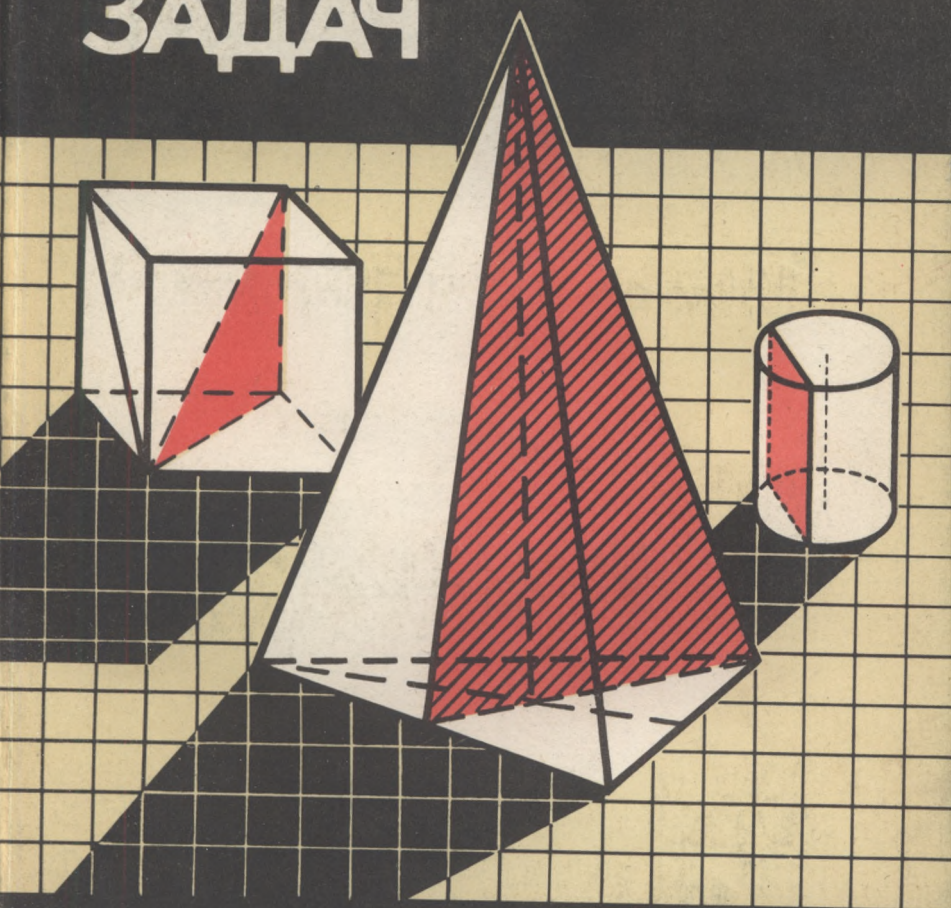


М. І. АНТОНЕНКО

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ



М.І. АНТОНЕНКО

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Книжка для вчителя

КИЇВ «РАДЯНСЬКА ШКОЛА» 1991

АНТОНЕНКО М. І. Розв'язування геометричних задач: Книга для вчителя.— К.: Рад. шк., 1991.— 128 с.— Мова укр.

У посібнику розглядаються питання загальної методики розв'язування задач з навчального посібника «Геометрія, 7—11» О. В. Погорелова та основні прийоми дослідження їх розв'язків. Наводяться докладні зразки відповідних міркувань і записів. Для вчителів математики загальноосвітньої школи.

АНТОНЕНКО Н. И. Решение геометрических задач: Книга для учителя.— К.: Рад. шк., 1991.— 128 с.— На укр. яз.

В пособии рассматриваются вопросы общей методики решения задач из учебного пособия «Геометрия, 7—11» А. В. Погорелова и основные приемы исследования их решений. Приводятся подробные образцы соответствующих рассуждений и записей. Для учителей математики общеобразовательной школы.

