значення $x\in[1;5]$ задовольняють нерівності

$$3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0.$$

9) При яких значеннях параметра a графіки функцій

$$y=2ax^2+2x+1 \text{ та } y=5x^2+2ax-2$$

перетинаються в одній точці?

10) Знайти усі значення a для яких як тільки виконується умова $|x|\le 1$, то виконується і співвідношення

$$2x^2-4a^2x-a^2+1>0.$$

11) При яких значеннях a нерівність

$$\frac{x^2+ax-1}{2x^2-2x+3}<1$$

виконується для будь-яких x?

12) При яких значеннях параметрів a і b розв'язок нерівності

$$\sqrt{b-x}<\sqrt{x-a}$$

збігається з проміжком $(3;\ 7]$?

13) Знайти всі значення a при яких всі числа $x\in[-1;\ 3]$ задовольняють нерівність

$$2ax+2\sqrt{2x+3}-2x+3a-5<0.$$

У (14—16) треба розв'язати рівняння відносно x.

14) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{a-3x}=1$.

15) $\sqrt{2x^2-4}=x+a$.

16) $(x-1)\sqrt{(a-1)x^2+2ax+a}=0$.

Нерівності (17—20) розв'язати відносно x.

17) $\sqrt{a^2-x^2}\ge -2x$.

18) $\sqrt{x^2-2a}\le x+2$.

19) $ax^3 + 9x \geq -3(a+1)x^2$.

20) $x^2\sqrt{(a+2)x^2 - 2ax - a + 1} \leq 0$.

21) При яких значеннях k всі розв'язки рівняння

$$x^2 - (k+1)x + 3k = 0$$

є цілими числами? Знайти ці розв'язки.

22) Знайдіть найменше $q \in N$ для якого існує таке ціле число p, що рівняння $x^4 + px^2 + q = 0$ має 4 дійсні корені і ці корені утворюють арифметичну прогресію.

§ 17. НА ДОПОМОГУ ПРИХОДИТЬ ГРАФІКА

Раніше ми вже зверталися до графічного тлумачення при розв'язанні задач з параметрами, наприклад, коли розглядали прямі і кола на координатній площині (§ 5), коли розв'язували квадратичні нерівності (§ 10), аналізували умови розташування коренів квадратичної функції відносно числа або інтервалу (§ 14–16). У цьому параграфі, спираючись на вже отримані навички, ми зробимо ще декілька кроків у цьому напрямку. Опорні конспекти (ОК-12 — ОК-19) допоможуть повторити основні способи перетворення графіків функцій та ГМТ на координатній площині.

Приклад 1. Знайти всі значення a, при яких кожний розв'язок нерівності

$$0{,}4^{x^2+1} \geq 6{,}25^{a-3x} \qquad (1)$$

є розв'язком нерівності $x^2-6x+4<a^2$ (2).

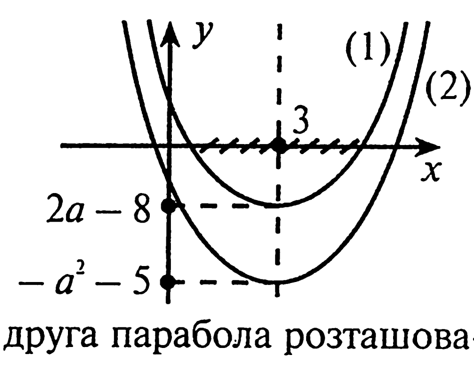
Розв'язання.

Умова означає, що з твердження (1) випливає твердження (2), $(1)\Rightarrow(2)$; тобто множина (2) містить множину (1).

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+1}\geq\left(\frac{25}{4}\right)^{a-3x}\Leftrightarrow x^2+1\leq-2(a-3x)\Leftrightarrow(x-3)^2+2a-8\leq0;$$

$$(2)\Leftrightarrow\ (x-3)^2-a^2-5<0\,.$$

Графіки обох квадратних тричленів $y=f_1(x)=(x-3)^2+2a-8$ і $y=f_2(x)=(x-3)^2-a^2-5$, отримано зсувом параболи $y=(x-3)^2$ вздовж вісі симетрії $x=3$.



Умова задачі виконується, коли друга парабола розташована строго нижче першої:

$$2a-8>-a^2-5\ \Leftrightarrow\ a^2+2a-3>0\Leftrightarrow a\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty)\,.$$

Відповідь: $a\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$.

Приклад 2. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння

$$2\lg(x+3)=\lg ax\,, \qquad (1)$$

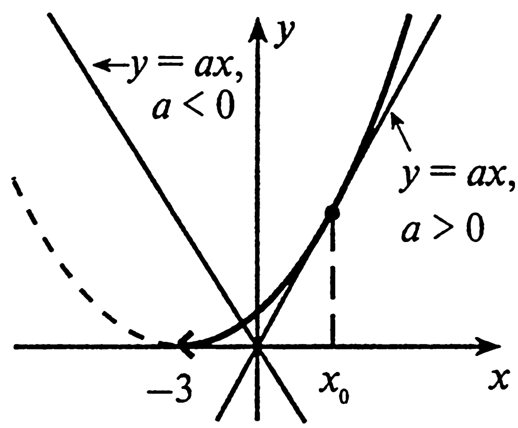
має один розв'язок.

Розв'язання.

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+3>0\\(x+3)^2=ax\end{cases}$$

Графік лівої частини рівняння системи — напівпарабола з виколотою, вершиною $(x_в=-3)$.

Графік правої частини рівняння системи — пряма, яка обертається навколо точки (0; 0) в залежності від значення параметра a.



При всіх $a<0$ графіки мають одну спільну точку і (1) має один розв'язок.

При $a>0$ графіки мають одну спільну точку лише в випадку, коли пряма $y=ax$ є дотичною до параболи $y=(x+3)^2$ у точці $x_0>-3$.

Знайдемо відповідне значення a з умови рівності нулю дискримінанта рівняння $(x+3)^2=ax$ для $a>0$:

$$\begin{cases}x^2+(6-a)x+9=0\\a>0\end{cases},\quad D=a^2-12a=0$$

при

$$\left[\begin{array}{l}a=0\notin(0;\infty)\\a=12\in(0;\infty)\end{array}\right.$$

Відповідь: $a\in(-\infty;\,0)\cup\{12\}$.

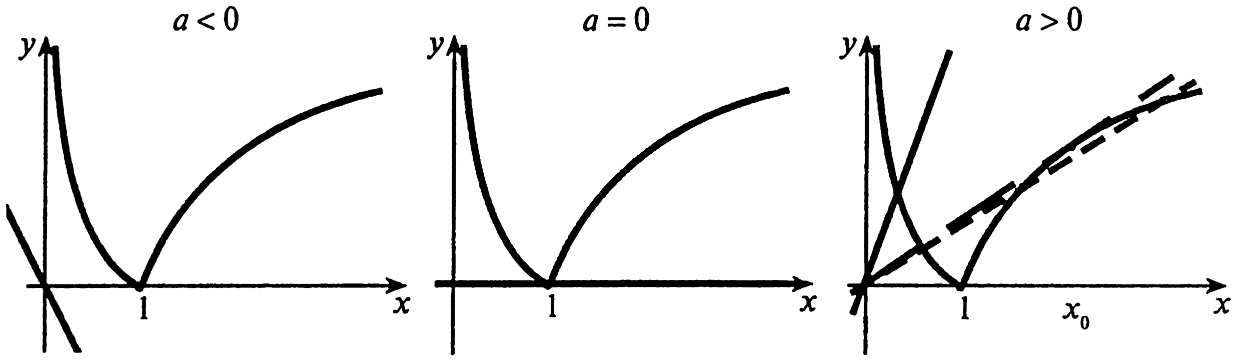
Приклад 3. Визначити кількість коренів рівняння

$$|\ln x|=ax$$

залежно від параметра a.

Розв'язання.

Розглянемо можливі взаємні розміщення графіків функцій $y=|\ln x|$ і $y=ax$ на координатній площині:



Маємо: при $a<0$ рівняння не має коренів;

при $a=1$ — один корінь $x=1$;

при $a>0$ — існують один, два або три корені.

Запишемо умову дотику прямої $y=ax$ до графіка $y=-\ln x$ у точці x_0:

$$\begin{cases} ax_0=\ln x_0 \\ a=(\ln x_0)' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0=\ln x_0 \\ a=\dfrac{1}{x_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=e \\ a=\dfrac{1}{e} \end{cases}.$$

Тоді при $a=\frac{1}{e}$ рівняння має два корені, при $a\in\left(0;\frac{1}{e}\right)$ — три корені, при $a>\frac{1}{e}$ — один корінь.

Відповідь: при $a<0$ — коренів нема;

при $a\in\left\{1;\left(\frac{1}{e};\infty\right)\right\}$ — один корінь;

при $a=1/e$ — два корені;

при $a\in\left(0;\frac{1}{e}\right)$ — три корені.

Приклад 4. Знайти a, при яких система

$$\begin{cases} y\ge x^2+a \\ x\ge y^2+a \end{cases} \qquad (1)$$

має единий розв'язок, знайдіть цей розв'язок.

Розв'язання.

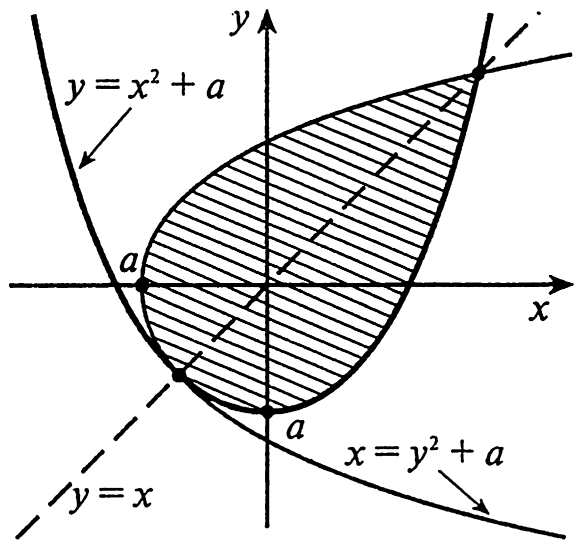
На координатній площині $(X0Y)$ (1) відповідає ГМТ що обмежено параболами

$$y = x^2 + a$$

і

$$x = y^2 + a\,,$$

симетричними відносно прямої $y = x$.

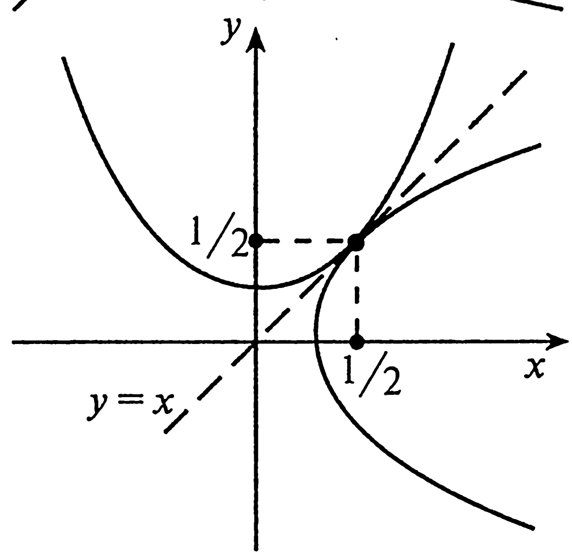


Система має один розв'язок, коли ці параболи дотикаються. Точка дотику повинна міститися на прямій $y = x$, тобто вона є розв'язком рівняння

$$x = x^2 + a,$$

при умові, що це рівняння має один корінь, тобто коли його дискримінант дорівнює нулю:

$$1 - 4a = 0 \iff a = \frac{1}{4}.$$



Відповідь: $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ при $a = \frac{1}{4}$.

Особливо «полюбляють» графічну інтерпретацію завдання з модулями.

Ми наведемо лише декілька прикладів розв'язання таких задач. Глибоко ця тема розглядається у [6].

Приклад 5. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння

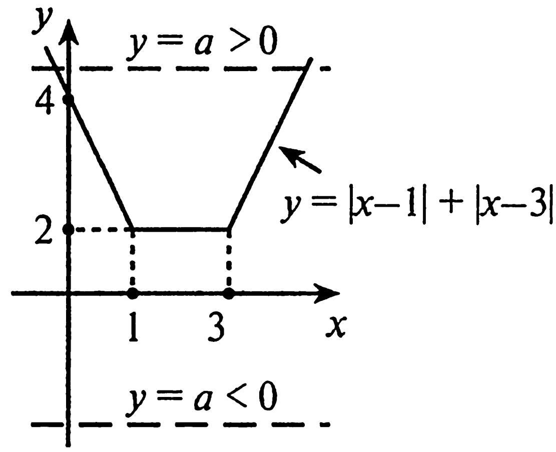
$$|x-1| + |x-3| = a$$

має більше двох розв'язків.

Розв'язання.

Побудуємо на одній координатній площині графіки функції $y = |x-1| + |x-3|$ і $y = a$. Абсциси точок їхнього перетину є розв'язками задачі.

$$y=|x-1|+|x-3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 1\\ y=-2x+4\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x\le 3\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3\\ y=2x-4\end{cases}\end{array}\right.$$



При $a>2$ маємо 2 розв'язки; при $a<2$ $x\in\varnothing$; при $a=2$ $x\in[1;3]$ і маємо нескінченну кількість розв'язків.

Відповідь: $a=2$.

Приклад 6. Знайти всі додатні значення a, для яких існує єдиній розв'язок системи

$$\begin{cases}|y|-|x|=a\\ (3a-1)x+(2a+1)y=4a\end{cases}$$

Розв'язання.

При $a>0$ $2a+1>0$ і умову можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases}|y|=|x|+a & (1)\\ y=\dfrac{1-3a}{2a+1}x+\dfrac{4a}{2a+1} & (2)\end{cases}$$

Побудуємо ГМТ першого рівняння системи за планом:

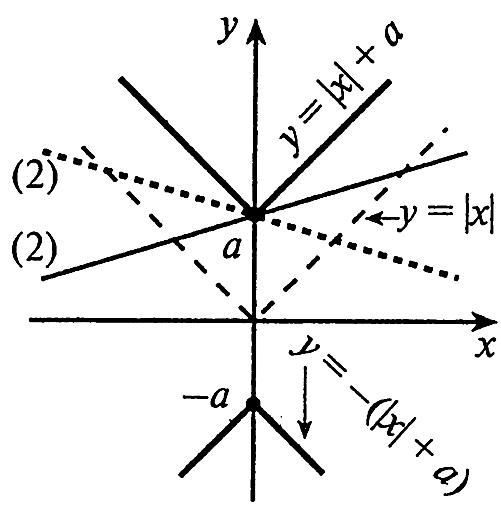
$$y=|x|\xrightarrow[\text{гр.}\uparrow\text{ на } a]{}y=$$
$$=|x|+a\xrightarrow[\text{сим.}(0X)]{}|y|=|x|+a.$$

Зауважимо, що кутові коефіцієнти утворених напівпрямих дорівнюють ± 1.

Друге рівняння системи – пряма яка перетинає вісь $(0Y)$ у точці, ордината якої

$$\frac{4a}{2a+1}>0$$

при $a>0$.



Мал. 1.

Розглянемо випадки, коли ГМТ (1) і (2) мають одну спільну точку (при умові $a>0$).

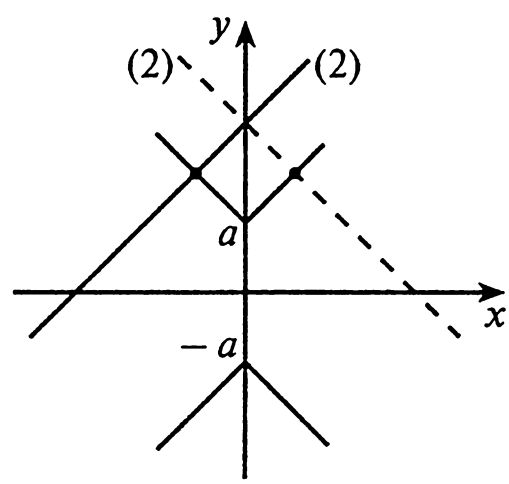
1) Пряма (2) проходить через точку $\left(0;\dfrac{4a}{2a+1}\right)$ і її кутовий коефіцієнт $\dfrac{1+3a}{2a+1}\in(-1;1)$ (мал. 1):

$$\begin{cases}\dfrac{4a}{2a+1}=a\\ \dfrac{1-3a}{2a+1}<1\\ \dfrac{1-3a}{2a+1}>-1\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+1=4\\ 1-3a<2a+1\\ 1-3a>-2a-1\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$$

2) Пряма перетинає вісь (OY) у точці, ордината якої більша за a, а кутовий коефіцієнт (мал. 2)

$$\frac{1-3a}{2a+1}=\pm1:$$

$$\begin{cases}\dfrac{4a}{2a+1}>a\\ \dfrac{1-3a}{2a+1}=\pm1\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<1{,}5\\ a\in\{0;2\}\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow a\in\varnothing.$$



Мал. 2.

Відповідь: $a=\dfrac{3}{2}$

Приклад 7. Знайти кількість розв'язків рівняння

$$|2x-1|=2-ax\quad(1)$$

у залежності від параметра a.

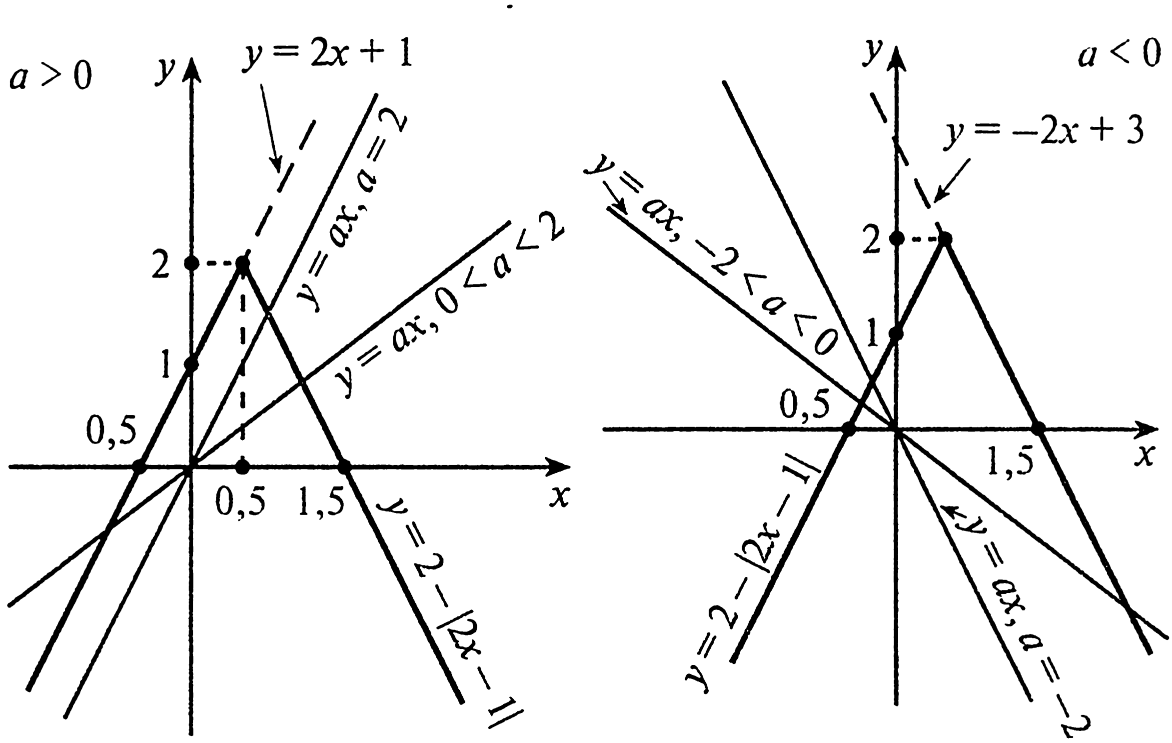
Розв'язання.

$$(1)\Leftrightarrow 2-|2x-1|=ax.$$

Побудуємо графіки функцій $y=2-|2x-1|$ і $y=ax$.

Перший графік отримаємо зсувом графіка $y=-2|x|$ праворуч на $1/2$ і вверх на 2.

Другий — пряма, яка «обертається» навколо точки $(0;0)$.



При $a=2$ пряма $y=ax$ паралельна прямій $y=2x+1$, маємо 1 розв'язок; при $a>2$ — 1 розв'язок; при $0<a<2$ — 2 розв'язки; при $a=0$ — 2 розв'язки.

При $a=-2$ пряма $y=ax$ паралельна прямій $y=-2x+3$, маємо 1 розв'язок; при $a<-2$ — 1 розв'язок; при $-2<a<0$ — 2 розв'язки.

Відповідь:

при $a\in[-\infty;-2]\cup[2;\infty]$ — 1 розв'язок;

при $a\in(-2;2)$ — 2 розв'язки.

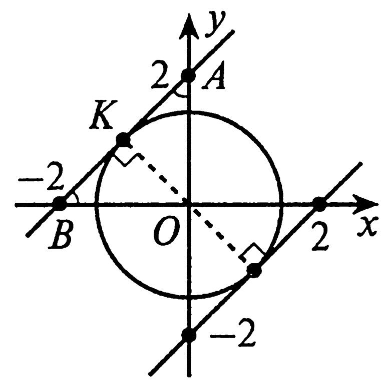
Приклад 8. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь

$$\begin{cases}|y-x|=2\\x^2+y^2=a^2\end{cases}\qquad(1)$$

має два розв'язки.

Розв'язання.

Перше рівняння системи відповідає двом паралельним прямим на координатній площині $y = x \pm 2$, друге рівняння — коло радіуса $R = |a|$, з центром $O(0;0)$.



(1) має 2 розв'язки тоді і тільки тоді, коли коло дотикається до вказаних прямих.

Трикутник AOB рівнобедрений, $\angle A = \angle B = 45°$. Тоді його висота

$$OK = R = OA \sin \angle A = 2 \sin 45° = \sqrt{2} \text{ і } |a| = \sqrt{2}.$$

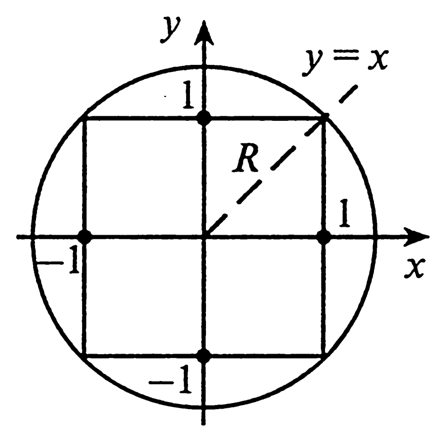
Відповідь: $a \in \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$

Приклад 9. Знайти найбільше значення виразу $x^2 + y^2$ якщо пара $(x;\, y)$ задовольняє умові

$$|x+y| + |x-y| = 2.$$

Розв'язання.

Позначимо через R^2 найбільше значення $\left(x^2 + y^2\right)$ і побудуємо на координатній площині геометричне місце точок, які задовольняють умові



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le R^2 & (1) \\ |x+y| + |x-y| = 2 & (2) \end{cases}$$

(1) — відповідають точки в середині кола $x^2 + y^2 = R^2$.

Вираз (2) — симетричний відносно

$$x \leftrightarrow -x, \quad y \leftrightarrow y \text{ і } x \leftrightarrow y.$$

Тоді побудуємо спочатку (2) при умові $x \ge 0$, $y \ge 0$, $y \ge x$ і зробимо перетворення симетрії відносно прямих $y = x$, $(0Y)$, $(0X)$.

$$\begin{cases} |x+y| + |y-x| = 2 \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \ge x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 2 \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \ge x \end{cases}.$$

Тобто (2) — квадрат, з центром (0; 0), сторони якого паралельні осям $(0X)$, $(0Y)$ і перетинають їх у точках $(0; \pm 1)$, $(\pm 1; 0)$.

Найбільше значення R відповідає колу, яке описано навколо побудованого квадрата:

$$R^2 = 1^2 + 1^2 = 2\,.$$

Відповідь: 2

Приклад 10. При яких a нерівність

$$\left|\left|\sin x - \frac{1}{3}\right| - \frac{1}{3}\right| \le a$$

виконується при всіх $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$?

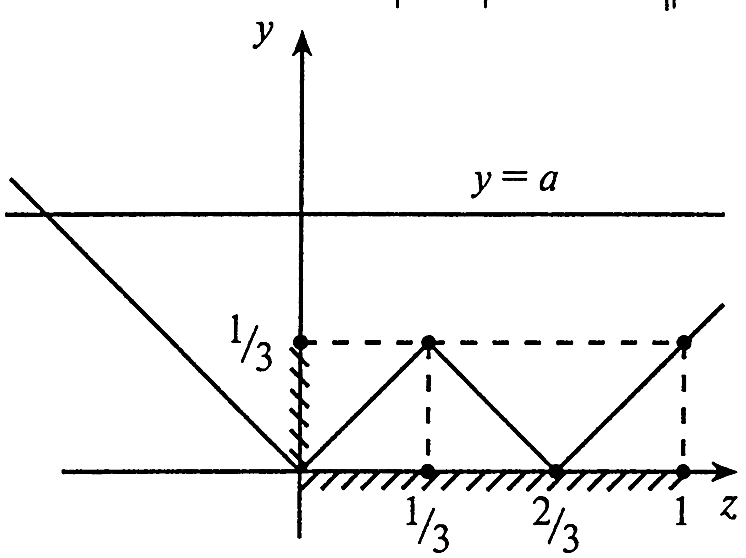
Розв'язання.

Позначимо $z = \sin x \in [-1; 1]$.

Побудуємо графік функції $y = \left|\left|z - \frac{1}{3}\right| - \frac{1}{3}\right|$ за планом

$$y = |z| \xrightarrow[\text{гр.}\to\text{ на }1/3]{} y = \left|z - \frac{1}{3}\right| \xrightarrow[\text{гр.}\downarrow\text{ на }1/3]{} y =$$

$$= \left|z - \frac{1}{3}\right| - \frac{1}{3} \to y = \left|\left|z - \frac{1}{3}\right| - \frac{1}{3}\right|$$



При $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ величина

$$z = \sin x$$

належить проміжку

$$[0; 1].$$

При $z \in [0; 1]$

$$y \in \left[0; \frac{1}{3}\right].$$

Графік функції

$$\begin{cases} y = \left|\left|z - \frac{1}{3}\right| - \frac{1}{3}\right| \\ z \in [0; 1] \end{cases}$$

розташований не вище прямої $y=a$ при умові $a \geq \frac{1}{3}$.

Відповідь: $a \geq \frac{1}{3}$.

Приклад 11. При яких a рівняння

$$\sin\frac{2\pi}{x^2+2x+a}=0 \quad (1),$$

має рівно 8 розв'язків?

Розв'язання.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\pi}{x^2+2x+a}=\pi n \\ n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+a=\dfrac{2}{n} \\ n \in Z \\ n \neq 0 \end{cases}$$

Графік функції

$$y=x^2+2x+a, \text{ —}$$

парабола, яка при зміні a переміщується вздовж вісі $(0Y)$ і у якої вершина належить прямій $x=-1$: Для того, щоб рівняння (1) мало рівно 8 розв'язків, кожна з прямих

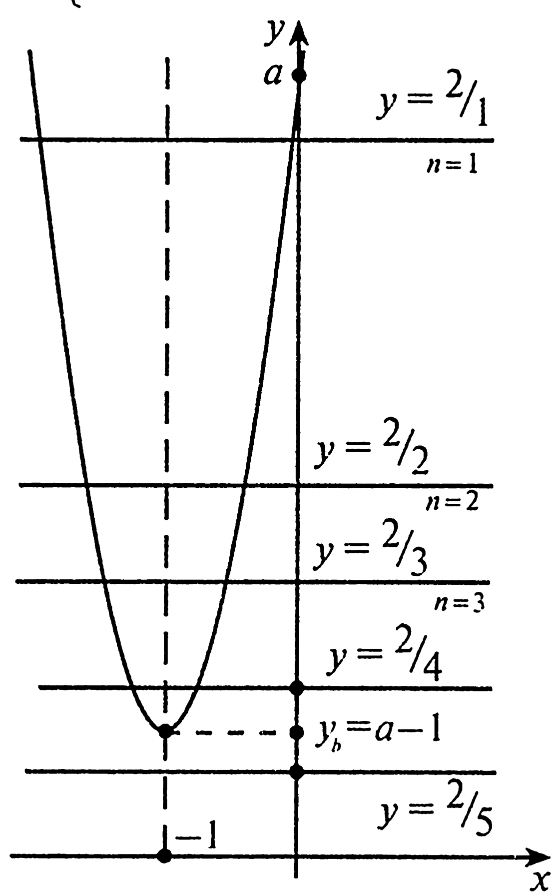
$$y=\frac{2}{n}, \quad n \in \{1; 2; 3; 4\}$$

повинна перетнути параболу у двох точках, а пряма $y=\frac{2}{5}$ при $n=5$ не повинна мати спільних точок з параболою. Маємо

$$\frac{2}{5}<y_в<\frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{5}<a-1<\frac{2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1{,}4<a<1{,}5.$$

Відповідь: $a \in (1{,}4; 1{,}5)$



$x_в=-1$; $y_в=a-1$

Приклад 12. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність

$$\frac{\left|x^2+4a(a-x)+4\right|}{|x-2a|}\le 2x+3-x^2$$

має хоча б один розв'язок.

Розв'язання.

$$\left|x^2+4a(a-x)+4\right|=\left|x^2-4ax+4a^2+4\right|=\left|(x-2a)^2+4\right|=(x-2a)^2+4.$$

Тоді ліва частина нерівності

$$\varphi(x)=\frac{(x-2a)^2+4}{|x-2a|}=|x-2a|+\frac{4}{|x-2a|}=2\left(\frac{|x-2a|}{2}+\frac{2}{|x-2a|}\right).$$

Як відомо для всіх $t>0$ (бо $t^2-2t+1\ge 0\,|:t$)

$$t+\frac{1}{t}\ge 2,$$

і

$$\varphi(x)\ge 2\cdot 2=4.$$

При тому $t+\frac{1}{t}=2$ тільки при $t=\frac{1}{t}=1$. Тоді $\varphi(x)=4$ якщо

$$\frac{|x-2a|}{2}=\frac{2}{|x-2a|}=1\Leftrightarrow |x-2a|=2\Leftrightarrow x=2a\pm 2.$$

Права частина нерівності

$$f(x)=-x^2+2x+3=-(x-3)(x+1)\le y_в=f(1)=4.$$

Маємо

$$\varphi(x)\ge\varphi(2a\pm 4)=4,$$

$$f(x)\le f(1)=4.$$

Тоді можливий лише один розв'язок $x=1$ при умові

$$2a\pm 2=1\Leftrightarrow a\in\{-0{,}5;1{,}5\}.$$

Відповідь: $a\in\{-0{,}5;1{,}5\}$.

Розглянемо ще декілька прикладів на *використання властивості функції* $y=ax+\frac{b}{x}$.

Зауважимо, що при $a=b=1$ *маємо суму двох взаємно обернених величин, властивість якої* $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geq 2$; *рівність досягається лише в випадку* $x=\dfrac{1}{x}=\pm 1$.

Якщо $ab>0$ *таку суму можна привести до суми взаємообернених величин:*

$$ax+\frac{b}{x}=\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x+\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}x}\right).$$

Тоді

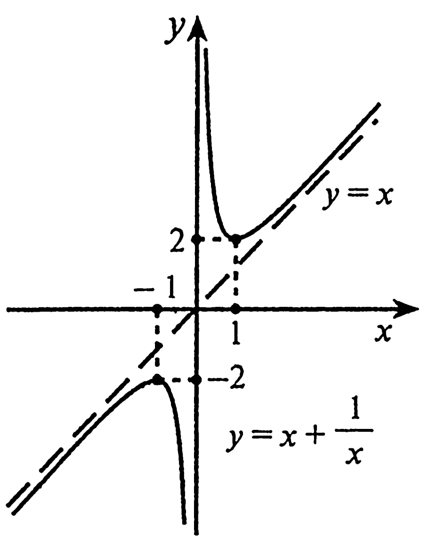
$$\left|ax+\frac{b}{x}\right|\geq 2\sqrt{ab};$$

рівність досягається лише в випадку коли

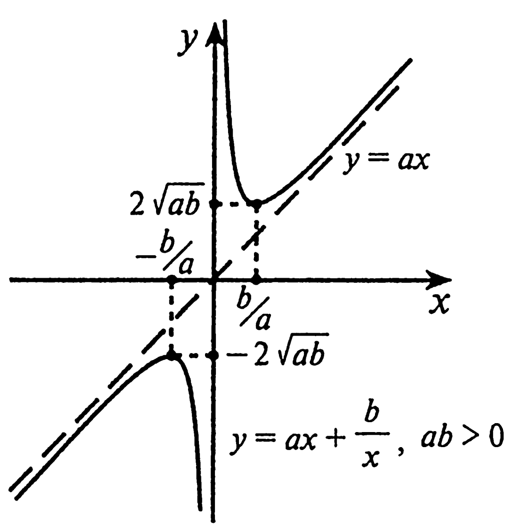
$$\sqrt{\frac{a}{b}}x=\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}x},$$

тобто при $x=\pm\dfrac{b}{a}$.

Графіки функцій $y=x+\dfrac{1}{x}$ *і* $y=ax+\dfrac{b}{x}$, $ab>0$ *мають вигляд:*



і



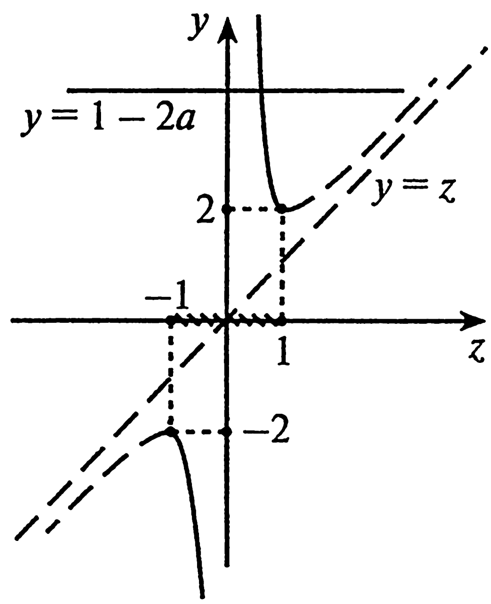
Приклад 13. При яких a рівняння

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} = 1 - 2a$$

має розв'язки?

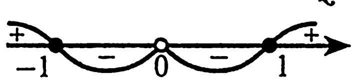
Розв'язання.

Побудуємо графік функції $y = z + \frac{1}{z}$ дослідженням її методами математичного аналізу.



Вісь $(0Y)$ — вертикальна асимптота. При $z \to \pm\infty$ $y \to z$, тобто $y = z$ — асимптота. Проаналізуємо значення першої похідної

$$y' = 1 - \frac{1}{z^2} \vee 0:$$



. Тоді

$$y(-1) = y_{\max} = -2; \quad y(1) = y_{min} = 2;$$

$$y \downarrow \text{ при } x \in (-1; 0);\ x \in (0; 1);$$

$$y \uparrow \text{ при } x \in (-\infty; -1);\ x \in (1; \infty).$$

Врахуємо, що $z = \sin x \in [-1; 1]$.

Пряма $y = 1 - 2a$ перетинає побудований графік при умові

$$\left[\begin{array}{l} 1 - 2a \geq 2 \\ 1 - 2a \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \leq -\frac{1}{2} \\ a \geq \frac{3}{2} \end{array}\right..$$

Відповідь:

$$a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \infty\right).$$

Зауважимо, що останній приклад можна розв'язати спираючись на властивість додатних взаємо обернених величин: $c + \frac{1}{c} \geq 2$. Тоді при $\sin x > 0$ маємо вимогу $1 - 2a \geq 2$, а при $\sin x < 0$ — вимогу $-(1 - 2a) \geq 2$.

Приклад 14. Розв'язати при всіх значеннях параметрів a і b систему

$$\begin{cases} y = ax + \dfrac{b}{x} \\ |y| = 2\sqrt{ab} - x^2 + 2\dfrac{b}{a}x - \dfrac{b^2}{a^2} \end{cases} \qquad (1)$$

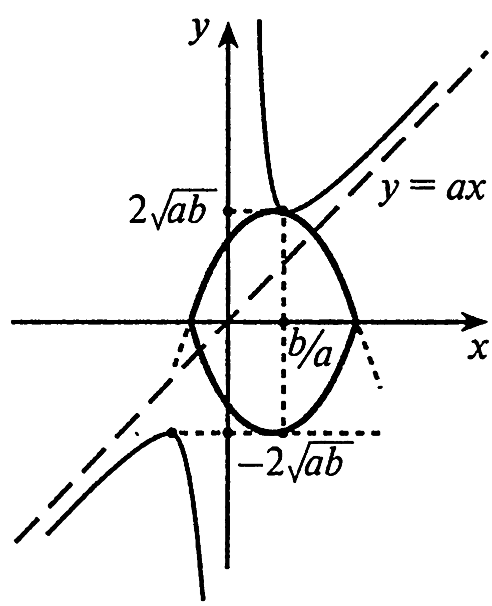
Розв'язання.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + \dfrac{b}{x} \\ |y| = -\left(x - \dfrac{b}{a}\right)^2 + 2\sqrt{ab} \end{cases}.$$

При тому, виходячи з області визначення маємо, що $ab \geq 0,\ \ a \neq 0$.

При $ab > 0$ графічне тлумачення першого рівняння системи має знайомий нам вигляд.

ГМТ, яке відповідає другому рівнянню отримаємо зсувом параболи $y = -x^2$ праворуч на b/a і вгору на $2\sqrt{ab}$ та відображенням точок з невід'ємними ординатами симетрично вісі OX.



Вершина параболи

$$y = -(x - b/a)^2 + 2\sqrt{ab}$$

має координати $\left(b/a; 2\sqrt{ab}\right)$.

Тоді при всіх $ab > 0$ система має 1 розв'язок — $\left(b/a; 2\sqrt{ab}\right)$.

Окремо треба розглянути випадок, коли $b = 0$. Тоді друге рівняння системи має єдиний розв'язок (0; 0), який не задовольняє першому рівнянню системи.

Відповідь:

при $ab > 0$ $\left(\dfrac{b}{a}; 2\sqrt{ab}\right)$;

при $ab \leq 0$ — розв'язків немає.

Приклад 15. Знайти a, при яких розв'язки нерівності

$$\sqrt{9-x^2} \geq -a^2 x \quad (1)$$

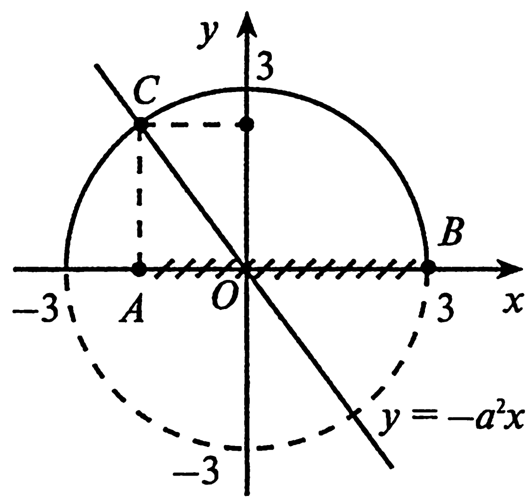
утворюють інтервал довжини $\frac{15}{4}$. Знайти цей інтервал.

Розв'язання.

$$y=\sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+x^2=9 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

Тоді графік лівої частини (1) — верхнє напівколо з радіусом $R=3$ і центром $(0;0)$.

Графік правої частини (1) — пряма, що проходить через початок координат і кутовий коефіцієнт якої недодатній.



Відрізок AB відповідає значенням x, при яких напівколо розташоване не нижче прямої

$$y=-a^2x.$$

За умовою $AB=\frac{15}{4}$, тоді

$$AO=\frac{15}{4}-R=\frac{15}{4}-3=\frac{3}{4} \text{ і } A\left(-\frac{3}{4};0\right), \text{ а } x\in\left[-\frac{3}{4};3\right].$$

Точка C — спільна точка прямої і напівкола, тобто $x_c=x_a$ і

$$y_C=\sqrt{9-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=-a^2\left(-\frac{3}{4}\right),$$

звідки $a^2=\sqrt{15} \Leftrightarrow a=\pm\sqrt[4]{15}$.

Зауважимо, що точки перетину прямої $y=-a^2x$ з колом $y^2+x^2=9$ симетричні відносно початку координат, і їх ординати мають різні знаки. Тому дана пряма перетинає задане півколо тільки у одній точці.

Відповідь: при $a=\pm\sqrt[4]{15}$ $x\in\left[-\frac{3}{4};3\right]$.

Приклад 16. Знайти a, при яких множина розв'язків нерівності

$$\sqrt{1-(x-2a)^2} \geq \frac{4x}{3} \qquad (1)$$

є відрізок довжини $\frac{9}{5}$.

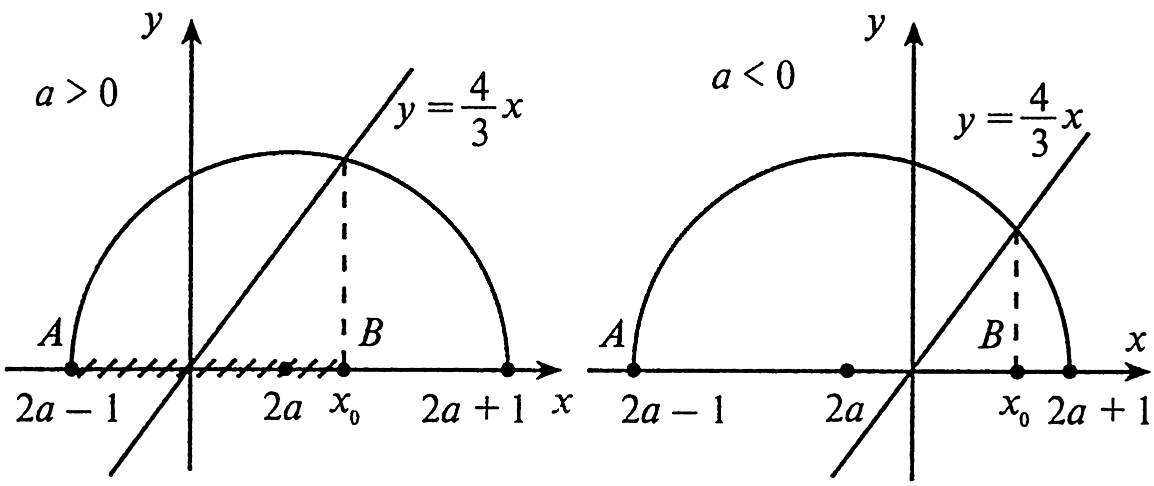
Розв'язання.

Графік лівої частини (1) — верхнє напівколо

$$y^2+(x-2a)^2=1$$

радіуса 1 з центром $O(2a;0)$. Графік правої частини (1) — пряма, яка проходить через початок координат:

1) Пряма перетинає півколо у одній точці.



Відрізок AB є множиною розв'язків нерівності (1) і за умовою дорівнює $9/5$.

Нехай точка перетину графіків має абсцису x_0, тоді

$$\sqrt{1-(x_0-2a)^2}=\frac{4x_0}{3} \text{ і } |AB|=x_0-(2a-1)=\frac{9}{5}.$$

Шукане a є розв'язком системи

$$\begin{cases}\sqrt{1-(x_0-2a)^2}=\dfrac{4x_0}{3}\\ x_0=\dfrac{4}{5}+2a\end{cases}, \text{ звідки } \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{4}{5}+2a\right) \text{ і } a=-\frac{7}{40}.$$

2) Пряма перетинає півколо у двох точках.

У цьому випадку обидва корені рівняння $\left(\frac{4}{3}x\right)^2+$ $+(x-2a)^2=1$ невід'ємні і їхня різниця дорівнює $\frac{9}{5}$. Пропонуємо читачам самостійно переконатися у тому, що цей випадок не реалізується.

Відповідь: $a=-\dfrac{7}{40}$.

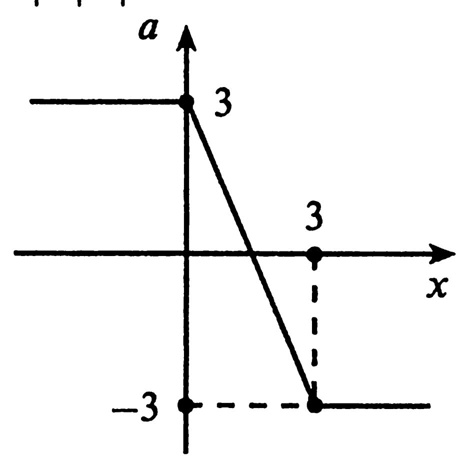
Інколи доцільно на координатній вісі відкладати значення параметра.

Приклад 17. Розв'язати відносно x рівняння

$$|x-3|-|x|=a. \qquad (1)$$

Розв'язання.

Побудуємо графік функції $a=|x-3|-|x|$.



Маємо

$$a=\left[\begin{array}{l}3 \text{ при } x\le 0;\\ -2x+3 \text{ при } 0\le x\le 3;\\ -3 \text{ при } x\ge 3.\end{array}\right.$$

Дивлячись на графік отримуємо відповідь.

Відповідь:

при $a\in(-\infty;3)\cup(3;\infty)$ $x\in\varnothing$;

при $a=3$ $x\le 0$;

при $a=-3$ $x\ge 3$;

при $a\in(-3;3)$ $x=\dfrac{3-a}{2}$.

Приклад 18. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких система нерівностей

$$\begin{cases}x^2+2x+a\le 0\\ x^2-4x-6a\le 0\end{cases} \qquad (1)$$

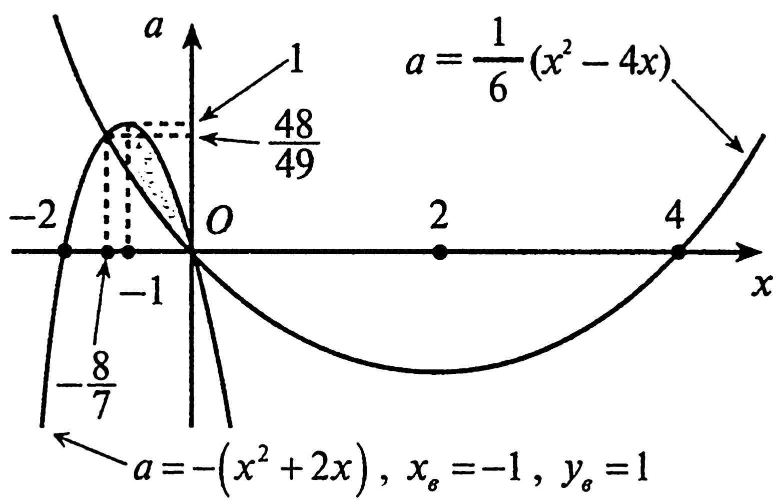
має єдиний розв'язок.

Розв'язання.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -\left(x^2+2x\right) \\ a \ge \frac{1}{6}\left(x^2-4x\right) \end{cases}$$

Графіки функцій $a=-\left(x^2+2x\right)$ і $a=\frac{1}{6}\left(x^2-4x\right)$ перетинаються при умові $-\left(x^2+2x\right)=\frac{1}{6}\left(x^2-4x\right) \Leftrightarrow x \in \left\{0; -\frac{8}{7}\right\}$.

Цим точкам відповідають значення ординат $a \in \left\{0; \frac{48}{49}\right\}$.



Тоді система (1) має єдиний розв'язок при $a \in \{0; 1\}$.

Відповідь: $a \in \{0; 1\}$.

Приклад 19. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких множина розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2-2x \le a-1 \\ x^2-4x \le 1-4a \end{cases} \qquad (1)$$

є відрізок довжини 1.

Розв'язання.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge (x-1)^2 \\ a \le -\frac{1}{4}\left(x^2-4x-1\right) \end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій

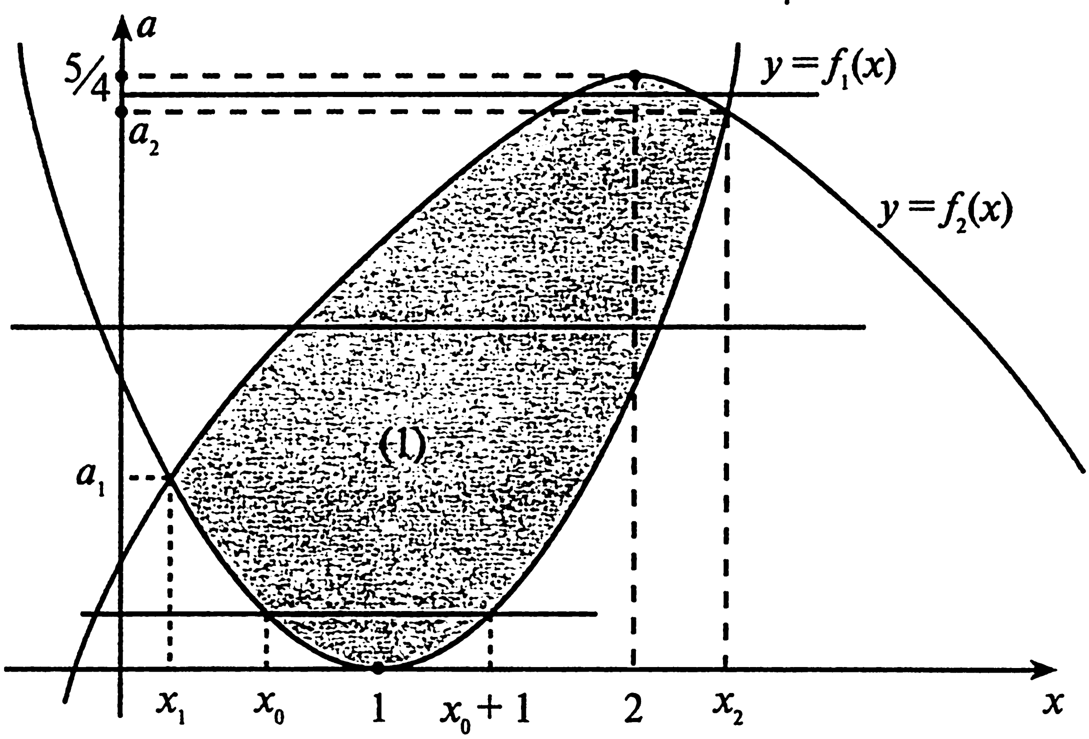
$$a = f_1(x) = (x-1)^2 \text{ і } a = f_2(x) = -\frac{1}{4}\left(x^2 - 4x - 1\right).$$

Точки перетину графіків цих функцій визначає умова

$$(x-1)^2 = -\frac{1}{4}\left(x^2-4x-1\right):\ x_{2,1} = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{5};\ a_{2,1} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{21}}{5}\right)^2;$$

координати вершин відповідних парабол:

$$x_{в_1} = 1;\ a_{в_1} = 0;\ x_{в_2} = 2;\ a_{в_2} = \frac{5}{4}.$$



При перетині ГМТ, що відповідає (1) прямою, яка паралельна вісі абсцис, можливі 3 випадки:

1) При $a \in (0; a_1)$ обидва кінці відрізка, що відтинається, належать графіку $a = f_1(x)$, тоді $f_1(x_0) = f_1(x_0+1)$:

$$(x_0-1)^2 = ((x_0+1)-1)^2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2},\ a = f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

2) При $a \in [a_1; a_2]$ кінці цього відрізка належать $a = f_2(x)$ і $a = f_1(x)$ відповідно, тоді $f_2(x_0) = f_1(x_0+1)$:

$$-\frac{1}{4}\left(x_0^2 - 4x_0 - 1\right) = ((x_0+1)-1)^2 \Leftrightarrow 5x_0^2 - 4x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \left\{-\frac{1}{5}; 1\right\}.$$

Перше значення x_0 від'ємне і не відповідає графічній інтерпретації. При $x_0=1$ маємо $a=f_1(x_0+1)=1$.

3) При $a\in\left(a_2;\frac{5}{4}\right)$ обидва кінці відрізка належать графіку $y=f_2(x)$, тобто $f_2(x_0)=f_2(x_0+1)$:

$$-\frac{1}{4}\left(x_0^2-4x_0-1\right)=-\frac{1}{4}\left((x_0+1)^2-4(x_0+1)-1\right)\Leftrightarrow x_0=\frac{3}{2},$$

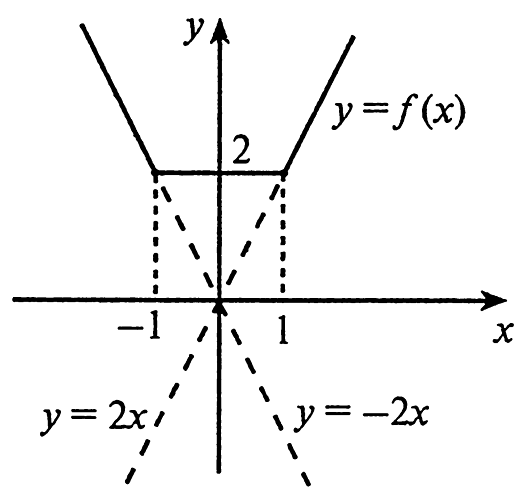
$$a=f_2\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{19}{16}.$$

Відповідь: $a\in\left\{\frac{1}{4};1;\frac{19}{16}\right\}$.

Приклад 20.

Вказати всі пари чисел $(m;x)$, які задовольняють рівнянню

$$|x-1|+|x+1|=mx\quad(1)$$



мал. 1

Розв'язання.

Розглянемо графіки функцій лівої і правої частини рівняння (1).

$$y=f(x)=|x-1|+|x+1|$$

має вигляд

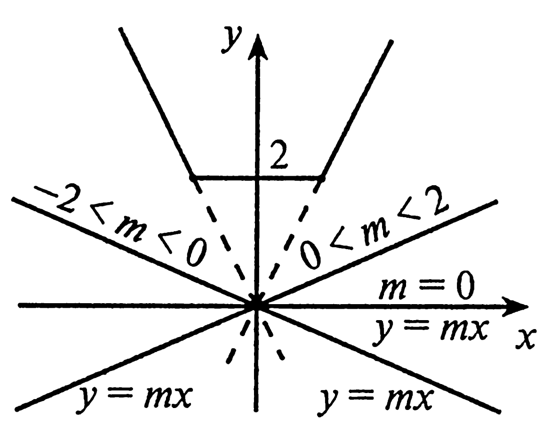
$y=-2x$ при $x\le-1$;

$y=2$ при $-1\le x\le 1$;

$y=2x$ при $x\ge 1$.

Пряма $y=mx$ обертається, при зміні значення m, навколо точки $(0;0)$.

Розв'язки (1) відповідають точкам перетину графіку функцій $y=f(x)$ і $y=mx$.



мал. 2

Тоді можливі наступні випадки.

1) Випадок 1 представлено на мал. 1:

при $m=2$ $x\in[1;\infty)$;

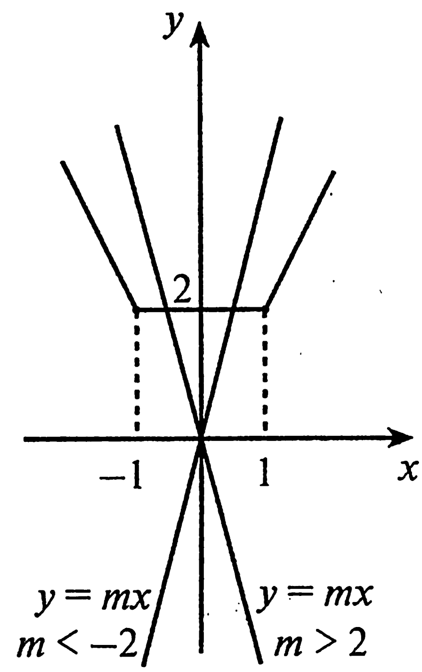
при $m=-2$ $x\in(-\infty;-1]$;

2) Випадок 2 — мал. 2:

при $m\in(-2;2)$ $x\in\varnothing$;

3) Випадок 3 — мал. 3:

при $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$ $mx=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{m}$.



мал. 3

Відповідь:

$\left(m;\dfrac{2}{m}\right)$, де $m\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$;

$(2;x)$, де $x\in[1;\infty)$;

$(-2;x)$, де $x\in(-\infty;-1]$.

Приклад 21. При яких значеннях a рівняння

$$|x-a|+|x+a|=5+\cos\pi x \qquad (1)$$

має рівно шість розв'язків.

Розв'язання.

$(1)\Leftrightarrow |x-a|+|x+a|-5=\cos\pi x$.

Побудуємо графіки лівої і правої частин рівняння,

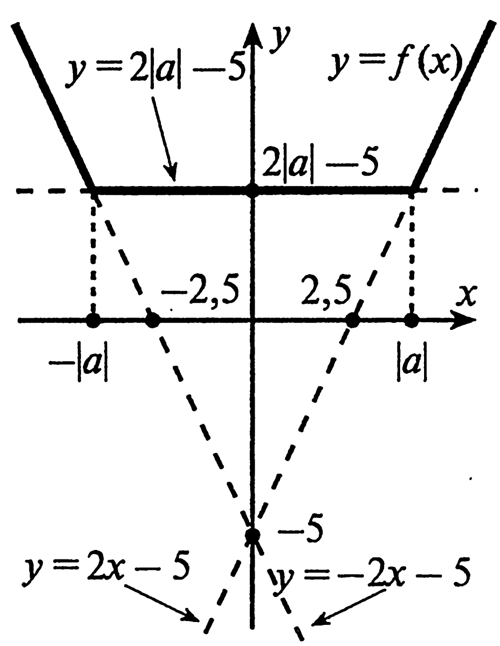
$f(x)=|x-a|+|x+a|-5$ і

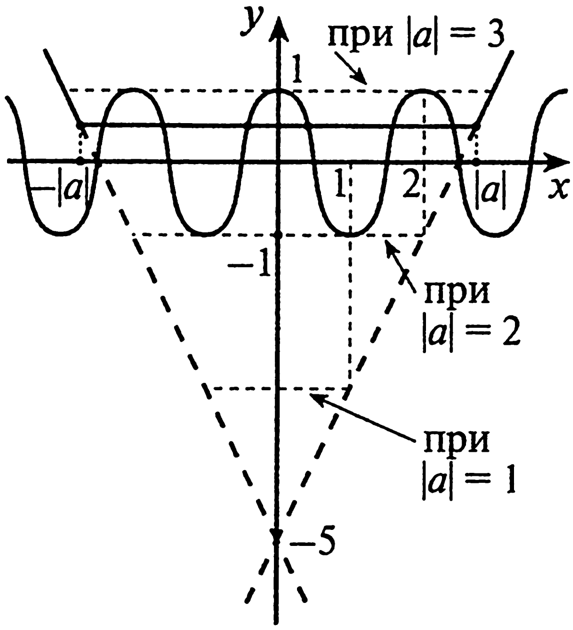
$g(x)=\cos\pi x$.

$f(x)=2x-5$ при $x\geq|a|$;

$f(x)=-2x-5$ при $x\leq-|a|$;

$f(x)=2|a|-5$ при $x\in[-|a|;|a|]$.





Точки перетину прямої $y = 2|a| - 5$, паралельної вісі (OX), з прямими $y = \pm 2x - 5$ мають за абсциси $\pm|a|$. $y = g(x)$ — косинусоїда з основним періодом $T_0 = 2$.

При $|a| = 2$ маємо:

$2|a| - 5 = -1$ — 4 розв'язки.

При $|a| = 3$ маємо:

$2|a| - 5 = 1$ — 3 розв'язки.