Рецензенти: *М. І. Бурда*, кандидат педагогічних наук (НДІ педагогіки УРСР); *Г. А. Палатник*, учитель математики (м. Вінниця).

Редактор *В. М. Кириченко*

А $\frac{4306010502-221}{M210(04)-91}$ 251—91

ISBN 5-330-01407-7

© М. І. Антоненко, 1991

ПЕРЕДМОВА

Одним з важливих завдань викладання математики в школі є навчання учнів розв'язувати геометричні задачі, що виконують різні функції у навчальному процесі, зокрема навчаючи, виховну, контролюючи тощо. Пропонований посібник має допомогти вчителю з'ясувати деякі важливі питання методики розв'язування і дослідження геометричних задач з числовими і параметричними даними.

В основу класифікації задач покладено вимоги, зафіксовані в їх умовах, та кількість даних параметрів (величин). Особливу увагу приділено питанню дослідження задач на обчислення з параметричними даними з використанням допоміжної геометричної фігури, за яку взято трикутник або тетраедр.

Виклад матеріалу ілюстрований достатньою кількістю задач, переважну більшість яких узято з навчального посібника О. В. Погорелова «Геометрія, 7—11» із збереженням відповідної нумерації. Значне місце відведене задачам, що мають кілька розв'язків та умов, при яких вони існують, тобто йдеться про випадки порушення повноти розв'язування задачі. Дається аналіз типових помилок, що допускаються учнями під час розв'язування таких задач. У тексті наведено один з можливих способів розв'язування задачі.

У процесі розв'язування задач на обчислення з параметричними даними важливим є знаходження тих обмежень на параметри, які вказують на існування розв'язків задачі. Тому у відповідях до таких задач зазначено межі зміни значень параметрів.

Розділ I присвячено загальним питанням методики розв'язування геометричних задач, зокрема з'ясовано суть поняття «розв'язати геометричну задачу», пояснено особливості задачного матеріалу навчального посібника, а також зміст найбільш поширених методів їх розв'язування.

У розділі II зроблено спробу систематизувати способи дослідження геометричних задач на обчислення з параметричними даними. В її основу покладено використання вихідних та вивідних умов для знаходження області існування геометричної фігури, а також формули розв'язку задачі.

Розділ III присвячено питанням методики навчання учнів елементів дослідження геометричних задач на обчислення з параметричними даними. Серед інших розглядаються питання введення поняття «геометрична фігура існує» відповідно до діючого навчального посібника, використання аксіоматичних та конструктивних побудов як засобу доведення існування геометричної фігури, причому перевага надається першому з них. У посібнику виділено окремі загальні прийоми знаходження необхідних умов існування геометричної фігури, а також пояснено способи дослідження геометричних задач у школі.

Крім того, наведено задачі для розв'язування на факультативних заняттях з математики та для використання в позакласній роботі.

Розділ I.

ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ МЕТОДИКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Одним з основних засобів досягнення високого рівня творчої діяльності учнів є розв'язування геометричних задач. Відомо, що «мистецтво розв'язувати геометричні задачі чимось нагадує трюки ілюзіоністів — іноді, навіть знаючи розв'язування задачі, важко зрозуміти, як можна було до нього додуматись» ([7], с. 41). Цілком зрозуміло, що цьому мистецтву треба учнів *навчати*.

Геометричні задачі можна класифікувати по-різному, залежно від того, що покладено в основу класифікації. Розрізняють задачі за: а) вимогами, сформульованими в їх умовах; б) кількістю даних вхідної інформації; в) методичним призначенням; г) кількістю розв'язків. Ми зупинимось на класифікації за вимогами, сформульованими в умовах задач. При цьому звертатимемо увагу на те, скільки розв'язків має задача, та при яких умовах вони існують.