При $|a| \in (2; 3)$ маємо рівно 6 спільних точок (3 — з невід'ємними абсцисами).

$$2 < |a| < 3 \Leftrightarrow a \in (-3; -2) \cup (2; 3).$$

Відповідь:
$a \in (-3; -2) \cup (2; 3)$.

Завдання 17.

1) Знайти значення a, при яких множиною розв'язків системи $\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$ є точка.

2) Знайдіть a при яких множина розв'язань системи

$$\begin{cases} x - y + a = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x \leq 1 \end{cases}$$

містить лише одну точку. Знайдіть цю точку.

3) Розв'язати нерівність $a - x > |1 - |x||$.

4) Знайти кількість розв'язків системи

$$\begin{cases} 2x \geq a + y \\ 2y \geq a + x \\ a(x^2 + y^2) \leq 1 \end{cases}.$$

5) Знайдіть a, при яких система

$$\begin{cases} y \ge (x-a)^2 \\ x \ge (y-a)^2 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

6) Знайти всі значення параметра a, при яких множина розв'язків нерівності $\sqrt{a^2-x^2} \ge 2x$ є відрізок довжини 4.

7) Розв'язати нерівність

$$\sqrt{2ax-x^2} \ge a-x.$$

8) Знайти кількість розв'язків системи

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+2ay=7-a^2 \\ x^2+y^2-6x-2ay=-a^2-8 \end{cases}$$

в залежності від параметра a.

9) При яких значеннях a система

$$\begin{cases} |x|+|y|=a \\ |x-y|+|x+y|=2 \end{cases}$$

має 4 розв'язки?

10) При яких значеннях a система

$$\begin{cases} x^2+y^2-4ax-2y=3-4a^2 \\ x^2+y^2-2ax-2y=-a^2 \end{cases}$$

має рівно два розв'язки.

11) Знайти a, при яких рівняння

$$\cos x - \frac{1}{\cos x} = 3^7 a^5 - 10$$

має розв'язки.

12) При яких a рівняння

$$\cos\sqrt{a^2-x^2} = 1$$

має п'ять розв'язків?

13) Знайдіть a і b при яких система

$$\begin{cases} ax+by=7 \\ 3^{2(x-y)}-6\cdot 3^{-2x}-3^{-y}>0 \end{cases}$$

має розв'язки.

14) Знайти a, при яких обидві нерівності

$$2a\cos(2(x-y))+8a^2\cos(x-y)+8a^2(a+1)+5a<0$$

і

$$x^2+y^2+1>2ax+2y+a-a^2$$

виконуються для будь-яких $\{x, y\}\subset R$.

15) При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases} |x-a|=|y| \\ (x-a)^2+(y+a)^2=a^3-a^2+3a+6 \end{cases}$$

має рівно три розв'язки?

§ 18. ЗНАЙОМТЕСЬ — ПАРАМЕТРИ У ТРИГОНОМЕТРІЇ

До умов, які є необхідними для бажаючих навчитися розв'язувати задачі вказаної теми, треба віднести:

— вміння бачити природний хід розв'язання тригонометричних рівнянь та нерівностей;

— вміння розв'язувати алгебраїчні рівняння і нерівності з параметром;

— знати про властивості квадратичної функції і умови розміщення її коренів на числовій вісі;

— мати навички побудови та перетворення графіків функцій і не забувати про графічні засоби розв'язання задач;

— пам'ятати, що $|\cos\alpha|\le 1,\ |\sin\alpha|\le 1.$

Першим кроком розв'язання може бути розв'язання алгебраїчного рівняння або нерівності з параметром відносно певної тригонометричної функції, а потім врахування області значень $\{\cos x, \sin x\}\in[-1;1]$.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. При яких значеннях a рівняння

$$\mathrm{tg}^2\, x+\mathrm{tg}\, x+a=0 \qquad (1)$$

має корені? Знайти ці корені.

Розв'язання.

Розв'яжемо задане рівняння, як квадратне рівняння з параметром, відносно $\mathrm{tg}\, x$:

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1/4\\ \mathrm{tg}\, x=-1/2\end{cases}\\ \begin{cases}a<1/4\\ \mathrm{tg}\, x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}a>1/4\\ \mathrm{tg}\, x\in\varnothing\end{cases}\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l}D=1-4a\ge 0\\ a\le\dfrac{1}{4}\end{array}$$

Відповідь:

при $a > \frac{1}{4}$ $x \in \varnothing$;

при $a = \frac{1}{4}$ $x = -arctg\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

при $a < \frac{1}{4}$ $x = -arctg\frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Приклад 2. Розв'язати відносно x рівняння

$$1 + a\cos x = (a+1)^2. \qquad (1)$$

Розв'язання.

Розв'яжемо спочатку рівняння (1) як лінійне рівняння з параметром відносно $\cos x$.

$$(1) \Leftrightarrow a\cos x = a(a+2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ 0 \cdot \cos x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ \cos x = a + 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Тепер врахуємо, що $\cos x = (a+2) \in [-1; 1]$:

$$-1 \le a + 2 \le 1 \Leftrightarrow -3 \le a \le -1.$$

Тоді маємо:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ x \in R \end{cases} \\ \begin{cases} a \in [-3; -1] \\ x = \pm\arccos(a+2) + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} a \notin \{0; [-3; -1]\} \\ x \in \varnothing \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:

при $a = 0$ $x \in R$;

при $a \in [-3; -1]$ $x = \pm\arccos(a+2) + 2\pi n$, $n \in Z$;

при $a \notin \{0; [-3; -1]\}$ $x \in \varnothing$.

Приклад 3. При всіх значеннях параметра a розв'язати рівняння

$$(a-1)\sin^2 x = a\left(a^2-1\right). \qquad (1)$$

Розв'язання.

Спочатку розв'яжемо дане рівняння як лінійне рівняння з параметром відносно $\sin^2 x$:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-1=0 \\ 0\cdot\sin^2 x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 1 \\ \sin^2 x = a(a+1) \end{cases} \end{array}\right. .$$

Врахуємо, що $\sin^2 x \in [0;1]$:

$$\begin{cases} a(a+1)\geq 0 \\ a(a+1)\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;-1]\cup[0;\infty) \\ a\in\left[\dfrac{-1-\sqrt5}{2};\dfrac{-1+\sqrt5}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

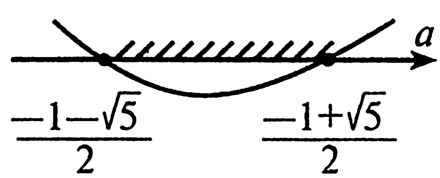
$$\Leftrightarrow a\in\left[\frac{-1-\sqrt5}{2};-1\right]\cup\left[0;\frac{-1+\sqrt5}{2}\right].$$

Тоді

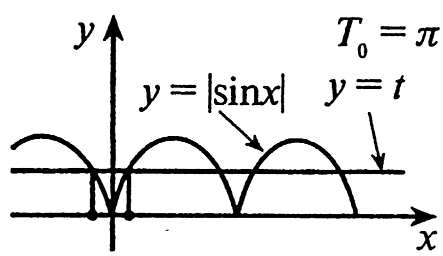
$$(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ x\in R \end{cases} \\ \begin{cases} a\in\left[\dfrac{-1-\sqrt5}{2};-1\right]\cup\left[0;\dfrac{-1+\sqrt5}{2}\right] \\ x=\pm\arcsin\sqrt{a(a+1)}+\pi n, n\in Z \end{cases} \end{array}\right.$$

$a(a+1)\geq 0$

$a^2+a-1\leq 0$



$|\sin x| = t$



$x=\pm\arcsin t \pm \pi n$, $n\in Z$

Відповідь:
при $a=1$ $x\in R$;
при $a\in\left[\dfrac{-1-\sqrt5}{2};-1\right]\cup\left[0;\dfrac{-1+\sqrt5}{2}\right]$

$x=\pm\arcsin\sqrt{a(a+1)}+\pi n$, $n\in Z$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$a\sin^2 x+2(a+2)\sin x+8=0 \qquad (1)$$

відносно x.

Розв'язання.

Задане рівняння є або лінійним рівнянням відносно $\sin x$ (при $a=0$), або квадратним рівнянням відносно $\sin x$ (при $a\neq 0$).

1) При $a=0$:

$$4\sin x+8=0 \Leftrightarrow \sin x=-2 \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

2) При $a\neq 0$:

$$\sin x\in\left\{-\frac{4}{a};-2\right\}.$$

$$at^2+2(a+2)t+8=0$$

$$D/4=(a+2)^2-8a=(a-2)^2$$

$$t_{1,2}=\frac{-(a+2)\pm(a-2)}{a}=\left[\begin{array}{l}-2\\ -4/a\end{array}\right.$$

Врахуємо, що $|\sin x|\leq 1$:

$$\frac{4}{|a|}\leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 0\\ |a|\geq 4\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\in(-\infty;-4]\cup[4;\infty).$$

Маємо:

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-\infty;-4]\cup[4;\infty)\\ x=(-1)^n\arcsin\left(-\dfrac{4}{a}\right)+\pi n, n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-4;4)\\ x\in\varnothing\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:
при $a\in(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$

$$x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{4}{a}+\pi n,$$

$n\in Z$;
при $a\in(-4;4)$ $x\in\varnothing$.

Приклад 5. При яких значеннях a рівняння

$$\cos^2 2x+3a^2=4a\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right) \qquad (1)$$

має розв'язки? Знайти ці розв'язки.

Розв'язання.

$$(1)\Leftrightarrow \cos^2 2x+3a^2=4a\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x-4a\cos 2x+3a^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\in\{3a;a\}.$$

Врахуємо, що $|\cos 2x|\leq 1$. Тоді

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|a|\le\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}2x=\pm\arccos 3a+2\pi n, n\in Z\\ 2x=\pm\arccos a+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{1}{3}<|a|\le 1\\ 2x=\pm\arccos a+2\pi k, k\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}|a|>1\\ x\in\varnothing\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:

при $a\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$ $x\in\left\{\pm\frac{1}{2}\arccos 3a+\pi n;\pm\frac{1}{2}\arccos a+\pi k\right\}$, $\{k,n\}\in Z$;

при $a\in\left[-1;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right]$ $x=\pm\frac{1}{2}\arccos a+\pi k$, $k\in Z$;

при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ $x\in\varnothing$.

Приклад 6. При яких значеннях параметра a рівняння

$$(a-4)\cos^2 x+(2a+3)\cos x+a+1=0$$

має розв'язки? Знайти ці розв'язки.

Розв'язання.

Якщо позначити $t\triangleq\cos x$, то розв'язування зводиться до пошуків коренів тричлену

$$f(t)=(a-4)t^2+(2a+3)t+a+1,$$

при умові, що $t\in[-1;1]$.

Тоді, як то ми робили у § 8, розпочнемо з випадку, коли вираз $f(t)$ є лінійним, тобто коли $a=4$. При $a=4$ маємо

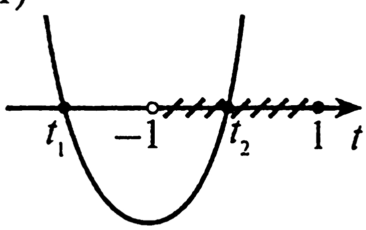
$$(2\cdot 4+3)t+4+1=0 \;\Leftrightarrow\; t=-\frac{5}{11}\in[-1;1].$$

Тобто при $a=4$

$$x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{5}{11}\right)+2\pi n,\ \text{де}\ n\in Z.$$

При $a\neq 4$, використаємо інтерпретацію умови розташування коренів квадратного тричлену $f(t)$ відносно інтервалу $[-1;1]$ (див. ОК-19; 20):

1)



$$\begin{cases} a\neq 4 \\ f(-1)<0 \\ f(1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 4 \\ -6<0 \\ 4a\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a\in[0;4)\cup(4;\infty)$.

При $a\in[0;4)\cup(4;\infty)$

$x=\pm\arccos t_2+2\pi n,\ \ n\in Z.$

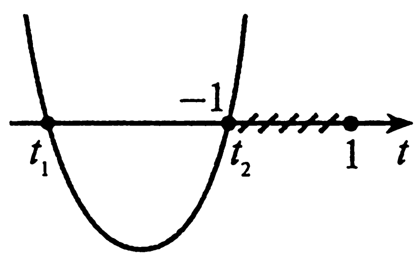
$D=(2a+3)^2-4(a+1)(a-4)=$
$=24a+25$

при $a\geq -\dfrac{25}{24}$

$$t_{1,2}=\frac{-2a-3\pm\sqrt{24a+25}}{2(a-4)};$$

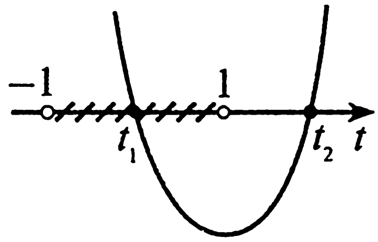
вважатимемо $t_2\geq t_1$.

2) Випадок



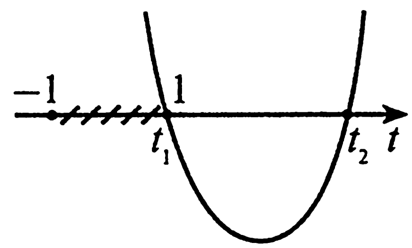
вимагає $f(-1)=0$, тобто виконання умови $-6=0$ і не реалізується.

3)



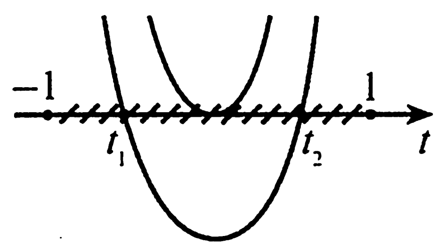
$$\begin{cases} a\neq 4 \\ f(1)<0 \\ f(-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 4 \\ 4a<0 \\ -6>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing$$

4) Випадок



вимагає $f(-1)>0 \iff -6>0$ і не реалізується.

5)



$$\begin{cases} a\neq 4 \\ f(1)\geq 0 \\ f(-1)\geq 0 \\ D\geq 0 \\ -1\leq t_в\leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a\neq 4 \\ 4a\geq 0 \\ -6\geq 0 \\ 24a+25\geq 0 \\ -1<\dfrac{-(2a+3)}{2(a-4)}<1 \end{cases} \iff a\in\varnothing$$

Відповідь:

при $a=4$ $x=\pm\left(\pi-\arccos\dfrac{5}{11}\right)+2\pi n,\ n\in Z;$

при $a\in[0;4)\cup(4;\infty)$

$$x=\pm\arccos\frac{2a+3-\sqrt{24a+25}}{2(4-a)}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Приклад 7. При всіх значеннях a розв'язати рівняння:

$$5\sin^2 x+\cos^2 x-3\sin x\cos x=a+4 \quad (1).$$

Розв'язання.

$(1)\iff 4\sin^2 x+1-3\sin x\cos x=a+4 \iff$

$\iff 2(1-\cos 2x)-\dfrac{3}{2}\sin 2x=a+3 \iff$

$4\cos 2x+3\sin 2x=-2a-2 \iff$

$4^2+3^2=16+9=25$

$\sqrt{25}=5$

$$\Leftrightarrow\ \frac{4}{5}\cos 2x+\frac{3}{5}\sin 2x=-\frac{2}{5}(a+1)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\sin\alpha\cos 2x+\cos\alpha\sin 2x=-\dfrac{2}{5}(a+1)\\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\sin(2x+\alpha)=-\dfrac{2}{5}(a+1)\\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in[-3{,}5;\,1{,}5]\\ 2x+\alpha=(-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{2(a+1)}{5}+\pi n,\ n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}a\notin[-3{,}5;\,1{,}5]\\ x\in\varnothing\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg}\alpha\triangleq\frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{5}|a+1|\le 1$$

$$|a+1|\le\frac{5}{2}$$

$$a\in\left[-1-\frac{5}{2};-1+\frac{5}{2}\right]$$

$$a\in\left[-\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right]$$

Відповідь:
при $a\in[-3{,}5;\,1{,}5]$

$$x=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{1}{2}(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2(a+1)}{5}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z;$$

при $a\notin[-3{,}5;\,1{,}5]$ $x\in\varnothing$.

Приклад 8. Розв’язати відносно x рівняння

$$\sin^4 x-2\cos^2 x+a^2=0 \tag{1}$$

Розв’язання.

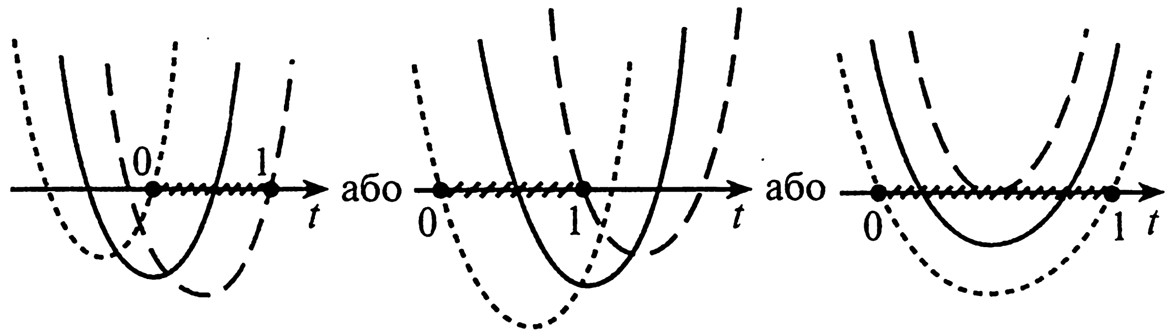
$$(1)\Leftrightarrow\ \sin^4 x+2\sin^2 x-\left(2-a^2\right)=0.$$

Заміною $\sin^2 x=t$ зведемо рівняння (1) до квадратного відносно t:

$$t^2+2t+a^2-2=0\,. \tag{2}$$

(1) має розв’язки при тих значеннях параметра a, при яких квадратне рівняння (2) має принаймні один розв’язок на проміжку $t\in[0;1]$.

Позначимо ліву частину (2) через $f(t)$, а його корені як $t_{1,2}$, $t_2>t_1$. Тоді графічне тлумачення існування розв’язків (1) має вигляд:



1) $t=t_2$ — єдиний розв'язок, якщо

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(0)\le 0\\ f(1)>0\end{cases}\\ \begin{cases}f(0)<0\\ f(1)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2-2\le 0\\ a^2+1>0\end{cases}\\ \begin{cases}a^2-2<0\\ a^2+1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow a\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right],$$

2) $t=t_1$ — єдиний розв'язок, якщо

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(1)\le 0\\ f(0)>0\end{cases}\\ \begin{cases}f(1)<0\\ f(0)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+1\le 0\\ a^2-2>0\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+1<0\\ a^2-2=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow a\in\varnothing,$$

3) $t=t_{1,2}$ — два розв'язки, якщо

$$\begin{cases}f(0)\ge 0\\ f(1)\ge 0\\ \dfrac{D}{4}\ge 0\\ t_в\in[0;1]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-2\ge 0\\ a^2+1\ge 0\\ -a^2+3\ge 0\\ 0<-1\le 1\end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing.$$

Таким чином можливий лише перший випадок, тобто

$$\text{при } a\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\quad t=-1+\sqrt{3-a^2}$$

$$\text{і } |\sin x|=\sqrt{-1+\sqrt{3-a^2}}.$$

Тоді $x=\pm\arcsin\sqrt{-1+\sqrt{3-a^2}}+\pi n,\ n\in Z.$

Відповідь:

при $a\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ $x=\pm\arcsin\sqrt{-1+\sqrt{3-a^2}}+\pi n,\ n\in Z;$

при $a\notin\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ $x\in\varnothing.$

Приклад 9. Розв'язати відносно x рівняння:

$$\sqrt{1-a}\cos x-\sqrt{a^2-a}\sin x=1-a \qquad (1)$$

Розв'язання.

Область визначення виразу (1):

$$D:\ \begin{cases}1-a\ge 0\\ a(a-1)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\le 1\\ \left[\begin{array}{l}a\le 0\\ a\ge 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow\ a\in(-\infty;\,0]\cup\{1\}.$$

При $a=1$ обидві частини рівняння (1) дорівнюють 0. Тому маємо при $a=1$ $x\in R$.

При $a\ne 1$ поділимо (1) на $\sqrt{1-a}\ne 0$:

$$\cos x-\sqrt{-a}\sin x=\sqrt{1-a}. \qquad (2)$$

Отримане рівняння розв'яжемо введенням допоміжного кута:

$$(2)\Leftrightarrow \begin{cases}a\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}\cos x-\sqrt{\dfrac{-a}{1-a}}\sin x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\le 0\\ \cos\alpha\cos x-\sin\alpha\sin x=1\\ \alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{-a}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a\le 0\\ \cos(x+\alpha)=1\\ \alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{-a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\le 0\\ x=-\operatorname{arctg}\sqrt{-a}+2\pi n,\ n\in Z\end{cases}.$$

Відповідь:
при $a=1$ $x\in R$;
при $a\le 0$ $x=-\operatorname{arctg}\sqrt{-a}+2\pi n,\ n\in Z$;
при $a\in(0;\,1)\cup(1;\,\infty)$ $x\in\varnothing$.

Приклад 10. При яких значеннях a рівняння

$$1+x=\sqrt{x^2-2\cos^2 a}$$

має дійсні корені?

Розв'язання.

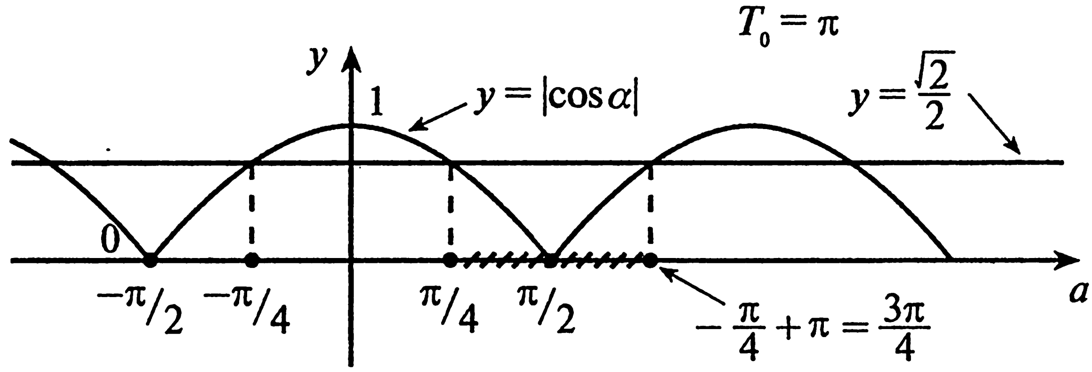
$$1+x=\sqrt{x^2-2\cos^2 a} \Leftrightarrow \begin{cases}1+x\ge 0\\ (1+x)^2=x^2-2\cos^2 a\\ x^2-2\cos^2 a\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ (1+x)^2 = x^2 - 2\cos^2 a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = -\dfrac{1}{2} - \cos^2 a \end{cases}$$

Проаналізуємо умову $x = -\dfrac{1}{2} - \cos^2 a \geq -1$:

$$\cos^2 a \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\cos a| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Останню нерівність розв'яжемо спираючись на графік функції $y = |\cos a|$:



$$a \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right], n \in Z.$$

Відповідь:
$a \in \left[\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{3\pi}{4} + \pi n\right], n \in Z.$

Приклад 11. Знайти всі значення a, при кожному з яких нерівність

$$2\sin^2 x + 2(a-3)\cos x + a - 9 < 0 \qquad (1)$$

виконується для всіх $x \in R$.

Розв'язання.

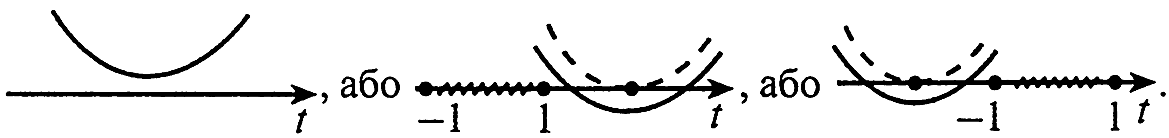
$$(1) \Leftrightarrow 2\left(1 - \cos^2 x\right) + 2(a-3)\cos x + a - 9 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = t \\ 2t^2 - 2(a-3)t - a + 7 > 0 \end{cases}.$$

Якщо позначити через

$$f(t) = 2t^2 - 2(a-3)t - a + 7,$$

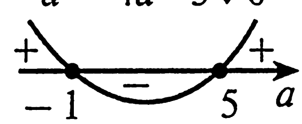
то наша задача прийме наступний вигляд: знайти всі значення a, при яких нерівність $f(t)>0$ справджується для всіх $t\in[-1;\ 1]$. Тобто маємо завдання на розташування коренів квадратного тричлена $f(t)$ відносно інтервалу $[-1;\ 1]$:



Тоді розв'язання задачі зводиться до сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} D/4<0 \\ \begin{cases} D/4\ge 0 \\ f(1)>0 \\ t_в>1 \end{cases} \\ \begin{cases} D/4\ge 0 \\ f(-1)>0 \\ t_в<-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2-4a-5<0 \\ \begin{cases} a^2-4a-5\ge 0 \\ -3a+15>0 \\ \dfrac{a-3}{2}>1 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2-4a-5\ge 0 \\ a+3>0 \\ \dfrac{a-3}{2}<-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow a\in(-3;5)$$

$a^2-4a-5\vee 0$



Відповідь: $a\in(-3;\ 5)$.

Приклад 12. Розв'язати нерівність $\cos x\le 2-a^2$ (1)

Розв'язання.

Розглянемо випадки:

$2-a^2\ge 1$; $2-a^2<-1$; $-1\le 2-a^2<1$.

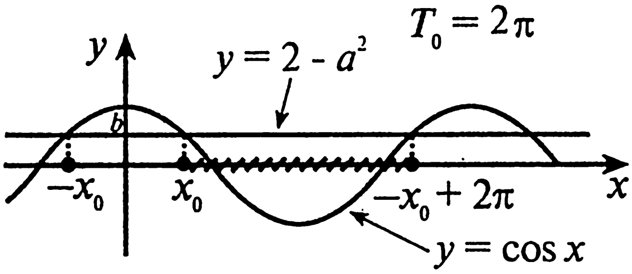
У першому випадку (1) виконується для всіх $x\in R$.

У другому — немає розв'язків.

$2-a^2\ge 1 \Leftrightarrow a^2\le 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a\in[-1;1]$;

$2-a^2<-1 \Leftrightarrow a^2>3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |a|>\sqrt{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$

Розв'язки у третьому випадку знайдемо спираючись на графік функції $y=\cos x$:



$$-1\le 2-a^2<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2>1 \\ a^2\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|>1 \\ |a|\le\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\in\left[-\sqrt{3};-1\right) \\ a\in\left(1;\sqrt{3}\right] \end{array}\right..$$

$$x_0 \triangleq \arccos\left(2-a^2\right),\ x\in\left[x_0+2\pi n; 2\pi-x_0+2\pi n\right],\ n\in Z.$$

Тоді

$$(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\in[-1;1] \\ x\in R \end{cases} \\ \begin{cases} a\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right) \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\in\left[-\sqrt{3};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{3}\right] \\ x\in\left[x_0+2\pi n; -x_0+2\pi+2\pi n\right], n\in Z \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
при $a\in[-1;1]$ $x\in R$;
при $a\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$ $x\in\varnothing$;
при $a\in\left[-\sqrt{3};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{3}\right]$
$x\in\left[\arccos\left(2-a^2\right)+2\pi n; -\arccos\left(2-a^2\right)+2(1+n)\pi\right],\ n\in Z.$

Приклад 13. При всіх значеннях параметра a розв'язати нерівність

$$1+a\cos x\ge(a+1)^2 \qquad (1)$$

Розв'язання.

$$(1)\Leftrightarrow a\cos x\ge a(a+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ 0\cdot\cos x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a>0 \\ \cos x \ge a+2 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ \cos x \le a+2 \end{cases} \end{array}\right.$$

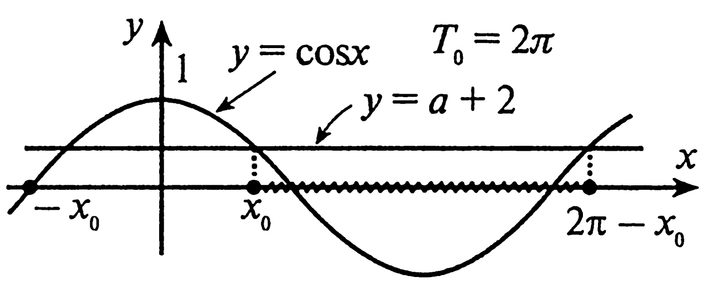
При $a>0$ $a+2>2>1$ і друга система сукупності розв'язків не має.

При $a<0$ порівняємо $a+2$ з ±1:

1) при $\begin{cases} a<0 \\ a+2<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ a<-3 \end{cases} \Leftrightarrow a<-3$ розв'язків немає;

2) при $\begin{cases} a<0 \\ a+2\ge1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ a\ge-1 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[-1;0)$ $x\in R$;

3) при $\begin{cases} a<0 \\ -1\le a+2<1 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[-3;-1)$



$x_0 = \arccos(a+2)$

$x\in\left[\arccos(a+2)+2\pi n;\, 2\pi-\arccos(a+2)+2\pi n\right]$, $n\in Z$.

Відповідь: при $a\in(-\infty;-3)\cup(0;\infty)$ $x\in\varnothing$;

при $a\in[-1;0]$ $x\in R$;

при $a\in[-3;-1)$

$x\in\left[\arccos(a+2)+2\pi n;\, 2\pi-\arccos(a+2)+2\pi n\right]$, $n\in Z$.

Приклад 14. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких для всіх $x\in R$ виконується нерівність

$$(a-1)\sin^2 x+a\sin x+2>0 \qquad (1).$$

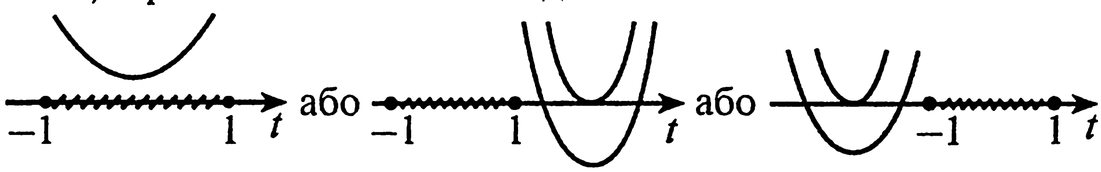
Розв'язання. Позначимо $t\triangleq\sin x\in[-1;1]$. Тоді треба шукати такі значення a, при яких

$$f(t)=(a-1)t^2+at+2>0$$

при всіх $t\in[-1;1]$:

1) При $a=1$ маємо $t>-2$ і при $t\in[-1;1]$ умова виконується, тобто $a=1$ є розв'язком.

2) При $a>1$ можливі випадки:



Маємо задачу на розміщення коренів квадратного тричлену $f(t)$ по відношенню до заданого числа, яку ми вміємо розв'язувати (§14).

Тоді при $a>1$ розв'язання зводиться до сукупності

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\D<0\end{cases}\\ \begin{cases}a>1\\f(1)>0\\D\ge 0\\t_в>1\end{cases}\\ \begin{cases}a>1\\f(-1)>0\\D\ge 0\\t_в<-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\2a+1>0\\(a-1)^2+1\ge 0\\-\dfrac{a}{2(a-1)}>1\end{cases}\\ \begin{cases}a>1\\1>0\\-\dfrac{a}{2(a-1)}<-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}a>1\\ \dfrac{a}{2(a-1)}>1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$D=a^2-8(a-1)=$
$=a^2-8a+8>0$
при $a\in R$

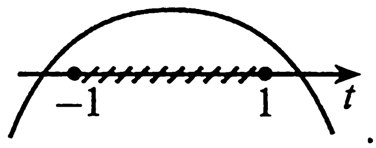
$f(1)=2a+1$

$f(-1)=1$

$t_b=\dfrac{-a}{2(a-1)}<0$
при $a>1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a>1\\a>2(a-1)\end{cases} \Leftrightarrow a\in(1;2)$$

3) При $a<1$ можливий єдиний випадок:



Маємо задачу на розміщення коренів квадратного тричлену по відношенню до інтервалу $[-1;1]$ (§ 15):

$$\begin{cases} a<1 \\ f(-1)>0 \\ f(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<1 \\ 1>0 \\ 2a+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{1}{2};1\right)$$

Тоді розв'язком задачі буде множина значень

$$a\in\{1\}\cup(1;2)\cup\left(-\frac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{2};2\right).$$

Відповідь: $a\in\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Приклад 15. Розв'язати нерівність

$$(a-2)\sin x>3a+4 \qquad (1)$$

Розв'язання.

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ 0\cdot\sin x>10 \end{cases} \\ \begin{cases} a>2 \\ \sin x>\dfrac{3a+4}{a-2} \quad (2) \end{cases} \\ \begin{cases} a<2 \\ \sin x<\dfrac{3a+4}{a-2} \quad (3) \end{cases} \end{array}\right.$$

Порівняємо вираз $\dfrac{3a+4}{a-2}$ з 1 і з -1:

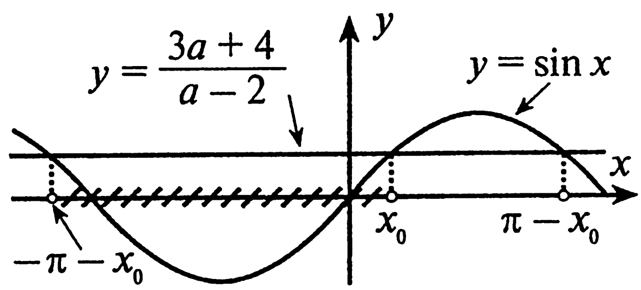
$\dfrac{3a+4}{a-2}\vee 1\Leftrightarrow\dfrac{2a+6}{a-2}\vee 0$ і ;

$$\frac{3a+4}{a-2} \vee -1 \Leftrightarrow \frac{4a+2}{a-2} \vee 0 \text{ і }$$ 

Тоді при $a>2$ маємо $\dfrac{3a+4}{a-2}>1$ і $(2)\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Проаналізуємо третю систему сукупності:

$$(3)\Leftrightarrow\begin{cases} a<2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases}\dfrac{3a+4}{a-2}>1\\ x\in R\end{cases} \\ \begin{cases}\dfrac{3a+4}{a-2}\le -1\\ x\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases}-1<\dfrac{3a+4}{a-2}\le 1\\ x\in(-x_0-\pi+2\pi n;\\ \quad x_0+2\pi n),\ n\in Z\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$



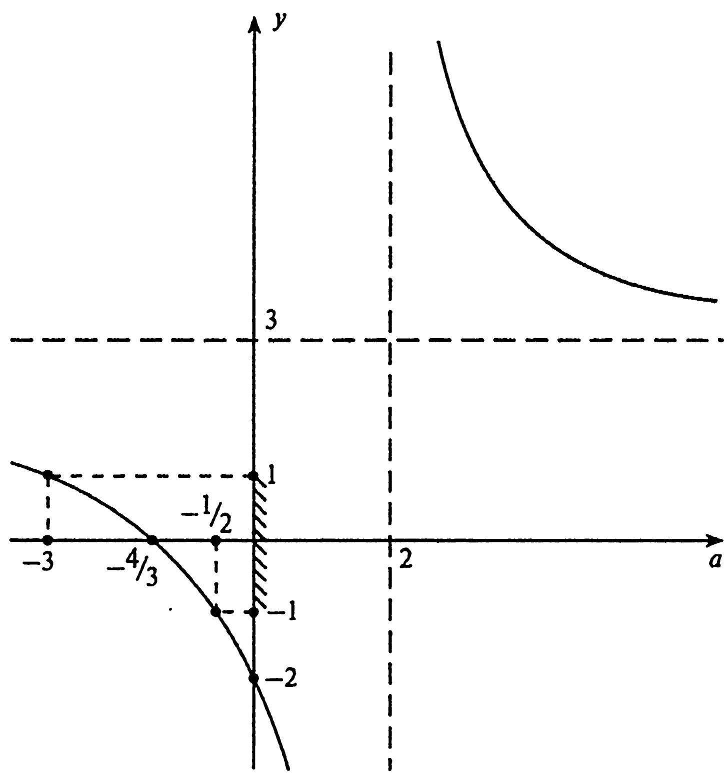
$T_0=2\pi$; $x_0 \triangleq \arcsin\dfrac{3a+4}{a-2}$

$x\in(-x_0-\pi+2\pi n;\ x_0+2\pi n),\ n\in Z$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases}a\in(-\infty;-3)\\ x\in R\end{cases} \\ \begin{cases}a\in\left[-\dfrac{1}{2};2\right)\\ x\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases}a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\\ a\in[-3;2)\\ x\in(-x_0-\pi+2\pi n;\\ \quad x_0+2\pi n),\ n\in Z\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases}a\in(-\infty;-3)\\ x\in R\end{cases} \\ \begin{cases}a\in\left[-\dfrac{1}{2};2\right)\\ x\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases}a\in\left[-3;-\dfrac{1}{2}\right)\\ x\in(-x_0-\pi+2\pi n;\ x_0+2\pi n),\ n\in Z\end{cases}\end{array}\right.$$

Зауважимо, що аналіз значень $\frac{3a+4}{a-2}$ при $a\neq 2$ можна значно полегшити, якщо проводити його спираючись на графік функції

$$y(a)=\frac{3a+4}{a-2}=3+\frac{10}{a-2}$$



Відповідь:
при $a<-3$ $x\in R$;
при $-3\leq a<-\frac{1}{2}$
$$x\in\left(-\arcsin\frac{3a+4}{a-2}+(2n-1)\pi;\ \arcsin\frac{3a+4}{a-2}+2\pi n\right),\quad n\in Z;$$
при $a\geq-\frac{1}{2}$ $x\in\varnothing$.

Приклад 16. Знайти всі значення b, при яких нерівність

$$\left(a^2-9\right)\cos x+6a\sin x\leq ab \qquad (1)$$

має розв'язок при всіх $a\in R$.

Розв'язання.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a^2-9}{a^2+9}\cos x + \frac{6a}{a^2+9}\sin x \le \frac{ab}{a^2+9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-\alpha) \le \dfrac{ab}{a^2+9} \\ \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{6a}{a^2-9} \end{cases}.$$

$$\sqrt{\left(a^2-9\right)^2+(6a)^2} = \sqrt{\left(a^2+9\right)^2} = a^2+9$$

$$\sin\alpha \triangleq \frac{6a}{a^2+9}$$

Остання нерівність має розв'язки при умові

$$\frac{ab}{a^2+9} \ge -1 \Leftrightarrow \frac{a^2+ab+9}{a^2+9} \ge 0 \Leftrightarrow a^2+ab+9 \ge 0,$$

яка виконується для всіх $a \in R$, якщо

$$b^2 - 4\cdot 9 \le 0 \Leftrightarrow |b| \le 6 \Leftrightarrow b \in [-6; 6].$$

Відповідь: $b \in [-6; 6]$.

Приклад 17. Розв'язати нерівність

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} \le |a| \qquad (1)$$

Розв'язання.

Очевидно, що (1) не має за розв'язки $\cos x = 0$. Очевидно, що всі x, які задовольняють умові $\cos x < 0$ є розв'язками (1).

У випадку $\cos x > 0$, маємо

$$\cos^2 x - |a|\cos x + 1 \le 0 \Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{|a|}{2}\right)^2 \le \frac{a^2}{4} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2/4 < 1 \\ x \in \varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a^2/4 = 1 \\ \cos x = |a|/2 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2/4 > 1 \\ \left|\cos x - a/2\right| \le \sqrt{a^2/4 - 1} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |a|<2 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} |a|=2 \\ \cos x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} |a|>2 \\ \cos x\le a/2+\sqrt{a^2/4-1} \\ \cos x\ge a/2-\sqrt{a^2/4-1} \end{cases} \end{array}\right.$$

Розглянемо останню систему сукупності.

При $|a|>2$ $\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}>1$ і нерівність $\cos x\le\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}$ виконується для всіх $x\in R$. Порівняємо вираз $\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}$ з 1:

$$\begin{cases} \frac{|a|}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}<1 \\ |a|>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|a|}{2}-1<\sqrt{\frac{a^2}{4}-1} \\ |a|>2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{4}-|a|+1<\frac{a^2}{4}-1 \\ |a|>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<|a| \\ |a|>2 \end{cases} \Leftrightarrow |a|>2.$$

Очевидно, що $\frac{|a|}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}>0$.

Тоді при $|a|>2$ розв'язками (1) будуть розв'язки нерівності

$$\cos x\ge\frac{|a|}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1},$$

тобто

$$x\in\left[-\arccos\frac{|a|-\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi k;\arccos\frac{|a|-\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi k\right], k\in Z.$$

Нагадаємо, що для всіх $a \in R$ розв'язками (1) будуть від'ємні значення $\cos x$, тобто $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

Відповідь:

при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

$$\left[\begin{array}{l} x \in \left[-\arccos\frac{|a| - \sqrt{a^2 - 4}}{2} + 2\pi k; \arccos\frac{|a| - \sqrt{a^2 - 4}}{2} + 2\pi k\right], \\ x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) \end{array}\right.$$

$\{n, k\} \subset Z$;

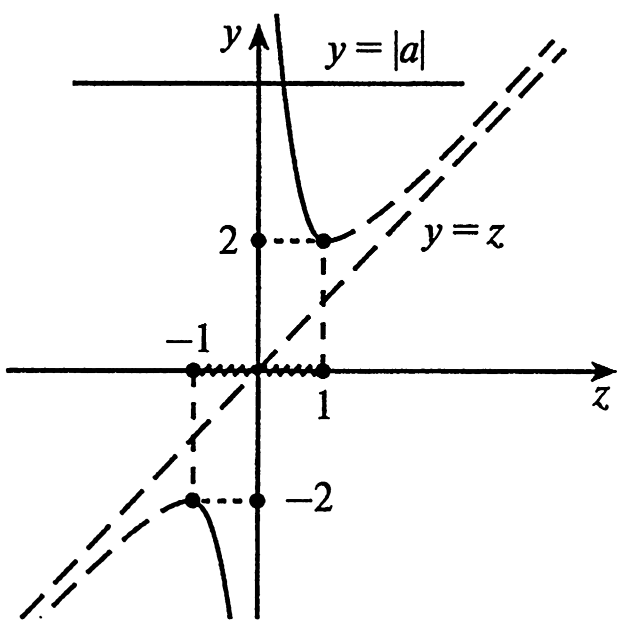
при $a = \pm 2$ $x \in \left\{2\pi k; \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)\right\}$, $\{n, k\} \subset Z$;

при $a \in (-2; 2)$ $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

Зауважимо, що попередній приклад можна розв'язати спираючись на графік функції

$$y = z + \frac{1}{z}$$

(див. с. 124), який побудовано на проміжку $z \in [-1; 1]$ (при $z = 1$ $y = y_{\min} = 2$; при $z = -1$ $y = y_{\max} = -2$, Тоді отримана вище відповідь стає очевидною.



Приклад 18. Знайти кількість розв'язків рівняння

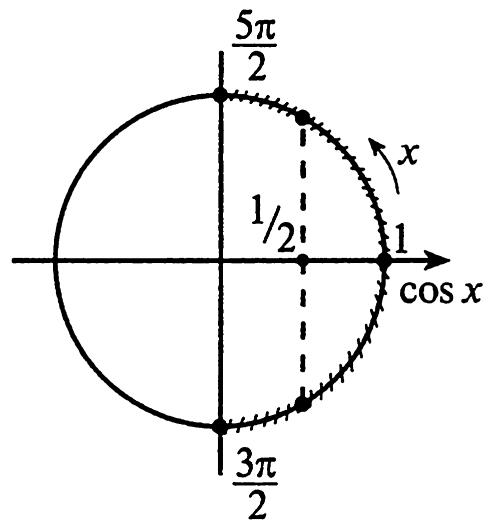
$$2\cos^2 x - (2a + 3)\cos x + a + 1 = 0 \qquad (1)$$

у залежності від параметра a на інтервалі $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Розв'язання.

Розв'язуючи (1) як квадратне рівняння відносно $\cos x$ отримаємо

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = a+1. \end{array}\right.$$



Перше рівняння сукупності на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ має 2 розв'язки при всіх $a \in R$.

Друге рівняння сукупності на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

— не має розв'язків при $\left[\begin{array}{l} a+1<0 \\ a+1>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-1 \\ a>0 \end{array}\right.$;

— має 1 розв'язок при $a+1=1 \Leftrightarrow a=0$;

— має 2 розв'язки, які співпадають з вже знайденими при

$$a+1=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2};$$

— має 2 розв'язки, які не співпадають з вже знайденими при

$$(a+1) \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow a \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right).$$

Відповідь:

при $a \in (-\infty; -1) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup (0; \infty)$ — 2 розв'язки;

при $a=0$ — 3 розв'язки;

при $a \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ — 4 розв'язки.

Приклад 19. Знайти кількість розв'язків рівняння

$$\cos x \operatorname{ctg} x - \sin x = a \cos 2x$$

у залежності від параметра a на інтервалі $x \in [0; 2\pi]$.

Розв'язання.

Для всіх $x \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$ рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x}=a\cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x\left(\frac{1}{\sin x}-a\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos 2x=0 & (1)\\ \dfrac{1}{\sin x}=a & (2)\end{array}\right..$$

Перше рівняння сукупності при всіх $a\in R$ на проміжку $[0;2\pi]$ має 4 розв'язки: $\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}$.

Друге рівняння сукупності

— при $a\in(-1;1)$ розв'язків не має;

— при $a=\pm1$ має 1 розв'язок, який не співпадає з розв'язками (1);

— при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ має 2 розв'язки, але якщо $a=\pm\sqrt{2}$ ці розв'язки співпадають з вже знайденими розв'язками (1).

Відповідь:
при $a\in(-1;1)\cup\{\pm\sqrt{2}\}$ — 4 розв'язки;
при $a=\pm1$ — 5 розв'язків;
при $a\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\infty)$ — 6 розв'язків.

Приклад 20. При яких значеннях параметра a з відрізка $\left[\pi;\frac{11\pi}{8}\right]$ корні квадратного рівняння

$$x^2+2\sqrt{\sin 2a}\,x+\cos 2a=0 \qquad (1)$$

існують і різні.

Розв'язання.

Область визначення рівняння

$$\sin 2a\ge 0 \Leftrightarrow a\in\left[\pi n;\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right].$$

$$\frac{3\pi}{2}\vee\frac{11\pi}{8}\Leftrightarrow 12\vee 11$$

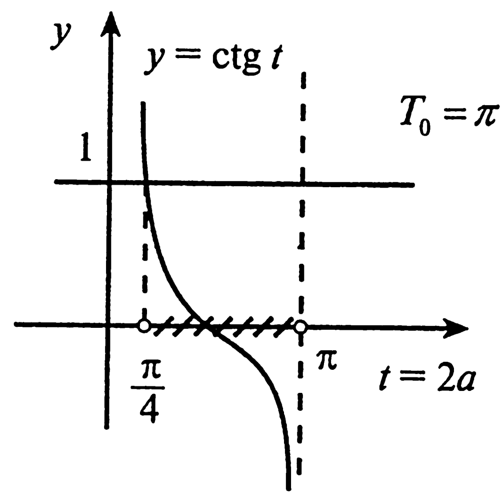
Заданий умовою інтервал $\left[\pi;\frac{11\pi}{8}\right]$ задовольняє цій умові.

Умова того, що корені (1) існують і різні є умова додатності його дискримінанту:

$$\frac{D}{4}=\sin 2a-\cos 2a>0 \Leftrightarrow \cos 2a<\sin 2a .$$

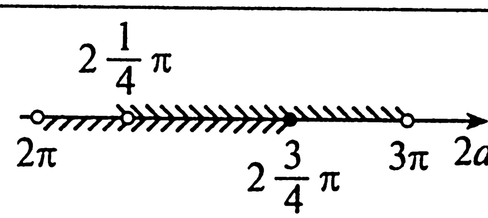
Тоді

$$\begin{cases} a\in\left[\pi;\dfrac{11\pi}{8}\right] \\ \cos 2a<\sin 2a \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2a\in\left[2\pi;2\dfrac{3}{4}\pi\right] \\ \cos 2a<\sin 2a \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a=2\pi \\ 1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a\in\left(2\pi;2\dfrac{3}{4}\pi\right] \\ ctg 2a<1 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow$$



$$n=2, 2a\in\left(2\pi+\frac{\pi}{4};3\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2a\in\left(2\pi;2\dfrac{3}{4}\pi\right] \\ 2a\in\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\pi+\pi n\right), n\in Z \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a\in\left(2\frac{1}{4}\pi;2\frac{3}{4}\pi\right]\Leftrightarrow \Leftrightarrow a\in\left(1\frac{1}{8}\pi;1\frac{3}{8}\pi\right].$$

Відповідь: $a\in\left(\dfrac{9\pi}{8};\dfrac{11\pi}{8}\right]$.

Приклад 21. Знайти всі значення параметра a , при яких рівняння

$$\sqrt{2}\sin 5x+\sqrt{7}\cos 5x=1-a \qquad (1)$$

має невід'ємні розв'язки. Знайти ці розв'язки.

Розв'язання.

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{9}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\sin 5x+\frac{\sqrt{7}}{3}\cos 5x\right)=1-a\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\varphi \sin 5x + \cos\varphi \cos 5x = \dfrac{1-a}{3} \\ \varphi = \arccos\sqrt{\dfrac{7}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos(5x - \varphi) = \dfrac{1-a}{3} \\ \varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{7}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-2;4] \\ 5x = \pm\alpha + \varphi + 2\pi k, k \in Z \\ \varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{7}}{3} \\ \alpha = \arccos\dfrac{1-a}{3} \end{cases}$$

$$-1 \le \frac{1-a}{3} \le 1$$
$$-3 \le 1-a \le 3$$
$$-4 \le -a \le 2$$
$$-2 \le a \le 4$$

$\dfrac{\sqrt{7}}{3} > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

тоді $\varphi \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Врахуємо, що $\alpha \in [0;\pi]$, $\varphi \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ і, що тоді

$$0 < \alpha + \varphi < 1\frac{1}{4}\pi \; ; \; -\pi < \varphi - \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

1) $5x = \alpha + \varphi + 2\pi k \ge 0$ при $k \in \{0; N\}$ і $a \in [-2;4]$.

2) $5x = \varphi - \alpha + 2\pi n \ge 0$ при $n \in N$ і $a \in [-2;4]$;

при $n = 0$ $5x = \varphi - \alpha \ge 0$, якщо $\arccos\dfrac{\sqrt{7}}{3} \ge \arccos\dfrac{1-a}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{7}}{3} \le \dfrac{1-a}{3}$ (бо функція $y = \arccos t$ спадна),

тобто при $-2 \le a \le 1 - \sqrt{7}$.

$1 - \sqrt{7} \vee -2 \Leftrightarrow$
$3 \vee \sqrt{7}$ і
$1 - \sqrt{7} > -2$

Відповідь:

при $a \in \left[-2; 1-\sqrt{7}\right]$

$$x = \pm\frac{1}{5}\arccos\frac{1-a}{3} + \frac{1}{5}\arccos\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{2\pi k}{5},\; k \in \{0; N\};$$

при $a \in \left(1-\sqrt{7}; 4\right]$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{5}\arccos\dfrac{1-a}{3} + \dfrac{1}{5}\arccos\dfrac{\sqrt{7}}{3} + \dfrac{2\pi k}{5},\; k \in \{0; N\} \\ x = \dfrac{1}{5}\arccos\dfrac{\sqrt{7}}{3} - \dfrac{1}{5}\arccos\dfrac{1-a}{3} + \dfrac{2\pi n}{5},\; n \in N \end{array}\right.$$

Приклад 22. Знайти всі значення a, при яких нерівність

$$(a+2)\sin x-3\le 2\cos^2 x \qquad (1)$$

виконується для всіх $x\in\left[0;\frac{7\pi}{6}\right]$.

Розв'язання.

$$(1)\Leftrightarrow 2\sin^2 x+(a+2)\sin x-5\le 0\,.$$

Позначимо $t\triangleq\sin x$. Тоді маємо

$$2t^2+(a+2)t-5\le 0\,,$$

де $|t|\le 1$.

За умовою $x\in\left[0;\frac{7\pi}{6}\right]$.

На цьому проміжку

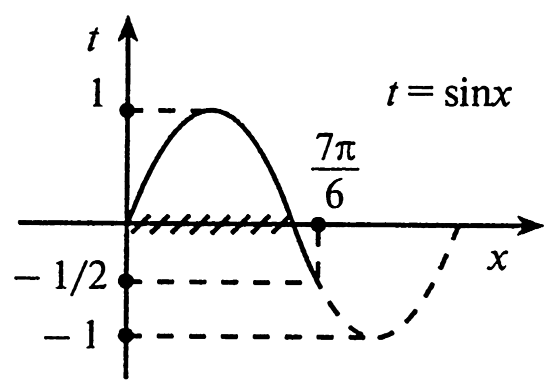
$$t=\sin x\in\left[-\frac{1}{2};1\right].$$

Тоді умова задачі приймає вигляд: знайти всі a, при яких нерівність

$$2t^2+(a+2)t-5\le 0$$

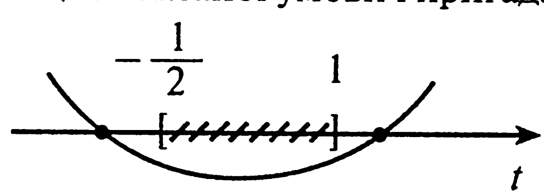
виконується для всіх

$$t\in\left[-\frac{1}{2};1\right].$$



$$\sin\frac{7\pi}{6}=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

Позначимо ліву частину нерівності через $f(t)$, зробимо графічну інтерпретацію вказаної умови і пригадаємо §15:



$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right)\le 0\\ f(1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{(a+2)}{2}-5\le 0\\ 2+a+2-5\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge -11\\ a\le 1\end{cases}\Leftrightarrow a\in[-11;1].$$

$\boxed{\textbf{Відповідь: } a\in[-11;1].}$

Приклад 23. При яких значеннях α з інтервалу $(5;16)$ рівність

$$1+\cos^2\left(\frac{\alpha x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|} \qquad (1)$$

має розв'язки на інтервалі $[1;2]$?

Розв'язання.

$$|\cos\pi x-\sin\pi x|=\sqrt{2}\left|\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\in\left[0;\sqrt{2}\right],$$

тоді

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|}\in\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}};1\right],$$

і права частина рівності (1) не перевищує 1.

Ліва частина (1) не менша за 1. Тоді

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|}=1\\ 1+\cos^2\left(\frac{\alpha x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos\left(\frac{\alpha x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\pi x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\\ \frac{\alpha x}{2}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}+n\\ \alpha=\left(\frac{\pi}{8}+\pi k\right)\frac{2}{x}\end{cases}$$

За умовою $x\in[1;2]$:

$$\begin{cases}x=\frac{1}{4}+n\\ x\in[1;2]\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}\text{, тоді } \alpha=\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\frac{4}{5}=\frac{\pi}{5}+\frac{8\pi k}{5}.$$

За умовою $\alpha\in(5;16)$:

$$5<\frac{\pi}{5}+\frac{8\pi k}{5}<16\Leftrightarrow k\in\{1;2;3\}\text{, тоді } \alpha\in\left\{\frac{9\pi}{5};\frac{17\pi}{5};5\pi\right\}.$$

Відповідь:
$\alpha \in \left\{\frac{9\pi}{5}; \frac{17\pi}{5}; 5\pi\right\}$.

Приклад 24. Знайти всі значення параметра a при яких система

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \cos y = \frac{a+3}{3} \\ \sin x \cdot \cos y = -\frac{a}{3} \end{cases} \qquad (1)$$

має розв'язки. Знайти ці розв'язки.

Розв'язання.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - \sin x \cos y}{\sin x} = \frac{a+3}{3} \\ \sin x \cos y = -\frac{a}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{a}{3} \\ \frac{1 + \frac{a}{3}}{\sin x} = \frac{a+3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$-1 \le -\frac{a}{3} \le 1$$

$$-1 \le \frac{a}{3} \le 1$$

$$-3 \le a \le 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-3;3] \\ \sin x \cos y = -\frac{a}{3} \\ \frac{a+3}{\sin x} = a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -3 \\ \sin x \ne 0 \\ \sin x \cos y = 1 \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} a \in (-3;3] \\ \sin x = 1 \\ \cos y = -\frac{a}{3} \end{cases} \quad (3) \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos y = -1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z \\ y = 2\pi k,\ k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z \\ y = \pi + 2\pi t,\ t \in Z \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}.$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-3;3] \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ y = \pm \arccos\left(-\dfrac{a}{3}\right) + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-3;3] \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ y = \pm\left(\pi - \arccos\dfrac{a}{3}\right) + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

Відповідь:

при $a \in (-\infty;-3) \cup (3;\infty)$ $(x;y) \in \varnothing$;

при $a = -3$ $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi k\right); \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m; \pi + 2\pi t\right)\right\}$, $\{n,k,m,t\} \subset Z$;

при $a \in (-3;3]$ $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \pm\left(\pi - \arccos\dfrac{a}{3}\right) + 2\pi k\right)$, $\{n,k\} \subset Z$.

Приклад 25. При яких значеннях параметра α функція

$$f(x) = (2\cos\alpha + \sin\alpha)x^2 - \sin\alpha \cdot x + \frac{1}{4}\cos\alpha$$

буде квадратом лінійної функції?

Розв'язання.

Умова буде виконана тоді і тільки тоді, якщо

$$\begin{cases} 2\cos\alpha + \sin\alpha = a^2 \\ \dfrac{1}{4}\cos\alpha = b^2 \\ \sin a = \pm 2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha \ge 0 \\ \sin\alpha + 2\cos\alpha \ge 0 \\ |a| = \sqrt{2\cos\alpha + \sin\alpha} \\ |b| = \dfrac{1}{2}\sqrt{\cos\alpha} \\ |\sin\alpha| = 2|a| \cdot |b| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 1 \\ |a| = 1 \\ b = 0 \\ 1 = 2\cdot 1\cdot 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\alpha > 0 \\ tg\alpha > -2 \\ |a| = \sqrt{2\cos\alpha + \sin\alpha} \\ |b| = \frac{1}{2}\sqrt{\cos\alpha} \\ \sin^2\alpha = \cos\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язками задачі буде множина розв'язків системи

$$\begin{cases} \cos\alpha > 0 \\ tg\alpha > -2 \\ tg^2\alpha = 2 + tg\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha > 0 \\ tg\alpha \in \{2; -1\} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = arctg2 + 2\pi k, k \in Z \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right. .$$

Відповідь: $\alpha \in \left\{-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; arctg2 + 2\pi k\right\}, \{n, k\} \in Z$.

Приклад 26. При яких значеннях параметра α рівняння

$$x^6 + \frac{1}{3} + 4\sqrt{|x| + \pi x^2} = -1 + \sqrt{3}\sin\alpha - \frac{2}{3}\cos^2\alpha \qquad (1)$$

має единий розв'язок?

Розв'язання.

Ліва частина заданого рівняння — парна функція відносно x, а права частина — не містить змінної x . Тобто, якщо деяке x_0 є розв'язком рівняння, то і значення $(-x_0)$ — теж його розв'язок. Тоді, якщо единий розв'язок існує — це $x = 0$.

При $x = 0$ задане рівняння має вигляд

$$\frac{1}{3} = -1 + \sqrt{3}\sin\alpha - \frac{2}{3}\cos^2\alpha \Leftrightarrow \frac{2}{3}\sin^2\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = -2\sqrt{3} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z .$$

Підставимо отримане значення $\sin\alpha$ у (1):

$$x^6 + \frac{1}{3} + 4\sqrt{|x| + \pi x^2} = -1 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow x^6 + 4\sqrt{|x| + \pi x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ |x|^{5\frac{1}{2}} + 4\sqrt{1 + \pi|x|} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0 .$$

Тобто при $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $x = 0$ дійсно є єдиним розв'язком рівняння (1).

$\boxed{\textbf{Відповідь: } \alpha = (-1)^n \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z .}$

Приклад 27. При яких значеннях a рівняння

$$2\cos ax - 3tg^2 x - 2 = 0$$

має єдиний розв'язок?

Розв'язання.

Очевидно, що: $x = 0$ є розв'язком при всіх $a \in R$; якщо $a = 0$ маємо безліч розв'язків.

При $a \neq 0$: $y = \cos ax$ має за основний період $T_{0_1} = \dfrac{2\pi}{a}$,

$y = tg^2 x$ має за основний період $T_{0_2} = \pi$.

З рівності $2\cos ax = 3tg^2 x + 2$ випливає, що

$$\frac{2\pi}{a} n = \pi k ,$$

де $\{n; k\} \in Z$, і $a = \dfrac{2n}{k}$ — число раціональне (при $k \neq 0$).

Тоді $x = 0$ буде єдиним розв'язком при умові, що a — число ірраціональне.

Відповідь: a — ірраціональне число.

Приклад 28. При яких значеннях a і b функція

$$f(x)=\frac{a^2-1}{(a+3)^2}\cos\frac{3bx}{2}+\left(a^3+a^2-4a-4\right)\frac{x^2+a-5}{x^2-2a+1}+b$$

буде періодичною з основним періодом $T_0=\frac{4\pi}{3}$?

Розв'язання.

Функція $f(x)$ буде періодичною тоді і тільки тоді, коли другий доданок перетворюється на константу або на тотожній нуль і при тому $x^2-2a+1\neq 0$ при всіх $x\in R$:

$$\begin{cases} a^3+a^2-4a-4=0 \\ 2a-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)\left(a^2-4\right)=0 \\ a<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in\{-1;\pm 2\} \\ a<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ a\in\{-1;-2\}.$$

При $a=-1$ $f(x)=b=\text{const}$, і період $\frac{4\pi}{3}$ не буде основним періодом, тобто найменшим додатнім періодом.

При $a=-2$

$$f(x)=3\cos\frac{3bx}{2}+b$$

і основний період $T_0=\frac{4\pi}{3}$ якщо $2\pi:\frac{3b}{2}=\frac{4\pi}{3}$, тобто при $b=1$.

Відповідь: $a=-2$ і $b=1$.

Завдання 29.

Знайти всі раціональні значення a, при яких функції

$$f(x)=\cos\frac{2x}{\sqrt{5+a^2}} \text{ і } \varphi(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{125}-4a+1}$$

мають однакові періоди.

Розв'язання.

Функції $y=\cos kx$ і $y=\operatorname{tg}bx$ мають за періоди, відповідно $T_1=\frac{2\pi}{k}n,\ n\in\mathbf{Z}$ і $T_2=\frac{\pi}{b}m,\ m\in\mathbf{Z}$.

Тоді $T_f = \pi\left(\sqrt{5}+a^2\right)n$ і $T_\varphi = \pi\left(\sqrt{125}-4a+1\right)m$.

За умовою

$$\pi\left(\sqrt{5}+a^2\right)n = \pi\left(\sqrt{125}-4a+1\right)m \Leftrightarrow a^2n+4am-m=\sqrt{5}(5m-n),$$

при тому m і n — цілі числа, a — раціональне число.

Тоді ліва і права частини останньої рівності є раціональними числами, що можливо лише в випадку, коли

$$\begin{cases} 5m-n=0 \\ a^2n+4am-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=5m \\ 5a^2+4a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=5m \\ a\in\{-1;1/5\} \end{cases}$$

Відповідь: $a\in\left\{-1;\dfrac{1}{5}\right\}$.

Завдання 18. У (1-5) знайдіть при яких значеннях параметра a рівняння має розв'язки. Запишіть ці розв'язки.

1) $\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-(a+3)=0$
2) $\sin^6 x+\cos^6 x = a\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)$
3) $\sin x = a\sin 3x$
4) $(a-1)\cos x+(a+1)\sin x = 2a$
5) $\sin\left(a\sqrt{x-1}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$

6) Знайти a і b, при яких рівняння

$$\sin ax\cdot\sin bx = 1$$

має розв'язки.

7) Знайти a, при яких нерівність

$$x^2(1+\sin a)-2x\cos a+2\sin a-1\ge 0$$

виконується при всіх $x\in R$.

8) Знайти a, при яких рівняння

$$\cos^2 4x+(a-3)\cos 4x=0$$

має на відрізку $x\in\left[\dfrac{\pi}{8};\dfrac{5\pi}{8}\right]$ рівно 4 корені.

9) Розв'язати нерівність

$$-3a\le 12\sin x\le 2a+10$$

10) Розв'язати нерівність

$$(5a-7)\cos x < a+5$$

11) Знайти a, при яких нерівність

$$\left|5\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a + 1\right| \le 6$$

виконується для всіх $x \in R$.

12) Знайти всі значення параметра a при кожному з яких нерівність

$$\cos^2 x + 2a\sin x - 2a < a^2 - 4$$

виконується для будь-яких x ?

13) При яких α рівняння

$$1 - x = \sqrt{2x^2 + 6\cos 2\alpha + 1}$$

має дійсні корені?

14) При яких значеннях a нерівність

$$\left(a^2 + a - 2\right)\log^2_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x - (a+5)\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x - 2 \le 0$$

виконується для всіх $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$.

15) Розв'язати рівняння

$$\frac{a\sin x - 2}{a - 2\cos x} = \frac{a\cos x - 2}{a - 2\sin x}$$

і знайти кількість його розв'язків на інтервалі $[20\pi; 29\pi]$..

16) Розв'язати рівняння

$$\frac{a - 3\sin x}{a\cos x - 3} = \frac{a - 3\cos x}{a\sin x - 3}$$

і визначити кількість його розв'язків на відрізку $[40\pi; 49\pi]$..

17) При яких значеннях a рівняння

$$a\cos^2 x + 2(a+1)\sin x - a^2 + a = 0$$

має єдиний розв'язок при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

18) При яких значеннях a рівняння

$$a\sin^2 x + 2(a+1)\sin x + a - 1 = 0$$

має єдиний розв'язок при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

19) При яких значеннях a рівняння

$$2\sin^4 x - 3\cos(2ax) + 3 = 0$$

має єдиний розв'язок?

20) При яких значеннях a і b функція

$$f(x) = \frac{a+1}{a-3}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2b} + \left(a^3 + 12a^2 - 4a - 48\right)\frac{x^2 + 3a}{x^2 - 2a + 10} + \frac{2}{b}$$

буде періодичною з основним періодом $T_0 = \frac{2}{3}$?

21) Знайти всі значення a і b, при яких система

$$\begin{cases} x + y = a \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = b \end{cases}$$

має розв'язки.

22) Знайти всі значення a, при яких система

$$\begin{cases} 2^{b\sin x} + (a+1)by^2 = a^2 \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

має розв'язок для будь-яких дійсних значень b.

§ 19. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ І ПАРАМЕТР

Ми не будемо робити безнадійних спроб навести всі можливі методи розв'язування завдань теми, що об'явлена у назві параграфу. Проте дозволимо собі сформулювати декілька заповідей, які необхідно засвоїти всім бажаючим навчитися розв'язувати такі задачі. Ось ці «заповіді» (без претензій на повноту):

1. *Вміти розв'язувати звичайні логарифмічні рівняння та нерівності.*

2. *Розпочинати розв'язання з формулювання області визначення виразу.*

3. *Мати на увазі, що* $\log_a b^2 = 2\log_a |b|$ *і* $\log_{a^2} b = \frac{1}{2}\log_{|a|} b$;

при умові $b \cdot c > 0$: $\log_a(bc) = \log_a|b| + \log_a|c|$ *і* $\log_a \frac{b}{c} = \log_a|b| - \log_a|c|$.

4. *Не забувати про графічні засоби розв'язання задач.*

5. *Пам'ятати про властивості квадратичної функції і умови розміщення її коренів на числовій осі.*

6. *Окремо досліджувати граничні значення параметрів — це дозволить проконтролювати роботу.*

Окрім того, що ці «заповіді» — просто частка загальної математичної культури, треба зауважити, що дуже часто ідея розв'язання задачі має за основу одну, або декілька наведених вище «заповідей».

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\left|\log_3(x+2)\right| = -(x+a)^2. \qquad (1)$$

Розв'язання.

Ліва частина рівняння невід'ємна, а права недодатня. Тоді

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\log_3(x+2)\right| = 0 \\ -(x+a)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 1 \\ x+a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ a = 1. \end{cases}$$

Відповідь: при $a = 1$ $x = -1$; при $a \neq 1$ $x \in \varnothing$.

Приклад 2. Знайти a, при яких функція

$$f(x)=\lg\left((6a-5)x^2-5(a-1)x+2a-3\right)$$

визначена при всіх $x\in R$.

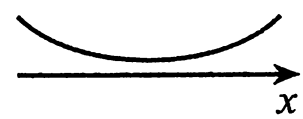
Розв'язання.

Область визначення заданої функції

$$(6a-5)x^2-5(a-1)x+2a-3>0$$

буде рівносильна $x\in R$ лише в випадку (див. §10, 14), коли квадратична функція лівої частини нерівності не має коренів і гілки її графіка спрямлені вгору, тобто коли

$$\begin{cases}6a-5>0\\ D<0.\end{cases}$$



Розв'яжемо останню систему:

$$\begin{cases}a>5/6\\ -23a^2+62a-35<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a>5/6\\ \left[\begin{array}{l}a>\dfrac{31+2\sqrt{39}}{23}\\ a<\dfrac{31-2\sqrt{39}}{23}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a>\frac{31+2\sqrt{39}}{23}.$$

$$23a^2-62a+35>0$$

$$\frac{D}{4}=31^2-23\cdot35=156$$

$$a_{1,2}=\frac{31\pm2\sqrt{39}}{23}$$

$$\frac{31-2\sqrt{39}}{23}<\frac{31-2\sqrt{36}}{23}=\frac{19}{23}<\frac{5}{6}$$

$$\frac{31+2\sqrt{39}}{23}>\frac{31+2\sqrt{36}}{23}=\frac{43}{23}>\frac{5}{6}$$

Відповідь: $a\in\left(\dfrac{31+2\sqrt{39}}{23};\infty\right).$

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\log_a\left(x^2\right)+2\log_a(x+2)=1. \qquad (1)$$

Розв'язання.

Область визначення: $\begin{cases}a>0\\ a\neq1\\ x+2>0\\ x\neq0.\end{cases}$ Тоді

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(0;1)\cup(1;\infty)\\ x\in(-2;0)\cup(0;\infty)\\ x^2(x+2)^2=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(0;1)\cup(1;\infty)\\ x\in(-2;0)\cup(0;\infty)\\ (x+2)|x|=\sqrt{a}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(0;1)\cup(1;\infty)\\ x\in(-2;0)\\ (x+2)x=-\sqrt{a}\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(0;1)\cup(1;\infty)\\ x\in(0;\infty)\\ (x+2)x=\sqrt{a}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(0;1)\cup(1;\infty)\\ x\in(-2;0)\\ x^2+2x+\sqrt{a}=0\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(0;1)\cup(1;\infty)\\ x\in(0;\infty)\\ x^2+2x-\sqrt{a}=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(0;1)\\ x=-1\pm\sqrt{1-\sqrt{a}}\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(0;1)\cup(1;\infty)\\ x=-1+\sqrt{1+\sqrt{a}}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\frac{D_1}{4}=1-\sqrt{a}\ge 0$$

при $\sqrt{a}\le 1\ \Leftrightarrow\ a\in[0;1]$

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-\sqrt{a}}\ ,$$

$$x_{1,2}\in(-2;0)$$

$$\frac{D_2}{4}=1+\sqrt{a}>0$$

$$x_1=-1-\sqrt{1+\sqrt{a}}$$

$$x_2=-1+\sqrt{1+\sqrt{a}}$$

$x_1\notin(0;\infty)$; $x_2\in(0;\infty)$.

Відповідь:

при $a\in\{(-\infty;0);1\}$ $x\in\varnothing$;

при $a\in(0;1)$ $x\in\left\{-1\pm\sqrt{1-\sqrt{a}};-1+\sqrt{1+\sqrt{a}}\right\}$;

при $a\in(1;\infty)$ $x=-1+\sqrt{1+\sqrt{a}}$.

Приклад 4. При яких значеннях a з умови

$$\log_x\left(ax^2-1\right)=2$$

випливає $x\ge 2$?

Розв'язання.

Розв'яжемо задане логарифмічне рівняння відносно x:

$$\log_x\left(ax^2-1\right)=2\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\ne 1\\ (a-1)x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ a>1 \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{a-1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ a\neq 2 \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{a-1}} \end{cases}.$$

Відповідно до умови задачі з твердження $x=\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}$ випливає твердження $x\geq 2$. Тоді (див. § 16 та ОК-21):

$$\frac{1}{\sqrt{a-1}}\in[2;\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a-1}}\geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ (a-1)\leq \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ a\leq \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Відповідь: $a\in\left(1;\dfrac{5}{4}\right]$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$\log_2\left(\sqrt{x^2-2ax+1}-1\right)\leq 1. \qquad (1)$$

Розв'язання.

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-2ax+1}-1>0 \\ \sqrt{x^2-2ax+1}-1\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2ax+1\geq 0 \\ x^2-2ax+1>1 \\ x^2-2ax+1\leq 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

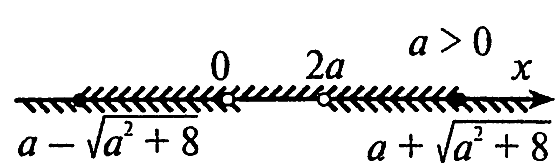
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2ax+1>1 \\ x^2-2ax+1\leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

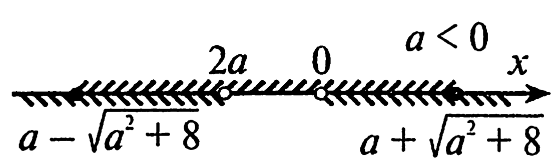
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2ax>0 \\ x^2-2ax-8\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[a-\sqrt{a^2+8};\,a+\sqrt{a^2+8}\right] \\ \left[\begin{array}{l} x<\min\{0;2a\} \\ x>\max\{0;2a\} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{D}{4}=a^2+8>0$$

$$x_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2+8}$$





$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\x\in(-\infty;0)\cup(2a;\infty)\\x\in\left[a-\sqrt{a^2+8};a+\sqrt{a^2+8}\right]\end{cases}\\\begin{cases}a<0\\x\in(-\infty;2a)\cup(0;\infty)\\x\in\left[a-\sqrt{a^2+8};a+\sqrt{a^2+8}\right]\end{cases}\\\begin{cases}a=0\\x\in\left[-2\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;2\sqrt{2}\right]\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\x\in\left[a-\sqrt{a^2+8};0\right)\cup\left(2a;a+\sqrt{a^2+8}\right]\end{cases}\\\begin{cases}a<0\\x\in\left[a-\sqrt{a^2+8};a\right)\cup\left(0;a+\sqrt{a^2+8}\right]\end{cases}\\\begin{cases}a=0\\x\in\left[-2\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;2\sqrt{2}\right]\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:

при $a>0$ $x\in\left[a-\sqrt{a^2+8};0\right)\cup\left(2a;a+\sqrt{a^2+8}\right]$;

при $a<0$ $x\in\left[a-\sqrt{a^2+8};2a\right)\cup\left(0;a+\sqrt{a^2+8}\right]$;

при $a=0$ $x\in\left[-2\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;2\sqrt{2}\right]$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність

$$x^{\log_a x}>a. \qquad (1)$$

Розв'язання.

Область визначення D: $\begin{cases}x>0\\a\in(0;1)\cup(1;\infty)\end{cases}$.

Для всіх $\{a,x\}\subset D$ виконується $x=a^{\log_a x}$, тоді

$$(1)\Leftrightarrow a^{(\log_a x)^2}>a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(0;1)\\(\log_a x)^2<1\end{cases}\\\begin{cases}a\in(1;\infty)\\(\log_a x)^2>1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(0;1)\\|\log_a x|<1\end{cases}\\\begin{cases}a\in(1;\infty)\\|\log_a x|>1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(0;1)\\\log_a x<1\\\log_a x>-1\end{cases}\\\begin{cases}a\in(1;\infty)\\\left[\begin{array}{l}\log_a x>1\\\log_a x<-1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\in(0;1) \\ x>a \\ x<\dfrac{1}{a} \end{cases} \\ \begin{cases} a\in(1;\infty) \\ \left[\begin{array}{l} x>a \\ 0<x<\dfrac{1}{a} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
при $a\in(0;1)$ $x\in\left(a;\dfrac{1}{a}\right)$;
при $a\in(1;\infty)$ $x\in\left(0;\dfrac{1}{a}\right)\cup(a;\infty)$;
при $a\in\{(-\infty;0];1\}$ $x\in\varnothing$.

Приклад 7. Знайти всі a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$2\log_a|x-1|-\log_a x=1 \qquad (1)$$

дорівнює 34.

Розв'язання.

Область визначення заданого рівняння

$$D:\ \begin{cases} a\in(0;1)\cup(1;\infty) \\ x\neq 1 \\ x>0 \end{cases}$$

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} a\in(0;1)\cup(1;\infty) \\ x\in(0;1)\cup(1;\infty) \\ \dfrac{(x-1)^2}{x}=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(0;1)\cup(1;\infty) \\ x\in(0;1)\cup(1;\infty) \\ x^2-(2+a)x+1=0 \end{cases}$$

Корені квадратного рівняння системи існують при умові

$$(2+a)^2-4\geq 0 \Leftrightarrow |a+2|\geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\geq 0 \\ a\leq -4 \end{array}\right..$$

Тобто для всіх $a\in D$ корені цього рівняння існують.

Скористуємось теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=1 \\ x_1+x_2=2+a>0 \end{cases}$$

обидва корені додатні і $x=1$ — не є розв'язком.

Тоді $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1\cdot x_2=(2+a)^2-2=34.$

Розв'язками останнього рівняння є числа $a_1=4\in D$ і $a_2=-8\notin D$.

Відповідь: $a=4$.

Приклад 8. Знайти кількість розв'язків рівняння

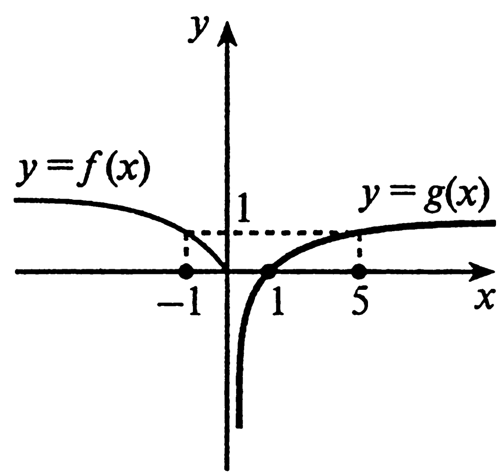
$$\sqrt[4]{-x-a}-\log_5(x-5a)=0. \qquad (1)$$

Розв'язання.

Проаналізуємо взаємне розміщення графіків функцій

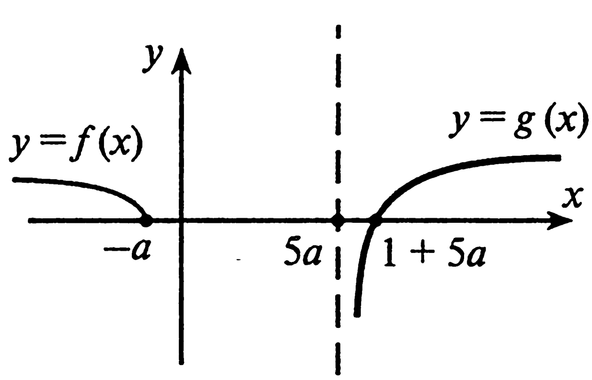
$$f(x)=\sqrt[4]{-x-a} \text{ і } g(x)=\log_5(x-5a):$$

1) при $a=0$ маємо $y=f(x)=\sqrt[4]{-x}$ і $y=g(x)=\log_5 x$:



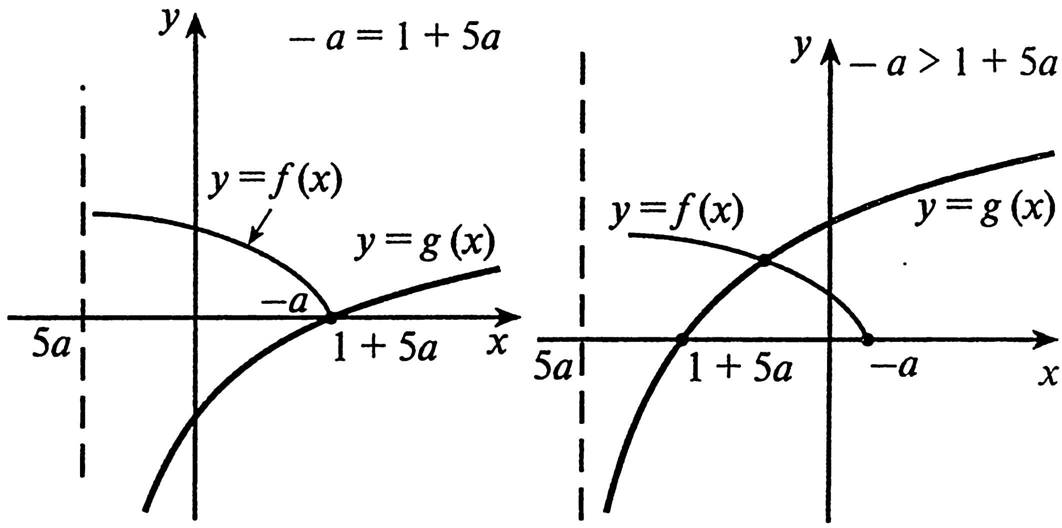
Спільних точок немає.

2) при $a>0$ розглянуті вище графіки переміщуються: $y=f(x)$ — ліворуч на a, $y=g(x)$ — праворуч на $5a$:



Спільних точок немає.

3) при $a<0$ графіки наведені у п. 1 переміщуються:
$y=f(x)$ — праворуч на $|a|$, $y=g(x)$ — ліворуч на $5|a|$.



Одна спільна точка при $a\le -\frac{1}{6}$.

Відповідь:
при $a\le -\frac{1}{6}$ — 1 розв'язок;
при $a> -\frac{1}{6}$ — розв'язків немає.

Приклад 9. Знайти кількість розв'язків рівняння

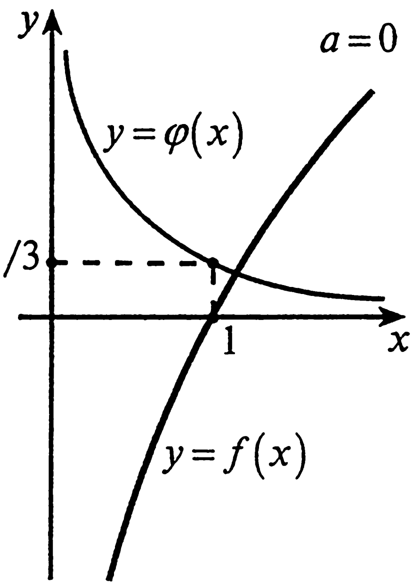
$$3x\ln x=1+a\ln x. \qquad (1)$$

Розв'язання.

$$(1)\Leftrightarrow (3x-a)\ln x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-a\ne 0 \\ x>0 \\ \ln x=\dfrac{1}{3x-a} \end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій $y=\ln x\triangleq f(x)$ та $\dfrac{1}{3x-a}\triangleq \varphi(x)$ і знайдемо кількість точок їхнього перетину на інтервалі $x\in(0;\infty)$.

Графік функції $y=\dfrac{1/3}{x-\frac{a}{3}}$ — гіпербола, асимптотами якої є прямі $y=0$ і $x=a/3$.

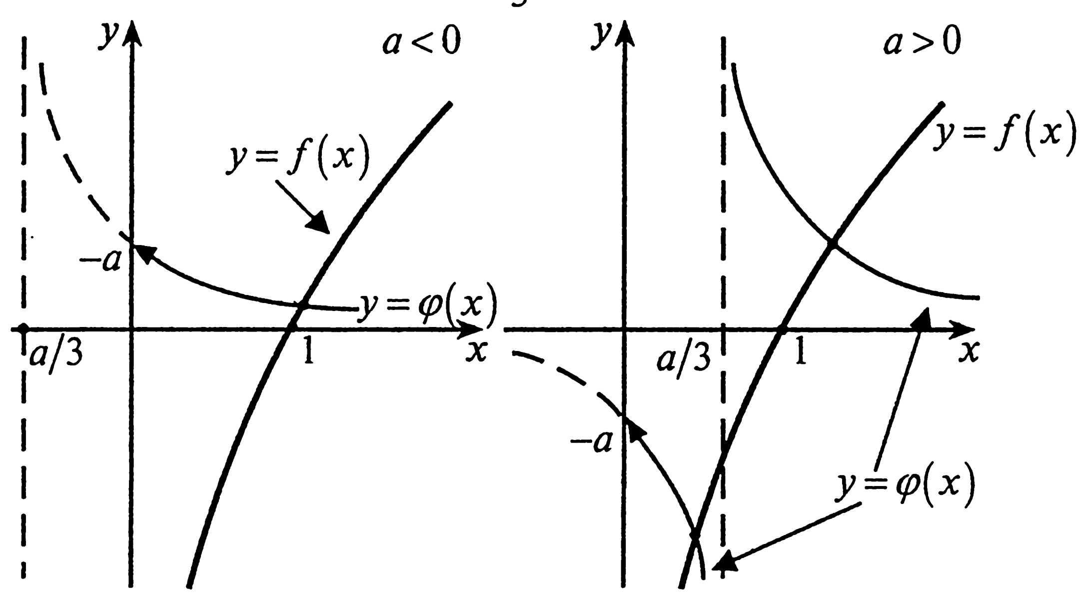


При $a=0$ графіки функцій $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ мають одну спільну точку.

При $a=0$ (1) має 1 розв'язок.

Якщо $a<0$ графік $y=\varphi(x)$ переміщується вздовж осі OX ліворуч на $\dfrac{|a|}{3}$.

Якщо $a>0$ графік $y=\varphi(x)$ переміщується вздовж осі OX праворуч на $\dfrac{a}{3}$.



При $a \le 0$ $y=f(x)$ та $y=\varphi(x)$ мають одну спільну точку і (1) має 1 розв'язок.

При $a>0$ $y=f(x)$ та $y=\varphi(x)$ мають дві спільні точки і (1) має 2 розв'язки.

Відповідь:
при $a \le 0$ — 1 розв'язок.
при $a>0$ — 2 розв'язки.

Приклад 10. Розв'язати нерівність відносно x:

$$\log_{(-\sin a)} x > \log_{\sin^2 a} \cos a . \qquad (1)$$

Розв'язання.

Знайдемо область визначення (1) D:

$$\begin{cases} -\sin a \in (0;1) \\ \cos a > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right), n \in Z \\ x > 0 \end{cases}.$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \{a; x\} \subset D \\ \log_{|\sin a|} x > \frac{1}{2}\log_{|\sin a|} \cos a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \{a; x\} \subset D \\ x < \sqrt{\cos a} \end{cases}$$

Відповідь:

при $a \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right), n \in Z$ $x \in \left(0; \sqrt{\cos a}\right)$;

при $a \notin \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right), n \in Z$ $x \in \varnothing$.

Приклад 11. При всіх дійсних значеннях параметра a розв'язати нерівність

$$\log_a (x-a) > \log_{\frac{1}{a}} (x+1). \qquad (1)$$

Розв'язання.

Область визначення (1)

$$D: \begin{cases} x - a > 0 \\ x + 1 > 0 \\ a \in (0;1) \cup (1;\infty) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \log_a (x-a) > -\log_a (x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{a, x\} \in D \\ \log_a \left((x-a)(x+1)\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > a \\ x > -1 \\ a \in (0;1) \\ (x-a)(x+1) < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > a \\ x > -1 \\ a \in (1;\infty) \\ (x-a)(x+1) > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

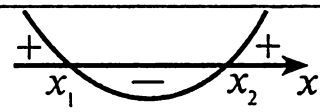
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x>a\\ a\in(0;1)\\ x^2-(a-1)x-a-1<0\end{cases} & (2)\\ \begin{cases}x>a\\ a\in(1;\infty)\\ x^2-(a-1)x-a-1>0\end{cases} & (3)\end{array}\right.$$

$x^2-(a-1)x-a-1\vee 0$

$d=a^2+2a+5>0$ при $a\in R$;

$$x_1=\frac{a-1-\sqrt{a^2+2a+5}}{2}$$

$$x_2=\frac{a-1+\sqrt{a^2+2a+5}}{2}$$

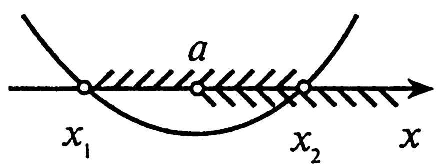


Позначимо квадратний тричлен

$$x^2-(a-1)x-a-1\overset{\Delta}{=}f(x).$$

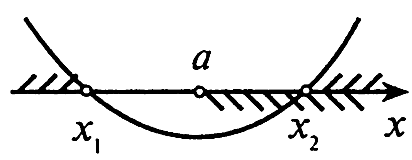
При $x=a$ $f(a)=-1<0$. Тоді точка $(a;0)$ міститься між коренями функції $f(x)$, тобто $x_1<a<x_2$.

При $a\in(0;1)$:



і $x\in(a;x_2)$;

при $a\in(1;\infty)$:



і $x\in(x_2;\infty)$.

Відповідь:

при $a\in(-\infty;0)\cup\{1\}$ $x\in\varnothing$;

при $a\in(0;1)$ $x\in\left(a;\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+2a+5}}{2}\right)$;

при $a\in(1;\infty)$ $x\in\left(\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+2a+5}}{2};\infty\right)$.

Приклад 12. При яких значеннях параметра a рівняння

$$\log_{\sqrt{ax-6}}\left(2x^2-3x+2\right)=2\log_{ax-6}\left(x^2+2x-4\right) \qquad (1)$$

має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Область визначення (1):

$$D:\ \begin{cases} ax-6>0 \\ ax-6\neq 1 \\ 2x^2-3x+2>0 \\ x^2+2x-4>0 \end{cases}$$

$$2\log_{ax-6}\left(x^2+2x-4\right)= =\log_{\sqrt{ax-6}}\left(x^2+2x-4\right)$$

Запишемо систему рівносильну вихідному рівнянню (1):

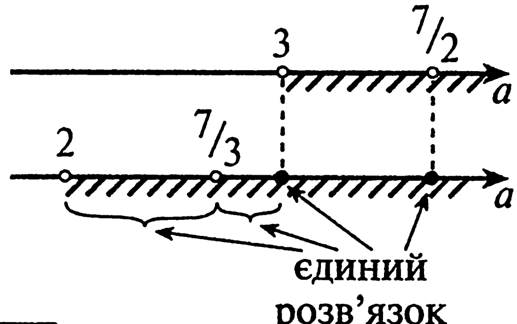
$$\begin{cases} ax-6>0 \\ ax-6\neq 1 \\ 2x^2-3x+2>0 \\ x^2+2x-4>0 \\ 2x^2-3x+2=x^2+2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax-6>0 \\ ax-6\neq 1 \\ x^2+2x-4>0 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax>6 \\ ax\neq 7 \\ x\in\{2;\,3\} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ 2a>6 \\ 2a\neq 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ 3a>6 \\ 3a\neq 7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\in\left(3;\dfrac{7}{2}\right)\cup\left(\dfrac{7}{2};\infty\right) \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a\in\left(2;\dfrac{7}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{3};\infty\right) \\ x=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Корені рівняння (1) існують при умовах:

$x_1=2$ при

$x_2=3$ при



Відповідь:
$a\in\left\{\left(2;\dfrac{7}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{3};3\right];\dfrac{7}{2}\right\}.$

Наступний приклад ми вже розв'язали за допомогою графічного тлумачення (приклад 2 § 17). Тепер розв'яжемо його іншим способом, спираючись на властивості квадратного тричлена.

Приклад 12. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння

$$2\lg(x+3)=\lg ax \qquad (1)$$

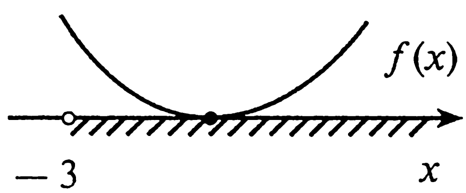
має єдиний розв'язок.

Розв'язання.

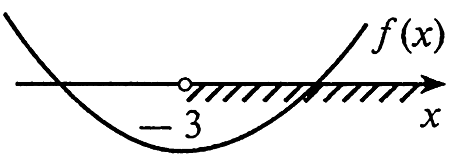
$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+3>0\\(x+3)^2=ax\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-3\\x^2-(a-6)x+9=0\end{cases}$$

Позначимо $f(x)\triangleq x^2-(a-6)x+9=0$.

(1) має єдиний розв'язок в випадках:



або



,

тобто при умові

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}D=0\\x_в>-3\end{cases}\\f(-3)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-6)^2-36=0\\\dfrac{a-6}{2}>-3\end{cases}\\9+(a-6)\cdot3+9<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in\{0;12\}\\a>0\end{cases}\\a<0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\in(-\infty;0)\cup\{12\}.$$

Відповідь: $a\in(-\infty;0)\cup\{12\}$.

Приклад 13. Знайти всі значення k, при яких система рівнянь

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=6\\y=8+k(x-6)\end{cases} \qquad (1)$$

має єдиний розв'язок.

Розв'язання.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ xy=64 \\ y=8+k(x-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ xy=64 \\ y=8+k(x-6) \end{cases} \Leftrightarrow$$

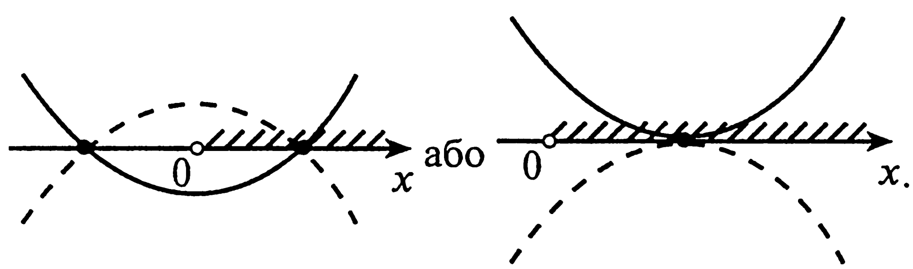
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y=8+k(x-6) \\ kx^2-2(3k-4)x-64=0 \end{cases}$$

Умова існування єдиного розв'язку (1) рівносильна умові існування єдиного додатного кореня рівняння

$$kx^2-2(3k-4)x-64=0.$$

При $k=0$ маємо єдиний розв'язок лінійного рівняння $x=8>0$.

При $k \neq 0$ графічна інтерпретація цієї умови має вигляд:



Тоді (див. ОК-19):

$$\left[\begin{array}{l} kf(0)<0 \\ \begin{cases} D/4=0 \\ x_в>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k(-64)<0 \\ \begin{cases} 9k^2+40k+16=0 \\ \dfrac{3k-4}{k}>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k>0 \\ \begin{cases} k\in\left\{-4; -\dfrac{4}{9}\right\} \\ k\in(-\infty; 0)\cup\left(\dfrac{4}{3}; \infty\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow k\in\left\{-4; -\frac{4}{9}; (0; \infty)\right\}.$$

Відповідь: $k\in\left\{-4; -\dfrac{4}{9}; [0; \infty)\right\}$.

Приклад 14. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \log_{|\sin x|} y = \log_{|\cos x|}(1-y) \\ -\cos^4 2x + \left(a^3+2a-4\right)\left(y^2-y+0{,}5\right)+1=0 \end{cases} \qquad (1)$$

при всіх недодатних значеннях a.

Розв'язання.

Перепишемо друге рівняння системи (1) у вигляді

$$\left(a^3+2a-4\right)\left(y^2-y+0{,}5\right)=\cos^4 2x-1 \qquad (2).$$

Квадратична функція

$$f(y)=y^2-y+0{,}5 \geq f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

При $a\leq 0$ $a^3+2a-4\leq 0$. Тоді ліва частина рівняння (2):

$$\left(a^3+2a-4\right)\left(y^2-y+0{,}5\right)\leq \frac{a^3+2a}{4}-1\leq -1$$

при всіх $a\leq 0$.

Права частина рівняння (2): $\cos^4 2x-1\geq -1$. Тоді

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^4 2x=0\\ y=1/2\\ a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ y=1/2\\ a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z\\ y=1/2\\ a=0\end{cases}$$

Підставимо отримані значення y у перше рівняння системи (1):

$$\begin{cases}\log_{|\sin x|}\dfrac{1}{2}=\log_{|\cos x|}\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|\sin x|=|\cos x|\\ |\sin x|\in(0;1)\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$$

Відповідь:

при $a=0$ $\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z\\ y=1/2\end{cases}$;

при $a\neq 0$ $(x;y)\in\varnothing$.

Приклад 15. Знайти всі значення x, при яких рівність

$$2\log_{2+a^2}\left(4-\sqrt{7+2x}\right)=\log_{2+a^2x^2}(4-3x) \qquad (1)$$

виконується при всіх значеннях $a\in R$.

Розв'язання.

Співвідношення (1) виконується для довільних значень a, у тому числі і при $a=0$.

Якщо $a=0$ маємо рівняння

$$2\log_2\left(4-\sqrt{7+2x}\right)=\log_2(4-3x) \Leftrightarrow \begin{cases} 4-\sqrt{7+2x}=\sqrt{4-3x} \\ 4-\sqrt{7+2x}>0 \\ 4-3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+5=2\sqrt{(7+2x)(4-3x)} \\ \sqrt{7+2x}<4 \\ 3x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5\geq 0 \\ 7+2x\geq 0 \\ 7+2x<16 \\ 3x<4 \\ 25x^2+62-87=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{2}\leq x<\dfrac{4}{3} \\ x\in\left\{1;-\dfrac{87}{25}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x\in\left\{1;-\frac{87}{25}\right\}.$$

Шукані значення x містяться серед знайдених двох коренів. Перевіримо їх.

1) Якщо $x=1$ маємо

$$2\log_{2+a^2}1=\log_{2+a^2}1 \Leftrightarrow a\in R$$

і $x=1$ є розв'язком задачі.

2) Якщо $x=-\dfrac{87}{25}$ маємо

$$2\log_{2+a^2}\frac{19}{5}=\log_{2+a^2\left(\frac{87}{25}\right)^2}\frac{361}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2+a^2}\frac{19}{5}=\log_{2+a^2\left(\frac{87}{25}\right)^2}\frac{19}{5} \Leftrightarrow a=0 \not\Leftrightarrow a\in R.$$

$\boxed{\textbf{Відповідь: } x=1.}$

Приклад 16. Знайти всі значення параметра a, при яких існує єдине значення x, для якого виконується нерівність

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\log_5\left(x^2+ax+6\right)+\log_a 3\geq 0.$$

Розв'язання.

Позначимо

$$\sqrt{x^2+ax+5}\overset{\Delta}{=}y\geq 0$$

і перейдемо до основи 5, отримаємо

$$\frac{-\log_5(y+1)\log_5\left(y^2+1\right)+\log_5 3}{\log_5 a}\geq 0.$$

Чисельник нерівності — функція монотонно спадна. Неважко побачити, що при $y=2$ вона перетворюється на 0.

Тоді при $0<a<1$ розв'язком цієї нерівності буде $y\geq 2$; при $a>1$ розв'язком буде $0\leq y\leq 2$.

<u>При $a\in(0;1)$:</u> $\sqrt{x^2+ax+5}\geq 2 \Leftrightarrow x^2+ax+1\geq 0$ — має нескінченну кількість розв'язків.

<u>При $a>1$:</u> $\sqrt{x^2+ax+5}\leq 2 \Leftrightarrow 0\leq x^2+ax+5\leq 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -4\leq x^2+ax+1\leq 0\ -$$

буде мати розв'язком єдине значення x тільки у випадку,

$$a^2-4=0$$

тобто при $|a|=2$. Враховуючи, що $a>1$ маємо $a=2$.

Відповідь: $a=2$.

Приклад 17. Для кожного значення параметра a знайти область визначення $D(f)$ функції

$$f(x)=\sqrt{\log_{\cos 23^\circ}\left(\cos^2 x+4\right)\cdot\left|\left(x^2+6x+8\right)-5(x+2)\sqrt{\frac{x+4}{x+2}}-(a+2)(a-3)\right|}$$

Розв'язання.

Маємо $\log_{\cos 23^\circ}\left(\cos^2 x+4\right)<0$, бо $\cos 23^\circ\in(0;1)$, а $\cos^2 x+4>1$.

Тоді $D(f)$:

$$\left(x^2+6x+8\right)-5(x+2)\sqrt{\frac{x+4}{x+2}}-(a+2)(a-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4\ge 0 \\ x+2>0 \\ (x+4)(x+2)-5\sqrt{(x+4)(x+2)}-(a+2)(a-3)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+4\le 0 \\ x+2<0 \\ (x+4)(x+2)+5\sqrt{(x+4)(x+2)}-(a+2)(a-3)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+4)(x+2)=(a+2)^2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-2 \\ a\ge -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le -4 \\ a\le -2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} (x+4)(x+2)=(a-3)^2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-2 \\ a\le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le -4 \\ a\ge 3 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$t \triangleq \sqrt{(x+4)(x+2)}\ge 0$$

$$d=25+4(a+2)(a-3)=$$

$$=4a^2-4a+1=(2a-1)^2$$

$$t_{1,2}=\frac{5\pm(2a-1)}{2}=\left[\begin{array}{l} +2+a \\ +3-a \end{array}\right.$$

$$t_{3,4}=\frac{-5\pm(2a-1)}{2}=\left[\begin{array}{l} -2-a \\ -3+a \end{array}\right.$$

$$x^2+6x+8-(a+2)^2=0$$

$$d/4=9-8+(a+2)^2$$

$$x_{1,2}=-3\pm\sqrt{1+(a+2)^2}$$

$$x^2+6x+8-(a-3)^2=0$$

$$d/4=9-8+(a+3)^2$$

$$x_{3,4}=-3\pm\sqrt{1+(a-3)^2}$$

Очевидно, що

$$x_1=-3+\sqrt{1+(a+2)^2}>-2 \text{ при всіх } a\neq -2;$$

$$x_2=-3-\sqrt{1+(a+2)^2}\le -4 \text{ при всіх } a\in R;$$

$$x_3=-3+\sqrt{1+(a-3)^2}>-2 \text{ при всіх } a\ne 3;$$

$$x_4=-3-\sqrt{1+(a-3)^2}\le -4 \text{ при всіх } a\in R;$$

Тоді маємо сукупність розв'язків:

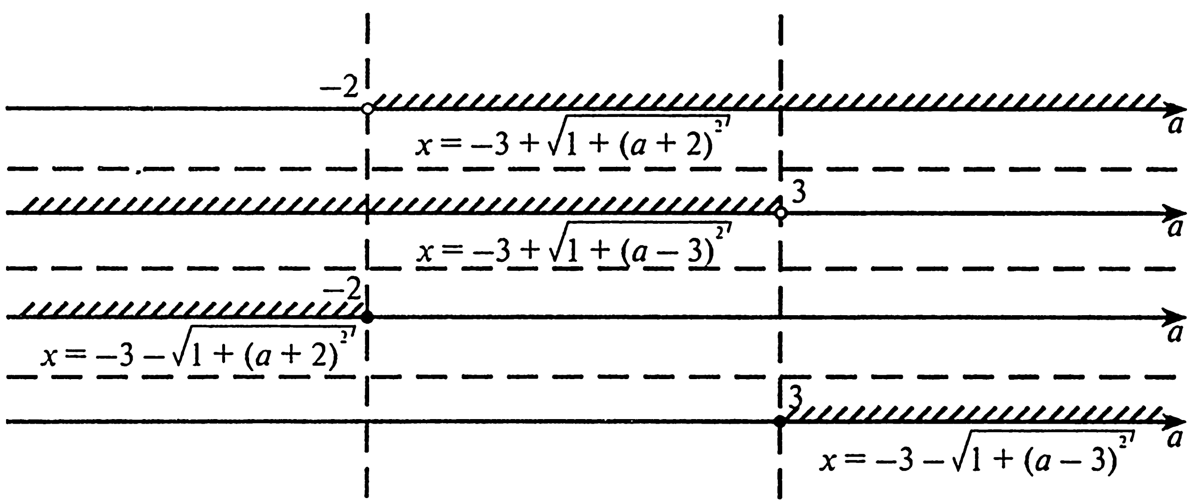
$$\text{при } a>-2 \quad x=x_1=-3+\sqrt{1+(a+2)^2};$$

$$\text{при } a\le -2 \quad x=x_2=-3-\sqrt{1+(a+2)^2};$$

$$\text{при } a<3 \quad x=x_3=-3+\sqrt{1+(a-3)^2};$$

$$\text{при } a\ge 3 \quad x=x_4=-3-\sqrt{1+(a-3)^2}.$$

Проаналізуємо отриману сукупність розв'язків по відношенню до значень параметра a:



Відповідь:

при $a\le -2$ $x\in\left\{-3-\sqrt{1+(a+2)^2};-3+\sqrt{1+(a-3)^2}\right\}$;

при $a\in(-2;3)$ $x\in\left\{-3+\sqrt{1+(a+2)^2};-3+\sqrt{1+(a-3)^2}\right\}$;

при $a\ge 3$ $x\in -3+\sqrt{1+(a+2)^2};-3-\sqrt{1+(a-3)^2}$.

Завдання 19. У (1—5) розв'язати рівняння відносно x:

1) $\dfrac{\log_{a^2\sqrt{x}}(a)}{\log_{2x}(a)}+\log_{ax}(a)\cdot\log_{\frac{1}{a}}(2x)=0$;

2) $\log_2 x+\log_a x+\log_4 x=1$;

3) $\sqrt{1+\log_x\sqrt{a^3}}\,\log_a x+1=0$;

4) $\log_{2x}(ax+1)=\dfrac{1}{2}$;

5) $9^{\lg(x-a)-\lg 2}=3^{\lg(x-1)}$.

У (6—10) знайти a, при яких рівняння має єдиний розв'язок:

6) $\log_{2x}(ax+1)=2$;

7) $\dfrac{\lg(ax)}{\lg(x+1)}=2$;

8) $\lg\left(x^2+2ax\right)-\lg(8x-6a-3)=0$, знайдіть цей розв'язок.

9) $2\ln(x+1)=\ln(-ax)$;

10) $2\ln(ax-1)=\ln(2x-1)$.

11) Знайти a, при яких для всіх $b<0$ існує розв'язок рівняння

$$a\log_{\left(1-\frac{2}{x}\right)}4=\log_4\left(1-\frac{2}{x}\right)+b,$$

що задовольняє умові $x>4$.

12) Розв'язати систему відносно x і y:

$$\begin{cases}a^{\lg x}=b^{\lg y}\\(bx)^{\lg b}=(ay)^{\lg a}\end{cases}.$$

У (13—15) розв'язати нерівність відносно x:

13) $\log_a(x-2)+\log_a x>1$;

14) $\log_a\left(1-x^2\right)\geq 1$;

15) $x^{3+\log_a x}<a^2x^2$.

У (16—18) знайти значення a, при яких нерівність виконується при всіх $x \in R$:

16) $\log_{\frac{a}{a+1}}\left(x^2+2\right)>1$;

17) $\log_{(a^2-2)}\left(\left(a^2-1\right)x^2+2x+2\right)>1$;

18) $\log_{a(a+1)}(|x|+4)>1$.

19) При яких a для всіх $x \in [1; 2]$ виконується

$$\lg^2\left(16+x^2\right)-\lg\left(4+2a^2\right)\cdot\lg\left(16+x^2\right)\le 0?$$

20) Знайти x, які задовольняють нерівностям $0{,}5<x<2{,}5$ і

$$\log_{3x-x^2}(3a-ax)<1 \text{ при всіх } a \in (0; 2).$$

21) Знайти всі натуральні значення a, при яких вираз $\dfrac{1}{x+y+3}$ має зміст для всіх $\{x; y\}$ з множини $x<0$, $y<0$ і для яких має зміст вираз $\lg(xy-a)$.

22) Знайти всі значення a при яких система

$$\begin{cases} \sin(3a-3y)+3x=0 \\ 2\log_4(a-y)+2\log_4\left(2\sqrt{y}\right)=\log_2\sqrt{y}+3\log_8(2x) \end{cases}$$

має парну кількість розв'язків.

23) Знайти всі значення a і b з множини $a>0$ і $b>0$, при яких системи

$$\begin{cases} \log_9\left(x^2\right)=b-\log_3(y) \\ (x+y)^2=a^2 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \sin(x+y)=0 \\ x^2+y^2=2x+2y+a^2 \end{cases}$$

мають однакову кількість розв'язків.

§ 20. ПАРАМЕТР У ЗАДАЧАХ НА ВИКОРИСТАННЯ ПОХІДНОЇ, НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

У цьому параграфі зібрано найбільш поширені (класичні) типи задач на використання апарату математичного аналізу, який вивчається у школі.

Перш за все, *нагадаємо основні позиції щодо дослідження властивостей функцій методами математичного аналізу.*

— **Необхідна умова диференційованості** функції $y=f(x)$ в точці x_0 є її неперервність у цій точці.

— **Похідна** $f'(x)$ **визначається** лише для внутрішніх точок області визначення $f(x)$.

— **Похідна** $f'(x_0)$ **дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної** до графіка функції $y=f(x)$ в точці диференціювання $\left(x_0; f(x_0)\right)$.

— **Рівняння дотичної до графіка функції** $y=f(x)$ **в точці** $\left(x_0; f(x_0)\right)$: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

— **Монотонність функції:**

якщо $f'(x)>0$ у кожній точці проміжку $(a;b)$, то функція $y=f(x)$ на цьому проміжку зростає.

якщо $f'(x)<0$ у кожній точці проміжку $(a;b)$, то функція $y=f(x)$ на цьому проміжку спадає.

— **Критичними точками** функції $y=f(x)$ називаються точки в яких $f'(x)=0$ або $f'(x)$ — не існує.

— **Достатня умова екстремуму функції.**

Якщо при переході через критичну точку x_0 функції $y=f(x)$ **похідна** цієї функції змінює знак **з** «+» **на** «–», то $f(x)$ в цій точці має **максимум**; якщо **похідна** змінює знак **з** «–» **на** «+», то $f(x)$ в цій точці має **мінімум**.

Якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 не змінює знака, то в точці x_0 функція екстремуму не має.

— Достатня умова екстремуму функції.

Якщо $f'(x_0)=0$ і $f''(x_0)<0$, то $(x_0; f(x_0))$ — точка максимуму.

Якщо $f'(x_0)=0$ і $f''(x_0)>0$, то $(x_0; f(x_0))$ — точка мінімуму.

— Достатня умова екстремуму функції.

Якщо $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(2k-1)}(x_0)=0$ і похідна парного ступеню $f^{(2k)}<0$, то точка $(x_0; f(x_0))$ — точка максимуму.

Якщо $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(2k-1)}(x_0)=0$ і похідна парного ступеню $f^{(2k)}>0$, то точка $(x_0; f(x_0))$ — точка мінімуму.

Якщо $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(2k)}(x_0)=0$ і похідна непарного ступеню $f^{(2k+1)}\neq 0$, то в точці x_0 функція екстремуму не має.

— Для того, щоб знайти **найменше** m та **найбільше** M **значення неперервної функції на відрізку** $[a; b]$, треба знайти всі критичні точки цієї функції, які належать $[a; b]$, і обчислити значення даної функції на кінцях відрізка $[a; b]$ та в критичних точках. Після чого вибрати з цих значень найменше m та найбільше M значення функції.

Інколи при розв'язанні задач на найбільше та найменше значення функції стають в нагоді наступні опорні факти:

— Відстань від точки $(x_0; y_0)$ **до прямої** $ax+by+c=0$ дорівнює

$$d\left((x_0; y_0)/ax+by+c=0\right)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

— Властивість суми модулів: $|x-a|+|x-b|\geq|a-b|$.

Найменше значення функції $y=|x-a|+|x-b|$ дорівнює $|a-b|$ при $x\in[\min\{a; b\}; \max\{a; b\}]$. (П о р а д а : будуйте графік функції $y=|x-a|+|x-b|$.)

Властивість двох взаємно обернених величин:

$$\left|a+\frac{1}{a}\right|\geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1/a\geq 2 \\ a+1/a\leq -2 \end{array}\right..$$

МОНОТОННІСТЬ

Приклад 1. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких функція

$$f(x)=8(2a+2)\sin x-\sin 2x-\left(16a^2+32a-10\right)x .$$

спадає на R і при цьому не має критичних точок.

Розв'язання.

$y=f(x)$ спадає на $x\in(-\infty;\infty)$, якщо

$$f'(x)=8(2a+2)\cos x-2\cos 2x-\left(16a^2+32a-10\right)<0$$

для всіх $x\in R$.

Врахуємо, що

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1$$

і позначимо через $t=\cos x\in[-1;1]$. Тоді розв'язками задачі будуть значення a при яких нерівність

$$-4t^2+16(a+1)t-\left(16a^2+32a-12\right)<0$$

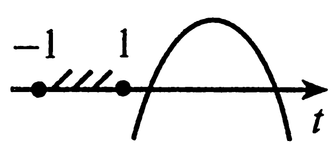
містить інтервал $t\in[-1;1]$. Останній умові відповідають такі розміщення квадратного тричлену

$$g(t)=-t^2+4(a+1)t-\left(4a^2+8a-3\right)$$

відносно числової вісі (ot):

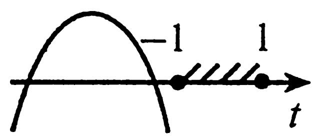
1) 

, $\dfrac{D}{4}=4(a+1)^2-\left(4a^2+8a-3\right)<0\Leftrightarrow 7<0\Leftrightarrow a\in\varnothing$;

2) 

, $\begin{cases} g(1)<0 \\ \dfrac{D}{4}\ge 0 \\ t_в>1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2a^2+2a-3>0 \\ 7>0 \\ 2(a+1)>1 \end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a\in\left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2};\infty\right) \\ a>-\dfrac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow a>\frac{-1+\sqrt{7}}{2};$$

3) 

$$\begin{cases} g(-1)<0 \\ \dfrac{D}{4}>0 \\ t_в<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2+6a+1>0 \\ 7>0 \\ 2(a+1)<-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\in\left(-\infty;\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2};\infty\right) \\ a<-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a<\frac{-3-\sqrt{7}}{2}.$$

Відповідь: $a\in\left(-\infty;\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2};\infty\right).$

Приклад 2. При яких значеннях параметра a функція

$$y=(a+2)x^3-3ax^2+9ax-2$$

спадає при всіх $x\in R$?

Розв'язання. Позначимо задану функцію через $f(x)$ і знайдемо її похідну: $f'(x)=3(a+2)x^2-6ax+9a$.

$y=f(x)$ спадає при всіх $x\in R$, якщо $f'(x)<0$ при всіх $x\in R$. Нерівність $(a+2)x^2-2ax+3a<0$ виконується для всіх $x\in(-\infty;\infty)$, лише в випадку, якому відповідає таке графічне тлумачення лівої частини нерівності:

, тобто коли $\begin{cases} a+2<0 \\ \dfrac{D}{4}<0 \end{cases}$. Маємо

$$\begin{cases} a+2<0 \\ a^2-3a(a+2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-2 \\ a-3(a+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-2 \\ a<-3 \end{cases}$$

Окремо розглянемо значення $a=-3$ при якому дискримінант $D=0$ і існує критична точка функції $f(x)$.

При $a=-3$

$$f'(x)=-3x^2+18x-27=-3(x-3)^2\le 0$$

і при переході через $x_{кр}=3$ f' не змінює знак, тобто $x=3$ — точка перегину $f(x)$ і $a=-3$ є розв'язком.

Зауважимо, що при $a=-2$

$$f'(x)=12x-18=6(2x-3),$$

при переході через $x_{кр}=-2$ f' змінює знак, тобто $x=-2$ точка екстремуму $f(x)$ і $a=-2$ не є розв'язком.

Відповідь: $a \le -3$.

КРИТИЧНІ ТОЧКИ І ЕКСТРЕМУМИ

Приклад 3. Знайти критичні точки функції

$$f(x)=(2x-1)\sqrt[4]{x-a}.$$

Розв'язання.

Маємо

$$f'(x)=2\sqrt[4]{x-a}+\frac{2x-1}{4\sqrt[4]{(x-a)^3}}=\frac{10x-8a-1}{4\sqrt[4]{(x-a)^3}}.$$

Критичні точки шукатимемо серед внутрішніх точок області визначення функції, які є коренями рівняння $f'(x)=0$, тобто з умови

$$\begin{cases}10x-8a-1=0\\ x-a>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{8a+1}{10}\\ \dfrac{8a+1}{10}>a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<\dfrac{1}{2}\\ x=0{,}8a+0{,}1.\end{cases}$$

Відповідь: при $a<\frac{1}{2}$ $x_{кр}=0{,}8a+0{,}1$; при $a \ge \frac{1}{2}$ $x_{кр} \in \varnothing$.

Приклад 4. При яких значеннях параметра a функція

$$f(x)=a\cdot 8^x+(3a+1)4^x-(9a+1)2^x+2$$

має дві критичні точки?

Розв'язання.

Маємо

$$f'(x)=a\cdot 8^x\ln 8+(3a+1)4^x\ln 4-(9a+1)2^x\ln 2.$$

Критичні точки функції $f(x)$ визначаються умовою

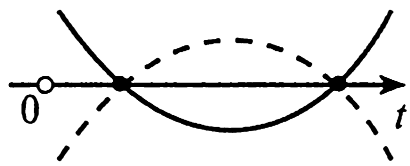
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3a\left(2^x\right)^3+2(3a+1)\left(2^x\right)^2-(9a+1)2^x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a\left(2^x\right)^2+2(3a+1)2^x-9a-1=0.$$

Позначимо $2^x \triangleq t > 0$. Тоді $f(x)$ має дві критичні точки, якщо обидва корені квадратного тричлену

$$g(t) = 3at^2 + 2(3a+1)t - 9a - 1$$

додатні. Цій умові відповідає графічна інтерпретація



Тоді (ОК-19):

$$\begin{cases} 3ag(0) > 0 \\ \dfrac{D}{4} > 0 \\ t_в > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(9a+1) < 0 \\ 36a^2 + 9a + 1 > 0 \\ -\dfrac{3a+1}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left(-\dfrac{1}{9}; 0\right) \\ a \in (-\infty; \infty) \\ a \in \left(-\dfrac{1}{3}; 0\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(-\frac{1}{9}; 0\right).$$

Відповідь: $a \in \left(-\dfrac{1}{9}; 0\right)$.

Приклад 5. При яких a функція

$$f(x) = x^3 + 3(a-7)x^2 + 3\left(a^2 - 9\right)x + 1$$

має додатну точку максимуму?

Розв'язання.

$$f' = 3x^2 + 6(a-7)x + 3\left(a^2 - 9\right).$$

Якщо отримана квадратична функція не має коренів, то $f(x)$ не має критичних точок.

Якщо $f' = 0$ має кратний корінь ($D = 0$), то цей корінь буде критичною точкою, але не буде екстремумом.

Якщо $f' = 0$ має два різні корені ($D > 0$), то екстремумом-максимумом буде менший з коренів x_1 (бо при переході через точку $x = x_1$ $f'(x)$ змінює знак з «+» на «–»).