§ 1. ЩО ОЗНАЧАЄ РОЗВ'ЯЗАТИ ГЕОМЕТРИЧНУ ЗАДАЧУ

Будь-яка геометрична задача побудована так, що в ній за *даними* елементами треба *знайти* інші (шукані) елементи геометричної фігури, які перебувають між собою та даними елементами в певних співвідношеннях, або визначити розміри окремих елементів.

У геометричних задачах різних типів — на *обчислення, доведення, побудову чи дослідження* терміни «*знайти*», «*шукані*» мають конкретний зміст, який слід добре розуміти.

1. Задачі на обчислення

Під задачею на *обчислення* розуміють таку задачу, в якій вимагається дані про геометричну фігуру довести до встановлення числового результату. Задача на обчис-

лення характеризується вимогою встановити дані про невідомий елемент геометричної фігури за допомогою суто геометричних викладок з використанням алгебраїчних залежностей.

Питання про смисл геометричної задачі на обчислення досить детально розроблене в методичній літературі. Воно обговорювалось у свій час на сторінках журналу «Математика в школі» (1954, № 3; 1955, № 4 та ін.) та в інших роботах. Задача на обчислення з числовими даними є окремим випадком задачі з параметричними даними, тому часто виникає потреба розглядати саме їх. Вважається усталеною думка про те, що в розв'язування геометричної задачі на обчислення з параметричними даними повинно ввійти дослідження області існування геометричної фігури. Такого погляду дотримується Л. М. Фрідман, який стверджує, що розв'язування геометричної задачі на обчислення з параметричними даними зводиться до задання функції-формули, яка показує, «які операції і в якому порядку треба виконати над значеннями параметрів, щоб знайти розмір шуканого елемента. Але для задання якої-небудь функції недостатньо назвати закон відповідності, а необхідно ще вказати область її визначення» ([11], с. 14).

Функціональний підхід до трактування поняття розв'язування задачі можна зберегти, якщо розглядати його як доведення відповідної теореми, складеної за умовою даної задачі. Суть цього підходу проілюструємо прикладом.

Задача 1. Довжина сторони основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , двогранний кут при основі дорівнює α . Обчисліть об'єм піраміди.

Будемо вважати, що нам дано (або вона існує) правильну трикутну піраміду із стороною основи a та двограним кутом α при основі. Треба обчислити об'єм цієї піраміди.

Виходитимемо з того, що коли дано правильну трикутну піраміду із стороною основи a і двограним кутом α при основі, то висота піраміди дорівнює

$$\frac{1}{6} a \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha, \text{ а об'єм дорівнює } \frac{1}{24} a^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

Суть розв'язування задачі полягає в тому, що ми замінюємо його доведенням т е о р е м и: Якщо в правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a ,

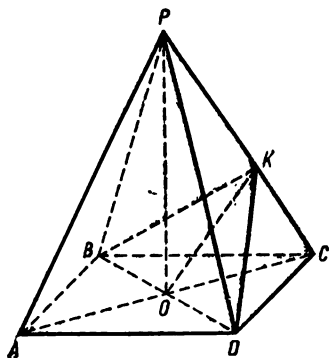
а двограний кут при основі дорівнює α , то її об'єм дорівнює $\frac{a^3}{24} \operatorname{tg} \alpha$.

Отже, задачу буде розв'язано, якщо доведемо щойно сформульовану теорему.

Вираз для об'єму піраміди є функцією від параметрів a та α , знаходження якої становить мету розв'язування задачі.

З логічної точки зору розв'язування геометричної задачі на обчислення схематично можна подати так: Якщо фігура Φ існує і має властивості A , то вона має також властивості B .

Припущення про існування геометричної фігури, заданої умовою задачі, потрібно обґрунтувати, тобто знайти умови, при яких фігура існує. *Необхідними* умовами в задачі 1 будуть: $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Щоб переконатися, що вони є *достатніми*, досить довести можливість побудови правильної трикутної піраміди із стороною основи a і двограним кутом α при основі, де $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.