За умовою це значення $x = x_1 > 0$, тоді обидва корені квадратичної функції $f'(x)$ додатні:

$$\begin{cases} f'(0)>0 \\ \dfrac{D}{4}>0 \\ x_в>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-9>0 \\ 9(a-7)^2-9\left(a^2-9\right)>0 \\ -(a-7)>0 \end{cases}$$

Відповідь: $a\in(-\infty;-3)\cup\left(3;\dfrac{29}{7}\right)$.

Приклад 6. При яких значеннях параметра a точки екстремуму функції

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+(2-a)x^2-2ax+3$$

належать проміжку $(-2; 3)$? Визначити види цих екстремумів.

Розв'язання.

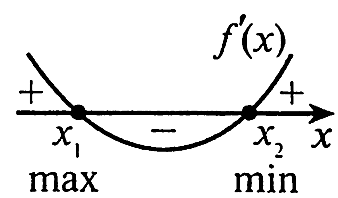
$$f'(x)=x^2+2(2-a)x-2a\triangleq\varphi(x).$$

Дискримінант цього квадратного тричлену

$$D=4\left(a^2-2a+4\right)>0$$

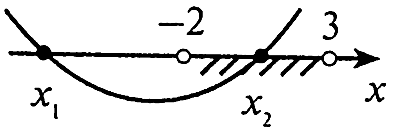
при всіх $a\in R$. Тоді корені цього тричлену x_1 і x_2, $x_1<x_2$ — критичні точки екстремуму функції $f(x)$, при тому

$$f(x_1)=f_{\max},\quad f(x_2)=f_{\min}$$

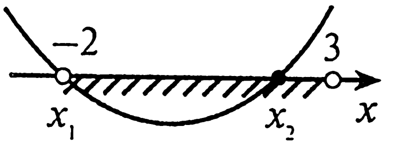


Розглянемо можливі випадки розташування коренів x_1 і x_2 квадратного тричлену $\varphi(x)$ по відношенню до інтервалу $(-2; 3)$.

1)



або



$$\begin{cases} x_2 \in (-2;3) \\ x_1 \notin (-2;3) \end{cases}$$

$$f(x_2) = f_{\min}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(-2)<0 \\ \varphi(3)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(-2)=0 \\ \varphi(3)>0 \\ x_в > -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a-4<0 \\ 21-8a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a-4=0 \\ 21-8a>0 \\ a-2>-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<2 \\ a<2\frac{5}{8} \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ 21-16>0 \\ a>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow a \le 2;$$

$\varphi(-2) = 2a-4$

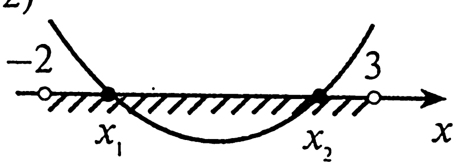
$\varphi(3) = 21-8a$

$x_в = a-2$

$\frac{D}{4} = a^2 - $ $-2a+4$;

$\frac{D}{4} > 0$ при $a \in R$.

2)



$$x_{1,2} \in (-2;3)$$

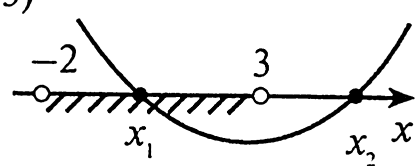
$$f(x_1) = f_{\max}$$

$$f(x_2) = f_{\min}$$

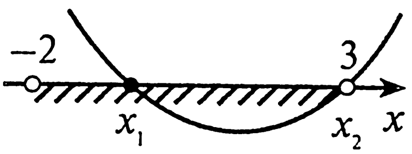
$$\begin{cases} \varphi(-2)>0 \\ \varphi(3)>0 \\ D/4>0 \\ x_в \in (-2;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-4>0 \\ 21-8a>0 \\ a-2<3 \\ a-2>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>2 \\ a<2\frac{5}{8} \\ a<5 \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(2;\ 2\frac{5}{8}\right);$$

3)



або



$$\begin{cases} x_1 \in (-2;3) \\ x_2 \notin (-2;3) \end{cases}$$

$$f(x_1) = f_{\max}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(-2)>0 \\ \varphi(3)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(3)=0 \\ \varphi(-2)>0 \\ x_в < 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a-4>0 \\ 21-8a<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 21-8a=0 \\ 2a-4>0 \\ a-2<3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>2 \\ a>2\frac{5}{8} \end{cases} \\ \begin{cases} a=2\frac{5}{8} \\ a>2 \\ \frac{5}{8}<3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \ge 2\frac{5}{8}.$$

Відповідь:

при $a \le 2$ функція має екстремум мінімум на $(-2; 3)$;

при $a \in \left(2; 2\frac{5}{8}\right)$ функція має екстремуми мінімум і максимум на $(-2; 3)$;

при $a \ge 2\frac{5}{8}$ функція має екстремум максимум на $(-2; 3)$.

ДОТИЧНА ДО КРИВОЇ

Приклад 7. При якому значенні параметра a дотична до графіка функції $f(x) = ax^2$ утворює з віссю $(0X)$ кут, який дорівнює $\frac{\pi}{3}$, і відтинає від четвертої чверті трикутник, площа якого дорівнює $\frac{8\sqrt{3}}{3}$?

Розв'язання.

Нехай $(x_0; f(x_0))$ — точка дотику. Рівняння дотичної до $y = f(x)$ у цій точці має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2ax_0(x - x_0) + ax_0^2 \Leftrightarrow y = 2ax_0x - ax_0^2.$$

За умовою

$$f'(x_0) = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

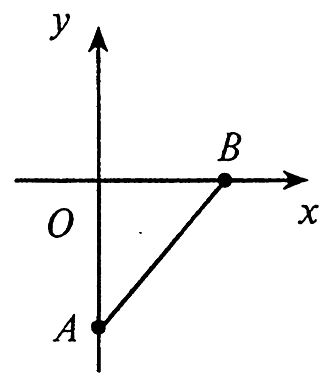
Звідки $2ax_0 = \sqrt{3}$. Тоді $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2a}$ (при умові $a \ne 0$) і рівняння дотичної має вигляд $y = \sqrt{3}x - \frac{3}{4a}$.

Точки перетину цієї прямої з осями координат $A\left(0; -\frac{3}{4a}\right)$ і $B\left(\frac{\sqrt{3}}{4a}; 0\right)$.

За умовою відрізок $[AB]$ належить четвертій чверті. Тоді $\frac{\sqrt{3}}{4a}>0$ і $a>0$.

Площа ΔAOB дорівнює

$$S=\frac{1}{2}OB\cdot|OA|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4a}\cdot\frac{3}{4a}=\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$



Звідки $(4a)^2=\frac{9}{16}$ і $a=\frac{3}{16}$ (оскільки $a>0$).

Відповідь: $a=\frac{3}{16}$.

Приклад 8. Знайти всі a, при яких хорда параболи

$$y=-a^2x^2+5ax-4$$

дотикається кривої

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

у точці $x=2$ і ділиться цією точкою навпіл.

Розв'язання.

$$f'(x)=\left.\frac{1}{(1-x)^2}\right|_{x=2}=1.$$

Тоді рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці $(2; f(2))$ має вигляд $y=x-3$.

Нехай x_1 і x_2 — абсциси кінців хорди параболи, про яку йдеться в умові. Тоді $x_{1,2}$ є коренями рівняння

$$-a^2x^2+5ax-4=x-3 \Leftrightarrow a^2x^2+(1-5a)x+1=0.$$

За теоремою Вієта

$$x_1+x_2=\frac{5a-1}{a^2}$$

при умові існування коренів $D=(1-5a)^2-4a^2\geq 0$.

За умовою $x=2$ — абсциса середини хорди, тобто

$$2=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Тоді шукані значення параметра — розв'язки системи

$$\begin{cases} D\ge 0 \\ \dfrac{5a-1}{a^2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21a^2-10a+1\ge 0 \\ 4a^2-5a+1=0 \\ a\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1.$$

Відповідь: $a=1$.

НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ

Інколи задачу на найбільше (найменше) значення можна розв'язати і без застосування похідної, спираючись лише на властивості квадратного тричлену, або графічне тлумачення умови.

Приклад 9. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2-ax+a^2-3a+4=0$$

буде найбільшою.

Розв'язання.

За теоремою Вієта маємо

$$\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_1\cdot x_2=a^2-3a+4 \\ D=a^2-4\left(a^2-3a+4\right)\ge 0 \end{cases}$$

$$D=-3a^2+12a-16\ge 0$$

$$\frac{d}{4}=36+3\cdot 16=2^2\cdot 21$$

$$a\in\left[2-2\sqrt{\frac{7}{3}};2+2\sqrt{\frac{7}{3}}\right]$$

Тоді

$$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=$$
$$=a^2-2\left(a^2-3a+4\right)=-(a-3)^2+11\le 11$$

Найбільше значення $x_1^2+x_2^2=11$ при

$$a=3;\ 3\in\left[2-2\sqrt{\frac{7}{3}};2+2\sqrt{\frac{7}{3}}\right].$$

Тоді $a=3$ є шуканим розв'язком.

Відповідь: $a=3$.

Приклад 10. Для всіх значень параметра a знайти найбільше значення функції

$$f(x) = x^4 - 2ax^2 + 3a^2$$

на відрізку $[-2; 1]$.

Розв'язання.

Позначимо $t \triangleq x^2 \geq 0$, тоді

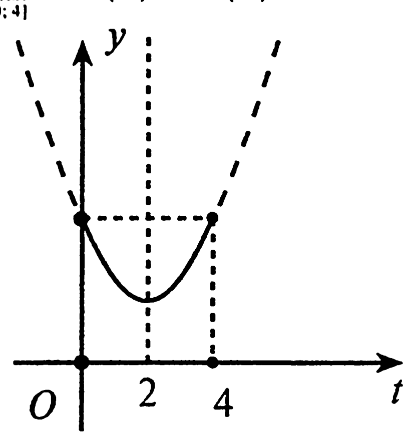
$$f(t) = t^2 - 2at + 3a^2.$$

При $x \in [-2; 1]$ t змінюється у границях $[0; 4]$.

Координата вершини квадратичної функції $f(t)$ $t_в = a$. Функція $f(t) = t^2 - 2at + 3a^2$ симетрична відносно прямої $t = t_в = a$. Тоді можливі три випадки розташування $t_в$ по відношенню до $t = 2$ — середини відрізка $[0; 4]$:

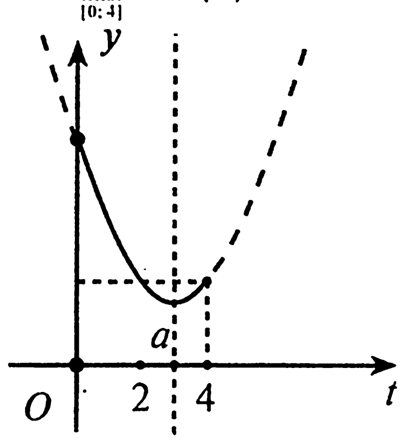
1) $t_в = a = 2$

$$\max_{[0;4]} f = f(0) = f(4) = 3a^2 = 12$$



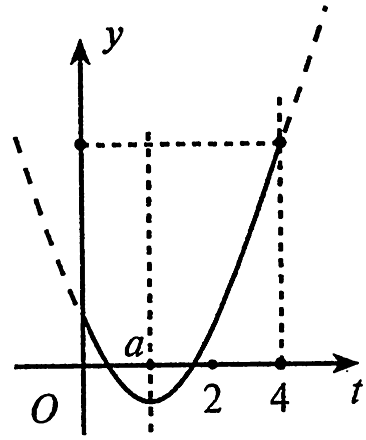
2) $t_в = a > 2$

$$\max_{[0;4]} f = f(0) = 3a^2$$



3) $t_в = a < 2$

$$\underset{[0;4]}{f_{\max}} = f(4) = 16 - 8a + 3a^2$$



Відповідь:

при $a \geq 2$ $\underset{[-2;1]}{f_{\max}}(x) = 3a^2$;

при $a < 2$ $\underset{[-2;1]}{f_{\max}}(x) = 16 - 8a + 3a^2$.

Приклад 11. Знайти найменшу відстань від точки $M(a; 0)$ до графіка функції $y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$.

Розв'язання.

Область визначення функції $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$ $x \in R$. Квадрат відстані від точки $M(a; 0)$ до $A(x; f(x))$ дорівнює

$$MA^2 = (a - x)^2 + f^2(x) = a^2 - 2ax + x^2 + x^2 + 6x + 10 =$$
$$= 2x^2 + (6 - 2a)x + a^2 + 10 \triangleq \varphi(x).$$

Треба знайти найменше значення функції

$$\varphi(x) = 2x^2 + (6 - 2a)x + a^2 + 10,$$

визначеної при всіх $x \in R$.

$\varphi(x)$ — квадратний тричлен відносно x, його найменшим значенням буде ордината вершини

$$\varphi_{\min} = \varphi\left(\frac{2a - 6}{4}\right) = 0{,}5a^2 + 3a + 5{,}5.$$

Відповідь: $\sqrt{0{,}5a^2 + 3a + 5{,}5}$ при $a \in R$.

Приклад 12. Для всіх значень параметра a знайти найменшу відстань від точки $M(a;0)$ до графіка функції

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{5x},\ x\ge 0\\ -\sqrt{|x|};\ x<0.\end{cases}$$

Розв'язання.

1) При $x>0$ квадрат відстані між точками $M(a;0)$ і $A(x;f(x))$ дорівнює

$$d(x)=(x-a)^2+f^2(x)=(x-a)^2+5x.$$

Знайдемо критичні точки функції $d(x)$, які належать інтервалу $(0;\infty)$:

$$d'(x)=2(x-a)+5=0 \text{ при } x_1=a-2{,}5>0, \text{ якщо } a>2{,}5;$$

$$d(x_1)=2{,}5^2+5a-12{,}5=5a-3{,}75.$$

2) При $x<0$ квадрат відстані між точками $M(a;0)$ і $A(x;f(x))$ дорівнює

$$d(x)=(x-a)^2+f^2(x)=(x-a)^2+|x|=(x-a)^2-x.$$

Знайдемо критичні точки функції $d(x)$, які належать інтервалу $(-\infty;0)$:

$$d'(x)=2(x-a)-1=0 \text{ при } x_2=a+0{,}5<0, \text{ якщо } a<-0{,}5.$$

Порівняємо значення $d(x_1)$, $d(x_2)$ і $d(0)=a^2$:

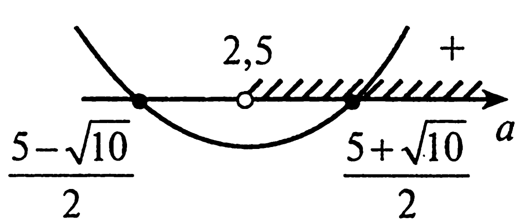
<u>Якщо $a>2{,}5$:</u>

$$a^2\vee 5a-3{,}75 \Leftrightarrow a^2-5a+3{,}75\vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(a-\frac{5+\sqrt{10}}{2}\right)\left(a-\frac{5-\sqrt{10}}{2}\right)\vee 0:$$

$$D=25-15=10$$

$$a_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{10}}{2}$$



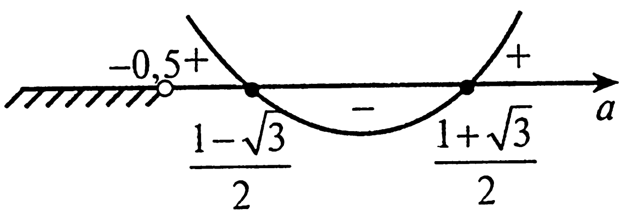
Маємо:

при $a \in \left(2{,}5;\, 2{,}5+0{,}5\sqrt{10}\right]$ $d_{\min} = \sqrt{a^2} = a$;

при $a \in \left(2{,}5+0{,}5\sqrt{10};\, \infty\right)$ $d_{\min} = \sqrt{5a-3{,}75}$.

Якщо $a < -0{,}5$:

$a^2 \vee a+0{,}5 \Leftrightarrow a^2 - a - 0{,}5 \vee 0$:



$D = 1+2 = 3$

$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Маємо:

при $a < -0{,}5$ $d_{\min} = \sqrt{a+0{,}5}$;

при $a \in [-0{,}5;\, 2{,}5]$ $d_{\min} = d(0) = \sqrt{a^2} = |a|$.

Відповідь:

при $a < -0{,}5$ $d_{\min} = \sqrt{a+0{,}5}$;

при $a \in [-0{,}5;\, 2{,}5]$ $d_{\min} = d(0) = \sqrt{a^2} = |a|$;

при $a \in \left(2{,}5;\, 2{,}5+0{,}5\sqrt{10}\right]$ $d_{\min} = \sqrt{a^2} = a$;

при $a > 2{,}5+0{,}5\sqrt{10}$ $d_{\min} = \sqrt{5a-3{,}75}$.

Приклад 13. Для всіх значень параметра a знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 2\sin a \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x, \quad x \in R.$$

Розв'язання.

Врахуємо, що

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

і позначимо через

$$t \triangleq \cos x \in [-1;\, 1].$$

Тоді

$$f(t) = -t^2 + 2\sin a \cdot t + \frac{1}{2}$$

і задачу зведено до визначення найбільшого M та найменшого m значень функції $f(t)$ на відрізку $[-1; 1]$.

$$f'(t) = -2t + 2\sin a = 0 \text{ при } t_{кр} = \sin a \in (-1; 1).$$

Порівняємо значення функції $f(t)$ у точках $t \in \{t_{кр}; \pm 1\}$:

$$f(t_{кр}) = \sin^2 a + \frac{1}{2}; \quad f(1) = 2\sin a - \frac{1}{2}; \quad f(-1) = -2\sin a - \frac{1}{2}.$$

Для цього побудуємо графіки функцій:

(1) $y = g_1(z) = z^2 + \frac{1}{2}$

(2) $y = g_2(z) = 2z - \frac{1}{2}$

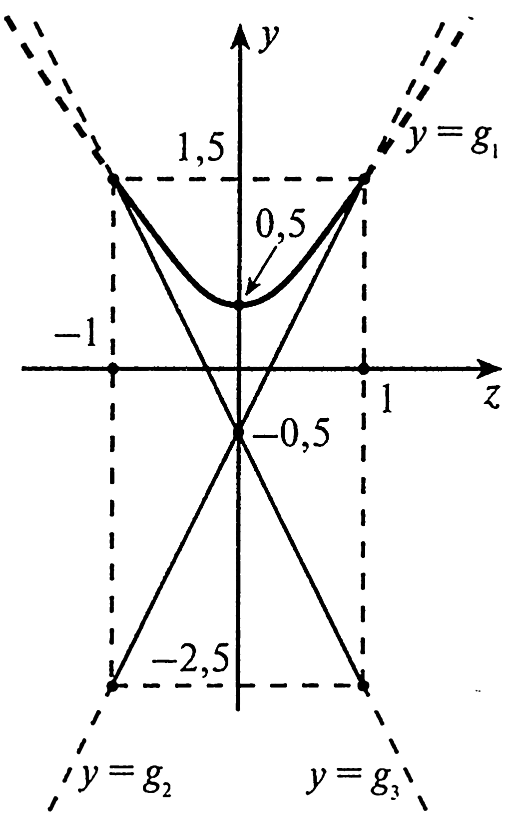
(3) $y = g_3(z) = -2z - \frac{1}{2}$

на відрізку $z \in [-1; 1]$.

Точки перетину параболи $y = g_1(z)$ з прямими $y = g_{2,3}(z)$:

$g_1(z) = g_2(z)$ при $z = 1$;

$g_1(z) = g_3(z)$ при $z = -1$



$g_1(\pm 1) = g_2(1) = g_3(-1) = 1{,}5$;

$g_2(-1) = g_3(1) = -2{,}5$;

Зауважимо, що значення $t = \pm 1$ включено до графічного аналізу, бо

при $\sin a = 1$

$$f(1) = 1{,}5 = \lim_{\sin a \to 1} f(t_{кр});$$

при $\sin a = -1$

$$f(-1) = 1{,}5 = \lim_{\sin a \to -1} f(t_{кр}).$$

Тоді маємо:

при $z=\sin a\geq 0$ $\;m=g_3\leq g_2\leq g_1=M$;

при $z=\sin a\leq 0$ $\;m=g_2<g_3\leq g_1=M$;

Відповідь:

при $a\in[2\pi n;\pi+2\pi n]$ $\;n\in Z$

$$m=-2\sin a-\frac{1}{2},\;\; M=\sin^2 a+\frac{1}{2};$$

при $a\in[-\pi+2\pi n;2\pi n]$, $n\in Z$

$$m=2\sin a-\frac{1}{2},\;\; M=\sin^2 a+\frac{1}{2};$$

Приклад 14. Знайти всі значення параметра a, при яких найменше значення функції

$$f(x)=-x^4+\frac{2ax^3}{9}+\frac{a^2x^2}{3}$$

на відрізку $[-1;0]$ не перевищує 1 і досягається на лівому кінці цього відрізка.

Розв'язання.

$$f'(x)=-4x^3+\frac{2ax^2}{3}+\frac{2a^2x}{3}=-4x\left(x+\frac{a}{3}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right).$$

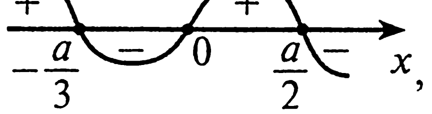
1) **Якщо** $a=0$.

$f(x)=-x^4$ і $f_{\substack{\min\\[-1;0]}}(x)=f(-1)=-1$ і $a=0$ є розв'язком.

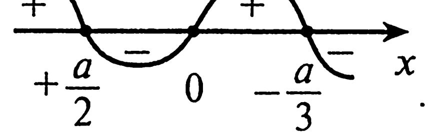
2) **Якщо** $a\neq 0$.

Проаналізуємо зміну знака похідної:

при $a>0$ $\qquad\qquad\qquad$ *при* $a<0$



,



.

Маємо $x=-\frac{a}{3}$ і $x=\frac{a}{2}$ — точки максимуму $f(x)$, а $x=0$ — точка мінімуму.

Тоді достатньо порівняти значення $f(-1)$ і $f(0)$:

За умовою

$$f(-1)\le f(0) \Leftrightarrow -1-\frac{2a}{9}+\frac{a^2}{3}\le 0 \Leftrightarrow a\in\left(\frac{1-\sqrt{28}}{3};\frac{1+\sqrt{28}}{3}\right).$$

При тому умова $f(-1)\le 1$ виконується, бо $f(-1)\le f(0)=0$.

Відповідь: $a\in\left(\frac{1-2\sqrt{7}}{3};\frac{1+2\sqrt{7}}{3}\right)$.

Приклад 15. При яких значеннях параметра a функція

$$F(x)=f(x)+|x-a|,\quad x\in R$$

набуває найменшого значення, якщо

$$f(x)=\max_{t\in[-1;\,1]}\left(t^2-2tx+x^2+x\right).$$

Розв'язання.

I. I.1) Знайдемо найбільше значення функції

$$\varphi(t)=t^2-2xt+x^2+x$$

на інтервалі $[-1;1]$. $\varphi(t)$ — квадратична функція, гілки якої направлено вгору. Вісь її симетрії — пряма $t=t_в=x$.

Серединою відрізка $[-1;1]$ є точка $\{0\}$. Тоді

при $t_в=x<0$ $\varphi_{\max\limits_{[-1;1]}}=\varphi(1)=x^2-x+1;$

при $t_в=x=0$ $\varphi_{\max\limits_{[-1;1]}}=\varphi(1)=\varphi(-1)=1;$

при $t_в=x>0$ $\varphi_{\max\limits_{[-1;1]}}=\varphi(-1)=x^2+3x+1.$

I.2) Маємо

при $x\le 0$ $F(x)=x^2-x+1+|x-a|$;

при $x\ge 0$ $F(x)=x^2+3x+1+|x-a|$.

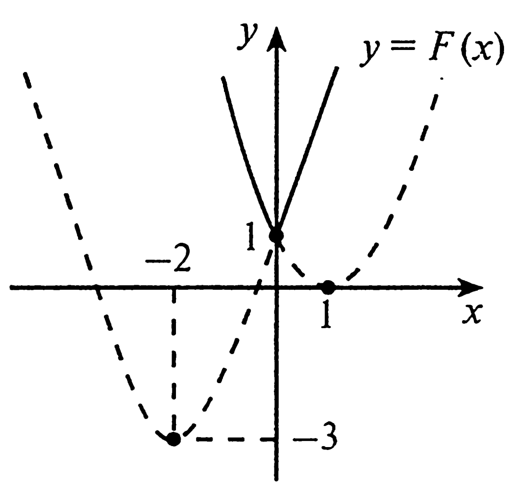
II. II.1) <u>Якщо $a=0$.</u>

$F(x)=(x-1)^2$ при $x\le 0$;

$F(x)=(x+2)^2-3$ при $x\ge 0$.

Тоді при $a=0$

$F_{\min}(x)=F(0)=1.$



II.2) <u>Якщо $a > 0$.</u>

при $x \le 0$ $F(x) = x^2 - x + 1 - x + a = (x-1)^2 + a$; (1)

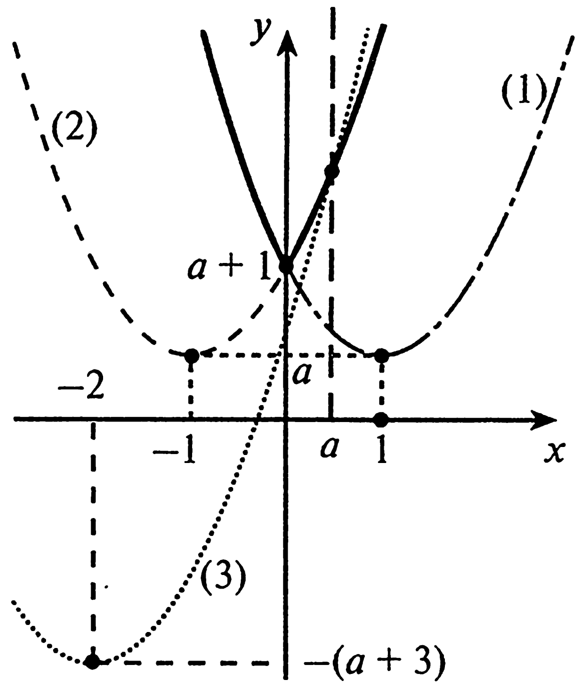
при $x \in [0; a]$ $F(x) = x^2 + 3x + 1 - x + a = (x+1)^2 + a$; (2)

при $x \ge a$ $F(x) = x^2 + 3x + 1 + x - a = (x+2)^2 - (a+3)$. (3)

Графіком функції $y = F(x)$ будуть відповідні частки парабол (1), (2) і (3):

При $x > 0$ $(x+1)^2 + a > (x-1)^2 + a$, і точка перетину графіків (2) і (3) розташована вище $y = a + 1$.

Тоді при $a > 0$ $F_{\min}(x) = F(0) = a + 1$.



II.3) <u>Якщо $a < 0$.</u>

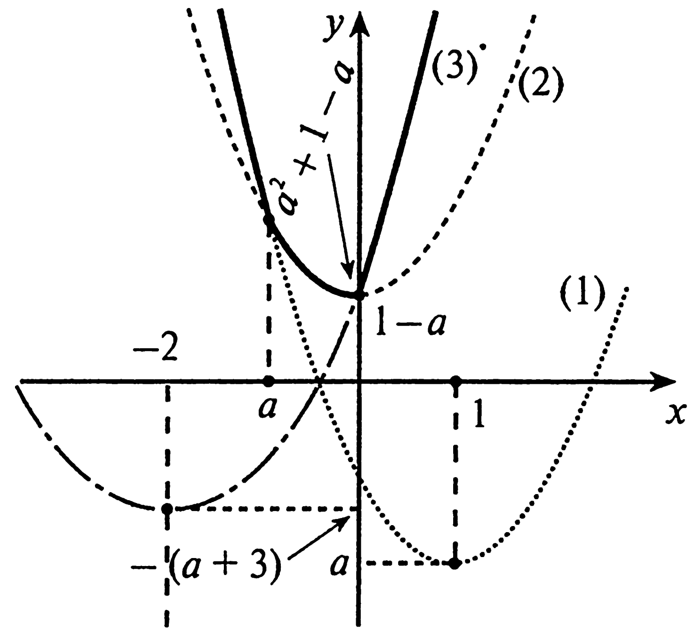
при $x \le a$ $F(x) = x^2 - x + 1 - x + a = (x-1)^2 + a$; (1)

при $x \in [a; 0]$ $F(x) = x^2 - x + 1 + x - a = x^2 + 1 - a$; (2)

при $x \ge 0$ $F(x) = x^2 + 3x + 1 + x - a = (x+2)^2 - (a+3)$. (3)

Вершина параболи (2) має координати $(0; 1-a)$ і розташована завжди нижче точки $(a; a^2 + 1 - a)$.

Тоді при $a < 0$ $F_{\min}(x) = F(0) = 1 - a$.



Відповідь: при $a \geq 0$ $F_{\min}(x) = a + 1$; при $a < 0$ $F_{\min}(x) = 1 - a$.

Приклад 16. Знайти всі значення параметрів m і p, для яких мінімальне значення функції

$$f(x) = (x-1)^8 (p-1)\sqrt{4-p} + x\sin\left(\frac{\pi p}{2}\right) +$$

$$+\left|\operatorname{tg}\frac{\pi m}{2}\right| \cdot (m+3)(2p-m) + 3$$

не менше 3 і досягається при $x = 1$.

Розв'язання.

Область визначення D: $\begin{cases} p \leq 4 \\ \dfrac{\pi m}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi t. \end{cases}$

1) Точка $(1;\, f(1))$ є точкою мінімуму при умові

$$\begin{cases} f'(1) = f''(1) = \ldots = f^{(\mathrm{VII})}(1) = 0 \\ f^{(\mathrm{VIII})}(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{\pi p}{2} = 0 \\ p - 1 > 0 \\ 4 - p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2k,\ k \in Z \\ p \in (1;\, 4) \end{cases} \Leftrightarrow\ p = 2.$$

2) За умовою мінімальне значення функції $f(1)\ge 3$. Маємо

$$\begin{cases} f(1)\ge 3 \\ p=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\operatorname{tg}\frac{\pi m}{2}\right|(m+3)(4-m)+3\ge 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{\pi m}{2}=0 \\ \begin{cases} (m+3)(4-m)\ge 0 \\ \frac{\pi m}{2}\ne\frac{\pi}{2}+\pi t,\ t\in Z \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2n,\ n\in Z \\ \begin{cases} m\in[-3;4] \\ m\ne 1+2t,\ t\in Z \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2n,\ n\in Z \\ m\in(-3;-1)\cup(-1;1)\cup(1;3)\cup(3;4] \end{array}\right..$$

3) Розглянемо випадок $p=4\in D$. Маємо

$$f(x)=\left|\operatorname{tg}\frac{\pi m}{2}\right|\cdot(m+3)(8-m)+3=\text{const}\ge 3$$

при умові

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{\pi m}{2}=0 \\ \begin{cases} (m+3)(8-m)\ge 0 \\ \frac{\pi m}{2}\ne\frac{\pi}{2}+\pi t,\ t\in Z \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} m=2n,\ n\in Z \\ m\in[-3;8] \\ m\ne 2t+1,\ t\in Z \end{cases}.$$

4) Зауважимо, що при $p=1$ $f=x+\text{const}$ і не має мінімуму.

Відповідь:

$$\begin{cases} p=2 \\ m\in\{2n;(-3;4]\},\ n\in Z \\ m\ne 2t+1,\ t\in Z \end{cases} \text{ або } \begin{cases} p=4 \\ m\in\{2n;(-3;8]\},\ n\in Z \\ m\ne 2t+1,\ t\in Z. \end{cases}$$

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ

Приклад 17. Знайти координати точки, що належить графіку функції $y=1-\sin x$ при $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ і найменш віддалена від прямої $x-\sqrt{2}y-5=0$.

Розв'язання.

Координати точки M, що належить графіку заданої функції дорівнюють $(x_0; 1-\sin x_0)$.

Тоді відстань цієї точки до прямої $x-\sqrt{2}y-5=0$ дорівнює

$$d\left((x_0;1-\sin x_0)/x-\sqrt{2}y-5=0\right)=\frac{\left|x_0\cdot 1+(1-\sin x_0)\left(-\sqrt{2}\right)-5\right|}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\left|x_0+\sqrt{2}\sin x_0-\sqrt{2}-5\right|}{\sqrt{3}}=\frac{\left|\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin x_0+5-x_0\right|}{\sqrt{3}}.$$

За умовою $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, тоді

$$5-x_0>0;\ \sqrt{2}-\sqrt{2}\sin x_0=\sqrt{2}(1-\sin x_0)\geq 0$$

$$\text{і } d(x_0)=\frac{5+\sqrt{2}-x_0-\sqrt{2}\sin x_0}{\sqrt{3}}.$$

Знайдемо найменше значення функції $d(x_0)$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$:

$$d'=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-1-\sqrt{2}\cos x_0\right)=0 \text{ при } \cos x_0=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{cases}\cos x_0=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ x_0\in\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow x_0=\frac{3\pi}{4} \text{ — критична точка.}$$

При $x=\frac{3\pi}{4}$ $d''=\sqrt{2}\sin x_0\Big|_{x=\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}>0$, тоді $d\left(\frac{3\pi}{4}\right)=d_{\min}$.

Маємо $1-\sin x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і координати шуканої точки $\left(\frac{3\pi}{4};1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Зауважимо, що цього висновку можна прийти порівнянням значень функції $d(x_0)$ у точках $\left\{\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Відповідь: $\left(\frac{3\pi}{4};1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Приклад 18. Знайти всі значення параметра m, при кожному з яких відстань d від центра заданого кола

$$y^2+x^2-2(m-4)x-2(m+3)y=16 \qquad (1)$$

до дотичної, проведеної до кривої

$$\cdot f(x)=x^2+4x-5 \qquad (2)$$

перпендикулярно прямій $2y+x-6=0$, менша за $\sqrt{5}$.

Розв'язання.

$$(1)\Leftrightarrow (y-(m+3))^2+(x-(m-4))^2=16+(m-4)^2+(m+3)^2.$$

Тоді центром заданого кола є точка $O(m-4;\, m+3)$.

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої (2) у точці $(x_0;\, f(x_0))$ дорівнює

$$f'(x_0)=2x_0+4=-\frac{1}{k_1},$$

де k_1 — кутовий коефіцієнт прямої

$$2y+x-6=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+3,\ \ k_1=-\frac{1}{2}.$$

Маємо

$$2x_0+4=2 \Leftrightarrow x_0=-1.$$

Рівняння шуканої дотичної

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow y=2(x+1)+1-4-5 \Leftrightarrow y=2x-6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x-y-6=0.$$

Як відомо, відстань від точки $A(x_a;\, y_a)$ до прямої $ax+by+c=0$ дорівнює

$$d=\frac{|x_a\cdot a+y_a\cdot b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тоді

$$d\big(((m-4);(m+3))/2x-y-6=0\big)=\frac{|2(m-4)-(m+3)-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}<\sqrt{5}.$$

Розв'язком задачі є розв'язок останньої нерівності:

$$\frac{|m-17|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5} \Leftrightarrow |m-17| < 5 \Leftrightarrow m \in (17-5; 17+5).$$

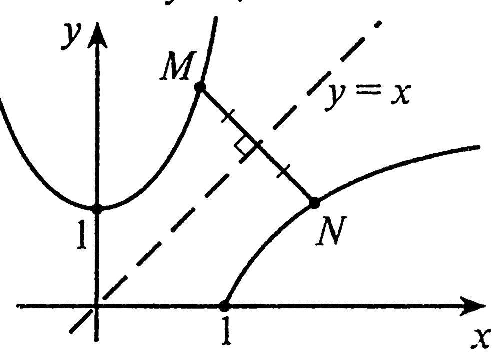
Відповідь: $m \in (12; 22)$.

Приклад 19. Знайти найменшу відстань між точками M і N, які лежать відповідно на кривих $y = x^2 + 1$ і $y = \sqrt{x-1}$.

Розв'язання.

Позначимо

$$f(x) \triangleq x^2 + 1, \; \varphi(x) \triangleq \sqrt{x-1}.$$



Ці функції є оберненими, і їхні графіки симетричні відносно прямої $y = x$.

Тоді точки M і N теж симетричні відносно прямої $y = x$, і

$$|MN| = 2d\left(M\left(x_0; x_0^2 + 1\right) / x - y = 0\right) = 2\frac{\left|x_0 \cdot 1 - \left(x_0^2 + 1\right)\right|}{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\frac{\left|x_0^2 - x_0 + 1\right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(x_0^2 - x_0 + 1\right)$$

($x_0^2 - x_0 + 1 > 0$, як неповний квадрат суми двох чисел).

Проаналізуємо функцію

$$g(x_0) = x_0^2 - x_0 + 1$$

на найменше значення. Це квадратний тричлен, гілки якого спрямлені вгору. Тоді його найменшим значенням буде ордината його вершини. Тобто шукане

$$x_0 = x_в = \frac{1}{2}$$

і

$$|MN|_{\min} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Відповідь: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

ВЛАСТИВІСТЬ СУМИ МОДУЛІВ*

Приклад 20. При яких значеннях x функція

$$f(x)=|2\sin x-1|+2\left|\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|-\sqrt{3}$$

досягає найменшого значення? Знайти це значення функції.

Розв'язання.

Використаємо властивість суми модулів (див. ОК-22):

$$\varphi(t)\triangleq|t-a|+|t-b|\geq|a-b|.$$

При тому найменшого значення $\varphi(t)_{\min}=|a-b|$ функція $\varphi(t)$ досягає при $t\in\left[\min\{a;b\};\max\{a;b\}\right]$ (див. далі графік функції $y=\varphi(t)$).

Задана функція

$$f(x)=|2\sin x-1|+\left|2\sin x+\sqrt{3}\right|-\sqrt{3}$$

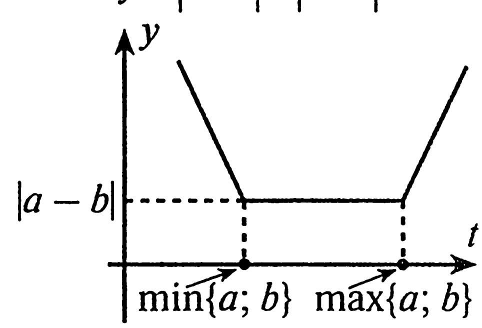
досягає найменшого значення (див. ОК-22)

$$f_{\min}=\left|1-(-\sqrt{3})\right|-\sqrt{3}=1$$

при умові

$$2\sin x\in\left[-\sqrt{3};1\right]\Leftrightarrow\sin x\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right]\Leftrightarrow$$

$y=|t-a|+|t-b|$



$$x\in\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right],n\in Z.$$

Відповідь:

$f_{\min}=1$ при $x\in\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right],n\in Z$.

Приклад 21. Знайти всі значення параметра a, при яких плоска фігура, що задається рівнянням

$$|x-6|+|x-\sin a|+|y-3|+|y-\sin a|=9-2\sin a \qquad (1)$$

має найбільший периметр.

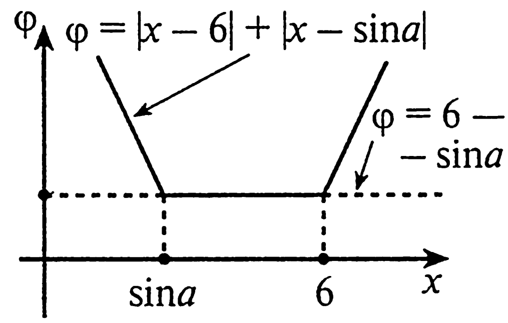
* Детально це питання розглядається у [6].

Розв'язання.

За властивістю функції $\varphi(x)=|x-a|+|x-b|\geq|a-b|$ (див. ОК-22) маємо, що

$|x-6|+|x-\sin a|\geq|6-\sin a|=6-\sin a$;

$|y-3|+|y-\sin a|\geq|3-\sin a|=3-\sin a$,



і ліва частина рівняння (1) не менша за

$$(6-\sin a)+(3-\sin a)=9-2\sin a,$$

тобто правої частини (1). Тоді (1) виконується для всіх

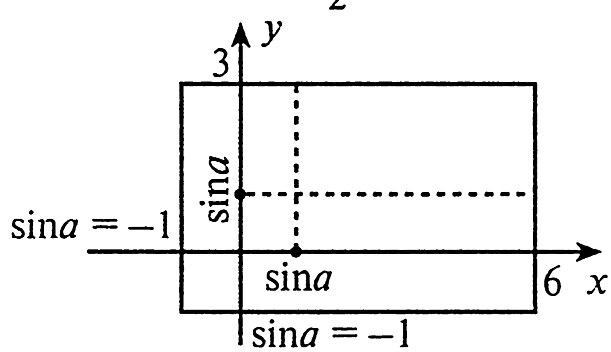
$$x\in[\sin a;6] \text{ і } y\in[\sin a;3].$$

У координатній площині (XOY) маємо прямокутник, периметр якого

$$P=2(6-\sin a)+2(3-\sin a)=2(9-\sin a)\leq 20.$$

$P=P_{\max}=20$, при умові

$$\sin a=-1 \Leftrightarrow a=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$



Відповідь: $a=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

Завдання 20.

1) При яких значеннях параметра a функція

$$f(x)=x^3-3(a-1)x^2+3(a-1)x-27$$

зростає при всіх $x\in R$?

2) При яких значеннях параметра a функція

$$f(x)=\frac{a^2-1}{3}x^3-(a-1)x^2+2x+1$$

зростає при всіх $x \in R$?

3) При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = 6ax - a\sin 6x - 4x - \cos 6x$$

зростає при всіх $x \in R$ і не має критичних точок?

4) При яких значеннях a функція

$$f(x) = ax^2 + \frac{2a^2 - 81}{2}x - 12$$

має максимум в точці $x = \frac{9}{4}$?

5) При яких значеннях a і b всі екстремуми функції

$$f(x) = \frac{5a^2}{3}x^3 + 2ax^2 - 9x + b$$

додатні і максимум міститься у точці $x_0 = -\frac{5}{9}$?

6) Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 2ax + 3a^2 + 2a + 2 = 0$ найменша.

7) При яких значеннях a і b всі екстремуми функції

$$f(x) = a^2x^3 + ax^2 - x + b$$

від'ємні і максимум знаходиться в точці $x_0 = -1$?

8) При яких значеннях a точки екстремумів функції

$$f(x) = 8x^3 - 3(3a + 1)x^2 - 6(a - 2)x + 5$$

належать проміжку $(0; \infty)$?

9) Знайти найбільше значення функції

$$f(x) = x^4 - 6bx^2 + b^2$$

на відрізку $x \in [-2; 1]$.

10) Знайти найбільше значення функції

$$f(x) = \frac{1}{2bx^2 - x^4 - 3b^2}$$

на відрізку $[-2; 1]$.

11) Знайти найменше значення функції

$$y = (a^2 + 2)|\sin x| + (a^2 - 3a + 5)|\cos x|$$

12) Знайти всі значення a, при яких найменше значення функції

$$f(x) = ax + |x^2 - 4x + 3|$$

більше одиниці.

13) Знайти всі значення параметрів m і p, для яких мінімальне значення функції

$$f(x)=(x-1)^4(p-1)\sqrt{5-p}+x\cos\left(\frac{\pi p}{4}\right)+\left|\operatorname{ctg}(2\pi m)\right|(m+1)(1-mp)+1$$

не менше 1 і досягається при $x=1$.

14) При яких значеннях a функція

$$f(x)=\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}x+a^2\right)^3\operatorname{tg}x$$

досягає найменшого значення на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ у точці $x=\frac{\pi}{3}$?

15) Знайти всі значення a, при яких функція

$$f(x)=a8^x-(3a-2)4^x+3(3a-2)2^x$$

не має екстремумів.

16) При яких значеннях параметра a функція

$$f(x)=x^3-3ax^2+3\left(a^2-1\right)x+1$$

не має точок екстремуму поза відрізком $[-2;4]$?

17) При яких значеннях параметрів a і b на кривій

$$y=ax^2+bx+a(a-b)$$

можна знайти точку, дотична у якій до цієї кривої проходить через початок координат. Записати координати цієї точки.

18) Знайти всі значення параметра m, при кожному з яких відстань d від центра кола

$$x^2+y^2-2(m+1)x+2(4-m)y-25=0$$

до дотичної, проведеної до кривої

$$y=-x^2+3x+1$$

паралельно прямій

$$y+x-10=0,$$

більша $\sqrt{20}$.

19) Записати рівняння кола найменшого радіусу, яке дотикається параболи $y=-x^2-2$ і прямої

$$y-2-x=0.$$

20) Знайти координати точки M, що лежить на графіку функції $y=1+\cos x$ при $0\le x\le\pi$ і найменш віддаленої від прямої

$$x\sqrt{3}+2y+4=0.$$

21) Для всіх a знайти найменшу відстань від точки $M(a;0)$ до графіка функції

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{3x} \text{ при } x\geq 0\\ \sqrt{|x|} \text{ при } x<0.\end{cases}$$

22) Знайти найменше значення функції

$$f(x)=|4\cos x-1|+4\left|\sin^2 x-\frac{1}{6}\right|.$$

При яких значеннях x $f(x)$ досягає цього значення?

23) Знайти всі значення параметра a, при яких плоска фігура, що задається рівнянням

$$|x+7|+|y+3|+|x+\cos a|+|y+\cos a|=10-2\cos a$$

має найбільшу площу.

§ 21. ПРО ДЕЯКІ ЗАДАЧІ, У ЯКИХ ПОТРІБНО ЗНАЙТИ НАЙБІЛЬШЕ АБО НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ВИРАЗІВ

В окрему групу можна виділити задачі, для розв'язання яких необхідно знайти певний вираз і визначити при яких значеннях деякої величини він досягає найбільшого або найменшого значення. Саме про такі задачі йде мова у цьому параграфі.

НЕОБХІДНА І ДОСТАТНЯ УМОВА ЕКСТРЕМУМУ

Приклад 1. В арифметичній прогресії $a_3=-1$. При якому значенні різниці прогресії $d<0$ добуток $a_2\cdot a_4\cdot a_7$ буде найменшим?

Розв'язання.

За умовою задачі $a_3=a_1+2d=-1$ і $a_1=-1-2d$;

$$a_2\cdot a_4\cdot a_7=(a_1+d)(a_1+3d)(a_1+6d)\Big|_{a_1=-1-2d}=-\left(d^2-1\right)(4d-1).$$

Позначимо отриманий вираз через $f(d)$ і проаналізуємо його на найменше значення на інтервалі $(-\infty;0)$. Знайдемо похідну функції $f(d)$:

$$f'(d)=-2d(4d-1)-\left(d^2-1\right)\cdot 4=-2\left(6d^2-d-2\right)=$$

$$=-2\cdot 6\left(d-\frac{2}{3}\right)\left(d+\frac{1}{2}\right).$$

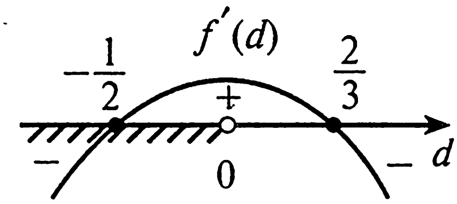
$d=-\dfrac{1}{2}$ — критична точка, при переході через яку $f'(d)$ змінює знак з «–» на «+», отже це точка мінімуму функції $f(d)$.

Відповідь: $d=-\dfrac{1}{2}$.

$$D=1+48=49$$

$$d_1=\frac{1+7}{12}=\frac{2}{3}\notin(-\infty;0)$$

$$d_2=\frac{1-7}{12}=-\frac{1}{2}\in(-\infty;0)$$

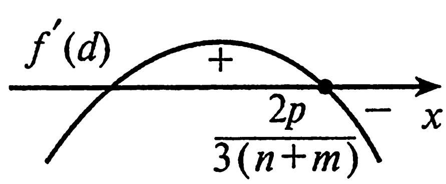


Приклад 2. Додатне число p розбити на три додатних доданки так, щоб два з них відносились як $n:m$, а добуток цих доданків був би найбільшим.

Розв'язання.

За умовою $p = nx + mx + (p - nx - mx)$. Добуток цих трьох доданків позначимо через $f(x) = nx \cdot mx \cdot (p - nx - mx)$. Проаналізуємо функцію $f(x)$ на найбільше значення на інтервалі $x \in [0;\, p]$:

$$f'(x) = mnx(2p - 3(n+m)x) = 0 \text{ при } x \in \left\{0; \frac{2p}{3(n+m)}\right\}.$$



При переході через точку $x = \dfrac{2p}{3(n+m)}$ $f'(x)$ змінює знак з «+» на «–». Тоді це точка максимуму, і число p треба розбити на доданки наступним чином:

$$p = \frac{2pn}{3(n+m)} + \frac{2pm}{3(n+m)} + \left(p - \frac{2p(n+m)}{3(n+m)}\right) =$$

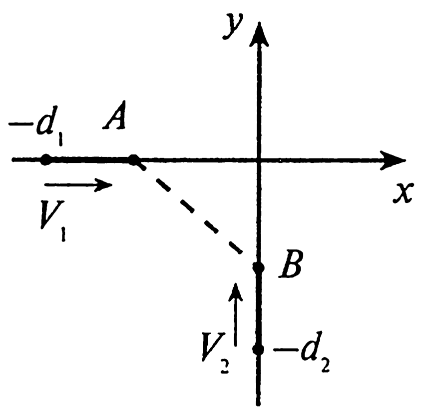
$$= \frac{2pn}{3(n+m)} + \frac{2pm}{3(n+m)} + \frac{1}{3}p.$$

Відповідь: $\dfrac{2pn}{3(n+m)} + \dfrac{2pm}{3(n+m)} + \dfrac{1}{3}p.$

Приклад 3. По взаємно перпендикулярних дорогах в напрямку до перехрестя рухаються два автомобілі із швидкостями v_1 і v_2. Знайти момент часу в процесі руху автомобілів, коли відстань між ними буде мінімальною, якщо в початковий момент часу відстані від автомашин до перехрестя дорівнювали d_1 і d_2 відповідно.

Розв'язання.

Представимо напрямки руху першого і другого автомобілів відповідно, як вісі $(0X)$ і $(0Y)$ координатної площини, а перехрестя як початок координат.



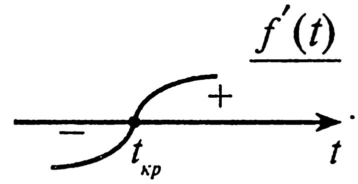
Тоді в початковий момент часу перший автомобіль знаходився у точці $A_0(-d_1;0)$, а другий у $B_0(-d_2;0)$. Через t годин перший опиниться у точці $A(-d_1+v_1t;0)$, а другий у точці $B(0;-d_2+v_2t)$. Відстань між автомобілями в момент часу t дорівнює довжині відрізка AB.

$$AB^2=(-d_2+v_2t)^2+(-d_1+v_1t)^2 \triangleq f(t).$$

Проаналізуємо отриману функцію $f(t)$ на мінімальне значення:

$$f'(t)=(v_2t-d_2)\cdot v_2+(v_1t-d_1)\cdot v_1=(v_1^2+v_2^2)t-(d_1v_1+d_2v_2);$$

$$t_{кр}=\frac{d_1v_1+d_2v_2}{v_1^2+v_2^2};$$



Тоді

$$f\left(\frac{d_1v_1+d_2v_2}{v_1^2+v_2^2}\right)=f_{\min}.$$

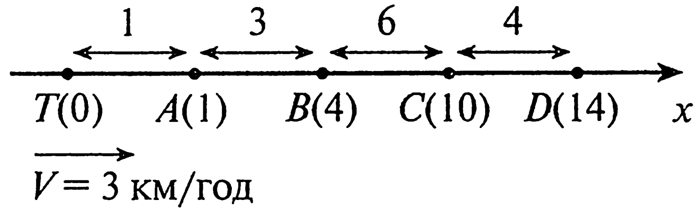
Відповідь: $t=\dfrac{d_1v_1+d_2v_2}{v_1^2+v_2^2}$.

ГРАФІЧНЕ ТЛУМАЧЕННЯ ВИРАЗУ

Приклад 4. Вздовж прямолінійної дороги послідовно розміщено населені пункти A, B, C і D. Причому $AB=3$ км, $BC=6$ км, $CD=4$ км. На цій дорозі ліворуч від цих населених пунктів на відстані 1 км від A знаходиться турист, який починає рухатися до D зі швидкістю 3 км/год. Знайти перший момент часу, коли сума відстаней від туриста до пунктів A, B, C, D буде мінімальною.

Розв'язання.

Спрямуємо координатну вісь вздовж дороги, на якій розміщено вказані населені пункти, і за початок відліку візьмемо початкове положення туриста:



Нехай в момент часу t координата точки X, у якій знаходиться турист, буде x.

Очевидно, що положення $X(x)$, при якому сума відстаней

$$|XA|+|XB|+|XC|+|XD| \triangleq f(x)$$

буде мінімальною міститься серед точок відрізка AD. Тоді

$$|XA| = x-1,\ |XB| = |x-4|,\ |XC| = |x-10|,\ |XD| = 14-x$$

і

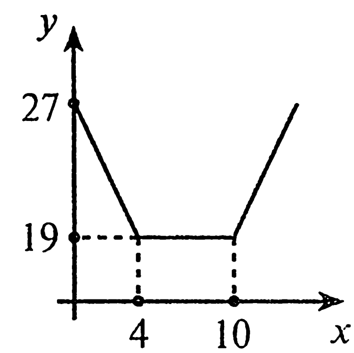
$$f(x) = (x-1)+|x-4|+|x-10|+(14-x) = |x-4|+|x-10|+13.$$

Побудуємо графік функції $y = f(x)$:

$f(x) = -2x+27$ при $0 \le x \le 4$;

$f(x) = 19$ при $4 \le x \le 10$;

$f(x) = 2x-1$ при $x \ge 10$.



Маємо мінімальне значення $f_{\min}(x) = 19$ при $x \in [4; 10]$. Тоді першим моментом часу коли $f(x) = f_{\min}$ буде $t = 4:3$ год $=$ 1 год 20 хв.

Відповідь: 1 год 20 хв.

Приклад 5. Підприємство випускає вироби двох типів. Обробка кожного виробу першого типу займає 5 год у цеху A і 3 год у цеху B. Обробка кожного виробу другого типу займає 2 год у цеху A і 4 год у цеху B. Цех A може працювати не більше 150 год на місяць, а цех B — не більше 132 год на місяць. З кожного виробу першого та другого типів виробництво отримує прибуток у 300 та 200 грн, відповідно. Визначити, скільки виробів кожного типу потрібно виготовляти щомісяця, щоб забезпечити виробництву найбільший прибуток. Знайти цей прибуток.

Розв'язання.

Позначимо через x і y шукану кількість виробів першого і другого типів відповідно, а через F — прибуток виробництва.

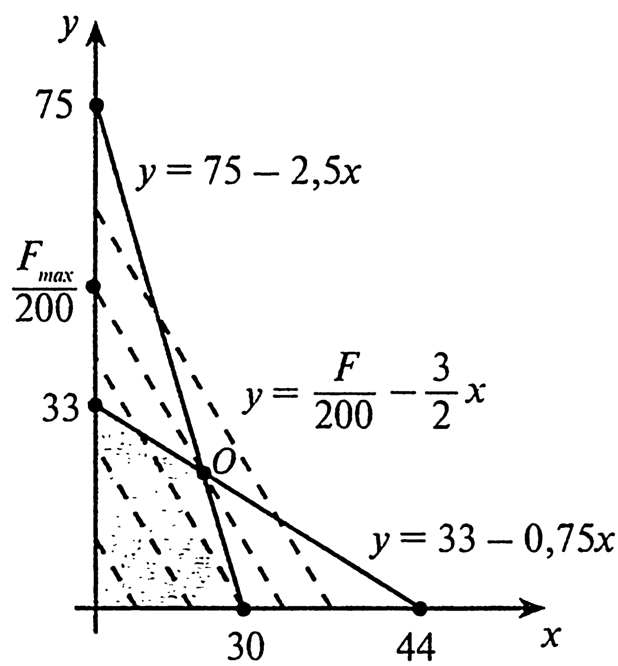
Тоді

$$F(x, y) = 300x + 200y.$$

При тому

$$\begin{cases} 5x + 2y \le 150 \\ 3x + 4y \le 132 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0,\ y \ge 0 \\ y \le 75 - 2{,}5x \\ y \le 33 - 0{,}75x. \end{cases}$$

Побудуємо відповідне ГМТ на координатній площині.



Шукане $F_{max} \ge 300x + 200y \Leftrightarrow y \le \frac{F_{max}}{200} - \frac{3}{2}x$, де $(x; y)$ — точки побудованого ГМТ.

Рівняння $y = \frac{F}{200} - \frac{3}{2}x$ визначає систему паралельних прямих із кутовим коефіцієнтом k. Значення $k = -\frac{3}{2}$ визначатиме F_{max} — положення прямої $y = \frac{F}{200} - \frac{3}{2}x$, коли вона проходить через точку $O(24; 15)$ — точку перетину прямих $5x + 2y = 150$ і $3x + 4y = 132$.

Тоді $F_{max} = 300 \cdot 24 + 200 \cdot 15 = 10200.$

Відповідь: 24 і 15; 10200 грн.

ВЛАСТИВІСТЬ ФУНКЦІЙ ВИДУ $f(x)=bx+\frac{a}{x}$

У попередніх параграфах (с. 123–126, 157) ми вже зверталися до властивостей цієї функцій. Тепер звернемо увагу на її використання при розв'язуванні текстових задач на найбільше (найменше) значення.

Якщо числа a і b мають однакові знаки, то така функція має точки екстремуму. Розглянемо, як можна знайти ці точки, без використання похідної.

Використаємо відоме твердження про порівняння середнього арифметичного і середнього геометричного двох невід'ємних чисел:

$$\frac{A+B}{2}\geq\sqrt{AB}\ \ (A\geq 0,\ \ B\geq 0).$$

Зазначимо, що рівність у наведеній формулі досягається тоді і тільки тоді, якщо $A=B$.

Застосуємо цей факт для функції

$$y=bx+\frac{a}{x}\ \ (a>0,\ \ b>0).$$

Якщо $x>0$, маємо $y=\frac{a}{x}+bx\geq 2\sqrt{\frac{a}{x}\cdot bx}=2\sqrt{ab}$.

Таким чином, функція

$$f(x)=bx+\frac{a}{x}$$

при $x>0$ більша, або дорівнює $2\sqrt{ab}$. При тому нерівність досягається в випадку, якщо $\frac{a}{x}=bx$, тобто коли $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

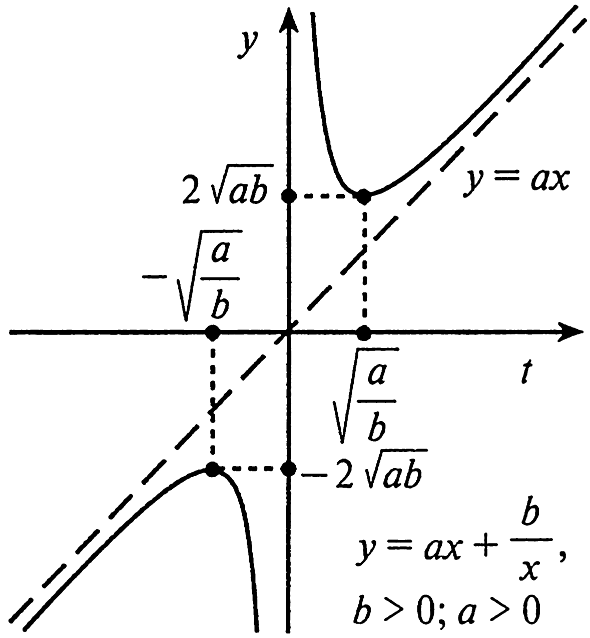
Аналогічно при $x<0$ маємо

$$-y=\frac{a}{-x}+b(-x)\geq 2\sqrt{ab}\ \ (-x>0).$$

Тоді $y\leq -2\sqrt{ab}$ при $x<0$. Рівність досягається в випадку $-x=\sqrt{\frac{a}{b}}$, тобто при $x=-\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Маємо висновок:

функція $f(x) = bx + \frac{a}{x}$ $(a > 0, b > 0)$ **досягає локального мінімуму** $2\sqrt{ab}$ **при** $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$ **і локального максимуму** $-2\sqrt{ab}$ **при** $x = -\sqrt{\frac{a}{b}}$.



В випадку $a = b = 1$ *маємо відому нерівність для суми взаємно обернених величин:* $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2 \ (x \neq 0)$.

Приклад 6. Із пункту A на прогулянку вийшов пішохід із швидкістю v км/год. Після того, як він віддалився від пункту A на 6 км, з цього ж пункту вслід за ним виїхав велосипедист, швидкість якого $(v+9)$ км/год. Коли велосипедист наздогнав пішохода, вони повернули назад і прибули разом в A із швидкістю 4 км/год. При якому значенні v час прогулянки пішохода буде найменшим?

Розв'язання.

Час, який витратив велосипедист, щоб наздогнати пішохода, дорівнює

$$\frac{6}{(v+9)-v} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ (год).}$$

До цього моменту пішохід відійде від A на відстань $(6 + 2/3 \cdot v)$ км. Тоді загальний час, який ґуляв пішохід, буде

$$t_n = \frac{6}{v} + \frac{2}{3} + \frac{6 + \frac{2}{3}v}{4} = \frac{6}{v} + \frac{v}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \text{ (год).}$$

З нерівності для суми взаємно обернених чисел маємо

$$\frac{6}{v} + \frac{v}{6} \geq 2 \text{ і } t_n \geq 2 + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = 3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{6} \text{ (год)}$$

Відповідь: 4 год 10 хв.

Приклад 7. Між двома портами, що віддалені один від одного на відстань 400 км, з постійною швидкістю курсує теплохід. Витрати на рейс у одному напрямку складаються з двох частин. Перша частина пов'язана з обслуговуванням пасажирів і пропорційна часу, який витрачає теплохід на рейс. Друга пов'язана з витратами на пальне і пропорційна швидкості руху. Знайти швидкість, з якою повинен рухатися теплохід, щоб витрати на рейс були мінімальні, якщо відомо, що при швидкості 90 км/год вартість обслуговування пасажирів становила 16/81 вартості пального.

Розв'язання.

Позначимо витрати на рейс через F, а швидкість руху теплохода через v. Врахуємо, що час руху теплохода t у одному напрямку дорівнює $\frac{400}{v}$. З умови задачі маємо $v \neq 0$ і

$$F = k_1 t + k_2 v = k_1 \frac{400}{v} + k_2 v,$$

тобто $F = F(v)$.

При швидкості 90 км/год маємо співвідношення двох видів витрат:

$$k_1 \frac{400}{90} = \frac{16}{81} k_2 90 \Leftrightarrow k_1 = 4k_2.$$

Тоді

$$F(v) = \frac{4 \cdot 400 k_2}{v} + k_2 v.$$

З властивості функції $\frac{a}{x} + bx$ маємо:

$$F(v) \geq 2\sqrt{4 \cdot 400 \cdot k_2^2} = 80k_2,$$

при тому $F(v)$ досягає мінімуму при

$$v = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 400 k_2}{k_2}} = 40.$$

Відповідь: 40 км/год.

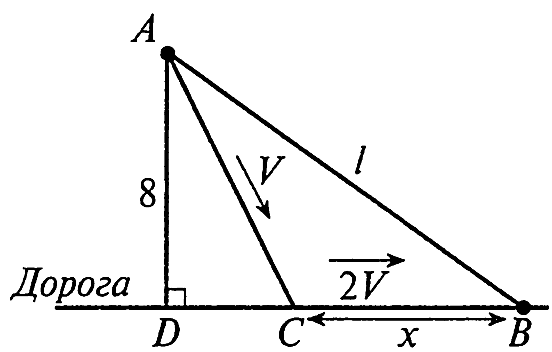
СПИРАЄМОСЬ НА НЕРІВНІСТЬ

Приклад 8. Пункт A розміщено у полі на відстані 8 км від дороги. На дорозі, яка є прямою лінією, стоїть пункт B. Швидкість руху автомобіля по дорозі в 2 рази вища, ніж полем. Відомо, якщо їхати з A до B так, що частина шляху пройде по дорозі, на це буде витрачено не менше часу, ніж цього потребує шлях тільки полем. Знайти максимально можливу відстань між A і B.

Розв'язок.

Позначимо $|AB|=l$. За умовою $AD=8$ км — відстань між A і дорогою, прямою DB.

Нехай швидкість руху полем V км/год, тоді шлях дорогою CB автомобіль проходить зі швидкістю $2V$.



За умовою

$$\frac{l}{V} \le \frac{AC}{V} + \frac{CB}{2V},$$

або

$$l \le AC + \frac{1}{2}CB. \qquad (1)$$

Позначимо $CD \triangleq x$. З ΔADC і ΔADB маємо, що

$$DC = \sqrt{l^2-64} - x$$

і

$$AC = \sqrt{64 + \left(\sqrt{l^2-64} - x\right)^2}.$$

Підставимо отриманий вираз для AC в (1):

$$l \le \sqrt{64 + \left(\sqrt{l^2-64} - x\right)^2} + \frac{x}{2} \Leftrightarrow l - \frac{x}{2} \le \sqrt{64 + \left(\sqrt{l^2-64} - x\right)^2}.$$

Врахуємо, що $l - \frac{x}{2} > l - x > 0$ і піднесемо обидві частини нерівності до квадрату, отримаємо

$$3x^2 + 4x\left(l - 2\sqrt{l^2-64}\right) \ge 0 \Leftrightarrow 3x\left(x - \frac{4}{3}\left(2\sqrt{l^2-64} - l\right)\right) \ge 0.$$

Ця нерівність повинна виконуватись при всіх значеннях $x \geq 0$. Тоді другий корінь квадратного тричлену лівої частини нерівності повинен бути недодатнім, тобто

$$\frac{4}{3}\left(2\sqrt{l^2-64}-l\right) \leq 0 \Leftrightarrow l \geq 2\sqrt{l^2-64} \quad \Leftrightarrow \quad 8 \leq l \leq \frac{16}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $\dfrac{16}{\sqrt{3}}$ км.

ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА МАКСИМУМ І МІНІМУМ

Загальна схема розв'язання таких задач нам вже відома з попереднього матеріалу. Проте ще раз нагадаємо її.

— Обираємо параметр (змінну) — x, через який зручно виразити величину — y.

— Знаходимо функцію, яка виражає y через x, тобто $y = f(x)$, і область зміни параметра (змінної) x. (Інколи область змінної x задана умовою.)

— У більшості випадків маємо задачу — знайти найбільше (найменше) значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ (або на заданому промені, або на всій прямій), де функція $f(x)$ визначена і має похідну у будь-якій точці цього інтервалу.

— Знаходимо точки на цьому інтервалі, в яких похідна дорівнює нулю (критичні точки).

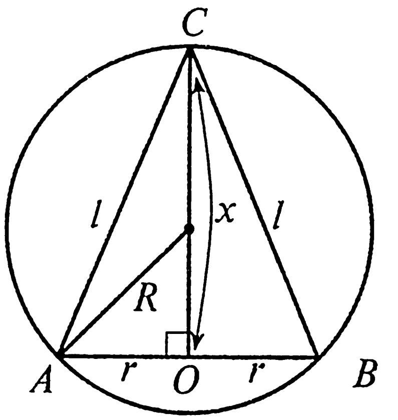
— Досліджуємо їх на найбільше або найменше значення, яке досягається або в одній з критичних точок, або на границі області зміни x (якщо вона обмежена).

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 9. Знайти висоту конуса з найбільшою бічною поверхнею, який вписано у кулю радіуса R.

Розв'язання.

Позначимо радіус основи конуса через r, його твірну через l, а висоту через x.



Площа бічної поверхні цього конуса

$$S_б = \pi r l$$

Осьовий переріз цього конуса — рівнобедрений трикутник (ΔACB), який вписано в коло радіуса R,

$$R = \frac{AC \cdot CB \cdot AB}{4S_{ACB}} = \frac{l^2 \cdot 2r}{4 \cdot \frac{1}{2}(2r \cdot x)} = \frac{l^2}{2x}$$

і $l = \sqrt{2xR}$.

З ΔCOB:

$$r = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{2xR - x^2}.$$

Маємо

$$S_б = \pi\sqrt{2xR - x^2} \cdot \sqrt{2xR} = \pi\sqrt{4x^2R^2 - 2x^3R}.$$

Проведемо дослідження функції

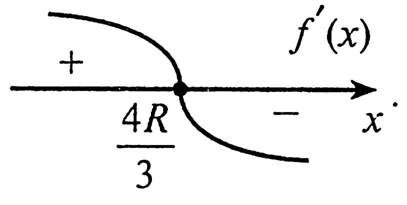
$$f(x) = \left(\frac{S_б}{\pi}\right)^2 = 4x^2R^2 - 2x^3R, \quad x \in [0; 2R],$$

на найбільше значення:

$$f'(x) = 8xR^2 - 6x^2R = 0 \text{ при } x_{кр} = \frac{4R}{3} \in (0; 2R); \quad f(0) = f(2R) = 0.$$

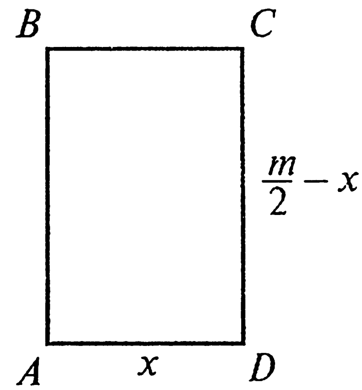
Тоді при $x = \frac{4R}{3}$ $f = f_{\max}$.

До цього висновку можна прийти й аналізуючи зміну знака похідної $f'(x)$ навколо точки $x = \frac{4R}{3}$:



Відповідь: $\frac{4R}{3}$.

Приклад 10. Периметр осьового перерізу циліндру m. Знайти найбільший об'єм такого циліндру.



Розв'язання.

Осьовий переріз циліндра — прямокутник $ABCD$ з довжинами сторін x і $\frac{m}{2}-x$.

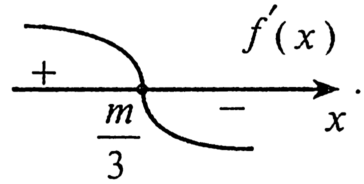
Тоді об'єм циліндру

$$V=\pi x^2\left(\frac{m}{2}-x\right)\triangleq f(x).$$

Проведемо дослідження цієї функції на найбільше значення при $x\in\left(0;\frac{m}{2}\right)$:

$$f'=2\pi x\left(\frac{m}{2}-x\right)-\pi x^2=-\pi x(3x-m),$$

$$x_{кр}=\frac{m}{3}\in\left(0;\frac{m}{2}\right);$$

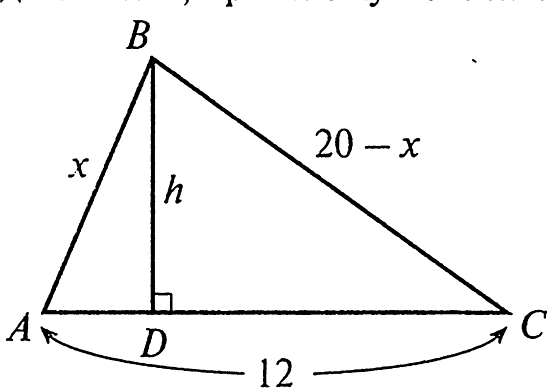


Тоді

$$f_{\max}=f\left(\frac{m}{3}\right)=\frac{\pi m^2}{9}\left(\frac{m}{2}-\frac{m}{3}\right)=\frac{\pi m^3}{54}.$$

Відповідь: $\frac{\pi m^3}{54}$.

Приклад 11. Основа трикутника дорівнює 12 см, а сума бічних сторін 20 см. Знайти значення висоти трикутника, проведеної до основи, при якому його площа буде найбільшою.



$AB\triangleq x$; $BD\triangleq h$

Дано:

$$AC=12\text{ см};$$
$$AB+BC=20\text{ см};$$
$$S=S_{\max};\quad BD\perp AC$$

Знайти: BD.

Розв'язання.

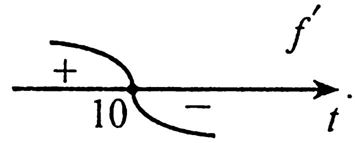
1) $S=\frac{1}{2}h\cdot AC=6h;\ \ S=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)},$

$$2p=20+12=32,\ \ p=16$$

2) $f(x)\triangleq S^2(x)=16\cdot(16-x)(16-(20-x))(16-12),$

$$f(x)=16\cdot 4(16-x)(x-4) \text{ при } x\in(0;20).$$

3) $f'(x)=-16\cdot 4(x-4)+16\cdot 4(16-x)=-16\cdot 4(2x-20),$

$x_{кр}=10\in(0;20);$ 

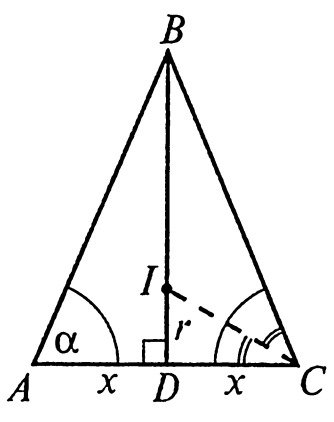
$$f_{\max}=f(10)=16\cdot 4(16-10)(10-4)=16\cdot 4\cdot 6\cdot 6$$

4) $S_{\max}=\sqrt{16\cdot 4\cdot 6\cdot 6}=4\cdot 2\cdot 6=6h_0,\ \ h_0=8$ (см).

Відповідь: 8 см.

Приклад 12. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює α. При якому значенні α відношення радіусів вписаного і описаного кіл є найбільшим?

Розв'язання.



1) Позначимо довжину основи трикутника через $2x$. Тоді висота BD, яку проведено до основи AC рівнобедреного ΔABC поділяє її навпіл: $AD=DC=x$.

2) Центр вписаного кола I, точка перетину бісектрис ΔABC, належить BD. Тоді з ΔIDC радіус вписаного кола $r=x\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

3) Радіус описаного кола

$$R=\frac{AC}{2\sin\angle B}=\frac{x}{\sin(\pi-2\alpha)}=\frac{x}{\sin 2\alpha}$$

4) Відношення радіусів вписаного і описаного кіл:

$$\frac{r}{R}=x\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}:\frac{x}{\sin 2\alpha}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin 2\alpha.$$

5) Проаналізуємо функцію $f(\alpha)=\mathrm{tg}(\alpha/2)\sin 2\alpha$ на найбільше значення при $\alpha\in(0;\pi/2)$:

$$f'(\alpha)=\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)'}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\cdot(2\alpha)'\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos 2\alpha=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha+4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$f'(\alpha)=0 \text{ при } \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\\ \cos 2\alpha=-\cos\alpha\end{array}\right.\\ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2\alpha=\cos(\pi+\alpha)\\ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}2\alpha=\pi+\alpha+2\pi n,\ n\in Z\\ 2\alpha=-(\pi+\alpha)+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.\\ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\alpha=\pi+2\pi n\\ \alpha=-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}\end{array}\right.\\ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{3};$$

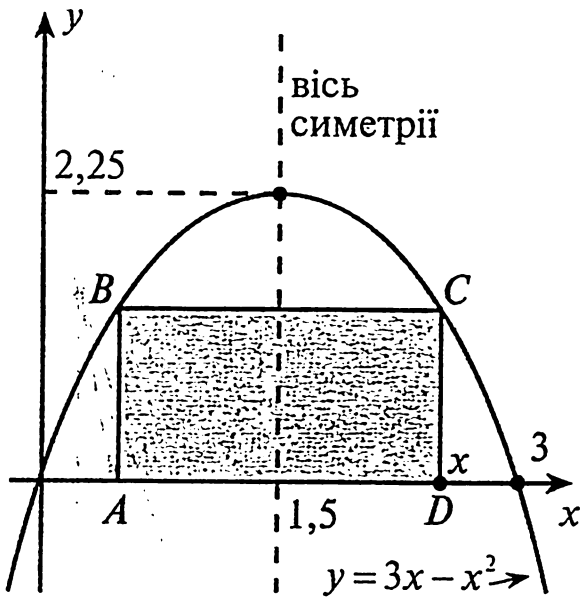
$$\max\left\{f(0);f\left(\frac{\pi}{2}\right);f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}=f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Відповідь: 60°.

ГЕОМЕТРІЯ ЗУСТРІЧАЄТЬСЯ З АЛГЕБРОЮ

Приклад 13. Знайти площу найбільшого прямокутника, дві вершини якого містяться на відрізку [0; 3] осі абсцис, а дві інші — на графіку $y=3x-x^2$.

Розв'язання.



Побудуємо графік функції $y = 3x - x^2$. Середина відрізку [0; 3] точка $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ — вершина параболи, а пряма $x = x_в$ — вісь її симетрії.

Нехай $ABCD$ — даний прямокутник. Позначимо абсцису точки D через x.

Тоді довжини сторін прямокутника $ABCD$ дорівнюють:

$$|AD| = 2\left(x - \frac{3}{2}\right),\ |DC| = 3x - x^2,$$

а його площа

$$S = (2x-3)\left(3x - x^2\right) = -2x^3 + 9x^2 - 9x.$$

Знайдемо найбільше значення функції $S(x)$ на відрізку $\left[\frac{3}{2}; 3\right]$:

$$S' = -6x^2 + 18x - 9 = -6\left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$S' = 0 \text{ при } \left[\begin{array}{l} x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \in \left(\frac{3}{2}; 3\right) \\ x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \notin \left(\frac{3}{2}; 3\right) \end{array}\right.,\ x_{кр} = \frac{3+\sqrt{3}}{2};$$

$$S\left(\frac{3}{2}\right) = S(3) = 0,\ S\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2}\left(3 - \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Тоді шукане $S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

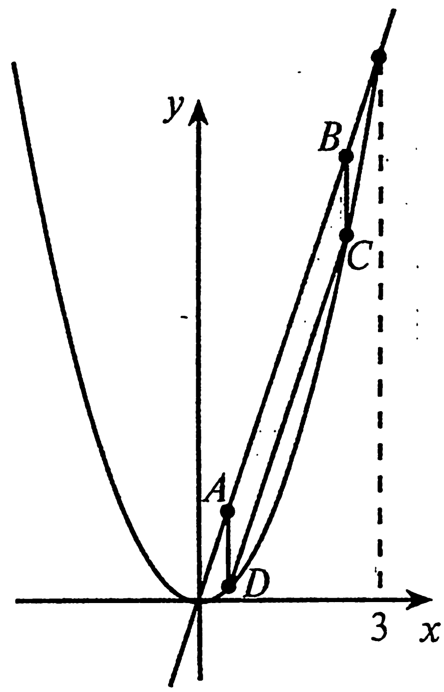
Приклад 14. У фігуру, обмежену лініями $y=3x$ та $y=x^2$, вписано паралелограм найбільшої площі (дві його вершини лежать на прямій $y=3x$). Знайти цю площу.

Розв'язання.

За умовою $(CD)\parallel(AB)$. Тоді рівняння (CD) має вигляд

$$y=3x+l.$$

Зауважимо, що $l<0$, бо пряму CD отримаємо з (AB) паралельним переносом вздовж осі OX праворуч $\left(\text{на } \frac{|l|}{3}\right)$.



Врахуємо, що точки C і D належать графіку функції $y=x^2$, тобто $x_C^2=3x_C+l$, $x_D^2=3x_D+l$. Звідки маємо:

$x_C=3+\sqrt{9+4l}$, $y_C=18+4l+6\sqrt{9+4l}$;

$x_D=3-\sqrt{9+4l}$, $y_D=18+4l-6\sqrt{9+4l}$.

Довжина сторони DC паралелограма $ABCD$ дорівнює

$$|DC|=\sqrt{\left(2\sqrt{9+4l}\right)^2+\left(12\sqrt{9+4l}\right)^2}=2\sqrt{37(9+4l)}.$$

Висота паралелограма, проведена до сторони DC, дорівнює відстані від точки D до прямої AB:

$$h=d\left(\left(3-\sqrt{9+4l};18+4l-6\sqrt{9+4l}\right)/3x-y=0\right)=$$

$$=\frac{\left|9-3\sqrt{9+4l}-18-4l+6\sqrt{9+4l}\right|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{9+4l}\left|3-\sqrt{9+4l}\right|}{\sqrt{10}}.$$

Врахуємо, що $l<0$ — тоді $\sqrt{9+4l}<3$, тоді

$$h=\frac{\sqrt{9+4l}\left(3-\sqrt{9+4l}\right)}{\sqrt{10}}.$$

Площа паралелограма S дорівнює $|CD|\cdot h$:

$$S = 2\sqrt{37(9+4l)} \cdot \frac{\sqrt{9+4l}\left(3-\sqrt{9+4l}\right)}{\sqrt{10}}.$$

Позначимо $\sqrt{9+4l} \triangleq k \geq 0$. Тоді

$$S(k) = \sqrt{\frac{74}{5}}k^2(3-k).$$

Знайдемо найбільше значення $S(k)$ на відрізку $[0; 3]$:

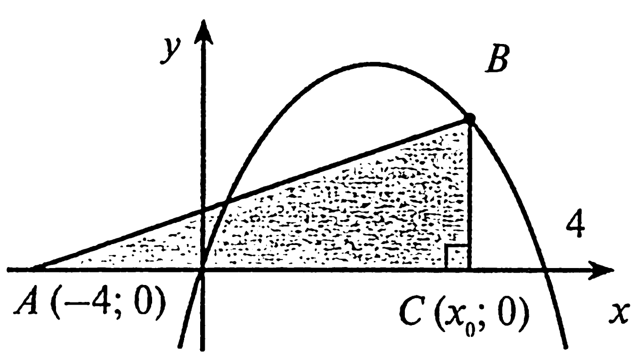
$$S'(k) = \sqrt{\frac{74}{5}}\left(6k-3k^2\right) = 0 \text{ при } k = 2.$$

$$S(0) = S(3) = 0, \quad S(2) = 4\sqrt{\frac{74}{5}}.$$

Відповідь: $4\sqrt{\frac{74}{5}}$.

Приклад 15. Точка B належить параболі $y = 4x - x^2$, точка C належить відрізку $[0; 4]$ вісі абсцис, точка A має координати $(-4; 0)$. Знайти координати точки B, при яких площа прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) буде найбільшою.

Розв'язання.



Нехай точка C має координати $(x_0; 0)$.

За умовою $BC \perp (0X)$. Тоді точка B має координати $\left(x_0; 4x_0 - x_0^2\right)$. Площа ΔABC дорівнює $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| =$

$$= \frac{1}{2}(x_0+4)\left(4x_0 - x_0^2\right)$$

Треба знайти найбільше значення функції $S(x_0)$ на відрізку $[0; 4]$.

$$S' = \frac{1}{2}\left(4x_0 - x_0^2\right) + \frac{1}{2}(x_0+4)(4-2x_0) = \frac{1}{2}\left(16 - 3x_0^2\right) = 0$$

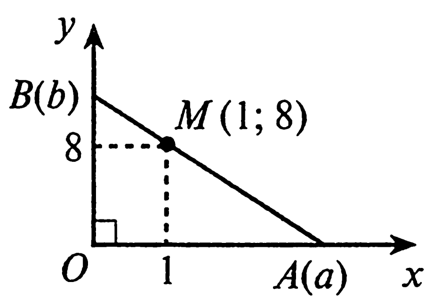
$$\text{при } x_0 = \frac{4}{\sqrt{3}} \in (0; 4) \text{ або } x_0 = -\frac{4}{\sqrt{3}} \notin (0; 4).$$

При переході через точку $x_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}$ S' змінює знак з «+» на «–». Тоді

$$S\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = S_{\max}, \text{ і точка } B \text{ має координати } \left(\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{16}{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\right).$$

Відповідь: $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{16}{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$.

Приклад 16. Відрізок з кінцями на сторонах прямого кута містить точку M, яка віддалена від сторін цього кута на 1 см і 8 см. Знайти найменшу довжину такого відрізка.



Позначимо кінці відрізка через A та B, і спрямуємо вісі координат (OX) і (OY) по сторонах кута $[OA)$ і $[OB)$.

Нехай $A(a; 0)$, $B(0; b)$, тоді рівняння прямої (AB) має вигляд $y = -\frac{b}{a}x + b.$

Точка $M(1; 8)$ належить прямій AB, тоді

$$8 = -\frac{b}{a} + b \text{ і } b = \frac{8a}{a-1}.$$

З ΔAOB маємо

$$AB^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \frac{64a^2}{(a-1)^2}.$$

Вимагається знайти найменше значення функції

$$f(a) = a^2 + \frac{64a^2}{(a-1)^2} \text{ при } a > 1:$$

$$f'(a) = 2a + \frac{64 \cdot 2a(a-1)^2 - 2(a-1) \cdot 64a^2}{(a-1)^4} =$$

$$=\frac{2a\left((a-1)^3+64(a-1)-64a\right)}{(a-1)^3}=\frac{2a\left((a-1)^3-64\right)}{(a-1)^3},$$

$$f'(a)=0 \text{ при } \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=0\\(a-1)^3=64\end{array}\right.\\a>1\end{cases} \Leftrightarrow \ a=5.$$

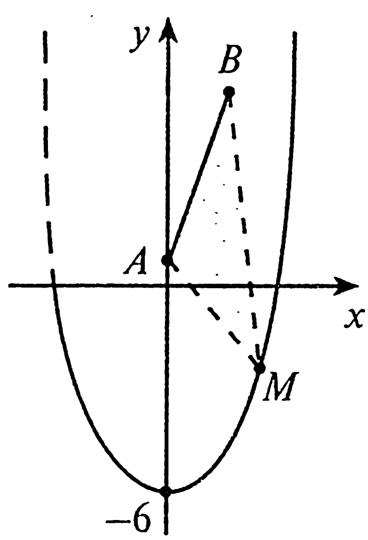
При переході через точку $a=5$ f' змінює знак з «–» на «+», тому $f(5)=f_{\min}=125$.

Тоді шукане значення $AB_{\min}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ (см).

Відповідь: $5\sqrt{5}$ см.

Приклад 17. На графіку функції $f(x)=x^2-6$ при $x\in[0;1]$ знайти таку точку M, щоб площа трикутника з вершинами в точках $A(0;1)$, $B(1;7)$ і M була найменшою. Знайти цю площу.

Розв'язання.



Довжина відрізка AB дорівнює
$$|AB|=\sqrt{1^2+(7-1)^2}=\sqrt{37}.$$

Площа трикутника ABM дорівнює півдобутку $|AB|$ на відстань точки $M\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ від прямої AB.

Рівняння прямої AB будемо шукати у вигляді $y=kx+l$, бо вона не паралельна вісі $(0Y)$. Після підстановки координат точки $A(0;1)$ і $B(1;7)$ у це рівняння маємо

$$\begin{cases}1=l\\7=k+l\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}l=1\\k=6\end{cases} \text{ і } (AB):\ y=6x+1 \Leftrightarrow 6x-y+1=0.$$

Відстань від точки $\left(x_0;y_0\right)$ до прямої $ax+by+c=0$ дорівнює

$$d=\frac{\left|x_0a+y_0b+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Відстань точки $M\left(x_0; x_0^2-6\right)$ до прямої $6x-y+1=0$ дорівнює

$$d=\frac{\left|6x_0-\left(x_0^2-6\right)+1\right|}{\sqrt{6^2+1}}=\frac{\left|x_0^2-6x_0-7\right|}{\sqrt{37}}=\frac{\left|\left(x_0-7\right)\left(x_0+1\right)\right|}{\sqrt{37}}.$$

За умовою $x_0\in[0;1]$. Тоді

$$d=-\frac{x_0^2-6x_0-7}{\sqrt{37}}$$

(бо тоді $\left(x_0-7\right)\left(x_0+1\right)\le 0$).

Треба дослідити функцію

$$g(x)=-\left(x^2-6x-7\right)$$

на найменше значення при $x\in[0;1]$:

$$g'=-2x+6=0 \text{ при } x=3\notin(0;1);$$

$$g(0)=7;\ g(1)=12.$$

Маємо $\underset{[0;1]}{g_{\min}}(x)=g(0)=7$.

Відповідно для d і S_{ABM} отримаємо значення

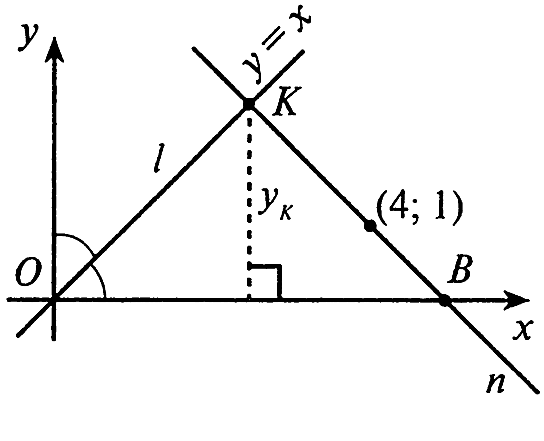
$$\underset{[0;1]}{d_{\min}}(x)=\frac{7}{\sqrt{37}},\quad S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{\sqrt{37}}\cdot\sqrt{37}=3{,}5.$$

$f(0)=-6$, і точка M має координати $M(0;-6)$.

Відповідь: $M(0;-6)$, $S_{ABM}=3{,}5$.

Приклад 18. При яких значеннях параметрів a і b площа трикутника, який обмежено віссю (OX) і прямими $y=x$ та $y=ax+b$, $a<0$, буде найменшою, якщо відомо, що пряма $y=ax+b$ проходить через точку $(4;1)$?

Розв'язання.



Позначимо точку перетину прямих

$$(l):\ y=x \text{ і } (n):\ y=ax+b$$

через K, а точку перетину (n) з віссю (OX) через B.

$$S_{OKB}=\frac{1}{2}y_K x_B.$$

За умовою (n) містить точку $(4;1)$, тоді

$$1=4a+b \Leftrightarrow b=1-4a$$

$$\text{і } (n):\ y=ax-4a+1,\ x_B=\frac{4a-1}{a}\ (a\neq 0).$$

Знайдемо координати точки перетину прямих (l) і (n):

$$\begin{cases} y_k=x_k \\ y_k=ax_k-4a+1 \end{cases} \Leftrightarrow y_k=x_k=\frac{4a-1}{a-1}$$

(за умовою ΔOKB існує і $a\neq 1$).

Розглянемо площу ΔOKB як функцію змінної a,

$$S(a)=\frac{1}{2}y_K\cdot x_B=\frac{(4a-1)^2}{2a(a-1)},$$

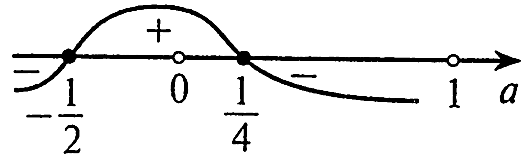
і проаналізуємо $S(a)$ на наявність найменшого значення при $a\in(-\infty;0)$:

$$S(a)=\frac{(4a-1)^2}{2a(a-1)}.$$

$$S'(a)=\frac{2\cdot 4(4a-1)\left(a^2-a\right)-(4a-1)^2(2a-1)}{2a^2(a-1)^2}=$$

$$=\frac{-(4a-1)(2a+1)}{2a^2(a-1)^2}.$$

При переході через критичні точки $S'(a)$ змінює знак:



Тоді

$$S\left(-\frac{1}{4}\right)=S_{\min}.$$

Відповідь: $a=-\frac{1}{4};\ b=2$.

Приклад 19. Знайти найменше значення площі фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 2x - 3$ і прямою $y = kx + 1$.

Розв'язання.

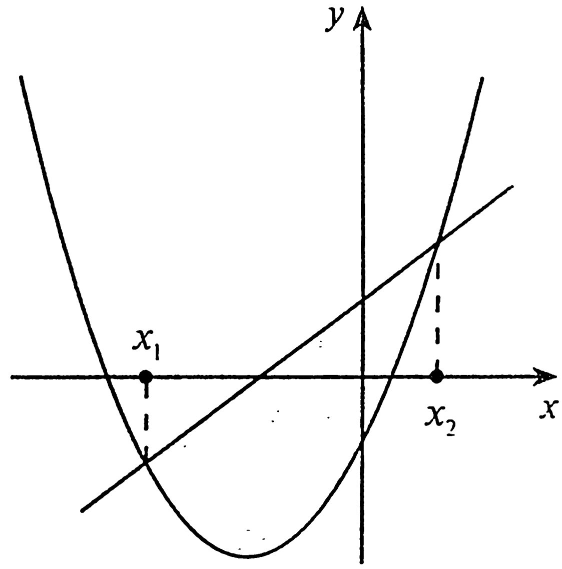
З рівняння

$$x^2 + 2x - 3 = kx + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; x^2 - (k-2)x - 4 = 0$$

маємо, що абсциси точок перетину заданих умовою параболи і прямої дорівнюють

$$x_{1,2} = \frac{k - 2 \pm \sqrt{(k-2)^2 + 16}}{2}, \quad x_1 < x_2.$$



Знайдемо площу фігури, що розглядається:

$$S(k) = \int_{x_1}^{x_2} \left(4 + (k-2)x - x^2\right) dx =$$

$$= \left(4x + \frac{k-2}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= (x_2 - x_1)\left(4 + \frac{k-2}{2}(x_2 + x_1) - \frac{1}{3}\left(x_2^2 + x_1^2 - x_1x_2\right)\right) = \frac{1}{6}\sqrt{\left((k-2)^2 + 16\right)^3}.$$

Функція $S(k)$ має найменше значення при $k = 2$:

$$S(2) = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

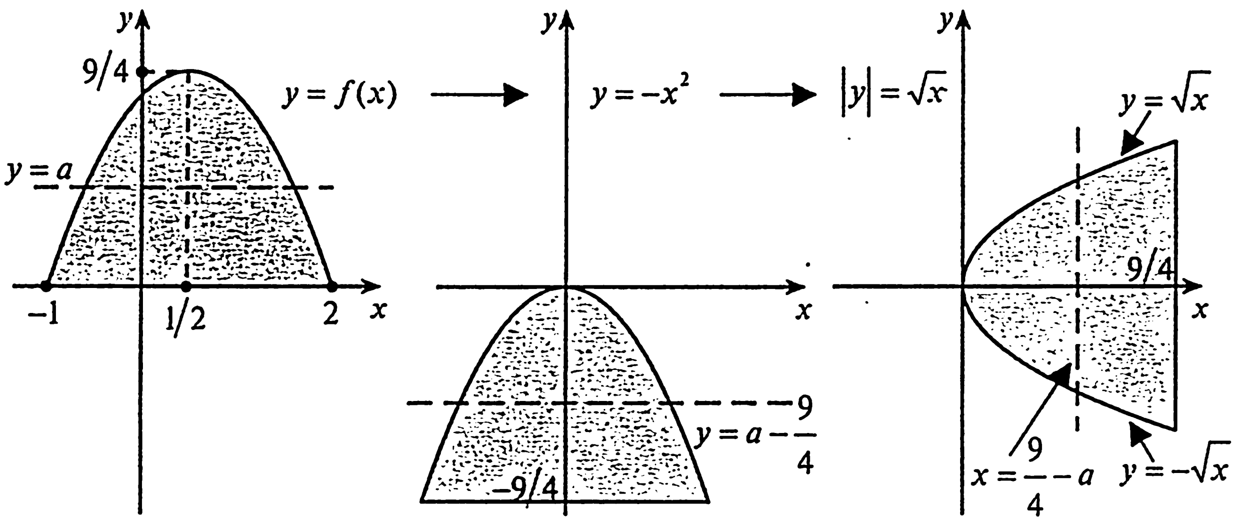
Відповідь: $10\frac{2}{3}$.

Приклад 20. При якому значенні a пряма $y = a$ поділяє площу фігури, обмеженої лініями $y = 0$ і $y = 2 + x - x^2$ навпіл?

Розв'язання.

Графік функції $f(x) = -\left(x^2 - x - 2\right) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ — парабола, гілки якої напрямлені вниз, а вершина має координати $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

Зробимо паралельне перенесення заданої функції вздовж осі OY вниз на $\frac{9}{4}$ і ліворуч вздовж осі OX на $\frac{1}{2}$. А після того повернемо отриману фігуру на $90°$ навколо точки (0; 0), як показано на останньому малюнку.



При такому перетворенні пряма $y = a$ переходить у пряму $x = \frac{9}{4} - a \triangleq a_1$.

Запишемо умову того, що пряма $x = a_1$ поділяє утворену фігуру навпіл:

$$\int_0^{9/4} \sqrt{x}dx = 2\int_0^{a_1} \sqrt{x}dx \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^{9/4} = 2\cdot\frac{2}{3}a_1^{3/2} \Leftrightarrow a_1 = \frac{9}{4\sqrt[3]{4}}.$$

Звідки

$$a = \frac{9}{4} - a_1 = \frac{9}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{9}{8}\left(2 - \sqrt[3]{2}\right).$$

Відповідь: $a = \frac{9}{8}\left(2 - \sqrt[3]{2}\right)$.

СУМА І РІЗНИЦЯ ВІДДАЛЕЙ ДВОХ ЗАДАНИХ ТОЧОК ВІД ТОЧКИ ПРЯМОЇ

Інколи для розв'язання задач зручно скористатися наступними фактами:

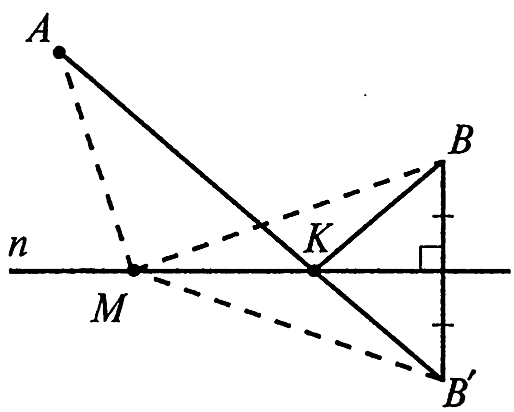
1. Якщо задано пряму n і дві точки A і B, які містяться у одній півплощині відносно цієї прямої, то для того, щоб знайти на прямій n точку сума віддалей від якої до точок A і B буде найменшою, треба:

— побудувати точку B' симетричну точці B відносно прямої n;

— знайти точку K — точку перетину прямої AB' з прямою n;

— довести, що точка K — шукана.

Доведення.



$$KA + KB = KA + KB' = AB'.$$

Нехай M — довільна точка прямої n. Тоді з нерівності трикутника AMB' маємо

$$AB' \le AM + MB' = AM + MB,$$

при тому рівність досягається лише в випадку $M \equiv K$, тобто точка K — шукана.

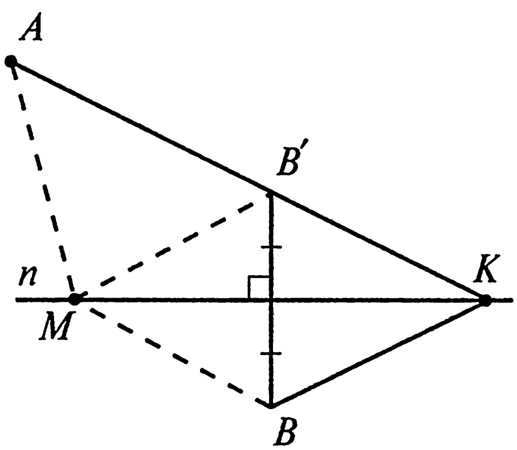
2. Якщо задано пряму n і дві точки A і B у різних напівплощинах відносно цієї прямої, то для того, щоб знайти на прямій n точку модуль різниці віддалей якої від точок A і B буде найбільшим, треба:

— побудувати точку B' симетричну точці B відносно прямої n;

— знайти точку K — точку перетину прямої AB' з прямою n;

— довести, що точка K — шукана.

Доведення.



$$|KA - KB| = |KA - KB'| = AB'$$

Нехай M — довільна точка прямої n. Тоді з нерівності трикутника AMB' маємо

$$|MA - MB| = |MA - MB'| \le$$

$$\le AB' = |KA - KB|,$$

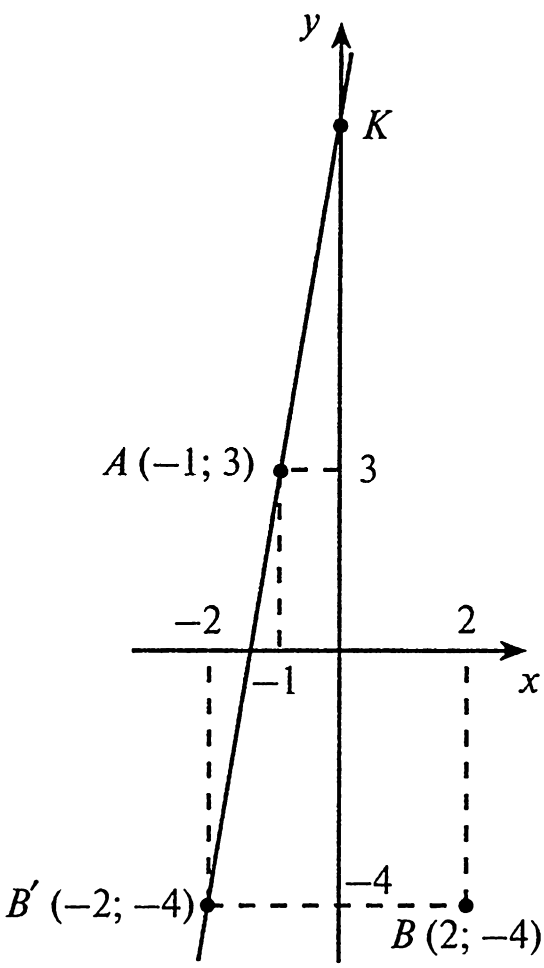
при тому рівність досягається лише в випадку $M \equiv K$. Тобто точка K — шукана.

Приклад 21. На осі ординат знайти точку, модуль різниці віддалей якої від точки $A(-1;3)$ і $B(2;-4)$ буде найбільшим.

Розв'язання.

Знайдемо координати точки B', яка симетрична точці B відносно вісі $(0Y)$:

$$x'_B = -x_B = -2,\quad y'_B = y_B = 4.$$



Рівняння прямої (AB') будемо шукати у вигляді

$$y = kx + l \quad \left(\text{бо } AB' \not\parallel (OY)\right).$$

Тоді

$$\begin{cases} 3 = -k + l \\ -4 = -2k + l \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 7 \\ l = 10 \end{cases},$$

$$(AB'):\ y = 7x + 10.$$

Пряма (AB') перетинає вісь $(0Y)$ у точці $K(0;10)$.

Те, що точка K — шукана, доведіть самостійно, пригадавши опорний факт 2, який ми розглядали раніше.

Завдання 21.

1) В арифметичній прогресії $a_2 = 6$. При якому значенні різниці прогресії ($d < 0$) добуток $a_1 a_3 a_6$ буде найменшим?

2) Два літаки летять прямолінійно і горизонтально (на постійній висоті) під кутом $120°$ один до одного з однаковою швидкістю v км/год. В деякий момент один з літаків прилетів в точку перетину їхніх маршрутів, а в цей момент другий знаходився на a км від неї (не долетівши до точки перетину). Через скільки часу

після цього моменту відстань між літаками буде найменшою?

3) Вздовж прямолінійної траси послідовно розміщені населені пункти A, B, C, D. Причому $AB = 12$ км, $BC = 3$ км, $CD = 5$ км. Де треба розмістити пошту, щоб сума відстаней від неї до всіх населених пунктів була найменшою?

4) Три пункти A, B, C розташовані так, що $\angle ABC = 60°$. Одночасно з точки A виходить автомобіль, а з точки B — поїзд. Автомобіль рухається в напрямку B із швидкістю 80 км/год, а поїзд — до пункту C із швидкістю 50 км/год. В який момент часу (від початку руху) відстань між поїздом і автомобілем буде найменшою, якщо $AB = 200$ км?

5) Два кораблі рухаються по двом перпендикулярним прямим, що перетинаються у точці O, у напрямку до O. У якийсь момент часу обидва віддалені від O на 65 км. Швидкість першого корабля дорівнює 15 км/год, другого 20 км/год. Від першого відходить моторний човен зі швидкістю 25 км/год.

а) За який найменший час човен може доплисти від першого корабля до другого?

б) За який найменший час човен може доплисти від першого корабля до другого і повернутися на перший корабель?

6) Відстань між пунктами A і B дорівнює 24,5 км. Автомобіль виїжджає з A і їде з постійною швидкістю v км/год до B. У пункту B автомобіль починає рівномірно уповільнювати рух, при тому за кожну годину його швидкість зменшується на 54 км/год і рухається так до повної зупинки. Після того він відразу повертає і їде до A з постійною швидкістю v. Якою повинна бути швидкість v, щоб автомобіль витратив найменший час на шлях від A до зупинки і повернувся назад до A?

7) Дехто найняв пароплав для перевезення вантажу на відстань 1000 км. Він пропонує хазяям пароплаву плату у 1500 золотих монет, але вимагає повернути 9 монет за кожну годину, що пароплав буде в дорозі. Пароплав рухається з постійною швидкістю v. Хазяї повинні сплатити команді по закінченні рейсу $10 \cdot v$ монет. З якою швидкістю повинен плити корабель, щоб хазяї отримали максимальний прибуток? Чому дорівнює такий прибуток?

8) Потрібно побудувати декілька однакових жилих будинків

з загальною площею 40 тис. $м^2$. Витрата на будівництво одного будинку, що має S $м^2$ жилої площі, складається з вартості наземної частини, пропорційної $S\sqrt{S}$, і вартості фундаменту, що пропорційна $\sqrt{S}$. Будівництво будинку жилої площі 1600 $м^2$ коштує 134,8 тис. грн., при тому вартість наземної частини складає 32% вартості фундаменту. Визначити, скільки потрібно побудувати будинків, щоб сума витрат на будівництво 1 $м^2$ жилої площі була найменшою. Знайти цю суму.

9) В два різні сосуди налили розчини солі, при тому у перший — 5 кг, а у другий — 20 кг. При випарюванні води процентний склад солі у першому сосуді збільшився у p раз, а у другому — у q раз. Відомо, що $pq=9$. Яка найбільша кількість води могла при тому випаритися з обох сосудів разом?

10) Бічна сторона рівнобедреної трапеції дорівнює її меншій основі і дорівнює a. Якою має бути більша основа, щоб площа трапеції була найбільшою?

11) Бічна сторона рівнобедреної трапеції дорівнює її меншій основі. Яким має бути кут при більшій основі, щоб площа трапеції була найбільшою?

12) Знайти висоту рівнобедреного трикутника найбільшої площі, вписаного в коло радіуса R.

13) Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Знайти значення довжини його основи, при якому площа трикутника найбільша.

14) Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α. Знайти відношення радіуса вписаного у трикутник кола до радіуса описаного кола. При якому значенні α це відношення найбільше?

15) Знайти найбільший об'єм прямокутного паралелепіпеда, основа якого — квадрат, а периметр бічної грані дорівнює 6 см.

16) Об'єм прямокутного паралелепіпеду дорівнює 4 $см^3$, а основи є квадратами. Знайти найменше значення периметра її бічної грані.

17) Знайти найменший об'єм конуса, описаного навколо кулі одиничного радіусу.

18) Знайти висоту і радіус основи циліндра найбільшого об'єму, вписаного в кулю радіуса R.

19) Вісь циліндра розташована на діагоналі одиничного куба. Основи циліндра дотикаються граней куба (кожна дотикається трьох граней). Знайти найбільш можливе значення об’єму циліндра.

20) Знайти найбільший об’єм прямокутного паралелепіпеда, вписаного в правильну трикутну піраміду об’єму V. Основа паралелепіпеда належить основі піраміди.

21) Точка A має координати $(1; 0)$, точка C належить відрізку $[0; 1]$ вісі абсцис, а точка B міститься на графіку функції $y = x - x^2$. Які координати повинна мати точка B, щоб площа прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) була найбільшою?

22) В якій точці треба провести дотичну до графіка функції

$$y = \frac{1}{5}\sqrt{50 - x^2}, \quad x \in \left(-5\sqrt{2}; 0\right),$$

щоб вона утворила з координатними осями трикутник найменшої площі?

23) Точки A і B мають координати $(-1; -5)$ і $(2; 1)$, а точка C належить графіку функції $y = 4 - x^2$, $x \in [-2; 0]$. Знайти найбільшу площу трикутника ABC і відповідні координати точки C.

24) Точка A і B мають координати $(0; -1)$ і $\left(\frac{1}{5}; 0\right)$, а точка M належить графіку функції $f(x) = x^5 + 2$, $x \geq 0$. Знайти найменшу площу трикутника ABM.

25) Криволінійна трапеція обмежена параболою $y = x^2 + 1$ і відрізками прямих $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. В якій точці M параболи $y = x^2 + 1$, $x \in [1; 2]$ треба провести дотичну, щоб вона відтинала від криволінійної трапеції звичайну трапецію найбільшої площі?

26) У фігуру, обмежену лініями $y = 3x$ і $y = x^2$ вписано прямокутник найбільшої площі так, що дві його вершини лежать на прямій, а дві інші — на параболі. Знайти цю площу.

27) На осі координат знайти точку, сума відстаней якої до точок $M_1(-2; 6)$ і $M_2(-3; 1)$ буде найменшою.

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ

ЗАВДАННЯ 1

1.1. При $a=-1$ $x\in\varnothing$; при $a\neq-1$ $x=a+3$.

1.2. При $b=1$ $x\in\varnothing$; при $b\neq-1$ $x=a+b-1$.

1.3. При $\left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=\pm1 \end{array}\right.$ $x\in\varnothing$; при $\begin{cases} b\neq0 \\ a\neq\pm1 \end{cases}$ $x=a^2b$.

1.4. При $a\in\{0;1\}$ $x\in\varnothing$; при $a\notin\{0;1\}$ $x=a+1$.

1.5. При $a=2$ $x=1$; при $a=4$ $x=5$; при $a\notin\{2;4\}$ $x\in\{a+1;a-1\}$.

1.6. При $a=1$ $x=2$; при $a=-1$ $x=-1$; при $a=0$ $x\in\varnothing$;
при $a\notin\{\pm1;0\}$ $x\in\{a;a+1\}$.

1.7. При $a=-3$ $x=-3$; при $a=3$ $x=6$; при $a=0$ $x\in\varnothing$;
при $a\notin\{\pm3;0\}$ $x\in\{a+3;a\}$.

1.8. При $a\in\{b+1;b+2\}$ $x=3$; при $a\notin\{b+1;b+2\}$ $x\in\{3;a-b\}$.

1.9. При $\begin{cases} a=0 \\ b\in\{0;2\} \end{cases}$ $x\in\varnothing$; при $\left[\begin{array}{l} a=2-b\neq0 \\ \begin{cases} b=0 \\ a\neq0 \end{cases} \end{array}\right.$ $x=0$; при $\begin{cases} a=0 \\ b\notin\{0;2\} \end{cases}$ $x=b$;

при $\begin{cases} a\notin\{2-b;0\} \\ b\neq0 \end{cases}$ $x\in\{a+b;0\}$.

1.10. При $a=2$ $x=4$; при $a\in\{0;1\}$ $x\in\{0;4\}$; при $a=-1$ $x\in\{-2;4\}$;
при $a\notin\{2;0;\pm1\}$ $x\in\{a-1;a^2;4\}$.

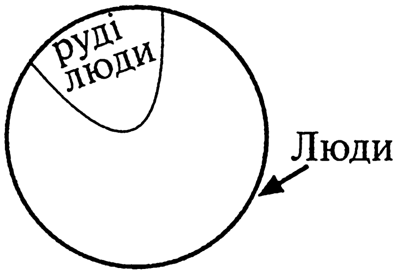
ЗАВДАННЯ 2

2.1. $\Rightarrow$. **2.2.** $\Leftarrow$. **2.3.** $\Leftarrow$. **2.4.** $\Rightarrow$. **2.5.** $\Leftarrow$. **2.6.** $\Leftarrow$. **2.7.** $\Leftarrow$. **2.8.** $\Leftarrow$. **2.9.** $\Leftarrow$. **2.10.** $\Rightarrow$. **2.11.** $\Leftrightarrow$. **2.12.** $\Rightarrow$. **2.13.** $\Leftrightarrow$. **2.14.** $\Leftarrow$. **2.15.** $\Leftarrow$. **2.16.** $\Leftrightarrow$. **2.17.** $\Leftrightarrow$. **2.18.** $\Leftrightarrow$. **2.19.** $\Leftrightarrow$. **2.20.** $\Leftarrow$ (бо у виразі, що праворуч, a не може приймати значення 0). **2.21.** Діти. **2.22.** $\varnothing$. **2.23.** $\varnothing$. **2.24.** $x\in(-\infty;-3)\cup(2;4)$. **2.25.** $(3;5)$. **2.26.** $(0;6)$. **2.27.** $x\in(-\infty;2)\cup$ $\cup(2;\infty)$. **2.28.** $x\in(-\infty;\infty)$. **2.29.** $x=-2$. **2.30.** $a=4$. **2.31.** $|a|=2\Leftrightarrow a=\pm2$.

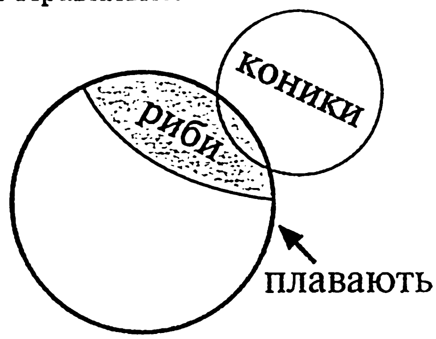
2.36. Правильне:

2.37. Хибне:

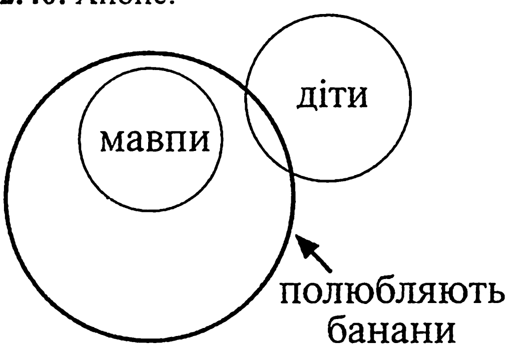
2.38. Хибне:



2.39. Правильне:



2.40. Хибне:



2.41. Правильне.
2.42. Хибне:

2.43. Хибне. **2.44.** Правильне. **2.45.** Правильне. **2.46.** Хибне. **2.47.** Хибне. **2.48.** Правильне. **2.49.** Правильне. **2.50.** Правильне

ЗАВДАННЯ 3

3.1. $x = 2{,}5a - 1{,}5b$.

3.2. При $a = 1$ $x \in \varnothing$; при $a \neq 1$ $x = \dfrac{a+1}{a-1}$.

3.3. При $a = 1$ $x \in R$; при $a \neq 1$ $x = -1$.

3.4. При $a = 2$ $x \in \varnothing$; при $a \neq 2$ $x = \dfrac{a-3}{2-a}$.

3.5. При $\begin{cases} m = -2 \\ n = 0 \end{cases}$ $x \in R$; при $\begin{cases} m = -2 \\ n \neq 0 \end{cases}$ $x \in \varnothing$; при $\begin{cases} m \neq -2 \\ n \neq 0 \end{cases}$ $x = \dfrac{n}{m+2}$.

3.6. При $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ $x \in R$; при $\begin{cases} a = 1 \\ b \neq 1 \end{cases}$ $x \in \varnothing$; при $\begin{cases} a \neq 1 \\ b \neq 1 \end{cases}$ $x = \dfrac{b-a}{a-1}$.

3.7. При $a = 0$ $x \in R$; при $a \neq 0$ $x = c - b$.

3.8. При $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}\right.$ $x \in R$; при $\begin{cases} a = 1 \\ b \neq -1 \end{cases}$ $x \in \varnothing$; при $a \notin \{0;\ 1\}$ $x = \dfrac{b+1}{a-1}$.

3.9. При $m = n$ $x \in R$; при $m \neq n$ $x = 5$.

3.10. При $a = -1$ $x \in R$; при $a \neq -1$ $x = a + 1$.

3.11. При $a=2$ $x\in R$; при $a\neq 2$ $x=a+2$.

3.12. При $a=-b=c$ $x\in R$; при $a=-b\neq c$ $x\in\varnothing$; при $a\neq -b$ $x=\dfrac{c-a}{a+b}$.

3.13. При $m=-n$ $x\in R$; при $m\neq -n$ $x=\dfrac{3(m-n)}{m+n}$.

3.14. При $a=1$ $x\in R$; при $a=0$ $x\in\varnothing$; при $a\notin\{1;\ 0\}$ $x=\dfrac{1}{a}$.

3.15. При $\left[\begin{array}{l} b=0 \\ \begin{cases} a=1 \\ c=-1 \end{cases}\end{array}\right.$ $x\in R$; при $\begin{cases} b\neq 0 \\ c\neq -1 \\ a=1 \end{cases}$ $x\in\varnothing$; при $\begin{cases} b\neq 0 \\ a\neq 1 \end{cases}$ $x=\dfrac{b(c+a)}{1-a}$.

3.16. При $a=b$ $x\in R$; при $a\neq b$ $x=-(a+b)^{-1}$.

ЗАВДАННЯ 4

4.1. $$\frac{x}{m}-x=n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} m\neq 0 \\ (1-m)x=mn \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} m=1 \\ 0\cdot x=n \end{cases} \\ \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1 \\ x=\dfrac{mn}{1-m} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} m=1 \\ n=0 \\ x\in R \end{cases} \\ \begin{cases} m=1 \\ n\neq 0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1 \\ x\neq\dfrac{mn}{1-m} \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: якщо $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ \begin{cases} n\neq 0 \\ m=1 \end{cases}\end{array}\right.$ $x\in\varnothing$; якщо $\begin{cases} m=1 \\ n=0 \end{cases}$ $x\in R$; якщо $\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1 \end{cases}$ $x=\dfrac{mn}{1-m}$.

4.2. $$t+\frac{at}{b}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=0\\ t\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}b\neq 0\\ t(a+b)=b\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=0\\ t\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}b\neq 0\\ a=-b\\ 0\cdot t=b\end{cases}\\ \begin{cases}b\neq 0\\ a\neq -b\\ t=\dfrac{b}{a+b}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}b=0\\ a=-b\end{array}\right.\\ t\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}b\neq 0\\ a\neq -b\\ t=\dfrac{b}{a+b}\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: якщо $b\in\{0;-a\}$ $t\in\varnothing$; якщо $b\in\{0;-a\}$ $t=\frac{b}{a+b}$.

4.3. $$\frac{u}{p}+\frac{u}{q}=m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}p=0\\ q=0\end{array}\right.\\ u\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}p\neq 0\\ q\neq 0\\ (p+q)u=mpq\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}p=0\\ q=0\end{array}\right.\\ u\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}p\neq 0\\ q\neq 0\\ p=-q\\ 0\cdot u=mpq\end{cases}\\ \begin{cases}p\neq 0\\ q\neq 0\\ p\neq -q\\ u=\dfrac{mpq}{p+q}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}p=0\\ q=0\end{array}\right.\\ u\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}p=-q\neq 0\\ m=0\\ u\in R\end{cases}\\ \begin{cases}p=-q\neq 0\\ m\neq 0\\ u\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}p\neq 0\\ q\neq 0\\ p\neq -q\\ u=\dfrac{mpq}{p+q}\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:

якщо $\left[\begin{array}{l}p=0\\ q=0\\ \begin{cases}p=-q\\ m\neq 0\end{cases}\end{array}\right.$ $u\in\varnothing$; якщо $\begin{cases}p=-q\neq 0\\ m=0\end{cases}$ $u\in R$; якщо $\begin{cases}p\neq 0\\ q\neq 0\\ p\neq -q\end{cases}$ $u=\frac{mpq}{p+q}$.