Мал. 1

Приступаючи до розв'язування геометричної задачі на обчислення, щоразу доводиться враховувати особливості конфігурації, описаної в умові задачі. Часто це складне завдання, яке вимагає високої культури обчислень і розуміння суті знайдених залежностей. Наведемо приклад.

Задача 2. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, довжина сторони основи якої дорівнює a , а двограний кут при бічному ребрі дорівнює α .

Розв'язання. Нехай $PABCD$ — зображення даної в умові задачі піраміди (мал. 1). Оскільки OC — проекція похилої PC на пл. ABC і $OC \perp BD$, то за теоремою про три перпендикуляри $PC \perp BD$. Побудуємо $OK \perp PC$. За ознакою перпендикулярності прямої і площини $PC \perp$ пл. BKD , тобто $\angle BKD$ — лінійний кут двогранного кута з ребром PC . За умовою задачі $\angle BKD = \alpha$, $AD = a$.

З рівності трикутників KCB та KCD (KC — спільна, $CB = CD$, $\angle KCB = \angle KCD$) випливає, що $KB = KD$. Оскільки $OB = OD$, то за властивістю медіани рівнобедреного трикутника $KO \perp BD$, $\angle OKB = \angle OKD = \frac{\alpha}{2}$.

Об'єм піраміди обчислимо за формулою:

$$V = \frac{1}{3} \cdot AD^2 \cdot PO. \quad (1)$$

З прямокутного трикутника OKD ($\angle KOD = 90^\circ$): $OK = OD \cdot \operatorname{ctg} \angle OKD$, $OK = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

Але $S_{\triangle POC} = \frac{1}{2} \cdot PO \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot OK$, тобто

$$PO \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{PO^2 + \frac{a^2}{2}}$$

або

$$PO^2 = PO^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

звідси

$$PO = \frac{a \left| \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right|}{\sqrt{2 \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \right)}} = \frac{a \left| \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|}{\sqrt{-2 \cos \alpha}}. \quad (2)$$

Підставивши формулу (2) в (1), матимемо:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a \cdot \left| \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|}{\sqrt{-2 \cos \alpha}} = \frac{a^3 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|}{3 \sqrt{-2 \cos \alpha}}.$$

У ході розв'язування задачі ми *припускали існування* описаної в умові задачі піраміди і всі викладки робили, виходячи з цього припущення.

Встановимо область існування даної піраміди. За умовою задачі знаходимо: $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $0 < OK < OC$ (див. додаток 1).

Ці умови визначають область існування прямокутного $\triangle OKC$, а, отже, і область існування правильної чотирикутної піраміди.

Якщо підставимо у ці залежності значення $OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $OK = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, матимемо: $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $0 < \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} < 1$, звідси $a > 0$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

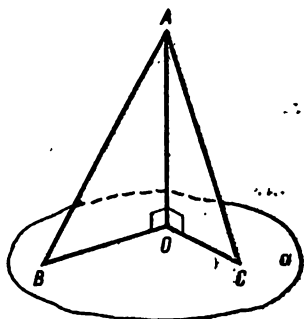
Ці умови еквівалентні вихідним умовам, отже, вони визначають шукану область існування піраміди. В ній $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$, $\cos \alpha < 0$, через це $V > 0$.

Відповідь. Об'єм піраміди виражається формулою $\frac{a^3 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{3 \sqrt{-2 \cos \alpha}}$, де $a > 0$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

З а у в а ж е н н я. У цій задачі можна також досліджувати виведену формулу об'єму.

Без такого обґрунтування проведені викладки не можна вважати правильними, а їх відсутність часто стає причиною помилок під час розв'язування геометричних задач. Наведемо приклад.

Задача 3. ([10], № 1412). З точки A , розміщеної поза площиною α , проведені до цієї площини похилі $AB = c$, а $AC = b$. Величина кута між похилою AC і площиною α в 3 рази більша від величини кута між похилою AB і тією самою площиною. Знайдіть відстань точки A до площини α .



Мал. 2

У збірнику вміщено відповідь (мал. 2): $AO = \frac{c}{2b} \times \sqrt{b(3b-c)}$, $3b > c$.

Виражаючи AO з прямокутних трикутників AOB та AOC , матимемо відповідно: $AO = c \cdot \sin x$, $AO = b \times \sin 3x$ або $c \cdot \sin x = b \cdot \sin 3x$.

Але $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, тому: $c \cdot \sin x = b \times (3 \sin x - 4 \sin^3 x)$. Очевидно, що $0^\circ < 3x < 90^\circ$, отже, $\sin x \neq 0$, тому $c = b(3 - 4 \sin^2 x)$, звідси

$$\sin x = \frac{\sqrt{b(3b-c)}}{2b}.$$

Через те що $0^\circ < x < 30^\circ$, то необхідними умовами існування заданої умовою задачі геометричної фігури

є: $0^\circ < x < 36^\circ$, $b > 0$, $c > 0$, або $0 < \frac{\sqrt{b(3b-c)}}{2b} < \frac{1}{2}$, звідси $2b < c < 3b$.

Покажемо, що знайдені умови є *достатніми* для існування геометричної фігури, про яку йдеться в умові задачі.

Справді, послідовно маємо: $2b < c < 3b$, $0 < 3b - c < b$, $0 < b(3b - c) < b^2$ або $0 < \frac{c}{2b} \sqrt{b(3b - c)} < \frac{c}{2}$.

Це означає, що існує прямокутний трикутник з катетом, довжина якого дорівнює $\frac{c}{2b} \sqrt{b(3b - c)}$ та гіпотенузою, довжина якої $\frac{c}{2}$.

Автори збірника не врахували, що знайдені ними умови не будуть достатніми для існування заданої фігури, в результаті допущено помилку у відповіді.

Отже, вважати геометричну задачу на обчислення з параметричними даними розв'язаною можна лише тоді, коли, крім обчислення шуканої величини, встановлено необхідні і достатні умови існування фігури, про яку йдеться в задачі.

2. Задачі на доведення

Задача на доведення в геометрії характеризується вимогою обґрунтувати певне математичне твердження, сформульоване в її умові. Розв'язати геометричну задачу на доведення означає вивести твердження задачі з аксіом та раніше доведених теорем або наслідків з них. Геометричні задачі на доведення бувають двох видів:

а) такі, під час розв'язування яких припускають, що описані в їх умовах геометричні фігури існують;

б) такі, в яких факт існування геометричної фігури, про яку йдеться в задачі, треба довести.

У першому випадку розв'язування задачі зводиться до обґрунтування її висновку, виходячи з посилки задачі («дано»). При цьому переформулювання умови задачі часто виступає засобом пошуку розв'язку задачі, оскільки дає змогу розв'язати іншу, спосіб розв'язування якої відомий або його можна знайти порівняно простіше. На цю обставину вчителів варто звернути особливу увагу.

Задача 4. Доведіть, що в правильній трикутній піраміді протилежні ребра взаємно перпендикулярні.

Умову задачі можна переформулювати, наприклад: «Якщо дано (або вона існує) правильну трикутну піра-

міду, то в ній протилежні ребра взаємно перпендикулярні».

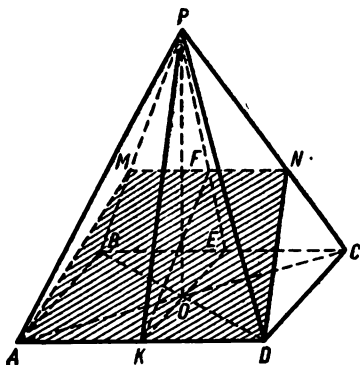
Як правило, у даному випадку доведення достатності знайдених умов існування геометричної фігури не вимагається.