4.4. $$\frac{z}{m}-\frac{z}{n}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=0\\ n=0\end{array}\right.\\ z\in\varnothing\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\ n\neq 0\\ (n-m)z=mn\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=0\\ n=0\end{array}\right.\\ z\in\varnothing\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\ n\neq 0\\ m=n\\ 0\cdot z=mn\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\ n\neq 0\\ m\neq n\\ z=\dfrac{mn}{m-n}\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=0\\ n=0\\ m=n\end{array}\right.\\ z\in\varnothing\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\ n\neq 0\\ m\neq n\\ z=\dfrac{mn}{m-n}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Відповідь: якщо $\left[\begin{array}{l}m=0\\ n=0\\ m=n\end{array}\right.$ $z\in\varnothing$; якщо $\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\ n\neq 0\\ m\neq n\end{array}\right.$ $z=\dfrac{mn}{m-n}$.

4.5. $$\frac{y}{a}-b=\frac{y}{b}-a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.\\ y\in\varnothing\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a\neq 0\\ b\neq 0\\ (b-a)y=(b-a)ab\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.\\ y\in\varnothing\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a\neq 0\\ b\neq 0\\ b=a\\ y\in R\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a\neq 0\\ b\neq 0\\ b\neq a\\ y=ab\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Відповідь: якщо $\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.$ $y\in\varnothing$; якщо $b=a\neq 0$ $y\in R$; якщо $\left\{\begin{array}{l}a\neq 0\\ b\neq 0\\ b\neq a\end{array}\right.$ $y=ab$.

4.6. $t+\frac{b^2}{a}=\frac{bt}{a}+a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ t\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq 0\\ (a-b)t=a^2-b^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ t\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq 0\\ b=a\\ t\in R\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq 0\\ b\neq a\\ t=a+b\end{cases}\end{array}\right.$

Відповідь: при $a=0$ $t\in\varnothing$; при $b=a\neq 0$ $t\in R$; при $a\neq 0$ і $b\neq a$ $t=a+b$.

4.7. $\frac{x-m}{n}=\frac{x-n}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}n=0\\ m=0\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}n\neq 0\\ m\neq 0\\ (m-n)x=m^2-n^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}n=0\\ m=0\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}n\neq 0\\ m\neq 0\\ m=n\\ x\in R\end{cases}\\ \begin{cases}n\neq 0\\ m\neq 0\\ m\neq n\\ x=m+n\end{cases}\end{array}\right.$

Відповідь:

при $\left[\begin{array}{l}n=0\\ m=0\end{array}\right.$ $x\in\varnothing$;

при $m=n\neq 0$ $x\in R$;

при $\begin{cases}n\neq 0\\ m\neq 0\\ m\neq n\end{cases}$ $x=m+n$.

4.8. $\frac{a+x}{b}-2=\frac{x-b}{a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq 0\\ b\neq 0\\ (a-b)x=-a^2-b^2+2ab\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \\ x\in\varnothing \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ (b-a)x=(b-a)^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \\ x\in\varnothing \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a=b\neq 0 \\ x\in R \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ b\neq a \\ x=b-a \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Відповідь:

якщо $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$ $x\in\varnothing$; якщо $b=a\neq 0$ $x\in R$; якщо $\left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ b\neq a \\ b\neq 0 \end{array}\right.$ $x=b-a$.

4.9. $$\frac{z-a}{a}-m=\frac{z-b}{b}-n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \\ z\in\varnothing \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ (b-a)z=ab(m-n) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \\ z\in\varnothing \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ a=b \\ 0\cdot z=(m-n)b^2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ a\neq b \\ z=\dfrac{ab(m-n)}{b-a} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \\ z\in\varnothing \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a=b\neq 0 \\ m=n \\ z\in R \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a=b\neq 0 \\ m\neq n \\ z\in\varnothing \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ a\neq b \\ z=\dfrac{ab(m-n)}{b-a} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Відповідь:

якщо $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ \left\{\begin{array}{l} a=b \\ m\neq n \end{array}\right. \end{array}\right.$ $z\in\varnothing$;

якщо $\left\{\begin{array}{l} a=b\neq 0 \\ m=n \end{array}\right.$ $x\in R$;

якщо $\left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ a\neq b \end{array}\right.$ $z=\dfrac{ab(m-n)}{b-a}$.

4.10. $m+\frac{n+y}{n}=n-\frac{m+y}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} n=0\\ m=0\end{array}\right.\\ y\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases} n\neq 0\\ m\neq 0\\ (m+n)y=mn(n-m-2)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} n=0\\ m=0\end{array}\right.\\ y\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases} n\neq 0\\ m\neq 0\\ m=-n\\ 0\cdot y=-n^2(2n-2)\end{cases} \\ \begin{cases} n\neq 0\\ m\neq 0\\ m\neq -n\\ y=\dfrac{mn(n-m-2)}{m+n}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} n=0\\ m=0\end{array}\right.\\ y\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases} m=-n\neq 0\\ n=1\\ y\in R\end{cases} \\ \begin{cases} m=-n\neq 0\\ n\neq 1\\ y\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases} n\neq 0\\ m\neq 0\\ m\neq -n\\ y=\dfrac{mn(n-m-2)}{m+n}\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:
при $\left[\begin{array}{l} n=0\\ m=0\\ m=-n\neq -1\end{array}\right.$ $y\in\varnothing$;
при $m=-n=-1$ $y\in R$;
при $\begin{cases} n\neq 0\\ m\neq 0\\ m\neq -n\end{cases}$ $y=\dfrac{mn(n-m-2)}{m+n}$.

4.11. $\frac{t+p}{q}-\frac{q}{p}=\frac{t-q}{p}+\frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{t}{q}=\frac{t}{p} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} q=0\\ p=0\end{array}\right.\\ t\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases} q\neq 0\\ p\neq 0\\ (p-q)t=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} q=0\\ p=0\end{array}\right.\\ t\in\varnothing\end{cases} \\ \begin{cases} q\neq 0\\ p\neq 0\\ p=q\\ t\in R\end{cases} \\ \begin{cases} q\neq 0\\ p\neq q\\ p\neq 0\\ t=0\end{cases}\end{array}\right.$

Відповідь: якщо $\left[\begin{array}{l} q=0\\ p=0\end{array}\right.$ $t\in\varnothing$; якщо $p=q\neq 0$ $t\in R$; якщо $\begin{cases} p\neq 0\\ q\neq 0\\ p\neq q\end{cases}$ $t=0$.

4.12. $$\frac{a+t}{a}-m=\frac{b+t}{b}-n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=0\\ b=0\end{array}\right.\\ t\in\varnothing\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} a\ne 0\\ b\ne 0\\ (b-a)t=ab(m-n)\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=0\\ b=0\end{array}\right.\\ t\in\varnothing\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} a\ne 0\\ b\ne 0\\ b=a\\ 0\cdot t=ab(m-n)\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} a\ne 0\\ b\ne 0\\ b\ne a\\ t=\dfrac{m-n}{b-a}ab\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=0\\ b=0\\ \left\{\begin{array}{l} b=a\ne 0\\ m\ne n\end{array}\right.\end{array}\right.\\ t\in\varnothing\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} b=a\ne 0\\ m=n\\ t\in R\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} a\ne 0\\ b\ne 0\\ b\ne a\\ t=\dfrac{m-n}{b-a}ab\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Відповідь:

якщо $\left[\begin{array}{l} a=0\\ b=0\\ \left\{\begin{array}{l} a=b\\ m\ne n\end{array}\right.\end{array}\right.$ $t\in\varnothing$;

якщо $\left\{\begin{array}{l} a=b\ne 0\\ m=n\end{array}\right.$ $t\in R$;

якщо $\left\{\begin{array}{l} a\ne 0\\ b\ne 0\\ b\ne a\end{array}\right.$ $t=\dfrac{m-n}{b-a}ab$.

4.13. $$\frac{x-m}{m}+p=\frac{x-n}{n}+q \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m=0\\ n=0\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} m\ne 0\\ n\ne 0\\ (n-m)x=(q-p)mn\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m=0\\ n=0\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} m=n\ne 0\\ p=q\\ x\in R\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} m=n\ne 0\\ p\ne q\\ x\in\varnothing\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} m\ne 0\\ n\ne 0\\ n\ne m\\ x=\dfrac{q-p}{n-m}mn\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Відповідь:

якщо $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ n=0 \\ \begin{cases} m=n \\ p\neq q \end{cases} \end{array}\right.$ $x\in\varnothing$; якщо $\begin{cases} m=n\neq 0 \\ p=q \end{cases}$ $x\in R$; якщо $\begin{cases} m\neq 0 \\ n\neq 0 \\ n\neq m \end{cases}$ $x=\dfrac{q-p}{n-m}mn$.

4.14. $$\frac{y+d}{c}-\frac{y-c}{d}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} c=0 \\ d=0 \end{array}\right. \\ y\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} c\neq 0 \\ d\neq 0 \\ (c-d)y=(c-d)^2 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} c=0 \\ d=0 \end{array}\right. \\ y\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} c=d\neq 0 \\ y\in R \end{cases} \\ \begin{cases} c\neq 0 \\ d\neq 0 \\ c\neq d \\ y=c-d \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: при $\left[\begin{array}{l} c=0 \\ d=0 \end{array}\right.$ $y\in\varnothing$; при $c=d\neq 0$ $y\in R$; при $\begin{cases} c\neq 0 \\ d\neq 0 \\ c\neq d \end{cases}$ $y=c-d$.

4.15. $$\frac{x-m}{n+m}=\frac{x-n}{n-m}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n=\pm m \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} n\neq\pm m \\ 2mx=m^2+n^2 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n=\pm m \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} n\neq\pm m \\ m=0 \\ 0\cdot x=n^2 \end{cases} \\ \begin{cases} n\neq\pm m \\ m\neq 0 \\ x=\dfrac{m^2+n^2}{2m} \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} n=\pm m \\ m=0 \end{array}\right. \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} n\neq\pm m \\ m\neq 0 \\ x=\dfrac{m^2+n^2}{2m} \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: якщо $m\in\{0;\ \pm n\}$ $x\in\varnothing$; якщо $m\notin\{0;\ \pm n\}$ $x=\dfrac{m^2+n^2}{2m}$.

4.16. $$\frac{a+bz}{a+b}=\frac{c+dz}{c+d}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-b\\ d=-c\end{array}\right.\\ z\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq -b\\ d\neq -c\\ (cb-ad)z=cb-ad\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-b\\ d=-c\end{array}\right.\\ z\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq -b\\ d\neq -c\\ cb=ad\\ z\in R\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq -b\\ d\neq -c\\ cb\neq ad\\ z=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:

якщо $\begin{cases}a=-b\\ d=-c\end{cases}$ $z\in\varnothing$; якщо $\begin{cases}a\neq -b\\ d\neq -c\\ cb=ad\end{cases}$ $z\in R$; якщо $\begin{cases}a\neq -b\\ d\neq -c\\ cb\neq ad\end{cases}$ $z=1$.

4.17. $$\frac{m+nx}{m-n}=\frac{p+qx}{p-q}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=n\\ p=q\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}m\neq n\\ p\neq q\\ (np-mq)x=mq-np\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=n\\ p=q\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}m\neq n\\ p\neq q\\ np=mq\\ x\in R\end{cases}\\ \begin{cases}m\neq n\\ p\neq q\\ np\neq mq\\ x=-1\end{cases}\end{array}\right..$$

Відповідь:

якщо $\begin{cases}m=n\\ p=q\end{cases}$ $x\in\varnothing$; якщо $\begin{cases}m\neq n\\ p\neq q\\ np=mq\end{cases}$ $x\in R$; якщо $\begin{cases}m\neq n\\ p\neq q\\ np\neq mq\end{cases}$ $x=1$.

4.18. $$\frac{y}{a-b}-\frac{3}{a+b}=\frac{4by}{a^2-b^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\pm b\\ y\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq\pm b\\ (3b-a)y=3(b-a)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\pm b \\ y\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq\pm b \\ a=3b \\ 0\cdot y=3(b-a) \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq\pm b \\ a\neq 3b \\ y=\dfrac{3(b-a)}{3b-a} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=\pm b \\ a=3b \end{array}\right. \\ y=\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq\pm 3b \\ a\neq 3b \\ y=\dfrac{3(b-a)}{3b-a} \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
при $a\in\{\pm b;\ \ 3b\}$ $\ y\in\varnothing$;

при $a\notin\{\pm b;\ \ 3b\}$ $\ y=\dfrac{3(b-a)}{3b-a}$.

4.19. $$\frac{z}{a}+\frac{z}{b-a}=\frac{a}{a+b} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\pm b \end{array}\right. \\ z\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq\pm b \\ zb(b+a)=a^2(b-a) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\pm b \end{array}\right. \\ z\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq\pm b \\ zb=\dfrac{a^2(b-a)}{b+a} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\pm b \end{array}\right. \\ z\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq\pm b \\ b=0 \\ 0\cdot z=a^2\dfrac{-a}{a} \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq\pm b \\ b\neq 0 \\ z=\dfrac{a^2(b-a)}{b(b+a)} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\pm b \\ b=0 \end{array}\right. \\ z\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq\pm b \\ b\neq 0 \\ z=\dfrac{a^2(b-a)}{b(b+a)} \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:
при $\left[\begin{array}{l} a\in\{0;\ \ \pm b\} \\ b=0 \end{array}\right.$ $\ z\in\varnothing$;

при $\begin{cases} a\notin\{0;\ \ \pm b\} \\ b\neq 0 \end{cases}$ $\ z=\dfrac{a^2(b-a)}{b(b+a)}$.

ЗАВДАННЯ 5

5.1а. $2x-3y-a=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{a}{3}$. Тоді множина прямих $y=\frac{2}{3}x+c$, де $\begin{cases} c\in R \\ c\neq -a/3 \end{cases}$ — шукана. **5.1б.** $x=c\neq 3$. **5.1в.** $y=a\neq 2$. **5.1г.** $y=-\frac{a}{2}x+c$, де $c\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

5.1д. При $a=0$ $x=c$, де $\begin{cases} c\in R \\ c\neq 1/2 \end{cases}$; при $a\neq 0$ $y=-\frac{2}{a}x+c$, де $\begin{cases} c\in R \\ c\neq \frac{1}{a} \end{cases}$.

5.2а. $y=4$. **5.2б.** при $a\neq 0$ $y=a$. **5.3а.** $y=\mathrm{tg}\,60°\cdot x+c$ **Відповідь:** $y=\sqrt{3}\cdot x+c$, де $c\in R$.

5.3б. $\left[\begin{array}{l} y=\mathrm{tg}(90°-60°)x+c \\ y=\mathrm{tg}(180°-(90°-60°))x+c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\mathrm{tg}30°x+c \\ y=-\mathrm{tg}30°x+c \end{array}\right.$ **Відповідь:** $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x+c$, де $c\in R$.

5.4а. $2x-3y-a=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{a}{3}$. Тоді множина прямих, які перпендикулярні даній: $y=-\frac{3}{2}x+c$. Точка $A(0;\ 2)$ належить шуканій прямій: $2=0+c$, тобто $c=2$. **Відповідь:** $y=-\frac{3}{2}x+2$.

5.4б. $ax+2y-1=0 \Leftrightarrow y=-\frac{a}{2}x+\frac{1}{2}$. При $a=0$ маємо пряму $y=\frac{1}{2}$, яка паралельна вісі OX. Тоді перпендикулярною до неї буде будь-яка пряма $x=c$. За умовою точка $A(0;\ 2)$ належить шуканій прямій, тоді маємо $x=c=0$.

При $a\neq 0$ перпендикулярною до заданої прямої буде пряма $y=\frac{2}{a}x+l$, при умові $2=\frac{2}{a}\cdot 0+l$, маємо $y=\frac{2}{a}x+2$. **Відповідь:** при $a=0$ $x=0$; при $a\neq 0$ $y=\frac{2}{a}x+2$.

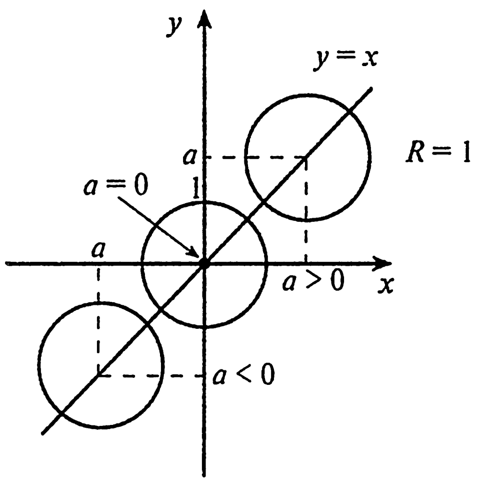
5.4в. При $a=0$ $y=2$; при $a\neq 0$ $y=\frac{a}{2}x+2$.

5.5а. $y=0$ є розв'язком і першого і другого рівняння:

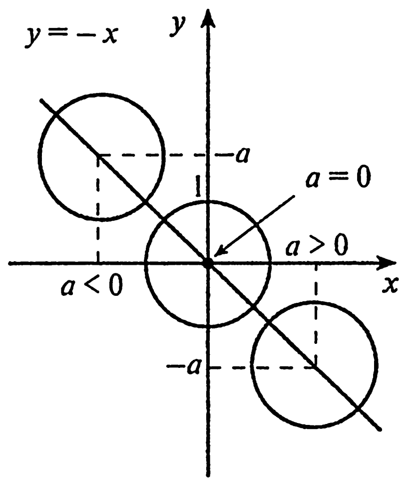
$$\begin{cases} mx+m+6=0 \\ (m+1)x+m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx=-m-6 \\ (m+1)x=2-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\notin\{0;-1\} \\ x=\dfrac{-(m+6)}{m} \\ x=\dfrac{2-m}{m+1} \end{cases}$$ **Відповідь:** $m=-\frac{2}{3}$.

5.5б. $m=0$. **5.6а.** $x^2+y^2=R^2$. **5.6б.** $(x+1)^2+(y-1)^2=R^2$. **5.6в.** $(x-a)^2+y^2=R^2$.
5.7г. $x^2+(y-b)^2=R^2$. **5.6д.** $(x-a)^2+(y-a)^2=R^2$.

5.7а. 2 розв'язки при $a\in R$ бо маємо таку графічну інтерпретацію:



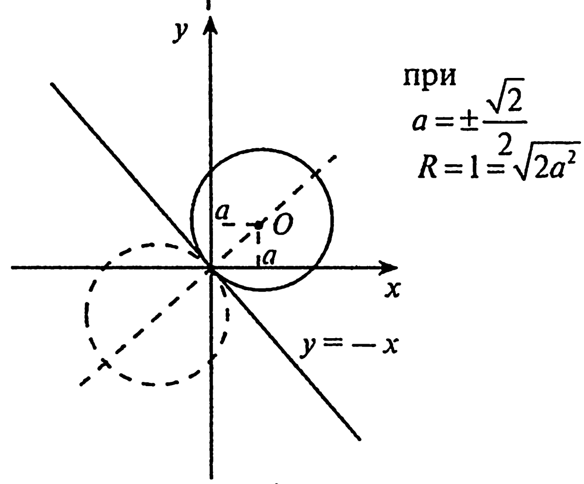
5.7б. 2 розв'язки при $a\in R$ бо маємо таку графічну інтерпретацію:



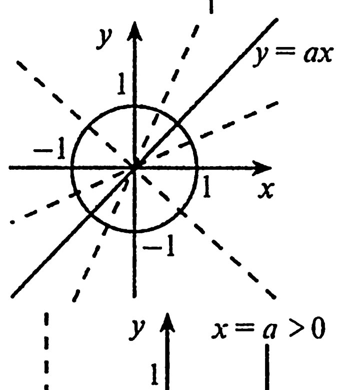
5.7в. 1 при $a\in\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; 0

при $\left[\begin{array}{l} a>\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a<-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$; 2 при $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

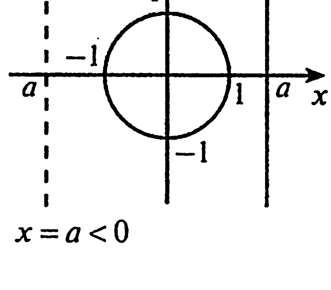
Порада: намалюйте графічну інтерпретацію виразу при $|a|>\frac{\sqrt{2}}{2}$ та $|a|<\frac{\sqrt{2}}{2}$.



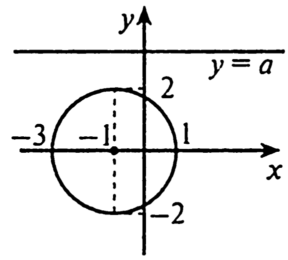
5.8. 2 розв'язки при $a\in R$.
$x^2+y^2=1$ — коло радіуса 1 з центром $(0;0)$. $y=ax$ — пряма, що проходить через точку $(0;0)$ і обертається навколо неї при зміні значення a .



5.9. $\varnothing$ при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$;
1 розв'язок при $a=\pm 1$; 2 розв'язки при $a\in(-1;1)$.

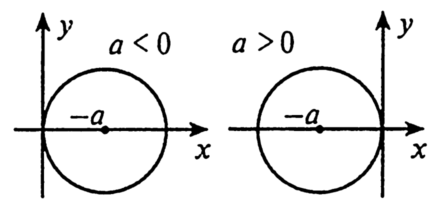


5.10. при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ $x \in \varnothing$;
при $a = \pm 2$ — 1 розв'язок;
при $a \in (-2; 2)$ — 2 розв'язки.



5.11. 1 розв'язок при $a = \pm\sqrt{2}$; 2 розв'язки при $a \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$; $\varnothing$ при $a \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \infty\right)$. *Порада:* якщо підставити значення y з першого рівняння системи в друге, то отримаємо квадратне рівняння на x, дискримінант якого треба порівняти з нулем. Проте можна здійснити розв'язання і графічною інтерпретацією даної системи.

5.12. При $a = 0$ — 1 розв'язок; при $a \neq 0$ — 2 розв'язки. *Порада:* коло $(x+a)^2 + y^2 = a^2$ переміщується вздовж (OX), центр $(-a; 0)$, $R = |a|$; при $a = 0$ маємо точку в початку координат.

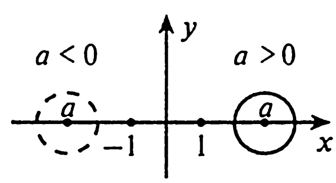


5.13. 1 при $a \in R$.

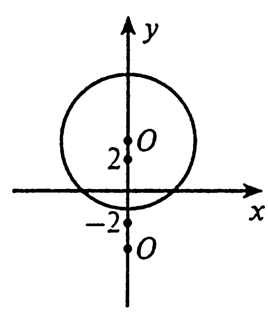
Коло $(x+a)^2 + y^2 = a^2$ має $R = |a|$ і при всіх $a \neq 0$ дотикається вісі (OY), а при $a = 0$ перетворюється на точку у початку координат.

5.14. $\varnothing$ при $a \in R$.

Коло $(x-a)^2 + y^2 = a^2 - 1$ має радіус $\sqrt{a^2 - 1}$ менший за $|a|$ — відстані від центра кола до (OY).



5.15. При $a \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ $\varnothing$; при $a \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; \infty\right)$ — 2 розв'язки. *Порада:* **І сп.** $x^2 + \left(y^2 - \sqrt{a^2 - 2}\right)^2 = a^2 - 1$ при умові $a^2 - 2 \geq 0$ — коло радіуса $\sqrt{a^2 - 1}$, з центром $\left(0; \sqrt{a^2 - 2}\right)$ на вісі (OY). Відстань центра кола від початку координат $\sqrt{a^2 - 2}$ менша за радіус кола $\sqrt{a^2 - 1}$.



ІІ сп. Зауважимо, при $y = 0$ перше рівняння має вигляд $x^2 + a^2 - 2 = a^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \geq 2 \\ x^2 = 1 \end{cases}$, тобто при всіх $|a| \geq \sqrt{2}$ маємо 2 точки перетину кола з віссю (OX) при $x = \pm 1$.

5.16. а) $y = ax$, $a \in \left(-\infty; -2\sqrt{5}/5\right) \cup \left(2\sqrt{5}/5; \infty\right)$; б) $y = \pm x \cdot 2\sqrt{5}/5$; в) $y = ax$, $a \in \left(-2\sqrt{5}/5; 2\sqrt{5}/5\right)$. *Порада:* треба підставити $y = ax$ в рівняння кола і проаналізувати значення дискримінанту отриманого квадратного рівняння.

ЗАВДАННЯ 6

6.1. При $a=2$ $\{x;y\}\subset\varnothing$; при $a=-2$ $\begin{cases}x\in R\\ y=\dfrac{1-x}{2}\end{cases}$;

при $a\notin\{\pm2\}$ $\left(1-\dfrac{a^2}{3(a-2)};\dfrac{2}{3(a-2)}\right)$.

6.2. При $a=-2$ $\{x;y\}\subset\varnothing$; при $a=2$ $\begin{cases}x\in R\\ y=-\dfrac{2}{3}x-1\end{cases}$;

при $a\notin\{\pm2\}$ $\left(\dfrac{3}{a+2};-\dfrac{6}{a+2}\right)$.

6.3. При $a=3$ $\{x;y\}\subset\varnothing$; при $a=1$ $\begin{cases}x\in R\\ y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}\end{cases}$;

при $a\notin\{3;1\}$ $\left(\dfrac{4(a-2)}{a-3};\dfrac{1-a}{a-3}\right)$.

6.4. При $a=-1$ $\begin{cases}x\in R\\ y=1-x\end{cases}$; при $a=\dfrac{1}{3}$ $\{x;y\}\subset\varnothing$;

при $a\notin\left\{-1;\dfrac{1}{3}\right\}$ $\left(\dfrac{2(a-1)}{3a-1};\dfrac{a+1}{1-3a}\right)$.

Порада: при обрахунках останнього випадку зручно домножити перше рівняння на 2 і додати до другого.

6.5. При $a\neq-8$ $\left(\dfrac{44}{a+8};\dfrac{8(3-a)}{3(a+8)}\right)$.

6.6. При $a\neq\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{a}{2a-1}-\dfrac{a}{2};\dfrac{2a^2-a+1}{2(1-2a)}\right)$.

Порада: від першого рівняння системи відняти друге.

6.7. При $a\in\left\{\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$.

6.8. При $a=0$.

Порада: не забудь перевірити, що буде з системою коли $a=0$ або $a-2=0$.

6.9. $a\in\{4;3;0\}$. **6.10.** При $a=3$ $y\in R$, $x=1-\dfrac{a}{2}(y-1)$ (перевірка: при $a=0$ $x\in\varnothing$).

6.11. При $a\in\{\pm1\}$ $x\in R$, $y=2-ax$. **6.12.** При $a=\dfrac{1}{2}$ $x\in R$, $y=-x+\dfrac{5}{4}$.

6.13. $b \neq -1$. *Порада:* у рівняннях системи перенести доданки, що містять x або y ліворуч. **6.14.** $b \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$ (бо при $b = 1$ — безліч розв'язків).

6.15. $b \in R$. **6.16.** $b \neq 0$. *Порада:* випадок при $b = 0$ перевірити окремо.

6.17. $a \notin \{5; -3\}$. *Порада:* не забудьте проаналізувати випадок $a = 5$.

ЗАВДАННЯ 7

7.1. Якщо $\left[\begin{array}{l} a = \pm 5 \\ b = 0 \end{array}\right.$ $x \in \varnothing$; якщо $\begin{cases} a \neq \pm 5 \\ b \neq 0 \end{cases}$ $x = \frac{4}{5}ab$.

7.2. Якщо $a = 0$ $x \in \varnothing$; якщо $a \neq 0$ $x = \frac{2 - a^2}{a}$.

7.3. При $\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ \begin{cases} b = d \neq 0 \\ c \neq 2 \end{cases} \\ d + b = cd \end{array}\right.$ $x \in \varnothing$; при $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = d = 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b = d \neq 0 \\ c = 2 \end{cases} \end{array}\right.$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. при $\begin{cases} c \neq 0 \\ b \neq d \\ d + b \neq dc \end{cases}$

$x = \frac{d + b - cd}{b - d}$.

7.4. Якщо $m \neq \pm n$ $x \in \varnothing$; якщо $\begin{cases} m \neq 0 \\ n = 0 \end{cases}$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

якщо $\begin{cases} m \neq \pm n \\ n \neq 0 \end{cases}$ $x = m^2 - n^2$.

7.5. Якщо $c \in \{0; 1\}$ $x \in \varnothing$; якщо $c \notin \{0; 1\}$ $x = \frac{c}{c - 1}$.

7.6. Якщо $a = 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; якщо $a \neq 0$ $x = \frac{10}{7}a$.

7.7. Якщо $a = 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; якщо $a \neq 0$ $x = a/6$.

7.8. Якщо $\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ \begin{cases} b^2 = mc \\ m \notin \{0; 1\} \end{cases} \end{array}\right.$ $x \in \varnothing$; якщо $\begin{cases} c \neq 0 \\ b^2 = mc \\ m \in \{0; 1\} \end{cases}$ $x \in (-\infty; m) \cup (m; \infty)$;

якщо $\begin{cases} c \neq 0 \\ b^2 \neq mc \end{cases}$ $x = \frac{b^2(m - 1)}{b^2 - mc}$.

7.9. При $a = -1$ $x \in \varnothing$; при $a \in \{0; 1\}$ $x \in (-\infty; a) \cup (a; \infty)$; при $a \notin \{0; \pm 1\}$ $x = a^2 + 1$. *Порада:* розкладіть на множники чисельники і знаменники усіх дробів.

7.10. Якщо $k \in \{1;\ \pm\sqrt{2}\}$ $x \in \varnothing$; якщо $k \notin \{1;\ \pm\sqrt{2}\}$ $x = \frac{2 - k}{2(k - 1)}$.

7.11. Якщо $a \in \left\{0; \pm\frac{5}{6}; 1\right\}$ $x \in \varnothing$; якщо $a \notin \left\{0; \pm\frac{5}{6}; 1\right\}$ $x = 1 + \frac{5}{3a}$.

7.12. Якщо $a \in \left\{-3;\ -2;\ \frac{1}{2}\right\}$ $x \in \varnothing$; якщо $a \notin \left\{-3;\ -2;\ \frac{1}{2}\right\}$ $x = \frac{2a-1}{a+3}$.

7.13. При $\left[\begin{array}{l} n=0 \\ m \in \{0;1\} \\ n=m \neq 1 \end{array}\right.$ $x \in \varnothing$; при $n=m=1$ $x \in (-\infty;1) \cup (1;\infty)$;

при $\begin{cases} n \neq 0 \\ m \notin \{0;1\} \\ n \neq m \end{cases}$ $x = \frac{m(n-1)}{n-m}$.

7.14. Якщо $\left[\begin{array}{l} b \in \{0;\ -a\} \\ c=0 \end{array}\right.$ $x \in \varnothing$; якщо $\begin{cases} b \notin \{0;\ -a\} \\ c \neq 0 \end{cases}$ $x = c$.

ЗАВДАННЯ 8

8.1. При $m = \pm 1$ $x = m$; при $m \in (-1;1)$ $x \in \varnothing$;

при $m \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$ $x = m \pm \sqrt{m^2-1}$.

8.2. При $k=0$ $x=1$; при $k=5$ $x=-4$; при $k \in (0;5)$ $x \in \varnothing$;

при $k \in (-\infty;0) \cup (5;\infty)$ $x = 1-k \pm \sqrt{k(k-5)}$.

8.3. При $a=0$ $x=\frac{4}{3}$; при $a=-\frac{9}{16}$ $x=\frac{8}{3}$; при $a<-\frac{9}{16}$ $x \in \varnothing$;

при $\begin{cases} a>-\frac{9}{16} \\ a \neq 0 \end{cases}$ $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16a}}{2a}$.

8.4. При $b=0$ $x=2$; при $b=\frac{1}{8}$ $x=4$; при $b>1/8$ $x \in \varnothing$;

при $\begin{cases} b<\frac{1}{8} \\ b \neq 0 \end{cases}$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8b}}{2b}$.

8.5. При $b=-1$ $x=1$; при $b \in \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ $x = -\frac{b}{b+1}$;

при $b \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $x \in \varnothing$;

при $b \in (-\infty;-1) \cup \left(-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\infty\right)$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{2b^2-1}}{b+1}$.

8.6. При $a \in (-\infty;-2]$ $x \in \varnothing$; при $a=2$ $x=\frac{1}{8}$;

при $a \in (-2;2)\cup(2;\infty)$ $x = \dfrac{a+2\pm 2\sqrt{a+2}}{a^2-4}$.

8.7. Так, при умові $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2-4ac \geq 0 \end{cases}$. *Порада:* пригадай теорему Вієта (ОК-9).

8.8. $k \in \{3;4\}$.

8.9. $(x_1-x_2)^2 = x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-4x_1x_2 = 2^2-4a = 16$ при умові існування коренів $1-a>0$. **Відповідь:** $a=-3$.

8.10. $x^2-2a(x-1)-1=0 \Leftrightarrow x^2-2ax+2a-1=0$

$x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 = (2a)^2-2(2a-1) = x_1+x_2 = 2a$. Маємо $a \in \{1/2;1\}$ при умові $a^2-2a+1 \geq 0$. **Відповідь:** $a \in \{1/2;1\}$.

8.11. $m=-1$. **8.12.** $a=4$. **8.13.** $a \in \{0;\pm 4;\pm 1/4\}$. *Порада:* знайти значення $x_{1,2}$.

8.14. Нехай шукане рівняння має вигляд $t^2+bt+c=0$, де $t_1 = \dfrac{1}{x_1+1}$, $t_2 = \dfrac{1}{x_2+1}$.

Тоді

$$b = -(t_1+t_2) = -\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}\right) = -\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1} = = -\frac{-1/a+2}{\frac{2}{a}-\frac{1}{a}+1} = \frac{1-2a}{1+a};$$

$$c = t_1\cdot t_2 = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} = = \frac{1}{x_1x_2+x_1+x_2+1} = \frac{a}{1+a}$$

Умова існування коренів вихідного рівняння: $\begin{cases} 1-4\cdot 2\cdot a \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$. Умова існування коренів шуканого рівняння $a+1 \neq 0$.

Відповідь: при $a \in (-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup\left(0;\dfrac{1}{8}\right]$ $(a+1)x^2+(1-2a)x+a=0$.

8.15. $a=2$.

8.16. $\varnothing$ (Не забудьте про умову існування коренів вихідного рівняння $a^2-2(a^2+2) = -a^2-4 \geq 0$. Якщо розпочати розв'язання саме з неї, то відповідь стає очевидною).

8.17. $a \in \left\{1;-\dfrac{11}{3}\right\}$. *Порада:* співвідношення $x_1-x_2 = x_1x_2$ піднести до квадрату, і використати теорему Вієта.

8.18. $\begin{cases} \dfrac{3a}{a+2} > 0 \\ a^2-3a(a+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{a+2} > 0 \\ a(a+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty;\ -2)\cup(0;\ \infty) \\ a \in [-3;0] \end{cases}$

Відповідь: $a \in [-3;\ -2)$.

8.19. $\begin{cases} a+4>0 \\ a+1<0 \\ (a+1)^2-4(a+4)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-4 \\ a<-1 \\ (a-1)^2\ge 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-4 \\ a<-1 \\ |a-1|\ge 4 \end{cases}$

Відповідь: $a\in(-4;\ -3]$.

8.20. Якщо $a+1=0$ маємо $-2x+2=0$, тобто розв'язком рівняння є $x=1$, число додатнє. Якщо $a+1\ne 0$, то вимагаємо

$$\begin{cases} \dfrac{a+3}{a+1}>0 \\ \dfrac{2a}{a+1}\le 0 \\ a^2-(a+3)(a+1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;-3)\cup(-1;\infty) \\ a\in(-1;0] \\ a\le -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Відповідь: $a\in\left[-1;-\dfrac{3}{4}\right]$.

8.21. Якщо $a=0$ маємо $6x+2=0$ і розв'язком є від'ємне число. Якщо $a\ne 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{a+2}{a}\ge 0 \\ \dfrac{a+3}{a}\le 0 \\ (a+3)^2-a(a+2)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;-2]\cup(0;\infty) \\ a\in[-3;0) \\ a\ge -\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left[-2\dfrac{1}{4};-2\right].$$

Відповідь: $a\in\left[-2\dfrac{1}{4};-2\right]$.

8.22.

$$\begin{cases} a^2-2a-3>0 \\ a-2>0 \\ (a-2)^2-a^2+2a+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;-1)\cup(3;\infty) \\ a>2 \\ a<3{,}5 \end{cases}$$

Відповідь: $a\in(3;3{,}5)$.

8.23. $a^2+a(x-1)=2+\dfrac{3{,}5}{x}\Leftrightarrow\begin{cases} ax^2+(a^2-a-2)x-3{,}5=0 \\ x\ne 0 \end{cases}$

З умови випливає, що $x_2=-x_1\ne 0$. Тоді

$$x_1\cdot x_2=-x_1^2=-\frac{3{,}5}{a}<0,\ \text{а}\ x_1+x_2=0=\frac{a^2-a-2}{a}.$$

Зазначимо, що з $-\dfrac{3{,}5}{a}<0$ випливає додатність дискримінанта рівняння (див. **ОК-9**).

Шукані значення a знайдемо з умови

$\begin{cases} a>0 \\ a^2-a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a\in\{-1;\ 2\} \end{cases} \Leftrightarrow a=2$. **Відповідь:** $a=2$.

8.24. За теоремою Вієта маємо: $x_1+x_2=-a$; $x_1\cdot x_2=a-2$. Тоді

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=a^2-2a+4.$$

Тобто $x_1^2+x_2^2=(a-1)^2+3$ і приймає найменше значення, якщо $a=1$ і при умові існування коренів. Перевіримо значення дискримінанта при $a=1$: $a^2-4(a-2)=1+4=5>0$. **Відповідь:** $a=1$.

8.25. За теоремою Вієта маємо:

$$x_1+x_2=a;\ x_1\cdot x_2=a^2-3a-2. \text{ Тоді}$$

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=a^2-2a^2+6a+4=-a^2+6a+4.$$

Тобто $x_1^2+x_2^2=-(a-3)^2+13$ і приймає найбільше значення якщо $a=3$ при умові існування коренів. Перевіримо значення дискримінанту при $a=3$: $a^2-4(a^2-3a-2)=9-4(9-9-2)=17>0$. **Відповідь:** $a=3$.

8.26. Спільний корінь x_0 задовольняє обидва рівняння:

$$\left.\begin{cases} x_0^2-8x_0+5a=0 \\ 2x_0^2+x_0-7a=0 \end{cases}\right| \Rightarrow 17x_0-17a=0 \text{, тобто } x_0=a.$$

Підставляючи це значення в перше рівняння, отримаємо $a^2-8a+5a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=3 \end{array}\right.$.

Відповідь: $a\in\{0;3\}$.

8.27. Спільний корінь x_0 задовольняє обидва рівняння:

$$\begin{cases} x_0^2-2ax_0+a+1=0 \\ x_0^2+ax_0-a-1=0 \end{cases} \Rightarrow -3ax_0+2a+2=0 \text{, або}$$

$$3ax_0=2a+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ 0=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ x_0=\dfrac{2a+2}{3a} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x_0=\frac{2a+2}{3a}.$$

Підставляючи x_0 в друге рівняння отримаємо

$$\frac{(2a+2)^2}{9a^2}+\frac{2a+2}{3}-a-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a^3-a^2-8a-4=0$$

Очевидним коренем останнього є $a=2$, і $3a^3-a^2-8a-4=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{rrrr|l} 3a^3 & -a^2 & -8a & -4 & a-2 \\ \hline 3a^3 & -6a^2 & & & 3a^2+5a+2 \\ \hline & 5a^2 & -8a & & \\ & 5a^2 & -10a & & \\ \hline & & 2a & -4 & \\ & & 2a & -4 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

$\Leftrightarrow (a-2)(a+1)\left(a+\frac{2}{3}\right)=0$

$3a^2+5a+2=0 \quad d=25-24=1$

$a_{1,2}=\frac{-5\pm1}{6}=\left[\begin{array}{l}-1\\-2/3\end{array}\right.$

Відповідь: $a\in\left\{-1;-\frac{2}{3};2\right\}$.

8.28. $a=-2$. (При $a=1$ рівняння співпадають, але не мають розв'язку.)

8.29. При $a=0$ рівняння мають спільний корінь $x=-1$. При $a\neq0$:

$$(a+1)x_0^2+(a+1)x_0=0.$$

Підстановкою переконаємось, що при $a=-1$ перше рівняння умови не має розв'язків, а $x_0=0$ не є розв'язком рівнянь, $x_0=-1$ не задовольняє умові на a.

Відповідь: $a=0$.

8.30. Перше твердження рівносильно умові

$$\begin{cases}k+2>0\\(k+2)^2-4>0\end{cases}\Leftrightarrow k>0\text{, друге умові }\begin{cases}1-k<0\\(1-k)^2-4^2>0\end{cases}\Leftrightarrow k>5.$$

Відповідь: а) при $k>5$; б) $k\leq0$; в) $0<k\leq5$.

ЗАВДАННЯ 9

9.1. Якщо $a=0$ $x\in R$; якщо $a>0$ $x<\frac{2}{a}$; якщо $a<0$ $x>\frac{2}{a}$.

9.2. Якщо $a=2$ $x\in\varnothing$; якщо $a>2$ $x>\frac{2}{a-2}$; якщо $a<2$ $x<\frac{2}{a-2}$.

9.3. Якщо $k=3$ $x\in R$; якщо $k>3$ $x<\frac{7k}{k-3}$; якщо $k<3$ $x>\frac{7k}{k-3}$.

9.4. Якщо $k=3$ $x\in\varnothing$; якщо $k>3$ $x>\frac{7k}{k-3}$; якщо $k<3$ $x<\frac{7k}{k-3}$.

9.5. Якщо $a=-3$ $x\in\varnothing$; якщо $a>-3$ $x>\frac{6a-1}{a+3}$; якщо $a<-3$ $x<\frac{6a-1}{a+3}$.

9.6. Якщо $b=5$ $x\in R$; якщо $b>5$ $x<\frac{15b+7}{b-5}$; якщо $b<5$ $x>\frac{15b+7}{b-5}$.

9.7. Якщо $a\in\{\pm1;0\}$ $x\in\varnothing$; якщо $a\in(-1;0)\cup(1;\infty)$ $x<\frac{a}{a+1}$;

якщо $a\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$ $x>\frac{a}{a+1}$.

9.8. Якщо $k\in\{0;\pm3\}$ $x\in\varnothing$; якщо $k\in(-3;0)\cup(3;\infty)$ $x>\frac{(2+k)(k^2-9)}{k}$;

якщо $k\in(-\infty;-3)\cup(0;3)$ $x<\frac{(2+k)(k^2-9)}{k}$.

9.9. Якщо $a\in\{0;1\}$ $x\in\varnothing$; якщо $a\in(-\infty;0)\cup(1;\infty)$ $x>\frac{a^2-a+1}{a-1}$;

якщо $a\in(0;1)$ $x<\dfrac{a^2-a+1}{a-1}$.

9.10. Якщо $m=2$ $x\in\varnothing$; якщо $m=1$ $x\in R$ якщо $m\in(-\infty;1)\cup(2;\infty)$ $x<\dfrac{m^2-3m+1}{m-1}$; якщо $m\in(1;2)$ $x>\dfrac{m^2-3m+1}{m-1}$.

9.11. Якщо $a=-b$ $x\in\varnothing$; якщо $a>-b$ $x>\dfrac{b^2}{a+b}$; якщо $a<-b$ $x<\dfrac{b^2}{a+b}$.

9.12. Якщо $a=1$ $x\in\varnothing$; якщо $a=4$ $x\in R$; якщо $a\in(1;4)$ $x<\dfrac{1-a}{3(a-4)}$;

якщо $a\in(-\infty;1)\cup(4;\infty)$ $x>\dfrac{1-a}{3(a-4)}$.

9.13. Якщо $n=1$ $x\in\varnothing$; якщо $n=7$ $x\in R$; якщо $n\in(1;7)$ $x\le\dfrac{2+13n}{7-n}$;

якщо $n\in(-\infty;1)\cup(7;\infty)$ $x\ge\dfrac{2+13n}{7-n}$.

9.14. Якщо $\left[\begin{array}{l}b=1\\a=0\end{array}\right.$ $x\in\varnothing$; якщо $\begin{cases}a>0\\b>1\end{cases}$ або $\begin{cases}a<0\\b<1\end{cases}$ $x>b(b-1)$;

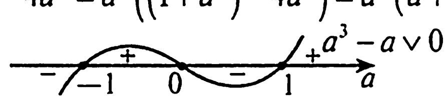
якщо $\begin{cases}a>0\\b<1\end{cases}$ або $\begin{cases}a<0\\b>1\end{cases}$ $x<b(b-1)$.

9.15. при $a\in\{0;1\}$ $x\in\varnothing$; при $a\in(0;1)$ $x>\dfrac{2}{a}$; при $a\in(-\infty;0)\cup(1;\infty)$ $x<\dfrac{2}{a}$.

ЗАВДАННЯ 10

10.1. Дискримінант квадратного тричлена лівої частини нерівності має вигляд

$$d=a^2\left(1+a^2\right)^2-4a^4=a^2\left(\left(1+a^2\right)-4a^2\right)=a^2(a+1)^2(a-1)^2$$

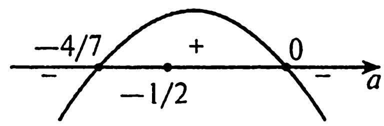


$x_{1,2}\in\left\{a;a^3\right\}$.

Відповідь:

при $a\in\{0;\pm1\}$ $x\in\varnothing$; при $a\in(-1;0)\cup(1;\infty)$ $x\in\left(a;a^3\right)$; при $a\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$ $x\in\left(a^3;a\right)$.

10.2. Треба розглянути випадки: $a=-\dfrac{1}{2}$; $a>-\dfrac{1}{2}$; $a<-\dfrac{1}{2}$. При $a\ne-\dfrac{1}{2}$ дискримінант квадратного тричлену $D=-a(7a+4)$; $D\vee 0$:



Корені квадратного тричлену:

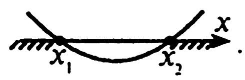
$$x_1=\frac{a-\sqrt{-a(7a+4)}}{2(a+1)}\ ;\ x_2=\frac{a+\sqrt{-a(7a+4)}}{2(a+1)}$$

1) $\underline{a=-\frac{1}{2}}$: $x\ge 1$.

2) $\underline{a>-\frac{1}{2}}$:

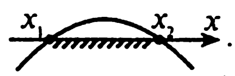
2а) $\begin{cases} a\ge 0 \\ D<0 \end{cases}$ і $x\in R$ 

;

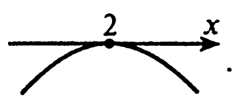
2б) $\begin{cases} -\frac{1}{2}<a<0 \\ D>0 \end{cases}$ і $\left[\begin{array}{l} x\ge x_2 \\ x\le x_1 \end{array}\right.$ 

.

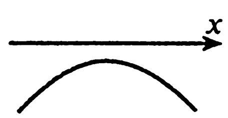
3) $\underline{a<-\frac{1}{2}}$:

3а) $\begin{cases} -\frac{4}{7}<a<-\frac{1}{2} \\ D>0 \end{cases}$ і $x\in[x_1;x_2]$ 

.

3б) $\begin{cases} a=-\frac{4}{7} \\ D=0 \\ x_1=x_2=2 \end{cases}$ і $x=2$ 

.

3в) $\begin{cases} a<-\frac{4}{7} \\ D<0 \end{cases}$ і $x\in\varnothing$ 

.

Відповідь:

при $a=-\frac{1}{2}$ $x\ge 1$; при $a=-\frac{4}{7}$ $x=2$; при $a\ge 0$ $x\in R$;

при $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$ $x\in\left(-\infty;\frac{a-\sqrt{-a(7a+4)}}{2(a+1)}\right]\cup\left[\frac{a+\sqrt{-a(7a+4)}}{2(a+1)};\infty\right)$;

при $a\in\left(-\frac{4}{7};-\frac{1}{2}\right)$ $x\in\left[\frac{a-\sqrt{-a(7a+4)}}{2(a+1)};\frac{a+\sqrt{-a(7a+4)}}{2(a+1)}\right]$; при $a<-\frac{4}{7}$ $x\in\varnothing$.

10.3.

при $a=-1$ $x\in(-\infty;-1]$; при $a=-1/3$ $x=-1$; при $a\in(-1;-1/3)$ $x\in\left[\frac{2a}{a+1};-1\right]$;

при $(-1/3;\infty)$ $x\in\left[-1;\frac{2a}{a+1}\right]$; при $a\in(-\infty;-1)$ $x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{2a}{a+1};\infty\right)$.

Порада: окремо розгляньте випадок $a=-1$; переконайтесь, що дискримінант квадратного тричлену $D=(3a+1)^2\ge 0$ для всіх $a\ne -1$; знайдіть корені тричлену $x_{1,2}\in\left\{\frac{2a}{a+1};-1\right\}$, порівняйте їх значення, $\frac{2a}{a+1}\vee -1$, і розташуйте на вісі (OX) при $a>-1$ та $a<-1$.

10.4. При $a=-1$ $x>3/2$; при $a>-1$ $x\in\left(-\infty;\frac{a-\sqrt{a+2}}{a+1}\right)\cup\left(\frac{a+\sqrt{a+2}}{a+1};\infty\right)$;

при $a\in(-2;-1)$ $x\in\left(\frac{a+\sqrt{a+2}}{a+1};\frac{a-\sqrt{a+2}}{a+1}\right)$; при $a\le -2$ $x\in\varnothing$.

Порада: зверніть увагу, що
при $a+1>0$ $a-\sqrt{a+2}<a+\sqrt{a+2}$;
при $a+1<0$ $a+\sqrt{a+2}>a-\sqrt{a+2}$.

10.5. При $a=0$ $x\in\varnothing$; при $a>0$ $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2a}\right]\cup\left[\frac{1}{a};\infty\right)$;

при $a<0$ $x\in\left(-\infty;\frac{1}{a}\right]\cup\left[-\frac{1}{2a};\infty\right)$.

10.6. При $a=1$ $x\le -1/2$; при $a=3$ $x=-1/2$; при $a\in(1;3)$ $x\in\left[\frac{1}{1-a};-\frac{1}{2}\right]$;

при $a\in(3;\infty)$ $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{1-a}\right]$; при $a\in(-\infty;1)$ $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{1-a};\infty\right)$.

Порада: не забудьте порівняти $\frac{1}{1-a}\vee -\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{a-3}{a-1}\vee 0$.

10.7. $\frac{x-(2a+3)}{x-(a-2)}<0\Leftrightarrow(x-(2a+3))(x-(a-2))<0$ і маємо квадратний тричлен, який вже розкладено на лінійні множини, тобто корені його існують при $a\in R$. Після порівняння коренів отримаємо **відповідь:**
при $a>-5$ $x\in(a-2;3a+3)$; при $a<-5$ $x\in(2a+3;a-2)$; при $a=-5$ $x\in\varnothing$

10.8. При $m>0$ $x\in(-\infty;m)\cup(m+1;\infty)$; при $m<0$ $x\in(m;m+1)$;
при $m=0$ $x\in\varnothing$.

10.9. При $a>0$ $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{a}};0\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{a}};\infty\right)$; при $a\le 0$ $x\in(-\infty;\ 0)$.

ЗАВДАННЯ 11

11.1. При $a>2$ $x\in(-a;-2]$; при $a>2$ $x\in[-2;-a)$; при $a=2$ $x\in\varnothing$.

11.2. При $k>5$ $x\in(-\infty;-k+10]\cup(5;\infty)$; при $k<5$ $x\in(-\infty;5)\cup[-k+10;\infty)$; при $k=5$ $x\in(-\infty;5)\cup(5;\infty)$.

11.3. При $a=0$ $x\in\varnothing$; при $a>0$ $x\in(0;3)$; при $a<0$ $x\in(-\infty;0)\cup(3;\infty)$.

11.4. При $k=1$ $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$; при $k\neq1$ $x\in(-\infty;-1)\cup[0;\infty)$.

11.5. При $k\in\{1;0\}$ $x\in\varnothing$; при $k\in(0;1)\cup(1;\infty)$ $x\in(0;k)$; при $k\in(-\infty;0)$ $x\in(k;0)$.

11.6. При $k=0$ $x\in R$; при $k>0$ $x\in(-\infty;0]\cup(3/k;\infty)$; при $k<0$ $x\in(-\infty;3/k)\cup[0;\infty)$.

11.7. При $k=0$ $x\in\varnothing$; при $k>0$ $x<-\dfrac{2}{k}$; при $k<0$ $x>-\dfrac{2}{k}$.

11.8. При $a=0$ $x\in R$; при $a>0$ $x\in\left(-\infty;\dfrac{2}{a}\right)\cup\left[\dfrac{3}{a};\infty\right)$; при $a<0$ $x\in\left(-\infty;\dfrac{3}{a}\right]\cup\left(\dfrac{2}{a};\infty\right)$.

11.9. При $k\in\{\pm1\}$ $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1]$; при $k=0$ $x\in(-\infty;-1)\cup\{0\}$; при $k>1$ $x\in(-\infty;-k]\cup(-1;k]$; при $k<-1$ $x\in(-\infty;k]\cup(-1;-k]$; при $0<k<1$ $x\in(-\infty;-1)\cup[-k;k]$; при $-1<k<0$ $x\in(-\infty;-1)\cup[k;-k]$.

Порада: треба просто розташувати на числові вісі числа $\{\pm k;1\}$.

11.10. Позначимо $ax=t$ і розв'яжемо спочатку нерівність

$$\frac{t+1}{t-1}\geq\frac{a+1}{a-1}\Leftrightarrow\frac{2(a-t)}{(t-1)(a-1)}\geq0\Leftrightarrow\frac{t-a}{(t-1)(a-1)}\leq0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ t\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a>1\\ \dfrac{t-a}{t-1}\leq0\end{cases}\\ \begin{cases}a<1\\ \dfrac{t-a}{t-1}\geq0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ t\in\varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}a>1\\ t\in(1;a]\end{cases}\\ \begin{cases}a<1\\ t\in(-\infty;a]\cup(1;\infty)\end{cases}\end{array}\right.$$

Тобто при $a>1$ $1<ax\leq a$; при $a<1$ $\left[\begin{array}{l}ax\leq a\\ ax>1\end{array}\right.$.

$$(10)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\ 1/a<x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\ \left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x>1/a\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a=0\\ x\in R\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x<1/a\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:
при $a>1$ $x\in(1/a;1]$;
при $0<a<1$ $x\in(-\infty;1]\cup(1/a;\infty)$;
при $a<0$ $x\in(-\infty;1/a)\cup[1;\infty)$;
при $a=1$ $x\in\varnothing$;
при $a=0$ $x\in R$.

11.12. При $4\le a\le 6$ $x\in\varnothing$; при $a>6$ $x\in\left(\frac{6-a}{2};0\right)$; при $a<4$ $x\in\left(0;\frac{4-a}{2}\right)$.

11.13. При $a>2$ $x\in(0;1)\cup\left(a-\sqrt{a^2-2a};a+\sqrt{a^2-2a}\right)$;

при $a<0$ $x\in\left(a-\sqrt{a^2-2a};0\right)\cup\left(a+\sqrt{a^2-2a};1\right)$;

при $0\le a\le 2$ $x\in(0;1)$.

ЗАВДАННЯ 12

12.1. При $a=\pm1$ $x\in\varnothing$; при $a\ne\pm1$ $x\in\left\{1;\frac{2a}{1-a}\right\}$.

12.2. При $\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m=-1\end{array}\right.$ $x\in\varnothing$; при $m\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)$ $x=\frac{m-1\pm\sqrt{2-2m}}{m+1}$.

12.3. При $a\le 0$ $x\in\varnothing$; при $a>0$ $x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$.

12.4. При $b\in\{0;-3\}$ $x=0$; при $b=-6$ $x=-6$; при $b=3$ $x=6$;
при $b\notin\{\pm3;0;6\}$ $x\in\{b;b+3\}$.

12.5. При $a=0$ $x\in\varnothing$; при $a\ne0$ $x=\left(3\pm\sqrt{5}\right)\cdot a/2$.

12.6. При $a\in\{\pm1;0\}$ $x\in\varnothing$; при $a\notin\{\pm1;0\}$ $x=-a^2$.

12.7. При $a=0$ $x\in\varnothing$; при $a=1$ $x=2$; при $a=-1$ $x=0$; при $a\notin\{0;\pm1\}$ $x=\left\{a+1;1+\frac{1}{a}\right\}$.

12.8. При $a=1$ $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$; при $a\ne1$ $x\in\varnothing$.

ЗАВДАННЯ 13

13.1. Пригадайте, що $x_в = -\dfrac{b}{2a}$, а $y_в = -\dfrac{D}{4a}$. **Відповідь:** $p = -2$; $q = -1$.

13.2. Див. *пораду* до 13.1. **Відповідь:** $k = 2$; $m = 0$.

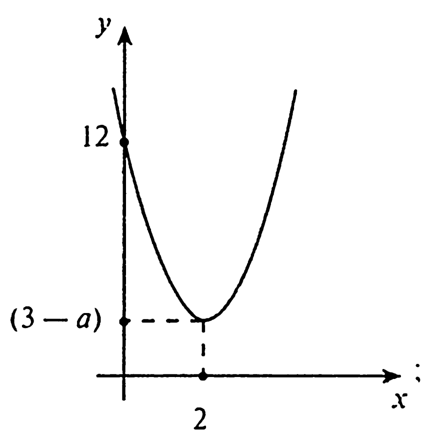
13.3. Див. *пораду* до 13.2, та використайте умову, що значення $x = 0$ і $y = 1$ задовольняють $y = ax^2 + bx + c$. (Не забувайте, що $y(x)$ не буде параболою, якщо $a = 0$). **Відповідь:** $a = -4$; $b = -8$; $c = 1$.

13.4. Аналогічно 13.3. **Відповідь:** $a = -4$; $b = -8$; $c = 12$. Поясніть, використовуючи графічну інтерпретацію, чому значення a та b у 13.3 і в 13.4 однакові, а c — різні.

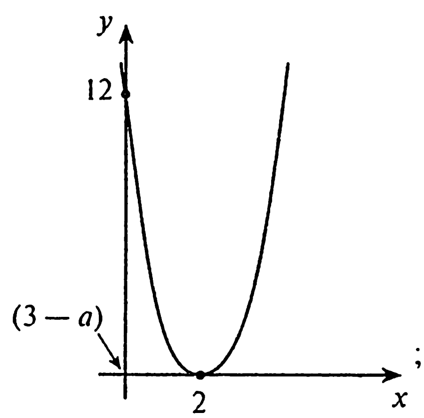
13.5. Віссю симетрії параболи є пряма $x = x_b$. Звідки маємо, що $b = 3a$ і $y = ax^2 - 4ax + 12$. При $a > 0$ вітки параболи направлені догори, а при $a < 0$ вітки параболи дивляться вниз. Дискримінант має вигляд $\dfrac{D}{4} = 4a(a-3)$. Тоді при $a \in (0; 3)$ парабола не перетинає вісі абсцис; при $a = 3$ — парабола дотикається вісі абсцис у точці $x = 2$; при $a \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$ парабола перетинає вісь абсцис у двох точках.

Відповідь:

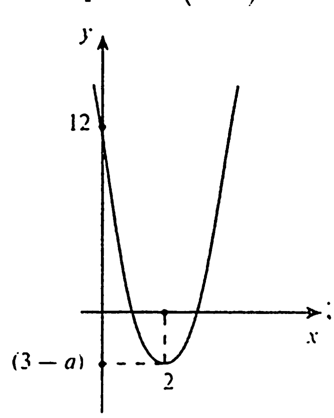
при $a \in (0; 3)$:



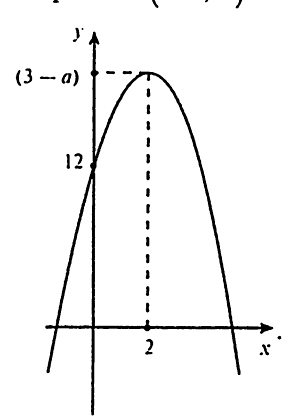
при $a = 3$:



при $a \in (3; \infty)$:



при $a \in (-\infty; 0)$:



13.6. $x_в = -\frac{-6}{2} = 3$; $y_{min} = y_в = y(3)$. **Відповідь:** $a = 10$.

13.7. Дивись 13.6. **Відповідь:** $b = -2$.

13.8. Що таке перетин графіків двох функцій? Це наявність спільних точок на площині (xOy) . Тоді для відповіді на перше запитання треба просто розв'язати систему двох рівнянь. Крім того, для відповіді на друге запитання стануть в нагоді міркування з теми перетворення графіків функцій виду $y = f(x) \to y = f(x) + a$ (див. ОК-13). **Відповідь: а)** так — у двох точках; **б)** при $c < 25/8$ — дві точки перетину; при $c = 25/8$ — одна; при $c > 25/8$ — перетину немає.

13.9. По-перше переконайтесь, що графіки функцій не мають спільних точок (аналогічно 13.8). Після цього побудуйте ескізи графіків даних функцій і прямої $y = a$. Не забудьте знайти координати вершин парабол. **Відповідь:** при $a \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$ — дві точки; при $a \in \{-2; 1\}$ — три точки; при $a \in (-2; 1)$ — чотири точки.

13.10. Знайдіть координати вершини параболи і запишіть умову, що відстань між точками $(0; 0)$ та $(x_b; y_b)$ дорівнює 5. При розв'язанні отриманого рівняння не забудьте, що $\sqrt{a^2} = |a|$. **Відповідь:** $c \in \{5; 13\}$.

13.11. Аналогічно 13.10. **Відповідь:** $b \in \left\{1; -\frac{1}{3}\right\}$.

13.12. Треба записати відстані між точками $(x; y)$ і $(-4; 1)$; $(x; y)$ і $(x; -1)$. Порівнявши їх отримаєте **відповідь** що шуканим зображенням буде парабола $y = \frac{1}{4}(x+4)^2$.

13.13. Аналогічно 13.12 отримаємо умову на координати шуканих точок: $(y+2)^2 = -4x$. Звідки робимо висновок, що ці точки мають від'ємні абсциси і $|y+2| = 2\sqrt{-x}$, або $y = -2 \pm 2\sqrt{-x}$. **Відповідь:** $y = -2 \pm 2\sqrt{-x}$.

13.14. Якщо графік функції симетричний відносно вісі (Oy) , то функція парна. **Відповідь:** $y = x^2 - 3|x| + 2$.

13.15. Якщо графік функції симетричний відносно т. $(0; 0)$, то функція непарна. **Відповідь:** $y = x \cdot |x| - 4x$.

13.16. Дане рівняння рівносильне $\begin{cases} x \neq \pm 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = b \\ x = b+3 \end{array}\right. \end{cases}$. Система має один розв'язок, якщо один з коренів заборонений, тобто дорівнює ± 3 , а другий задовольняє умові $x \neq \pm 3$. **Відповідь:** $b \in \{\pm 3; -6; 0\}$.

13.17. Аналогічно 13.16. **Відповідь:** $a \in \{\pm 2; -1; 3\}$.

13.18. Область визначення: $2x^2-3x+1>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;\infty)$, і рівняння матиме один розв'язок, якщо один з коренів належить області визначення, а другий ні, або, якщо обидва корені співпадають і розташовані в області визначення рівняння. **Відповідь:** $k\in\{2{,}5;[1{,}75;2]\}$.

13.19. Аналогічно 13.18. **Відповідь:** $c\in\{-1{,}5;[-1;1]\}$.

13.20. Система $\begin{cases}x\le 1\\ x^2-6x+a\le 0\end{cases}$ має єдиний розв'язок лише у випадку, коли менший з коренів квадратного тричлена дорівнює 1. Тоді $f(1)=0$ і $x_b>1$. **Відповідь:** $a=5$.

13.21. Тричлен гілки якого спрямовані вгору набуває тільки невід'ємних значень при умові $p^2-4q\le 0$, тобто $q\ge\frac{p^2}{4}$. Тоді $p+q\ge p+\frac{p^2}{4}=\frac{p(p+4)}{4}$. Квадратний тричлен $p(p+4)$ приймає найменше значення при $p=\frac{0+(-4)}{2}=-2$, а саме $-2(-2+4)=-4$. Тоді $p+q\ge -1$ і $p+q$ — найменше при $p=-2$, $q=1$. **Відповідь:** $y=x^2-2x+1$.

ЗАВДАННЯ 14

14.1. $f(3)<0\Leftrightarrow 9a^2-20a+11<0$. **Відповідь:** $a\in\left(1;\frac{11}{9}\right)$.

14.2. $f(1)\le 0\Leftrightarrow 1+2a\le 0$. **Відповідь:** $a\le -0{,}5$.

14.3. $\begin{cases}f(0)>0\\ D\ge 0\\ x_b>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+4>0\\ |a-1|\ge 4\\ \frac{a+1}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>-4\\ a\in(-\infty;-3]\cup[5;\infty)\\ a>-1\end{cases}$. **Відповідь:** $a\in[5;\infty)$.

14.4. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-1>0\\ f(0)\ge 0\\ \frac{D}{4}\ge 0\\ x_b\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}a-1<0\\ f(0)\le 0\\ \frac{D}{4}\ge 0\\ x_b\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{D}{4}\ge 0\\ x_b\le 0\\ (a-1)f(0)\ge 0\\ a\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a-1\ge 0\\ -\frac{a+1}{a-1}\le 0\\ (a-1)(a-2)\ge 0\\ a\ne 1\end{cases}$. **Відповідь:** $a\ge 2$.

14.5. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+1>0\\ f(-1)>0\\ D\ge 0\\ x_b>-1\end{cases}\\ \begin{cases}a+1<0\\ f(-1)<0\\ D\ge 0\\ x_b>-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}D\ge 0\\ x_b>-1\\ (a+1)f(-1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a(25a+16)\ge 0\\ \dfrac{3a}{2(a+1)}>-1\\ (a+1)\cdot 1>0\end{cases}$$. **Відповідь:** $a\ge 0$.

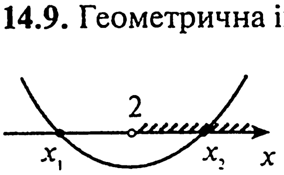
14.6. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+1>0\\ f(-1)\ge 0\\ D\ge 0\\ x_b\le -1\end{cases}\\ \begin{cases}a+1<0\\ f(-1)\le 0\\ D\ge 0\\ x_b\le -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}D\ge 0\\ x_b\le -1\\ (a+1)f(-1)\ge 0\\ a\ne -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a(7a+16)\ge 0\\ \dfrac{3a}{2(a+1)}\le -1\\ (a+1)(8a+1)\ge 0\\ a\ne -1\end{cases}$$. **Відповідь:** $a\in\varnothing$.

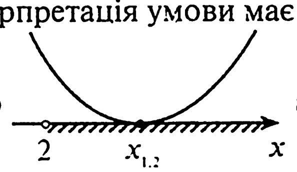
14.7. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a+1>0\\ f(2)<0\end{cases}\\ \begin{cases}2a+1<0\\ f(2)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow (2a+1)f(2)<0 \Leftrightarrow (2a+1)(7a+2)<0$$. **Відповідь:** $a\in\left(-\frac{1}{2};-\frac{2}{7}\right)$.

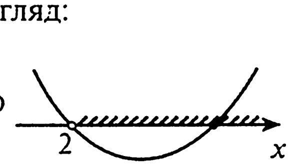
14.8. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2-1>0\\ f(1)\ge 0\\ \dfrac{D}{4}\ge 0\\ x_b\ge 1\end{cases}\\ \begin{cases}a^2-1<0\\ f(1)\le 0\\ \dfrac{D}{4}\ge 0\\ x_b\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{D}{4}\ge 0\\ x_b\ge 1\\ (a^2-1)f(1)\ge 0\\ a^2\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|a+1|\le 2\\ -\dfrac{1}{a+1}\ge 1\\ (a^2-1)(a^2+2a-1)\ge 0\\ a\ne\pm 1\end{cases}.$$

Відповідь: $a\in\left[-2;-1-\sqrt{2}\right]$.

14.9. Геометрична інтерпретація умови має вигляд:



або


або


.

Тоді: $\left[\begin{array}{l} f(2)<0 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l}\dfrac{D}{4}=0\\ f(2)=0\end{array}\right. \\ x_b>2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a+3<0\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l} a^2+2a+1=0\\ 2a+3=0\end{array}\right.\\ -a>2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-\dfrac{3}{2}\\ \begin{cases} a\in\{-1;-1,5\}\\ a<-2\end{cases}\end{array}\right.$. **Відповідь:** $a<-1,5$.

ЗАВДАННЯ 15

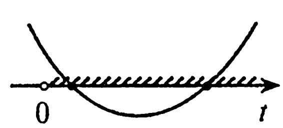
15.1. $\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ \begin{cases} D\geq 0\\ 1<x_b<5\\ (a+1)f(1)>0\\ (a+1)f(5)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ \begin{cases} a(16+7a)\leq 0\\ 1<\dfrac{3a}{2(1+a)}<5\\ (a+1)(2a+1)>0\\ (a+1)(14a+25)>0\end{cases}\end{array}\right.$. **Відповідь:** $a=-1$.

15.2. Аналогічно 15.1. **Відповідь:** $a\in(-1;3)$.

15.3. $2<a<5$. *Порада:* чітко йти за ОК-20.

15.4. За умовою $|x_{1,2}|\leq 2$, тобто $[x_1;x_2]\subset[-2;2]$ і за ОК-20:

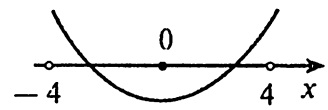
$\begin{cases} \dfrac{D}{4}\geq 0\\ -2\leq x_b\leq 2\\ f(2)\geq 0\\ f(-2)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+1\geq 0\\ -2\leq a\leq 2\\ 3-4a\geq 0\\ 3+4a\geq 0\end{cases}$. **Відповідь:** $a\in\left[-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right]$.

15.5. Якщо позначити $x^2\triangleq t\geq 0$; $t^2-2t+\dfrac{a}{8}\triangleq f(t)$, то графічна інтерпретація умови має вигляд 

і, за ОК-19 (при тому $t_1\neq t_2$):

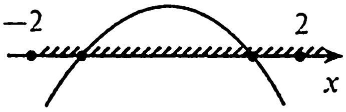
$\begin{cases} \dfrac{D}{4}>0\\ f(0)>0\\ t_b>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{a}{8}>0\\ \dfrac{a}{8}>0\\ 1>0\end{cases} \Leftrightarrow a\in(0;8)$.

Відповідь: $a\in(0;8)$.

15.6. Графічна інтерпретація умови має вигляд 

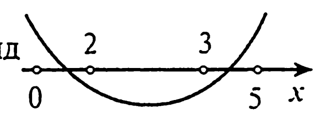
, тобто

$$\begin{cases} f(0)<0 \\ f(-4)>0 \\ f(4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1<0 \\ 10a+9>0 \\ -6a+25>0 \end{cases}$$. **Відповідь:** $a \in (-0,9;\ \ -0,5)$.

15.7. При $a=0$ розв'язку нема. При $a<0$ маємо геометричну інтерпретацію умови 

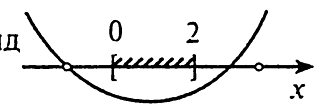
. При $a>0$ розв'язку немає, бо відкритий інтервал не можна розмістити у обмеженому інтервалі $[-2;\ \ 2]$.

Відповідь: $a \in \left(-2-\sqrt{5};-\dfrac{1}{2}\right)$.

15.8. Графічна інтерпретація умови має вигляд 

, тобто

$$\begin{cases} f(2)<0 \\ f(3)<0 \\ f(0)>0 \\ f(5)>0 \end{cases}$$. **Відповідь:** $a \in (1;\ \ 3)$.

15.9. Графічна інтерпретація умови має вигляд 

, тобто

$$\begin{cases} f(0)<0 \\ f(2)<0 \end{cases}$$. **Відповідь:** $m \in (-2;\ \ 0)$.

15.10. $a \in (-2; 1/4]$. *Порада:* зверніть увагу при $D=0$ маємо два корені, які співпали.

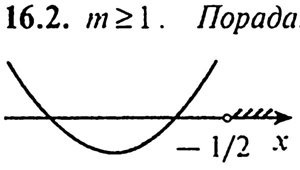
15.11. $a \in \left(-1; 15-4\sqrt{17}\right] \cup \left[15+4\sqrt{17}; \infty\right)$.

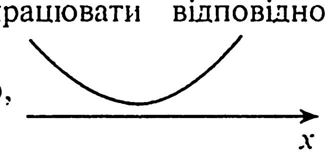
ЗАВДАННЯ 16

16.1. $\dfrac{x^2-mx+1}{x^2+x+1} \le 3 \Leftrightarrow 2x^2+(m+3)x+2 \ge 0$ і справджується для всіх $x \in R$, якщо $D \le 0$.

Відповідь: $m \in [-7;\ \ 1]$.

16.2. $m \ge 1$. *Порада:* працювати відповідно графічній інтерпритації умови



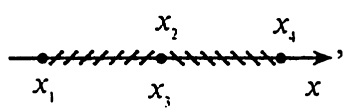
або, 

. Не забудьте розглянути випадок, коли дана нерівність не є квадратичною. (А чому $(m-1)$ не може приймати від'ємні значення?)

16.3. $m > 2\frac{3}{8}$. *Порада:* умова означає, що всі розв'язки першої нерівності містять-ся у множині розв'язків другої, тобто в інтервалі $(-1; 5)$.

16.4. $a \in (-\infty; -1{,}5) \cup (2; \infty)$.

16.5. Позначимо корені квадратного тричлена $f(x) = x^2 + 2x + m$ через $x_{1,2}$, а корені квадратного тричлена $\varphi(x) = x^2 - 4x - 6m$ через $x_{3,4}$. Абсциса вершини останнього дорівнює 2 і правіша за абсцису вершини $f(x)$, що дорівнює -1. Тоді можлива лише одна графічна інтерпретація розв'язку:



тобто $\varphi(x_2) = 0$, де $x_2 = -1 + \sqrt{1-m}$, більший з коренів $x_{1,2}$ при умові, що $x_{1,2}$ та $x_{3,4}$ існують: $\begin{cases} 1 - m \ge 0 \\ 6m + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{2}{3}; 1\right]$. Тоді маємо

$$\begin{cases} \left(1 - \sqrt{1-m}\right)^2 + 4\left(1 - \sqrt{1-m}\right) - 6m = 0 \\ m \in \left[-\frac{2}{3}; 1\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{1-m} = 6 - 7m \\ m \in \left[-\frac{2}{3}; 1\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6 - 7m \ge 0 \\ 49m^2 - 48m = 0 \\ m \in \left[-\frac{2}{3}; 1\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{6}{7}\right] \\ \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{48}{49} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

$\frac{6}{7} \vee \frac{48}{49} \Leftrightarrow 6 \vee \frac{48}{7} \Leftrightarrow 42 \vee 48$

Висновок: $\frac{6}{7} < \frac{48}{49}$

Відповідь: $m = 0$

16.6. Область визначення рівняння $x \notin \{4; -1\}$. Тоді маємо 1 розв'язок у випадку коли дискримінант D квадратичної функції $f(x)$, що у чисельнику, дорівнює нулю (при тому її $x_в \notin \{4; -1\}$); або коли один з коренів належить множині $\{4; -1\}$, а один ні:

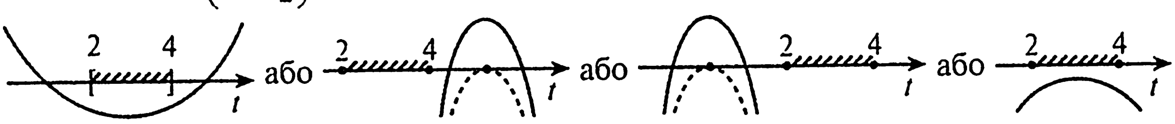
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 0 \\ x_в \notin \{4; -1\} \end{cases} \\ \begin{cases} f(4) = 0 \\ f(-1) \ne 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(4) \ne 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ -\frac{3a+1}{2} \notin \{4; -1\} \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 + 6a + 9 = 0 \\ 2a^2 - 3a - 2 \ne 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a^2 - 3a - 2 = 0 \\ a^2 + 6a + 9 \ne 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $a \in \left\{-\frac{3}{2}; -3; 2; -\frac{1}{2}\right\}$.

16.7. Знаменник даної нерівності додатний при $x \in R$, тому вона рівносильна $2x^2-(a+3)x+2>0$. Остання нерівність виконується при $x \in R$, якщо $(a+3)^2-4\cdot 2\cdot 2<0 \Leftrightarrow |a+3|<4 \Leftrightarrow a\in(-7;1)$. **Відповідь:** $a\in(-7;1)$.

16.8. Позначимо $\sqrt{3x+1}\triangleq t\geq 0$, тоді $3x=t^2-1$ і нерівність приймає вигляд $(a-2)t^2+2-t-3<0$. При $1\leq x\leq 5$ $2\leq t\leq 4$. Всі значення $t\in[2;4]$ повинні міститися у множині розв'язків останньої нерівності.

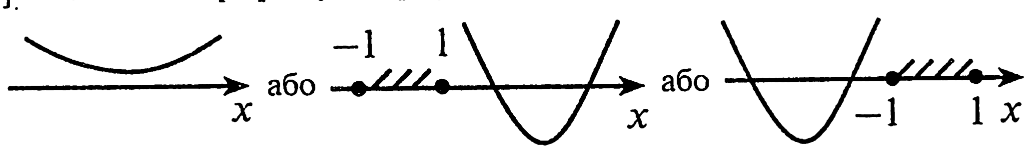
При $a=2$ $t\in\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)\not\supset[2;4]$. При $a\neq 2$ маємо графічну інтерпретацію:



Відповідь: $a<\dfrac{5}{3}$.

16.9. Рівняння $2ax^2+2x+1=5x^2+2ax-2$ повинно мати 1 розв'язок. **Відповідь:** $a\in\left\{\dfrac{5}{2};4\right\}$.

16.10. Множина розв'язків $2x^2-4a^2x-a^2+1>0$ повинна містити інтервал $[-1;1]$. Тоді маємо графічну інтерпретацію:



Відповідь: $a\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

16.11. Дана нерівність рівносильна $\dfrac{x^2-(a+2)x+4}{2x^2-2x+3}>0\Leftrightarrow x^2-(a+2)x+4>0$ і виконується для всіх $x\in R$ при $(a+2)^2-16<0$. **Відповідь:** $a\in(-6;2)$.

16.12. $\sqrt{b-x}<\sqrt{x-a}\Leftrightarrow\begin{cases}b-x<x-a\\ b-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq b\\ x>\dfrac{b+a}{2}\end{array}\right.$, тоді $b=7$, $\dfrac{b+a}{2}=3$. **Відповідь:** $a=-1$, $b=7$.

16.13. $a<\dfrac{5}{9}$ (див. 16.8).

16.14. $\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{a-3x}\Leftrightarrow 5x-a=2\sqrt{a-3x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{a}{5}\\ 25x^2-2(5a-6)x+a^2-4a=0\end{cases}$ і маємо умову розміщення коренів квадратного тричлена

$$f(x)=25x^2-2(5a-6)x+a^2-4a=0 \text{ відносно числа } \frac{a}{5}.$$

Відповідь: при $a \geq 0$ $x = \dfrac{5a-6+2\sqrt{10a+9}}{25}$; при $a<0$ $x \in \varnothing$.

16.15. $\sqrt{2x^2-4} = x+a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -a \\ x^2-2ax-a^2-4=0 \end{cases}$ і маємо умову розміщення коренів квадратного тричлена $f(x)=x^2-2ax-a^2-4$ відносно числа $(-a)$. **Відповідь:** при $a \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ $x=a+\sqrt{2\left(a^2+2\right)}$; при $a \in \left[\sqrt{2};\infty\right)$ $x=a \pm \sqrt{2\left(a^2+2\right)}$; при $a \in \left(-\infty;-\sqrt{2}\right]$ $x \in \varnothing$.

16.16. $(x-1)\sqrt{(a-1)x^2+2ax+a}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a-1)x^2+2ax+a=0 \\ \begin{cases} x=1 \\ (a-1)x^2+2ax+a>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ x=-1/2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=0 \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a>0 \\ a \neq 1 \\ x=\dfrac{-a \pm \sqrt{a}}{1-a} \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq 1/4 \\ x=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\dfrac{D}{4}=a \geq 0$ $x_{1,2}=\dfrac{-a \pm \sqrt{a}}{a-1}$

$a-1+2a+a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \dfrac{1}{4}$

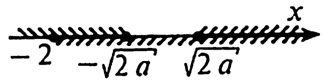
Відповідь:
при $a=0$ $x=0$;
при $a=1$ $x \in \{1;-1/2\}$;
при $a \in (0;1/4)$ $x \in \left\{\dfrac{-a \pm \sqrt{a}}{1-a}\right\}$;
при $a \in [1/4;1) \cup (1;\infty)$ $x \in \left\{1;\dfrac{a \pm \sqrt{a}}{1-a}\right\}$.

16.17. $\sqrt{a^2-x^2} \geq -2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \leq a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x^2 \leq \dfrac{a^2}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq |a| \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x \geq -\dfrac{|a|}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in R \\ 0 \leq x \leq |a| \end{cases} \\ \begin{cases} a \in R \\ -\dfrac{|a|}{\sqrt{5}} \leq x<0 \end{cases} \end{array}\right.$.

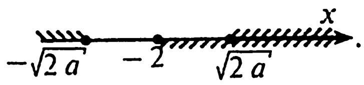
Відповідь: при $a \in R$ $x \in \left[-\dfrac{|a|}{\sqrt{5}};|a|\right]$.

16.18. $\sqrt{x^2-2a} \leq x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 \geq 2a \\ x \geq -a-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leq 0 \\ x \geq -2+(-a) \end{cases} \\ \begin{cases} a>0 \\ x \in \left(-\infty;-\sqrt{2a}\right] \cup \left[\sqrt{2a};\infty\right) \\ x \geq -2 \end{cases} \end{array}\right.$

Порівняємо: $-\sqrt{2a} \vee -2 \Leftrightarrow \sqrt{2a} \wedge 2 \Leftrightarrow 2a \wedge 4$;

при $a\le 2$ $\;-\sqrt{2a}\ge -2$ 

;

при $a>2$ $\;-\sqrt{2a}<-2$ 

.

Відповідь: при $a\le 0$ $x\ge -2-a$; при $0<a\le 2$ $x\in\left[-2;-\sqrt{2a}\right]\cup\left[\sqrt{2a};\infty\right)$;

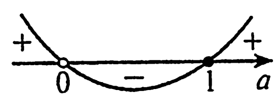
при $a>2$ $x\in\left[\sqrt{2a};\infty\right)$.

16.19. $ax^3+9x\ge -3(a+1)x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ne 0\\ ax(x+3)\left(x+\dfrac{3}{a}\right)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}a=0\\ x(x+3)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ x\in(-\infty;-3]\cup[0;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ x\in(-\infty;-3]\cup\left[0;-\dfrac{3}{a}\right]\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(0;1)\\ x\in\left[-\dfrac{3}{a};-3\right]\cup[0;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ a\in\{-3\}\cup[0;\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a>1\\ x\in\left[-3;-\dfrac{3}{a}\right]\cup[0;\infty)\end{cases}\end{array}\right.$$

$$-\frac{3}{a}\vee -3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3a-3}{a}\vee 0$$



Відповідь:

при $a\in[-1;0]$

$x\in(-\infty;-3]\cup[0;\infty)$;

при $a\in(0;\infty)$

$x\in[-3;0]\cup\left[-\dfrac{3}{a};\infty\right)$;

при $a\in(-\infty;-1)$

$x\in\left[-3;-\dfrac{3}{a}\right]\cup[0;\infty)$.

16.20. $$x^2\sqrt{(a+2)x^2-2ax-a+1}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(a+2)x^2-2ax-a+1=0\\ \begin{cases}x=0\\ (a+2)x^2-2ax-a+1\ge 0\end{cases}\end{array}\right. .$$

Відповідь:

при $a=-2$ $x\in\left\{-\dfrac{3}{4};0\right\}$; при $a\ge\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $x\in\left\{\dfrac{a\pm\sqrt{2a^2+a-2}}{a+2}\right\}$;

при $a\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}\right]$ $x\in\left\{0;\dfrac{a\pm\sqrt{2a^2+a-2}}{a+2}\right\}$;

при $a\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4};\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)$ $x=0$.

16.21. Маємо $\begin{cases} x_1 + x_2 = k + 1 \\ x_1 \cdot x_2 = 3k \\ (k+1)^2 - 12k \geq 0 \end{cases}$. Тоді або $k = 0$ і $x \in \{0; 1\}$, або $x_1 = 3n$ і $x_2 = \frac{k}{n}$, де $\begin{cases} \{k; n\} \in Z \\ n \neq 0 \end{cases}$. Умова існування коренів має вигляд $k \in (-\infty; 0] \cup [10; \infty)$, (враховуючи, що $k \in Z$).

$x_1 + x_2 = k + 1 = 3n + \frac{k}{n}$, звідки $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n = 1 \\ k \in \varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} n \notin \{0; 1\} \\ k = \frac{(3n-1)n}{n-1} = 3n + 2 + \frac{2}{n-1} \end{cases} \end{array}\right.$. Тоді $\begin{cases} (n-1) \in \{\pm 1; \pm 2\} \\ n \notin \{0; 1\} \end{cases}$.

Відповідь:
при $k = 0$ $x \in \{0; 1\}$; при $k = 10$ $x \in \{6; 5\}$; при $k = 12$ $x \in \{9; 4\}$; при $k = -2$ $x \in \{-3; 2\}$.

16.22. Обидва корені квадратного тричлена $f(t) = t^2 + pt + q$ $(t = x^2 \geq 0)$ додатні, тоді $q > 0$, $p < 0$, і $t_1 \neq t_2$. Очевидно, що

$0 < \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4pq}}{2} < \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, тоді $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, де $x_1 = -\sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}$; $x_2 = -\sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}$; $x_3 = \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}$; $x_4 = \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}$. За умовою $\{x_1; x_2; x_3; x_4\}$ — арифметична прогресія, тоді $2x_3 = x_4 + x_2$ і

$$3\sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}} = \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}} \Leftrightarrow 9\left(p + \sqrt{p^2 - 4q}\right) = \left(p - \sqrt{p^2 - 4q}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{p^2 - 4q} = -4p \Leftrightarrow \begin{cases} p < 0 \\ 25(p^2 - 4q) = 16p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < 0 \\ 9p^2 = 100q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < 0 \\ q = \left(\frac{3}{10}p\right)^2 \end{cases}.$$

За умовою $q \in N$, $p < 0$ і $p \in Z$, тоді $p \in \{-10; -20; -30; \ldots\}$ і $q \in \{3^2; 6^2; 9^2; \ldots\}$. Тобто шукане $q = 9$. **Відповідь:** $q = 9$.

ЗАВДАННЯ 17

17.1. $a = 20$. *Порада:* графік лівої частини першої нерівності — парабола, гілки якої направлено вниз. Вимога умови означає, що при $x = 2$ тричлен $-x^2 + 12x - a$ обертається на нуль, а його вершина розташована правіше за 2.

17.2. При $a = -1$ $x = 0$, $y = -1$; при $a = 3$ $x = -2$, $y = 1$. *Порада:* нерівність запишіть у вигляді $(x+1)^2+y^2\le 2$. Це — круг, включно з його границями. Множина $y=x+a$ — пряма. Залишається визначити a, при яких пряма дотикається до круга.

17.3. При $a\le -1$ $x\in\varnothing$; при $a\in(-1;1]$ $x<\frac{a-1}{2}$; при $a>1$ $x<\frac{a+1}{2}$. *Порада:* побудуйте графік функції $y=\left|1-|x|\right|=\left||x|-1\right|$ за планом:

$$y=|x|\xrightarrow[\text{гр.}\to\text{на }1]{}y=|x-1|\longrightarrow\begin{cases}y=|x-1|\\x\ge 0\end{cases}\xrightarrow[\text{сим.}(OY)]{}y=\left||x|-1\right|.$$

Пряма $y=-(x-a)$ утворюється зсувом прямої $y=-x$ праворуч на a (при $a>0$), або ліворуч на $|a|$ (при $a<0$). Можна розв'язати цю задачу інакше — розглядати на координатній площині $(x;a)$ графік функції $a(x)=x+\left|1-|x|\right|$.

17.4. При $a<2^{-\frac{1}{3}}$ — нескінченна кількість розв'язків; при $a=2^{-\frac{1}{3}}$ — 1 розв'язок; при $a>2^{-\frac{1}{3}}$ — розв'язків немає. *Порада:* на координатній площині (XOY) ГМТ розв'язків перших двох нерівностей системи міститься в середині та на границях кута між прямими $y=2x-a$ і $y=\frac{a+x}{2}$. Знайдіть які точки площини (XOY) задовольняють третій нерівності при $a\le 0$. При $a>0$ розв'язком третьої нерівності є круг, з його границею включно.

17.5. $a=-\frac{1}{4}$. *Порада:* розв'язки нерівності — ГМТ точок координатної площини (XOY), що обмежено параболами $y=(x-a)^2$ і $x=(y-a)^2$, які симетричні відносно прямої $y=x$. Розв'язку відповідає конфігурація дотику парабол. Точка дотику міститься на прямій $y=x$. Тоді її визначає умова, що забезпечує єдність розв'язку рівняння $(x-a)^2=x$.

17.6. $a=\pm\left(5-\sqrt{5}\right)$. *Порада:* графік лівої частини нерівності верхнє півколо радіуса $|a|$ і центром у точці $(0;0)$. Графік правої частини — пряма, що проходить через початок координат. Пряма перетинає півколо у точці, абсцису якої отримаємо з умови $\sqrt{a^2-x^2}=2x\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{5}}|a|$. Тоді $|a|+\frac{1}{\sqrt{5}}|a|=4$.

17.7. При $a<0$ $x\in\left[a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right);0\right]$; при $a=0$ $x=0$;

при $a>0$ $x\in\left[a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);2a\right]$. *Порада:* ГМТ лівої частини нерівності при $a\ne 0$ — верхнє півколо радіуса $|a|$ з центром у точці $(a;0)$. Графік правої частини —

пряма, яка проходить через точку $(a;0)$ паралельно $y=-x$. Абсциса точки перетину цих ГМТ дорівнює $a+\frac{a\sqrt{2}}{2}$ при $a<0$, $a-\frac{a\sqrt{2}}{2}$ при $a>0$.

17.8. При $a\in(-\infty;-2{,}5)\cup(-1{,}5;1{,}5)\cup(2{,}5;\infty)$ — розв'язків немає; при $a\in\{\pm1{,}5;\pm2{,}5\}$ — 1 розв'язок; при $a\in(-2{,}5;-1{,}5)\cup(1{,}5;2{,}5)$ — 2 розв'язки. *Порада:* системі на координатній площині відповідає ГМТ кіл радіусів 4 і 1, з центрами в точках $(3;-a)$ і $(3;a)$ відповідно. Зовнішньому дотику кіл відповідає випадок $R+r=2|a|=5$, внутрішньому дотику — випадок $R-r=2|a|=3$. Проаналізуйте конфігурації, коли кола не мають спільних точок, коли перетинаються у двох точках.

17.9. $a\in\{1;2\}$. *Порада:* обидва рівняння системи не замінюються при заміні $x\rightleftarrows -x$, $y\rightleftarrows -y$. Тоді можна побудувати відповідне їм ГМТ координатної площини у першій чверті, а потім зробити перетворення симетрії відносно (OY) та (OX). (Зауважимо, що при побудові ГМТ другого рівняння корисно використати його симетрію відносно прямої $y=x$ і робити перший крок побудови при $y\ge x$.) Отримаємо два квадрати: в одного сторони паралельні бісектрисам координатних чвертей і перетинають вісі (OX) і (OY) у точках $(\pm a;0)$, $(0;\pm a)$; в другого — сторони паралельні вісям координат і перетинають їх у точках $(\pm1;0)$, $(0;\pm1)$. Система має 4 розв'язки коли один квадрат є вписаним в другий, або навпаки.

17.10. $a\in(-3;-1)\cup(1;3)$. *Порада:* дивись вказівки до завдання 17.7.

17.11. $a\in R$. *Порада:* побудуйте графік функції $y=z-\frac{1}{z}$ спираючись на те, що: прямі $z=0$ і $y=z$ — його асимптоти; $y'=1+\frac{1}{z^2}>0$ при всіх $z\ne0$; $y=0$ при $z=\pm1$; $y>0$ при $z\in(-1;0)\cup(1;\infty)$; $y<0$ при $y\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$. Врахуйте, що $z\in[-1;1]$.

17.12. $a=\pm4\pi$. *Порада:* дане рівняння рівносильне умові $\sqrt{a^2-x^2}=2\pi n$, $n\in\{0;N\}$. Ліва частина останнього рівняння — верхнє півколо радіуса $|a|$ з центром у точці $(0;0)$. Права частина — система прямих, які паралельні вісі (OX). Маємо 5 розв'язків, якщо пряма $y=2\pi\cdot2$ проходить через точку $(0;|a|)$.

17.13. $\begin{cases}b=0\\a\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)\end{cases}$, або $\begin{cases}b\ne0\\a\ne-2b\end{cases}$, або $\begin{cases}a=-2b\\b\in[-7;0)\end{cases}$. *Порада:* нерівність приведіть до квадратної відносно $t=3^{-y}>0$. Її розв'язком є $3^{-y}>3^{1-2x}\Leftrightarrow y<2x-1$. Це півплощина , що розташована нижче прямої $y=2x-1$.

Задача має розв'язки коли пряма $ax+by=7$ і ця півплощина мають спільні точки. Проаналізуйте кутовий коефіцієнт прямої $ax+by=7$. Окремо розгляньте випадок $b=0$.

17.14. $a\in\left(-\infty;-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right]\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)$. *Порада:* другу нерівність запишіть у вигляді $(x-a)^2+(y-1)^2>a$. Вона виконується для всіх x і y лише при умові $a<0$. Першу нерівність запишіть у вигляді $a\left(4t^2+8at+8a^2+8a+3\right)<0$, де $t=\cos(x-y)\in[-1;1]$. Враховуючи, що $a<0$ маємо вимогу $f(t)=4t^2+8at+8a^2+8a+3>0$ при всіх $t\in[-1;1]$. Далі допоможе графічна ілюстрація останньої вимоги.

17.15. $a=-1$. *Порада:* ГМТ першого рівняння — дві прямі, які паралельні бісектрисам I-III координатної чверті та II-IV чверті, і які перетинаються на вісі (OX) у точці з абсцисою a. ГМТ другого рівняння — коло з центром у точці $(a;-a)$, яка розташована у IV чверті при $a>0$, у II чверті при $a<0$ і співпадає з початком координат при $a=0$. Три розв'язки можливі лише у випадках, коли коло проходить через точку $(a;0)$, тобто $x=a$ і $y=0$ задовольняють другому рівнянню. Отримаємо умову $a^3-2a^2+3a+6=0$. Очевидним розв'язком останнього рівняння є значення $a=-1$. Поділивши багаточлен a^3-2a^2+3a+6 на $a+1$ отримаємо тричлен a^2-3a+6, який не має коренів.

ЗАВДАННЯ 18

18.1. При $a\in[-3;-2]$ $x=\pm\arccos\sqrt{a+3}+\pi k$, $k\in Z$. *Порада:* зробіть заміну $\cos^2 x=t$ і не забудьте, що $t\in[0;1]$.

18.2. При $a\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ $x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\left(2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}}\right)+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$. *Порада:* після виділення у лівій і правій частинах рівності виразів $\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$ неважко отримати рівняння $(2a-3)\sin^2 2x=4(a-1)$. Врахуйте, що $\sin^2 2x\in[0;1]$.

18.3. При $a\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{3};\infty\right)$ $x\in\left\{k\pi;\pm\arcsin\sqrt{\frac{3a-1}{4a}}+\pi n\right\}$, $\{k,n\}\subset Z$; при $a\in\left(-1;\frac{1}{3}\right)$ $x=k\pi$, $k\in Z$. *Порада:* якщо скористатися формулою синуса потрійного аргументу, отримаємо $\sin x\left(4a\sin^2 x+1-3a\right)=0$. У випадку $4a\sin^2 x+1-3a=0$ не забудьте розглянути випадок $a=0$, а в випадку $a\neq 0$ про те, що $\sin^2 x\in[0;1]$.

18.4. При $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ $x\in\varnothing$; при $a=1$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

при $a=-1$ $x=2\pi n$, $n\in Z$; при $a\in(-1;1)$ $x=\operatorname{arctg}\frac{1-a}{1+a}+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{a^2+1}}$.

18.5. При $a<0$ $x=\frac{\pi^2\left(6k-1+(-1)^k\right)^2}{36a^2}+1$, $k\in Z$, $k\le 0$; при $a=0$ $x\ge 1$;

при $a>0$ $x=\frac{\pi^2\left(6k-1+(-1)^k\right)^2}{36a^2}+1$, $k\in Z$, $k\ge 0$.

Порада: окремо розгляньте випадок $a=0$. При $a\ne 0$ отримайте рівність $a\sqrt{x-1}=(-1)^k\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+\pi k$ і врахуйте, що $\sqrt{x-1}\ge 0$.

18.6. $\frac{a}{b}\in\left\{\frac{4k+1}{4n+1};\frac{4k-1}{4n-1}\right\}$, $\{k,n\}\in Z$. *Порада:* рівняння має розв'язки при умові $\begin{cases}\sin ax=1\\ \sin bx=1\end{cases}$ або $\begin{cases}\sin ax=-1\\ \sin bx=-1\end{cases}$. **18.7.** $a\in\left[\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k;\pi-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$.

Порада: не забудьте окремо розглянути випадок $1+\sin a=0$. При $\sin a\ne -1$ запишіть дискримінант квадратного тричлену і отримайте умову $\sin a\ge\frac{2}{3}$.

18.8. $a\in\{2;4\}$.

Порада: запишіть рівняння у вигляді $\cos 4x(\cos 4x+a-3)=0$. Рівність $\cos 4x=0$ дає три підходящі корені, тоді рівність $\cos 4x=3-a$ повинна мати на інтервалі $4x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ один корінь. Вказаний проміжок має довжину 2π, тоді тільки при умові $3-a=\pm 1$ $\cos 4x$ буде приймати значення 1 (або -1) лише 1 раз.

18.9. При $a\ge 4$ $x\in R$; при $a<-2$ $x\in\varnothing$;

при $a\in[-2;1]$ $x\in\left(\pi-\arcsin\frac{a+5}{6}+2\pi k;\pi+\arcsin\frac{a}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$;

при $a\in(1;4)$ $x\in\left(\arcsin\frac{a}{4}+2\pi n;\pi-\arcsin\frac{a}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

Порада: приведіть нерівність до вигляду $-\frac{a}{4}\le\sin x\le\frac{a+5}{6}$ і проаналізуйте розташування прямих $y=-\frac{a}{4}$ та $y=\frac{a+5}{6}$ на координатній площині (XOY).

18.10. При $a\in\left(\frac{1}{3};3\right)$ $x\in R$;

при $a\ge 3$ $x\in\left(\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi k;-\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2(k+1)\pi\right)$, $k\in Z$;

при $a \le \frac{1}{3}$ $x \in \left(-\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi k; \arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi k\right)$, $k \in Z$.

Порада: треба розглянути 3 випадки значень множника перед $\cos x$. Аналіз випадків при умовах $5a-7>0$ та $5a-7<0$ можна полегшити, якщо побудувати графік функції $y(a)=\frac{a+5}{5a-7}=\frac{1}{5}+\frac{\frac{32}{25}}{a-\frac{7}{5}}$.

18.11. $a \in \left[-\frac{24}{5}; 0\right]$. *Порада:* запишіть нерівність у вигляді

$$|a\sin 2x - 2\cos 2x + a + 4| \le 6,$$

введіть допоміжний кут $\varphi = \operatorname{arcctg}\frac{a}{2}$ і врахуйте, що $\sin(2x-\varphi) \in [-1; 1]$.

18.12. $a \in \left(-\infty; -2-2\sqrt{2}\right) \cup (2; \infty)$. *Порада:* позначте $t \triangleq \sin x$ і врахуйте, що $\sin x \in [-1; 1]$. Зручно скористатися властивостями квадратного тричлену щодо розміщення його коренів відносно числа.

18.13. $a \in \left[\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{6}+\pi n; \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{6}+\pi+\pi n\right]$, $n \in Z$.

Порада: маємо задачу на розташування коренів квадратного тричлена $f(x)=2x^2+2x+6\cos 2\alpha$ відносно числа 1, бо

$$1-x=\sqrt{2x^2+6\cos 2\alpha+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ (1-x)^2 = 2x^2+6\cos 2\alpha+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x^2+2x+6\cos 2\alpha = 0 \end{cases}.$$

18.14. $a \in [-3; 3]$. *Порада:* позначити $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x = t$ і розв'язувати нерівність $(a^2+a-2)t-(a+5)t-2 \le 0$ при умові, що вона виконується для всіх $t \in [0; 1]$. Не забудьте розглянути випадок $a^2+a-2=0$. При $a^2+a-2 \ne 0$ треба використати графічне тлумачення розташування коренів квадратного тричлену лівої частини нерівності.

18.15. При $a \ne \pm\sqrt{2}$ $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k \in Z$ — 9 коренів;

при $a=\sqrt{2}$ $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, $k \in Z$ — 4 кореня; при $a=-\sqrt{2}$ $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k \in Z$ — 5 коренів.

Порада: при умові $\cos x \ne \frac{a}{2}$, $\sin x \ne \frac{a}{2}$ з вихідного рівняння отримуємо $\sin x - \cos x = 0$, або $\sin x + \cos x = \frac{a^2+4}{2a}$. У першому випадку треба врахувати область визначення, а у другому врахувати, що $\left|\frac{a^2+4}{2a}\right| = \left|\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right| \ge 2$.

18.16. При $a \neq \pm 3\sqrt{2}$ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$ — 9 коренів; при $a = -3\sqrt{2}$ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$ — 5 коренів; при $a = 3\sqrt{2}$ $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$ — 4 кореня. *Порада:* розв'язання аналогічне прикладу 18.15.

18.17. $a \in \left[0; 2 - \sqrt{2}\right] \cup \left[2; 2 + \sqrt{2}\right]$.

Порада: якщо позначити $t \triangleq \cos x$, то маємо задачу існування єдиного розв'язку $at^2 - 2(a-1)t + a^2 - 2a = 0$ на інтервалі $t \in [0; 1]$.

18.18. $a \in \left\{0; \left[\frac{1}{5}; 1\right]\right\}$. *Порада:* див пораду до 18.17.

18.19. a — ірраціональне число. *Порада:* див. приклад 27 у тексті §18.

18.20. $a = \pm 2, b = \frac{1}{3}$. *Порада:* див приклад 28 у тексті §18.

18.21. $b \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ і

$$a \in \left[\operatorname{arctg}\frac{b+1}{2} - \arcsin\frac{|b-1|}{\sqrt{(b+1)^2+4}} + \pi n; \operatorname{arctg}\frac{b+1}{2} + \arcsin\frac{|b-1|}{\sqrt{(b+1)^2-4}} + \pi n\right], \quad n \in Z;$$

$b = 1$ і $a = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

18.22. $a = -1$.

ЗАВДАННЯ 19

19.1. При $a \in \left\{(-\infty; 0]; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right\}$ $x \in \varnothing$; при $a \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right) \cup (1; \infty)$ $x = a^2$.

Порада: перейдіть до логарифму з основою a і врахуйте область визначення.

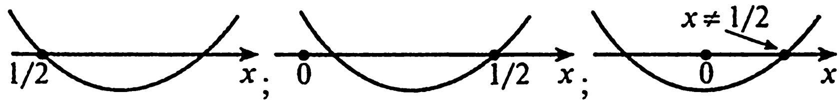
19.2. При $a \in \left\{(-\infty; 0]; 2^{-\frac{2}{3}}; 1\right\}$ $x \in \varnothing$; при $a \in \left(0; 2^{-\frac{2}{3}}\right) \cup \left(2^{-\frac{2}{3}}; 1\right) \cup (1; \infty)$ $x = 2^t$, де $t = \frac{2\log_2 a}{2 + 3\log_2 a}$.

19.3. При $a \in \{(-\infty; 0]; 1\}$ $x \in \varnothing$; при $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ $x = \frac{1}{a^2}$.

19.4. При $a \in \left\{0; \left(\frac{1}{2}; \infty\right)\right\}$ $x \in \varnothing$; при $a \in (-\infty; 0)$ $x = \frac{1 - a - \sqrt{1-2a}}{a^2}$; при $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ $x = \frac{1 - a \pm \sqrt{1-2a}}{a^2}$.

19.5. При $a < 0$ $x \in \varnothing$; при $0 \leq a < 1$ $x = a + 2 \pm 2\sqrt{a}$; при $a \geq 1$ $x = a + 2 + 2\sqrt{a}$.

19.6. При $a \neq 0$. *Порада:* задача зводиться до аналізу розміщення коренів квадратного тричлену $4x^2 - ax - 1$ (бо $D = a^2 + 16 > 0$):



Зауважимо, що при всіх $a \neq 0$ реалізується останній випадок.

19.7. При $a < 0$ або $a = 4$. *Порада:* аналогічно 19.6.

19.8. При $a = 1$ $x = 3$; при $a \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right]$ $x = 4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}$.

19.9. При $a \in \{-4; (0; \infty)\}$.

19.10. $a = \sqrt{2} + 1$. *Порада:* задане рівняння рівносильне умові $\begin{cases}(ax-1)^2 = 2x - 1 \\ ax - 1 > 0\end{cases}$.

Ліва частина рівняння відповідає половині параболи $y = (ax-1)^2$ абсциси точок якої при $a < 0$ менші за $-\frac{1}{|a|}$. Права частина рівняння пряма, яка проходить через точку $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Тоді розв'язок можливий лише при умові $a > 0$ і буде єдиним у випадку дотику прямої до напівпараболи: $\begin{cases}a > 0 \\ (a+1)^2 - 2a^2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a + 1 = \pm\sqrt{2}a \\ a > 0\end{cases}$.

19.11. При $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$. *Порада:* позначте $z = \log_4\left(1 - \frac{2}{x}\right)$, покажіть, що $-\frac{1}{2} < z < 0$ і перейдіть до рівняння $z^2 + bz - a = 0$.

19.12. При $a \leq 0$ або $b \leq 0$ розв'язків немає; при $a = b = 1$ $x > 0$, $y > 0$; при $a = b \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ $x = y > 0$; при $ab = 1$ і $a \neq 1$, $a > 0$ $xy = 1$, $x > 0$; при інших $(a; b)$ $x = \frac{1}{b}$; $y = \frac{1}{a}$. *Порада:* розгляньте спочатку випадки $a = b = 1$ і $a \leq 0$, $b \leq 0$; потім прологарифмуйте обидві частини кожної рівності і розв'яжіть отриману систему відносно $\lg x$ і $\lg y$.

19.13. При $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$ $x \in \varnothing$; при $a \in (0; 1)$ $x \in \left(2; 1 + \sqrt{1+a}\right)$; при $a \in (1; \infty)$ $x \in \left(1 + \sqrt{1+a}; \infty\right)$. *Порада:* розглянути всі можливі випадки для значень основи логарифму.

19.14. При $a \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty)$ $x \in \varnothing$; при $a \in (0; 1)$ $x \in \left(-1; -\sqrt{1-a}\right] \cup \left[\sqrt{1-a}; 1\right)$.

Порада: не забудьте про ОДЗ: $1 - x^2 > 0$.

19.15. При $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$ $x \in \varnothing$; при $a \in (0; 1)$ $x \in (0; a) \cup \left(\frac{1}{a^2}; \infty\right)$;

при $a \in (1; \infty)$ $x \in \left(\frac{1}{a^2}; a\right)$.

Порада: при $a \in (0; 1)$ та $a \in (1; \infty)$ прологарифмуйте за основою a обидві частини нерівності.

19.16. $a < -2$. *Порада:* якщо розв'язати дану нерівність відносно x^2, умовою рівносильності цього розв'язку $x \in R$ буде система $\begin{cases} a < -1 \\ -\frac{a+2}{a+1} < 0 \end{cases}$.

19.17. $a \in \left(-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)$.

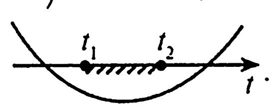
Порада: треба розглянути випадки $0 < a^2 - 2 < 1$ і $a^2 - 2 > 1$ і пригадати властивості квадратного тричлену.

19.18. $a \in \left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

Порада: нерівність повинна виконуватися при довільному значенні x, отже і при $x = 0$. Отримайте умови, яким повинно задовольняти a, якщо $x = 0$. Перевірте отримані значення a для довільного значення x. Майте на увазі, що при $x = 0$ значення виразу, який логарифмується — мінімальне.

19.19. $a \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; \infty\right)$.

Порада: якщо позначити через $t \triangleq \lg(16 + x^2)$, $t_1 \triangleq \lg 17$, $t_2 \triangleq \lg 20$, то для квадратного тричлена $f(t) = t^2 - \lg(4 + 2a^2)t$ маємо графічну інтерпретацію:



19.20. $x \in [2; 2{,}5)$.

Порада: покажіть перш за все, спираючись на графік функції $y = 3x - x^2$, що для даних x основа логарифму більша за 1. Після того перейдіть до квадратичної нерівності $x^2 - (a+3)x + 3a < 0$. Побудуйте графік функції $y = x^2 - (a+3)x + 3a$. Він міститься нижче вісі абсцис при $a < x < 3$. Врахуйте максимальне значення a (з умови задачі).

19.21. $\begin{cases} a \in N \\ a \geq 3 \end{cases}$.

Порада: умови $x + y + 3 \neq 0$ і $xy > a$ у третій координатній чверті означають, що потрібно знайти такі натуральні a, при яких жодна з точок відрізка прямої $y = -x - 3$ розташованого у третій чверті координатної площини не буде перетинати ГМТ $y < \frac{a}{x}$. Значення $a > 0$, при якому відбувається дотик відрізка і гіперболи знайдіть з умови існування лише одного розв'язка рівняння $\frac{a}{x}=-3-x$. При збільшенні a гіпербола віддаляється від відрізка.

19.22. $a\in\left(2k\pi;\pi(2k+1)\right)$, де $k\in N$.

19.23. $a\in\left(2\cdot3^{h/2};\sqrt{2\pi(\pi-2)}\right)$.

ЗАВДАННЯ 20

20.1. $a\in[1;2]$. *Порада:* окремо розгляньте випадки $a\in\{1;2\}$.

20.2. $a\in(-\infty;-3)\cup[1;\infty)$. *Порада:* окремо розгляньте випадки $a\in\{\pm1;-3\}$.

20.3. $a<-\frac{5}{12}$. *Порада:* знайдіть найменше значення функції

$$\varphi(x)=y'(x)=6a-6a\cos6x-4+6\sin6x\ .$$

і розгляньте умову $\varphi_{\min}=6a-4-6\sqrt{a^2+1}>0$.

20.4. $a=-9$. *Порада:* не обов'язково використовувати необхідну і достатню умови існування екстремуму заданої функції, можна проаналізувати властивості $f(x)$, як квадратного тричлену.

20.5. При $a=-\frac{9}{5}$ і $b\in\left(\frac{36}{5};\infty\right)$, або при $a=\frac{9^2}{5^2}$ і $b\in\left(\frac{20^2}{3\cdot9^2};\infty\right)$. *Порада:* врахуйте, що $f'(x)$ — квадратний тричлен, x_0 — його менший корінь, тобто $f'(x_0)=0$ і $x_в=-\frac{2}{5a}>-\frac{5}{9}$; екстремум-мінімум функції додатний, тобто $f\left(x_в+(x_к-x_0)\right)>0$.

20.6. $\varnothing$. *Порада:* проаналізуйте знак дискримінанту.

20.7. При $a=-\frac{1}{3}$ і $b\in\left(-\infty;-\frac{5}{9}\right)$ або при $a=1$ і $b\in(-\infty;-1)$. *Порада:* Див. 20.5.

20.8. При $a\geq2$ екстремум-мінімум міститься у $(0;\infty)$; при $a\in(1;2)$ два екстремуми функції — максимум і мінімум містяться у $(0;\infty)$.

20.9. При $b\leq\frac{2}{3}$ $\max\limits_{[-2;1]}f=f(-2)=b^2-24b+16$; при $b\geq\frac{2}{3}$ $\max\limits_{[-2;1]}f=f(0)=b^2$.

Порада: позначити $x^2\stackrel{\Delta}{=}t$ і шукати найбільше значення функції $\varphi(t)=t^2-6bt+b^2$ на відрізку $[0;4]$.

20.10. При $b\in(-\infty;2]$ $\max\limits_{[-2;1]}f(x)=f(-2)=-\frac{1}{3b^2-8b+16}$;

при $b\in[2;\infty)$ $\max\limits_{[-2;1]}f(x)=f(0)=-\frac{1}{3b^2}$. *Порада:* проаналізуйте вираз $\left(-t^2+2bt-3b\right)$ на найменше значення на відрізку $[0;4]$.

20.11. $\sqrt{\dfrac{\left(a^2+2\right)^2+\left(a^2-3a+5\right)^2}{2}}$ *Порада:* проаналізуйте знаки доданків і представте функцію у вигляді $y=k\,|\sin(x\pm\gamma)|>0$, $y^2\geq\dfrac{k^2}{2}$.

20.12. $a\in\left(1;4+2\sqrt{2}\right)$. *Порада:* скористуйтесь графічною інтерпретацією і розкрийте знак модуля.

20.13. $\left\{\begin{array}{l} p=3 \\ \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{4}+\dfrac{k}{2},\ k\in Z \\ \left\{\begin{array}{l} m\in\left(-1;\dfrac{1}{3}\right] \\ m\neq\dfrac{t}{2},\ t\in Z \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$ або $\left\{\begin{array}{l} p=5 \\ \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{4}+\dfrac{k}{2},\ k\in Z \\ \left\{\begin{array}{l} m\in\left(-1;\dfrac{1}{5}\right] \\ m\neq\dfrac{t}{2},\ t\in Z \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$

20.14. При $|a|=\sqrt{2}$.

20.15. $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{2}{3};\infty\right)$.

Порада: позначте $2^x\triangleq t>0$.

20.16. $a\in[-1;3]$.

Порада: абсциси екстремумів будуть коренями квадратного тричлена. Запишіть умову їх розміщення на інтервалі $[-2;4]$.

20.17. При $\begin{cases} a\geq b \\ a\neq 0 \end{cases}$ $\left(\sqrt{a-b};\ \sqrt{a-b}\left(b+2a\sqrt{a-b}\right)\right)$.

20.18. $m\in\left(-\infty;4-\sqrt{10}\right)\cup\left(4+\sqrt{10};\infty\right)$.

Порада: пригадайте, що кутовий коефіцієнт дотичної — значення похідної $f'(x_0)$ у точці дотику. Тоді $f'(x_0)=-1$. Звідки маємо $x_0=2$. Далі запишіть рівняння дотичної і скористуйтеся формулою відстані точки від прямої.

20.19. $\left(x+\dfrac{23}{16}\right)^2+\left(y+\dfrac{21}{16}\right)^2=\dfrac{225}{128}$. *Порада:* знайдіть найменшу відстань від точки, яка міститься на параболі до заданої прямої. Діаметр кола дорівнює цій відстані, а координата середини відповідного відрізка є центром шуканого кола.

20.20. $M(0;\ 2)$.

20.21. При $a<-\dfrac{1}{2}$ $\sqrt{-\dfrac{2a+1}{2}}$; при $a>\dfrac{3}{2}$ $\sqrt{\dfrac{3(2a-3)}{2}}$; при $-\dfrac{1}{2}\leq a\leq\dfrac{3}{2}$ $|a|$.

20.22. $f_{\min}=\dfrac{1}{3}$ при $x\in\left[\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\pi n;\dfrac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in Z$. *Порада:* див. приклад 18 §20.

20.23. При $a=\pi+2\pi n,\ n\in Z$. *Порада:* див. приклад 19 § 20.

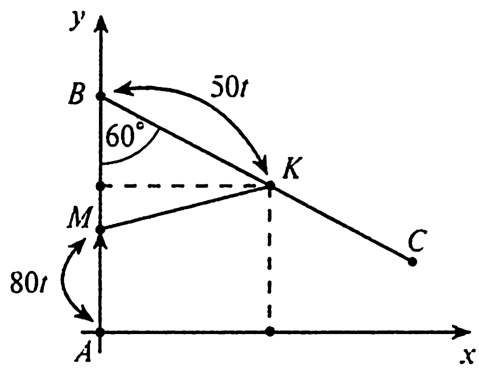
ЗАВДАННЯ 21

21.1. $d=-4$.

21.2. $\frac{a}{2v}$. *Порада:* спрямувати вісь $(0X)$ за напрямком руху другого літака, а за початок координат візьміть точку перетину маршрутів. В початковий момент часу координати першого літака (0; 0), другого $(-a;\,0)$. В момент часу t координати першого літака $(-vt\sin 30°;\ vt\cos 30°)$, а другого $(-a+vt;\ 0)$.

21.3. У довільній точці траси між B і C. *Порада:* пригадайте властивість функції $|x-a|+|x-b|\ge|a-b|$.

21.4. $\frac{70}{43}$ год. *Порада:* спрямуйте координатні вісі так, як вказано на малюнку і обрахуйте координати положення автомобіля M і поїзда K в момент часу t.



21.5. а) за 1 год; б) за $\frac{5}{4}\sqrt{52}$ год.

21.6. $v=42$ км/год.
Порада:

Врахуйте, що час уповільненого руху до повної зупинки дорівнює $t_2=\frac{v}{54}$, а шлях, який буде за цей час пройдено $S=vt_2-\frac{54t_2^2}{2}$.

21.7. 30 км/год; 900 монет. *Порада:* пригадайте властивість функції $\frac{a}{x}+bx$.

21.8. 8 будинків; $2800\sqrt{2}$ тис. грн.

21.9. $18\frac{1}{3}$ кг. *Порада:* запишіть кількість солі у кожному з розчинів до і після випарювання. (Зауважимо, що випарювалась лише вода). З отриманих співвідношень знайдіть кількість води, що випарилася з кожного з сосудів і додайте. Після того згадайте про властивість функції $\frac{a}{x}+bx$.

21.10. $2a$. *Порада:* з вершини меншої основи провести перпендикуляр до більшої основи.

21.11. $60°$. *Порада:* дивись пораду до 21.10.

21.12. $\frac{3R}{4}$. *Порада:* пригадайте приклад 9 у § 21 на с. 233.

21.13. $b=16$. *Порада:* скористайтеся формулою Герона.

21.14. $\sin\alpha+\cos\alpha-1$; $45°$.

21.15. 4.

21.16. 6.

21.17. $\frac{8\pi}{3}$.

21.18. $R\frac{2}{\sqrt{3}}$; $R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

21.19. $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

21.20. $\frac{2}{9}V$.

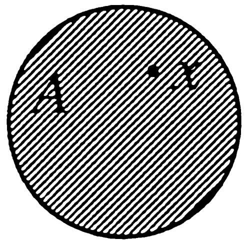
21.21. $B\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{9}\right)$. **21.22.** $(-5; 1)$ **21.23.** $S = 12$; $C(-1; 3)$. **21.24.** $S = 0{,}1$.

21.25. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right)$ **21.26.** $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

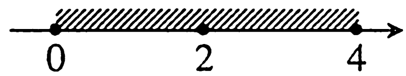
21.27. $(4; 0)$. *Порада:* пригадайте опорний факт, наведений у § 21 на с. 242.

ОК-1

"належить" $\boxed{\in}$

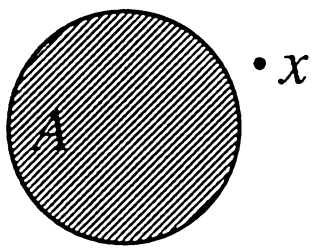


$1 \in \{0; 1; 2\}$

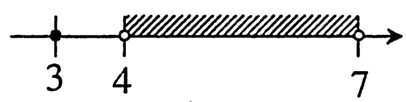


$x \in A$ $\quad 2 \in [0; 4]$

"не належить" $\boxed{\overline{\in}, \notin}$

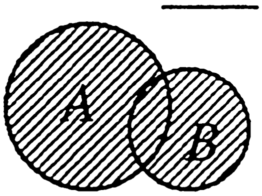


$2 \ \overline{\in} \ \{3; 10\}$



$x \ \overline{\in} \ A$ або $x \notin A$ $\quad 3 \notin (4; 7)$

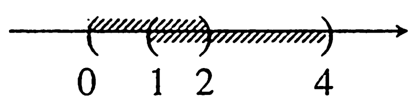
"або" $\boxed{\cup, [}$



$A \cup B$

$$\left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$$

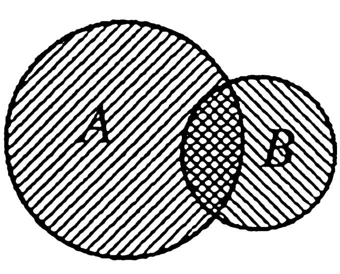
$(0;2) \cup (1;4) = (0;4)$



$$\left[\begin{array}{l} x \in (0;2) \\ x \in (1;4) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0;4)$$

об'єднання

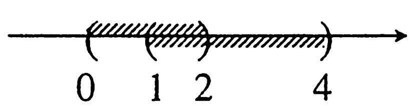
"і" $\boxed{\cap, \{}$



$A \cap B$

$$\begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

$(0;2) \cap (1;4) = (1;2)$



$$\begin{cases} x \in (0;2) \\ x \in (1;4) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1;2)$$

перетин

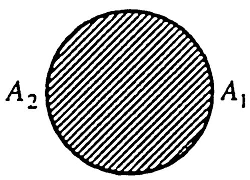
ОК-2

Нехай

A_1 - множина розв'язків $f_1(x) \gtrless g_1(x)$

A_2 - множина розв'язків $f_2(x) \gtrless g_2(x)$

$\boxed{\Leftrightarrow}$ **«РІВНОСИЛЬНО»**



$A_1 = A_2$

або

$A_1 = \varnothing = A_2$

$$\underbrace{f_1(x) \gtrless g_1(x)}_{A_1} \Leftrightarrow \underbrace{f_2(x) \gtrless g_2(x)}_{A_2}$$

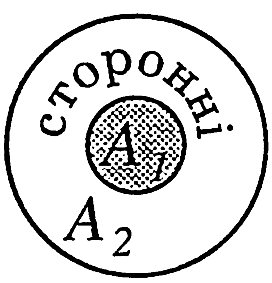
$$x \in A_1 \Leftrightarrow x \in A_2$$

$$4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$|x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2;2)$$

«ВИПЛИВАЄ» $\boxed{\Rightarrow}$

$$\underbrace{f_1(x) \gtrless g_1(x)}_{A_1} \Rightarrow \underbrace{f_2(x) \gtrless g_2(x)}_{A_2}$$



$A_1 \subset A_2$

кіт $\Rightarrow$ **вусатий (але не навпаки)**

курка $\Rightarrow$ **двонога (але не навпаки)**

$x = 2 \Rightarrow |x| = 2$ **(наслідок завжди ширше)**

$$x \in A_1 \Rightarrow x \in A_2$$

$$\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \leftarrow \end{array}\right.$$ **сторонній**

$$\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x \neq 2 \leftarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \leftarrow \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$ **сторонній**

ОК-3

Р О З В ’ Я З У Є М О
лінійне рівняння з параметром:

1. «Компанія» при x дорівнює 0, або не дорівнює нулю.

2. У випадку «компанія» при x дорівнює нулю розглядаємо праву частину рівняння.

$$kx = b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 0 \\ 0 \cdot x = b \end{cases} \\ \begin{cases} k \neq 0 \\ x = \dfrac{b}{k} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 0 \\ b = 0 \\ x \in R \end{cases} \\ \begin{cases} k = 0 \\ b \neq 0 \\ x \in \varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} k \neq 0 \\ x = \dfrac{b}{k} \end{cases} \end{array} \right.$$

ПАМ’ЯТАЄМО:
умова при $k \neq 0$
не розгалужується!

ОК-4

Р О З В ’ Я З У Є М О
лінійні нерівності з параметром

План роботи:

1. «Компанія» перед x дорівнює 0.

2. «Компанія» перед x більша за 0.

3. «Компанія» перед x менша за 0.

$$kx \gtreqless b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k=0 \\ 0\cdot x \gtreqless b \end{cases} \\ \begin{cases} k>0 \\ x \gtreqless b/k \end{cases} \\ \begin{cases} k<0 \\ x \lesseqgtr b/k \end{cases} \end{array}\right.$$

ПАМ’ЯТАЄМО

властивість нерівності:

якщо праву і ліву частину нерівності поділити на

- ***додатнє число — знак не змінюється;***
- ***від’ємне число — знак змінюється на протилежний.***

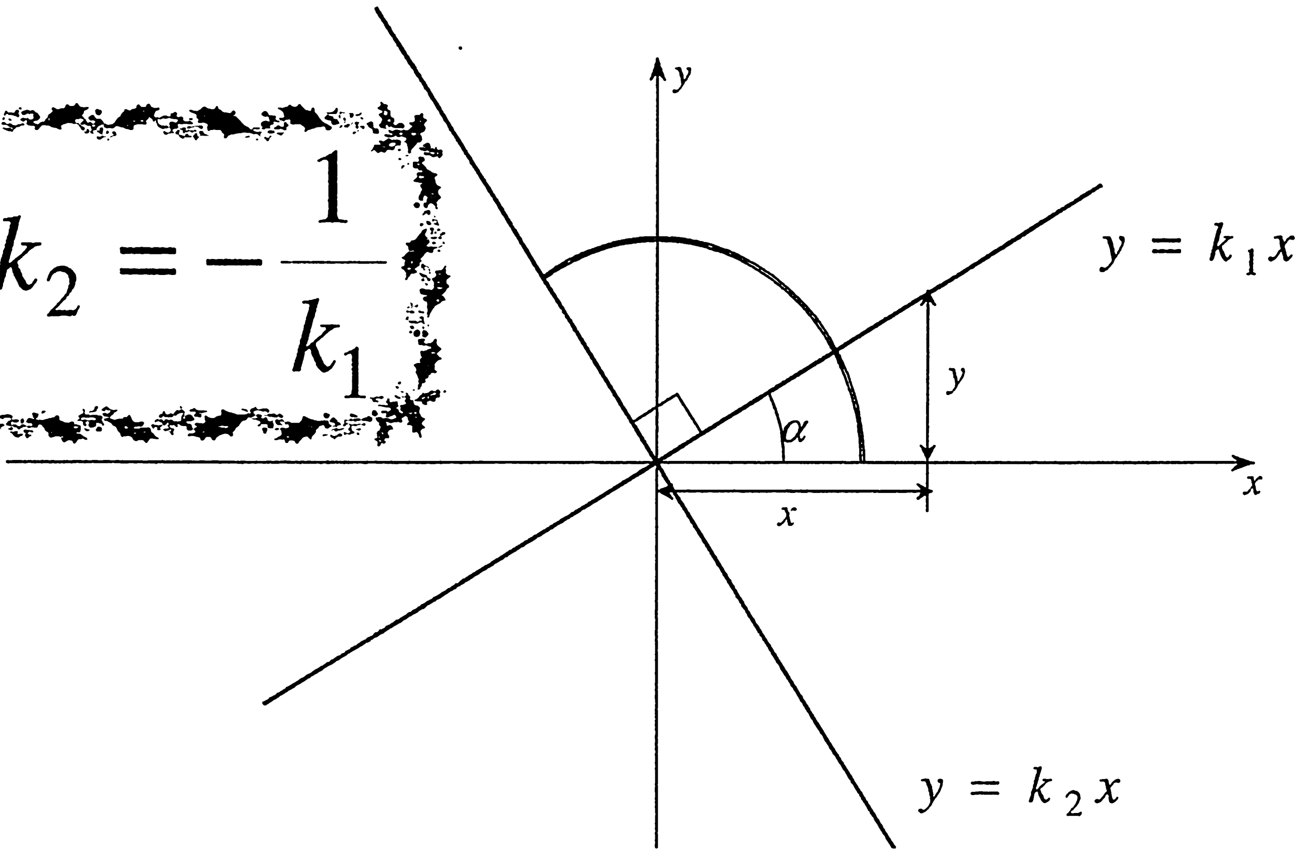
$$2 \underset{:2}{<} 4 \Leftrightarrow 1<2$$

$$2 \underset{:(-2)}{<} 4 \Leftrightarrow -1>-2$$

ОК-5

ВЗАЄМНО $\perp$ ПРЯМІ

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$



$$y = k_1 x \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = k_1$$

$$y = k_2 x \quad \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{k_1}$$

$$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$

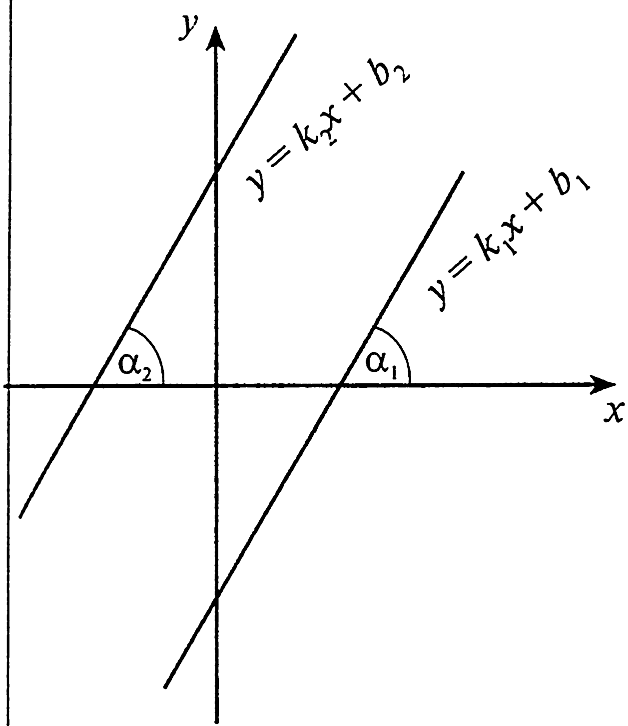
$$y = k_1 x + l_1 \quad \xleftarrow[\text{гр. } \uparrow\downarrow \text{ на } l_1]{} \quad y = k_1 x$$

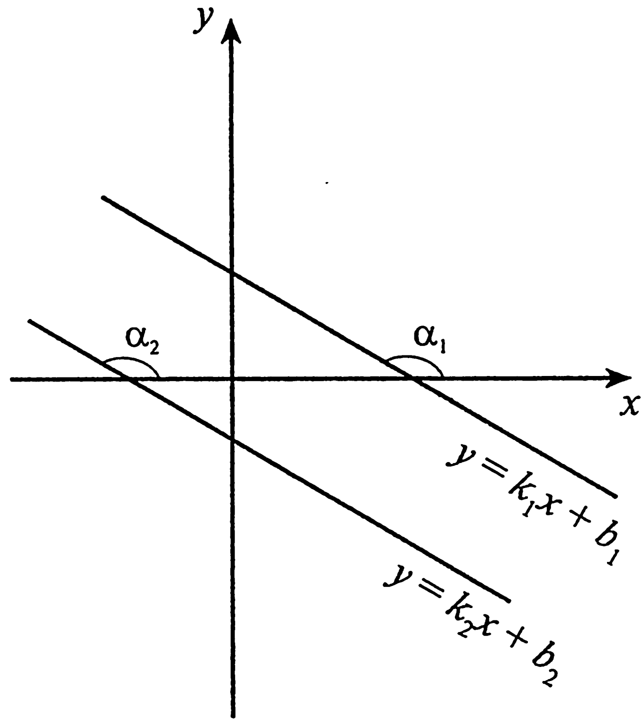
$$y = k_2 x + l_2 \quad \xleftarrow[\text{гр. } \uparrow\downarrow \text{ на } l_2]{} \quad y = k_2 x$$

кут з (OX) не змінюється

ОК-6

ВЗАЄМНО ∥ ПРЯМІ

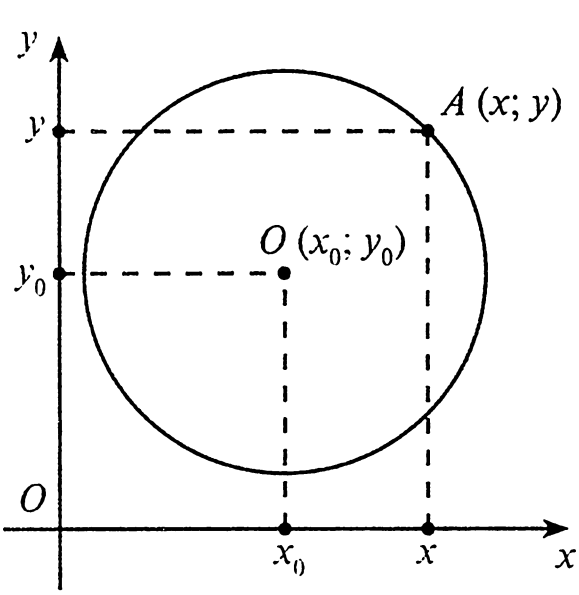




$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$$

$$\boxed{k_1 = k_2}$$

РІВНЯННЯ КОЛА



$$OA^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

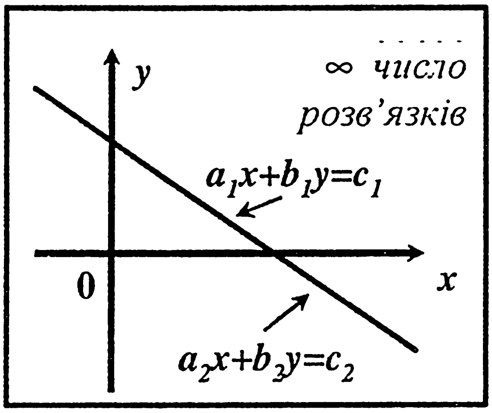
$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$$

ОК-7

СИСТЕМА 2-Х ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З 2-МА НЕВІДОМИМИ

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

I.

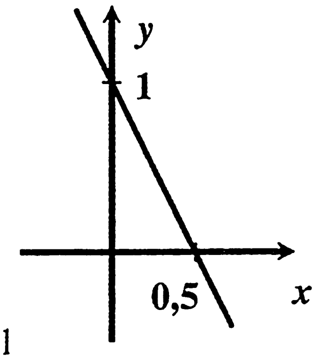


$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

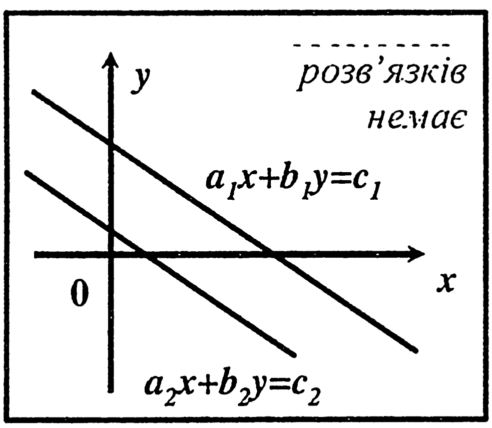
∞ кількість розв'язків

$a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ c_2 \neq 0$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y = 1$$



II.

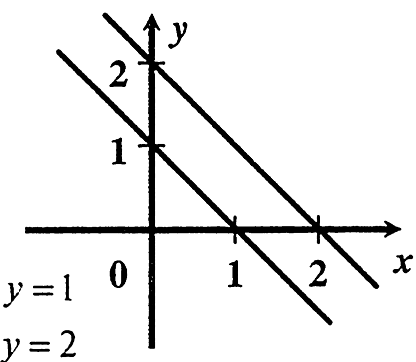


$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

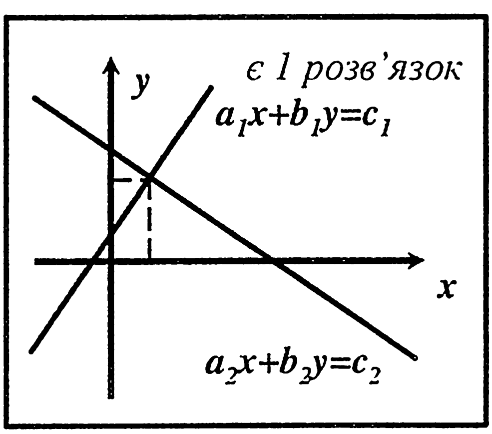
розв'язків немає

$a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ c_2 \neq 0$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 6x + 6y = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$



III.



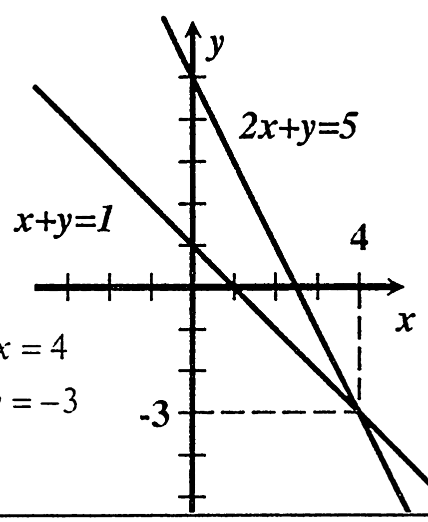
$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

єдиний розв'язок

$a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 1 + x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$



ОК-8

К В А Д Р А Т Н Е   Р І В Н Я Н Н Я

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (\text{якщо} \quad a\neq 0)$$

$$\boxed{(ax)^2=d^2 \Leftrightarrow |ax|=|d| \Leftrightarrow ax=\pm d}$$

$$(2x)^2=9 \Leftrightarrow |2x|=3 \Leftrightarrow 2x=\pm 3$$

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ D\overset{def}{=}b^2-4ac}$$

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a},\ \frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}$$

$$D<0 \qquad x\in\varnothing$$

$$D=0 \qquad x_1=x_2$$

$$D>0 \qquad x_1\neq x_2$$

$$ax^2+bx+b-a=0$$

$$D=b^2-4ab+4a^2=(b-2a)^2$$

$$x_1=-1;\ x_2=1-\frac{b}{a}.$$

ОК-9

ТЕОРЕМА ВІЄТА

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0 \\ a\neq 0 \text{ і } D\geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

ЗВОРОТНЯ ТЕОРЕМА ВІЄТА

$$\left.\begin{array}{l} m+n\overset{\Delta}{=}-p \\ m\cdot n\overset{\Delta}{=}q \\ (m;n)\subset R \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} m=x_1;\ n=x_2 - \text{корені} \\ \text{рівняння } x^2+px+q=0 \end{array}\right.$$

ЗНАКИ X_1 І X_2 [sain]

$$\operatorname{sign}x_1=\operatorname{sign}x_2 \qquad \begin{cases} \dfrac{c}{a}>0 \\ D\geq 0 \end{cases}$$

при тому:

якщо $\dfrac{b}{a}>0$ $x_{1,2}<0$;

якщо $\dfrac{b}{a}<0$ $x_{1,2}>0$.

$$\operatorname{sign}x_1\neq\operatorname{sign}x_2 \qquad \begin{cases} \dfrac{c}{a}<0 \\ D>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \dfrac{c}{a}<0$$

$$\left(\text{бо } D=b^2-4\underbrace{ac}_{<0}\right)$$

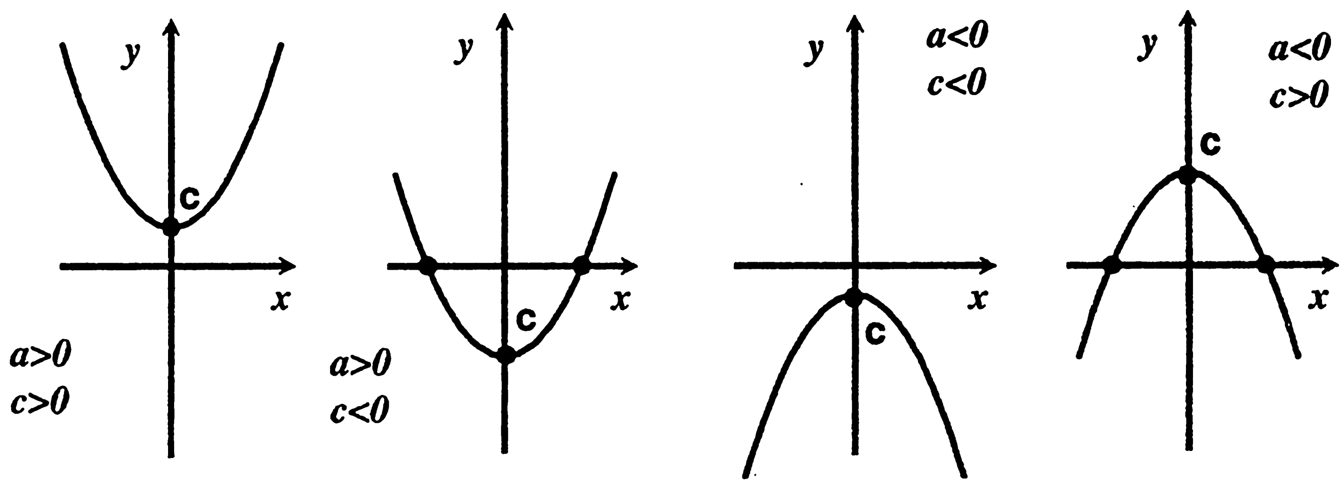
КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

ax^2+bx+c якщо $a\neq 0$

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$$

ОК-10

$$y = ax^2 + c$$



1) $x \in (-\infty; \infty)$

2) при $\boxed{a>0}$ $y \in [c; \infty)$ при $\boxed{a<0}$ $y \in (-\infty; c]$

3) при $\boxed{a>0, c<0 \text{ або } a<0, c>0}$ $y=0$ при $x = \pm\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}$

4) при $\boxed{a>0}$ $y\downarrow$ на $x \in (-\infty; 0)$, $y\uparrow$ на $x \in (0; \infty)$; при $\boxed{a<0}$ $y\uparrow$ на $x \in (-\infty; 0)$, $y\downarrow$ на $x \in (0; \infty)$

5) при $\boxed{\begin{matrix} a>0 \\ c>0 \end{matrix}}$ $y>0$ на $x \in D$; при $\boxed{\begin{matrix} a<0 \\ c<0 \end{matrix}}$ $y<0$ на $x \in D$

при $\boxed{\begin{matrix} a>0 \\ c<0 \end{matrix}}$

$y>0$ на $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right) \cup \left(\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}; \infty\right)$

$y<0$ на $x \in \left(-\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}; \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right)$

при $\boxed{\begin{matrix} a<0 \\ c>0 \end{matrix}}$

$y>0$ на $x \in \left(-\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}; \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right)$

$y<0$ на $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right) \cup \left(\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}; \infty\right)$

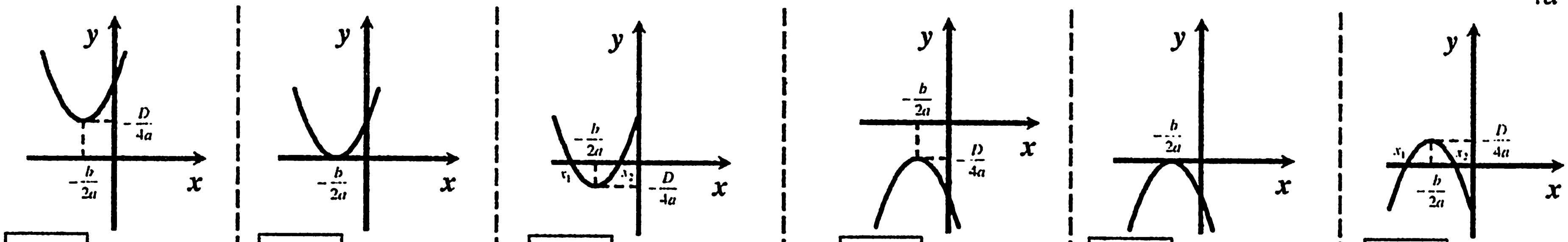
6) Парна, вісь симетрії ***(Oy)***

7) при $\boxed{a>0}$ $y = y_{\min}$ при $x=0$; при $\boxed{a<0}$ $y = y_{\max}$ при $x=0$

ОК-11

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} \quad \leftarrow \quad y = ax^2 \qquad x_в = -\frac{b}{2a} \quad y_в = -\frac{D}{4a}$$



$\boxed{a>0;\ D<0}$ $-\frac{D}{4a}>0$	$\boxed{a>0;\ D=0}$ $-\frac{D}{4a}=0$	$\boxed{a>0;\ D>0}$ $-\frac{D}{4a}<0$	$\boxed{a<0;\ D<0}$ $-\frac{D}{4a}<0$	$\boxed{a<0;\ D=0}$ $-\frac{D}{4a}=0$	$\boxed{a<0;\ D>0}$ $-\frac{D}{4a}>0$

1) $x \in (-\infty; \infty)$

2) $\boxed{a>0}$ $\quad y \in \left[-\frac{D}{4a}; \infty\right)$ $\qquad \boxed{a<0}$ $\quad y \in \left(-\infty; -\frac{D}{4a}\right]$

3) $y=0$ якщо $D>0$ при $x_1 \neq x_2$ (2 корені); якщо $D=0$ при $x_1 = x_2$ (кратні корені); якщо $D<0$ коренів нема

4) $\boxed{a>0}$ $\quad y\downarrow$ на $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; $y\uparrow$ на $x \in \left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$. $\qquad \boxed{a<0}$ $\quad y\uparrow$ на $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; $y\downarrow$ на $x \in \left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$.

5) $\boxed{a>0;\ D<0}$ $y>0$ на $x \in (-\infty; \infty)$; $\boxed{a>0;\ D=0}$ $y>0$ при $x \neq -\frac{b}{2a}$; $\boxed{a>0;\ D>0}$ $y>0$ при $x>x_2$ або $x<x_1$; $y<0$ при $x_1<x<x_2$;

$\boxed{a<0;\ D<0}$ $y<0$ на $x \in (-\infty; \infty)$; $\boxed{a<0;\ D=0}$ $y<0$ при $x \neq -\frac{b}{2a}$; $\boxed{a<0;\ D>0}$ $y>0$ при $x_1<x<x_2$; $y<0$ при $x>x_2$ або $x<x_1$

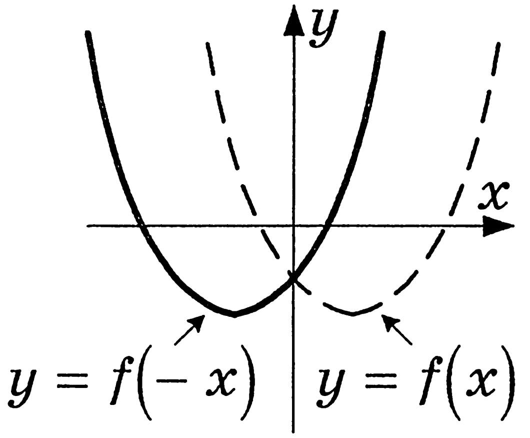
6) Вісь симетрії — пряма $x = -\frac{b}{2a}$

7) $\boxed{a>0}$ $\quad y = y_{\min}$ при $x = -\frac{b}{2a}$; $\qquad \boxed{a<0}$ $\quad y = y_{\max}$ при $x = -\frac{b}{2a}$

ОК-12

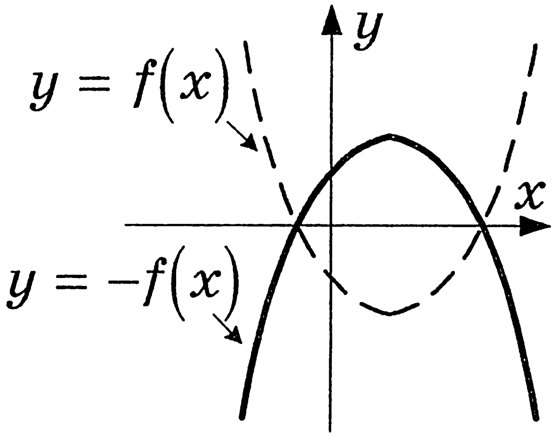
$$y = f(x) \to y = f(-x)$$

Перетворенням симетрії відносно осі OY :



$$y = f(x) \to y = -f(x)$$

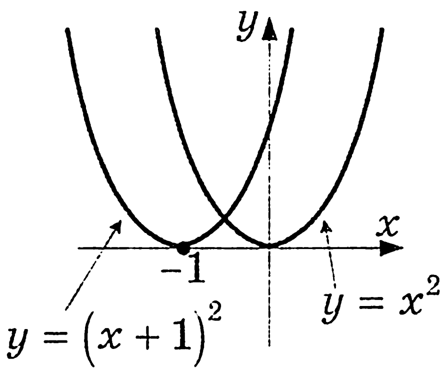
Перетворенням симетрії відносно осі OX :



ОК-13

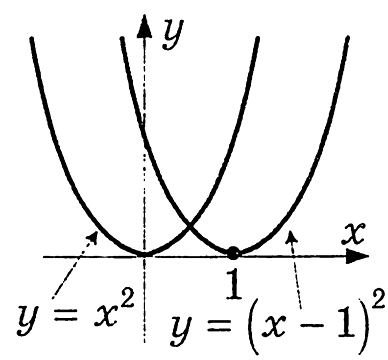
$$y=f(x) \xrightarrow[\text{граф.}\leftrightarrow]{} y=f(x+a)$$

$a>0$ гр. $\leftarrow$ на a



гр. $\leftarrow$ на 1

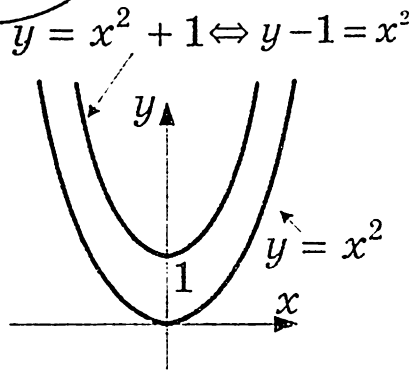
$a<0$ гр. $\rightarrow$ на a



гр. $\rightarrow$ на 1

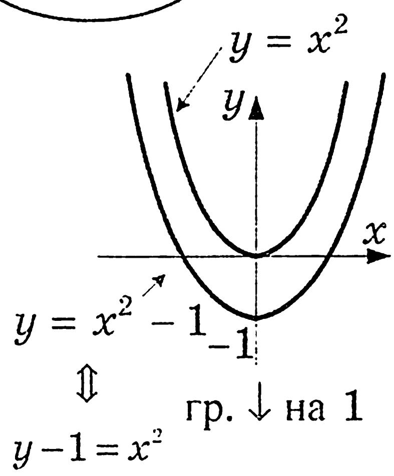
$$y=f(x) \xrightarrow[\text{граф.}\updownarrow]{} y=f(x)+c$$

$c>0$
гр. $\uparrow$ на c



гр. $\uparrow$ на 1

$c<0$
гр. $\downarrow$ на c



гр. $\downarrow$ на 1

Важлива примітка: графік можна «не чіпати», а зсунути вісь відносно нього.

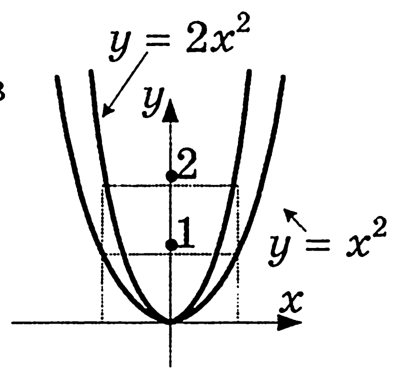
ОК-14

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{масштаб по (OY)}]{} y = a \cdot f(x),\ a > 0$$

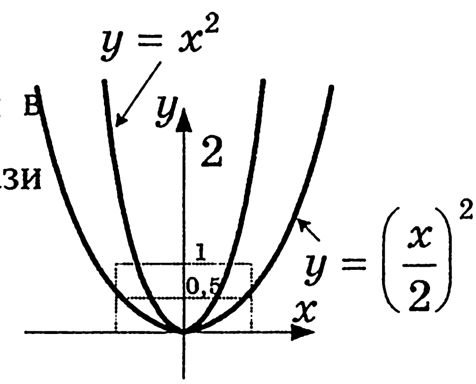
$a > 1$
гр. $\updownarrow$ в a раз

$a < 1$
гр. $\downarrow\uparrow$ в a^{-1} раза

$\updownarrow$ гр. в 2 рази



гр. $\downarrow\uparrow$ в 2 рази

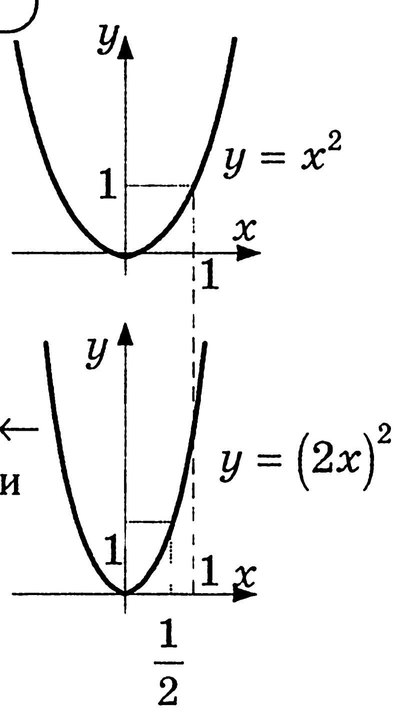


$$y = f(x) \xrightarrow[\text{масштаб по (OX)}]{} y = f(ax),\ a > 0$$

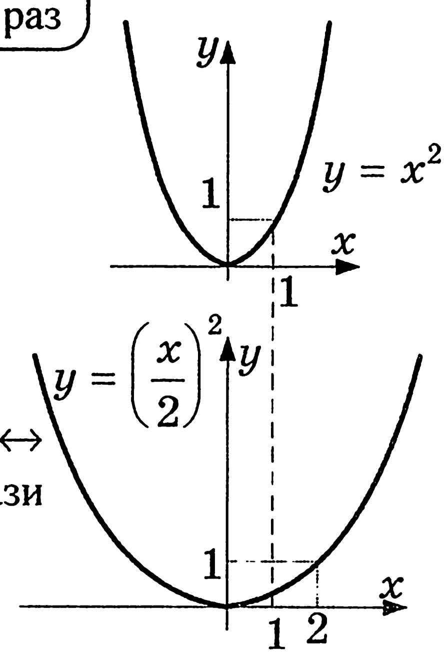
$a > 1$
граф. $\to\leftarrow$
в a раз

$a < 1$
граф. $\leftrightarrow$
в a раз

граф. $\to\leftarrow$
в 2 рази



граф. $\leftrightarrow$
в 2 рази



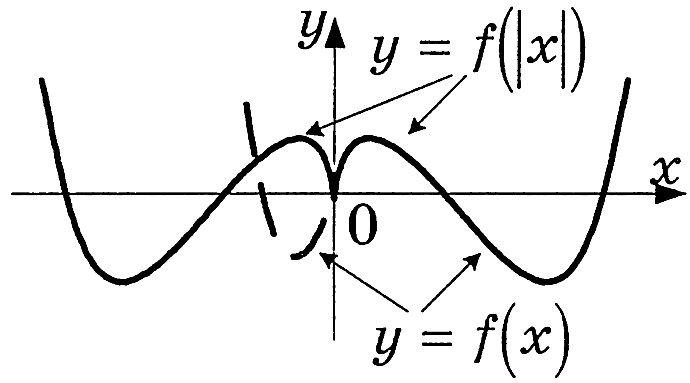
Важлива примітка: графік можна "не чіпати", а просто змінити масштаб на відповідній осі.

ОК-15

$$y = f(x) \to y = f(|x|)$$

1) $y = f(x)$ для $x \geq 0$;

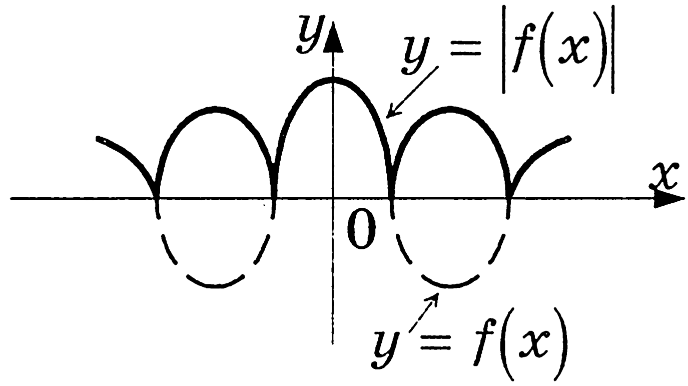
2) симетрія відносно осі Oy.



$$y = f(x) \to y = |f(x)|$$

1) $y = f(x)$;

2) “частини $y < 0$” відображаються симетрично відносно осі Ox.

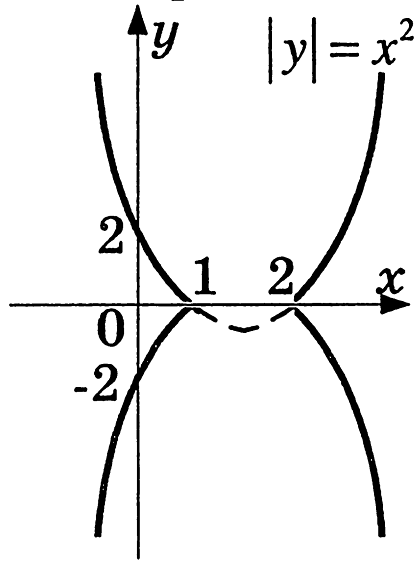


ОК-16

$$\boxed{y = f(x) \to |y| = f(x)}$$

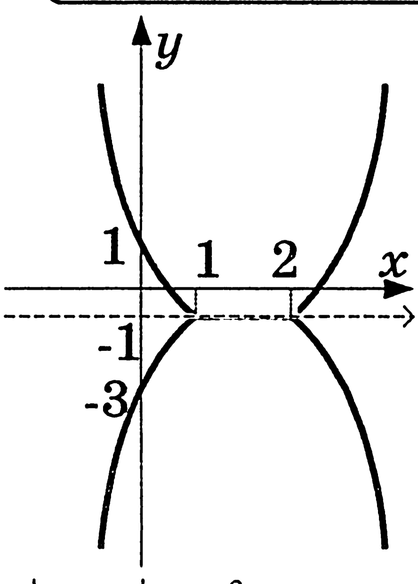
1) $y = f(x) \geq 0$

2) відображення симетрично Ox



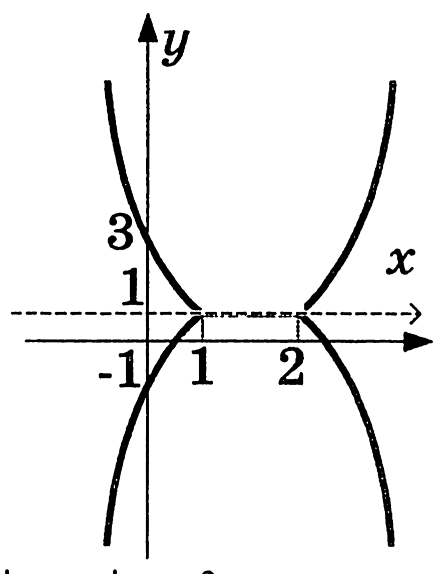
$$\boxed{|y| = f(x) \to |y+a| = f(x)}$$

$\boxed{a > 0 \text{ ГМТ} \downarrow \text{на } a}$



$|y+1| = x^2 - 3x + 2$

$\boxed{a < 0 \text{ ГМТ} \uparrow \text{на } a}$



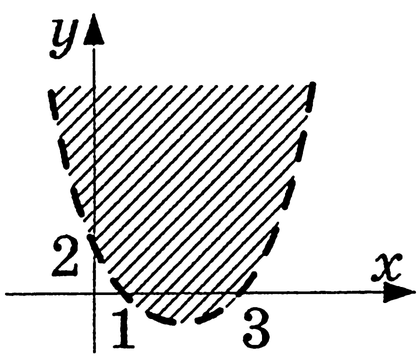
$|y-1| = x^2 - 3x + 2$

Вузлик на згадку: вісі Ox та Oy — «рівноправні» (див. ОК-13)

ОК-17

ГМТ $y > f(x)$

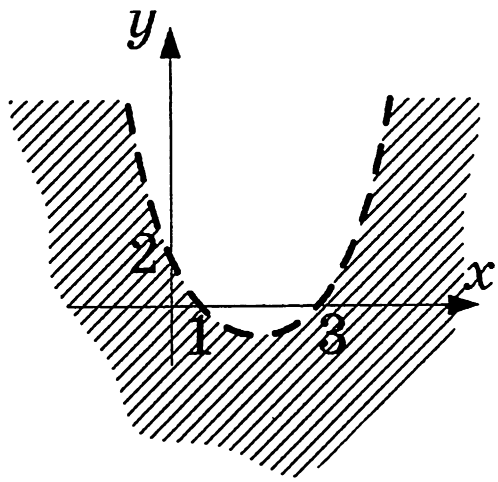
вище $y = f(x)$



$y \geq x^2 - 3x + 2$

ГМТ $y < f(x)$

нижче $y = f(x)$

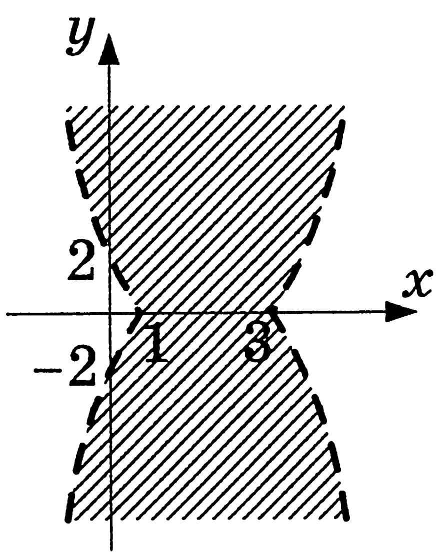


$y \leq x^2 - 3x + 2$

ГМТ $|y| > f(x)$

відстань від (OX) більша,

ніж $y = f(x)$

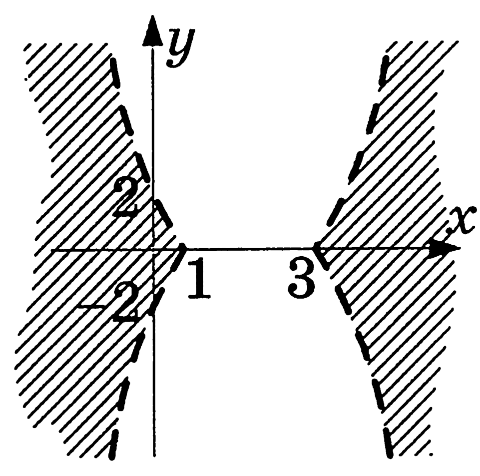


$|y| \geq x^2 - 3x + 2$

ГМТ $|y| < f(x)$

відстань від (OX) менша,

ніж $y = f(x)$



$|y| \leq x^2 - 3x + 2$

ОК-18

$$y = f(x) \to y = \frac{1}{f(x)}$$

Допоможуть міркування:

1) $\dfrac{1}{f(x)} > 0$ при $f(x) > 0$;

2) $\dfrac{1}{f(x)} < 0$ при $f(x) < 0$;

3) $\dfrac{1}{f(x)} \in \varnothing$ при $f(x) = 0$;

4) $\dfrac{1}{|f(x)|} = 1$ при $|f(x)| = 1$;

5) $\dfrac{1}{|f(x)|} < 1$ при $|f(x)| > 1$;

6) $\dfrac{1}{|f(x)|} > 1$ при $|f(x)| < 1$;

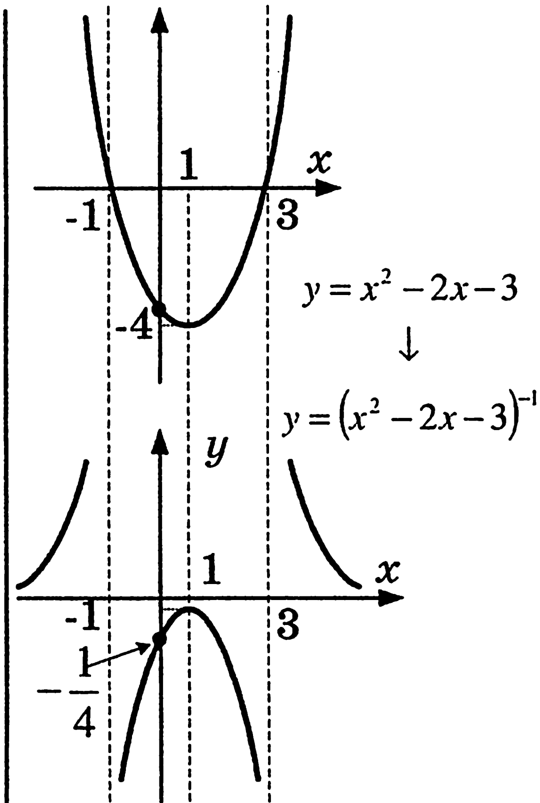
7) $\dfrac{1}{f(x)} \to \infty$ при $f(x) \to 0_+$;

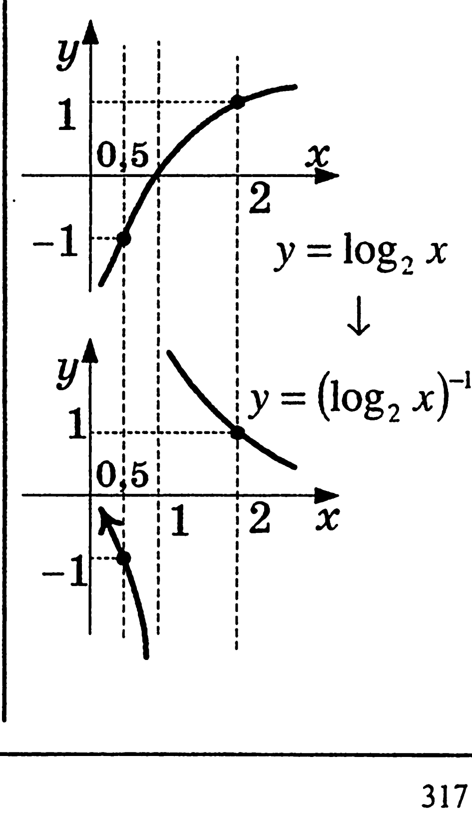
8) $\dfrac{1}{f(x)} \to -\infty$ при $f(x) \to 0_-$;

9) $\dfrac{1}{f(x)} \to 0$ при $f(x) \to \pm\infty$;

10) $\dfrac{1}{f(x)} \downarrow$ при $f(x) \uparrow$;

11) $\dfrac{1}{f(x)} \uparrow$ при $f(x) \downarrow$.



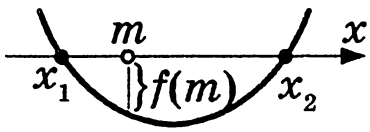


ОК-19

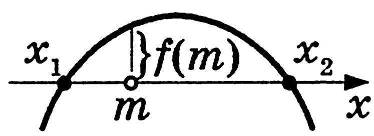
«Гра» коренів квадратного тричлена $f(x)=ax^2+bx+c$ з числом m

$x_1 < m < x_2$

$a>0$



$a<0$

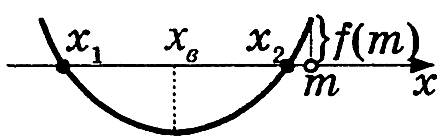


$$af(m)<0$$

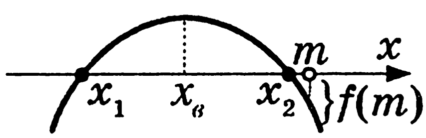
Один з коренів більший за m, другий — менший за m.

$\boxed{x_{1,2} < m}$

$a>0$



$a<0$

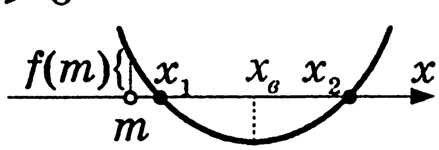


Обидва корені менші за m.

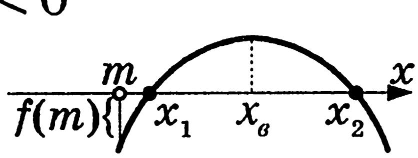
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ f(m)>0\\ D\ge 0\\ x_в<m\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ f(m)<0\\ D\ge 0\\ x_в<m\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}D\ge 0\\ x_в<m\\ af(m)>0\end{cases}}$$

$\boxed{x_{1,2} > m}$

$a>0$



$a<0$



Обидва корені більші за m.

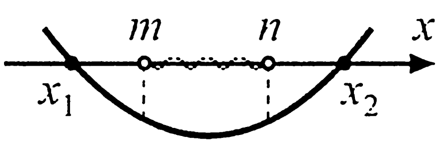
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ f(m)>0\\ D\ge 0\\ x_в>m\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ f(m)<0\\ D\ge 0\\ x_в>m\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}D\ge 0\\ x_в>m\\ af(m)>0\end{cases}}$$

ОК-20

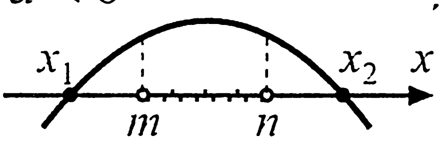
«Гра» коренів квадратного тричлена $f(x)=ax^2+bx+c$ з інтервалом $(m;\,n)$

$\boxed{(m;n)\subset(x_1;x_2)}$

$a>0$



$a<0$

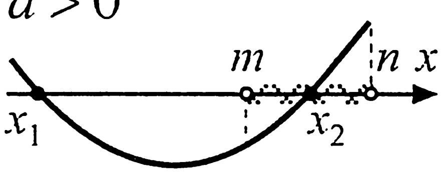


$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}a>0\\ f(m)<0\\ f(n)<0\end{cases}\\ &\begin{cases}a<0\\ f(m)>0\\ f(n)>0\end{cases}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}af(m)<0\\ af(n)<0\end{cases}}$$

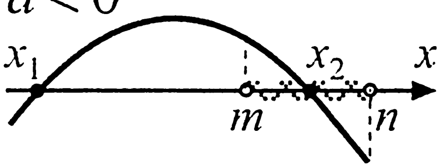
Один з коренів менший за m, другий — більший за n.

$\boxed{x_2\in(m;\,n)}$

$a>0$



$a<0$

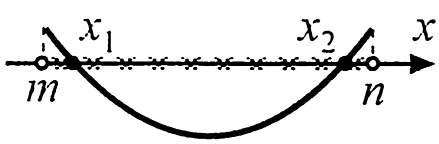


$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}a>0\\ f(m)<0\\ f(n)>0\end{cases}\\ &\begin{cases}a<0\\ f(m)>0\\ f(n)<0\end{cases}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}af(m)<0\\ af(n)>0\end{cases}}$$

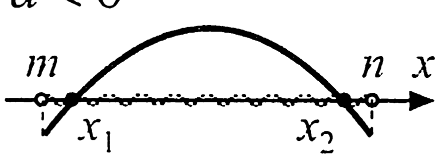
Обидва корені менші за n, але один з коренів більший за m.

$\boxed{x_{1,2}\subset(m;n)}$

$a>0$



$a<0$



$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}a>0\\ f(m)>0\\ f(n)>0\\ D\ge 0\\ x_b\in(m;n)\end{cases}\\ &\begin{cases}a<0\\ f(m)<0\\ f(n)<0\\ D\ge 0\\ x_b\in(m;n)\end{cases}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}D\ge 0\\ x_b\in(m;\,n)\\ af(m)>0\\ af(n)>0\end{cases}}$$

Обидва корені більші за m, але менші за n.

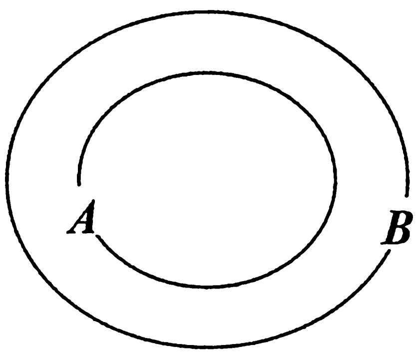
ОК-21

ВПІЗНАЙ УМОВУ

$$f(x) \gtrless g(x) \Longrightarrow \varphi(x) \gtrless \psi(x)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x \in A \qquad\qquad\qquad x \in B$$



... $\varphi(x) \gtrless \psi(x)$ містить всі розв'язки $f(x) \gtrless g(x)$;

... $\varphi(x) \gtrless \psi(x)$ виконується при всіх $f(x) \gtrless g(x)$;

... $\varphi(x) \gtrless \psi(x)$ виконується на множині $f(x) \gtrless g(x)$;

... як тільки $f(x) \gtrless g(x)$,

то виконується $\varphi(x) \gtrless \psi(x)$;

... будь-який розв'язок $f(x) \gtrless g(x)$

задовольняє умові $\varphi(x) \gtrless \psi(x)$;

... всі розв'язки $f(x) \gtrless g(x)$

будуть розв'язками $\varphi(x) \gtrless \psi(x)$.

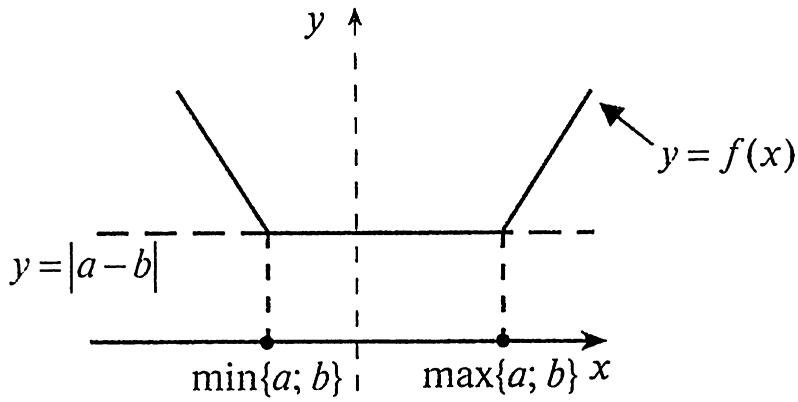
ОК-22

Властивості $f(x)=|x-a|+|x-b|$

При $x \le \min\{a;\, b\}$ $f(x) = -2x + a + b$;

при $x \in [\min\{a;\, b\};\, \max\{a;\, b\}]$ $f(x) = |a-b|$;

при $x \ge \max\{a;\, b\}$ $f(x) = 2x - a - b$.

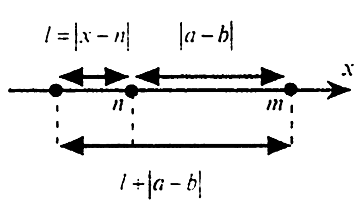


$$\boxed{|x-a|+|x-b| \ge |a-b|}$$

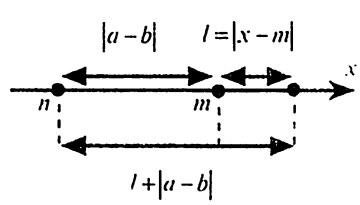
$$\begin{cases} |x-a|+|x-b| = c \\ c < |a-b| \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} |x-a|+|x-b| = c \\ c = |a-b| \end{cases} \Leftrightarrow x \in [\min\{a;\, b\};\, \max\{a;\, b\}]$$

$$\begin{cases} |x-a|+|x-b| = c \\ c > |a-b| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \underbrace{\min\{a;\, b\}}_{n} - \dfrac{c-|a-b|}{2} \\ x = \underbrace{\max\{a;\, b\}}_{m} + \dfrac{c-|a-b|}{2} \end{array} \right.$$



або



$$l + (l + |a-b|) = c, \quad l = \frac{c-|a-b|}{2}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Ясінський В. В. Математика. Навчальний посібник для слухачів ІДП НТУУ «КПІ». — К.: ІДП НТУУ «КПІ», 2005. — 372 с.
2. Ясінський В. В. Алгебра. — К.: ІДП НТУУ «КПІ», 2002. — 75 с.
3. Ясінський В. В. Тригонометрія. — К.: ІДП НТУУ «КПІ», 2002. — 50 с.
4. Ясінський В. В., Мазур К. І., Мазур О. К. Вибрані конкурсні задачі з математики. — К.: ФЕНІКС, 2002. — 265 с.
5. Апостолова Г. В. Я сам! — К.: Факт, 1997. — 202 с.
6. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль. К.: «Поліграф сервіс», 2001. — 252 с.
7. Гайштут О., Литвиненко Г. Алгебра. Розв'язування задач та вправ. — К.: Магістр-S, 1997. — 255 с.
8. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре. — М.: Просвещение, 1992. — 271 стр.
9. Тынянкин С. А. 514 задач с параметрами. Волгоград: Волгоградская правда, 1991. — 159 стр.
10. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Алгебра. — М.: Наука, 1987. — 432 с.
11. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. — К.: РИА «Текст» МП «ОКО», 1992. — 288 стр.
12. Лурье М. В., Александров Б. И. Задачи на составление уравнений. — М.: Наука, 1990. — 96 стр.
13. Сарана О. А., Ясінський В. В. Конкурсні задачі підвищеної складності з математики. — К: НТУУ «КПІ», 2005. — 260 с.

Апостолова, Галина
Ясінський, Василь
А76 Перші зустрічі з параметром. — К.: Факт, 2008. — 324 с.: іл.

ISBN 966-8408-95-0

УДК 511.235(075.4)
ББК 22.132я7

Науково-методичне видання

АПОСТОЛОВА Галина
ЯСІНСЬКИЙ Василь
ПЕРШІ ЗУСТРІЧІ З ПАРАМЕТРОМ

Технічний редактор *Ксенія Дельфінчикова*
Коректор *Олена Коржова*
Верстка та макетування *Олександра Поліщука*

Здано до виробництва 16.11.2007. Підписано до друку 13.12.2007.
Формат 60×84/16. Папір офсетний № 1. Гарнітура «Ньютон».
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 18,9. Обл.-вид. арк. 12,6.
Наклад 7000 прим. Зам. № 7-386.

ТОВ «Видавництво „Факт“»
04080, Україна, Київ-80, а/с 76
Реєстраційне свідоцтво
ДК № 1284 від 19.03.2003
Тел.: (044) 287 1886, 287 1882
E-mail: office@fact.kiev.ua
Відділ сбуту: (044) 463 6887
E-mail: sbyt@fact.kiev.ua
www.fact.kiev.ua

Віддруковано з готових діапозитивів
у ВАТ «Харківська книжкова фабрика ім. М. В. Фрунзе»
61057, м. Харків, вул. Донець-Захаржевського, 6/8