Наведемо приклад задачі другого виду:

Задача 5. Доведіть, що існує призма, відмінна від куба, і така, що в неї всі грані рівні між собою.

У ході розв'язування задач на доведення часто виникає потреба дослідити існування математичного об'єкта, описаного її умовою. Результати такого дослідження можуть суттєво впливати як на хід розв'язування задачі, так і на вираз у відповіді.

Задача 6. У правильній чотирикутній піраміді через сторону основи проведено площину, перпендикулярну до протилежної бічної грані. Сторона основи піраміди дорівнює a , двогранний кут при основі дорівнює α . Доведіть, що площа перерізу дорівнює $a^2 \sin^3 \alpha$, де $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.



Мал. 3

Розв'язання.

Нехай $PABCD$ — зображення правильної піраміди,

про яку йдеться в умові задачі (мал. 3). Побудуємо апофеми PK та PE піраміди. Оскільки піраміда правильна, то $\angle PKO = \angle PEO$. За умовою задачі: $\angle PEO = \alpha$, $AD = a$.

У площині трикутника PKE проведемо $KF \perp PE$. Побудуємо площину, яка проходить через прямі AD та KF . Через те, що $AD \parallel BC$, то $AD \parallel$ пл. BPC , отже, $AD \parallel MN$, де MN — лінія перетину площин ADF та BPC . Отже, $AMND$ — трапеція. Залишається довести, що $AMND$ — шуканий переріз, тобто що пл. $AMND \perp$ пл. PBC .

Справді, $AD \perp$ пл. PKE , бо $AD \perp PK$, $AD \perp KE$, тому $AD \perp KF$. Але $AD \parallel MN$, тоді $MN \perp KF$. Крім того, $KF \perp PE$ за побудовою, отже, $KF \perp$ пл. BPC . Оскільки пл. $AMND$ проходить через пряму KF , то пл. $AMND \perp$ пл. PBC .

Площу перерізу обчислимо за формулою:

$$S_{AMND} = \frac{AD + MN}{2} \cdot KF. \quad (1)$$

З прямокутних трикутників KFE та PKO знайдемо відповідно:

$$KF = a \cdot \sin \alpha, \quad (2)$$

$$PK = \frac{a}{2 \cdot \cos \alpha}. \quad (3)$$

З прямокутного трикутника PKF_1

$$\begin{aligned} PF &= \sqrt{PK^2 - KF^2}, \quad PF = \sqrt{\frac{a^2}{4 \cos^2 \alpha} - a^2 \cdot \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{a}{2 |\cos \alpha|} \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \frac{a |\cos 2\alpha|}{2 |\cos \alpha|}. \end{aligned} \quad (4)$$

Умови існування перерізу $AMND$ знайдемо з того, що $\angle FKE < \angle PKE$, або $90^\circ - \alpha < \alpha$, звідки $\alpha > 45^\circ$. З другого боку, $\angle PKE + \angle PEK < 180^\circ$, тобто $\alpha + \alpha < 180^\circ$ або $\alpha < 90^\circ$. Отже, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$, тому $90^\circ < 2\alpha < 180^\circ$, і $\cos 2\alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$. Через це

$$PF = -\frac{a \cdot \cos 2\alpha}{2 \cdot \cos \alpha}. \quad (4')$$

Оскільки $MN \parallel BC$, то $\triangle PMN \sim \triangle PBC$, тому

$$\frac{PF}{MN} = \frac{PE}{BC}, \text{ звідси } MN = \frac{PF \cdot BC}{PE}. \quad (5)$$

Підставивши (3), (4') в (5), отримаємо

$$MN = -a \cdot \cos 2\alpha. \quad (6)$$

Нарешті, підставивши (2), (6) в (1), матимемо:

$$S_{AMND} = \frac{a - a \cdot \cos 2\alpha}{2} \cdot a \cdot \sin \alpha = \frac{a^2}{2} \cdot \sin \alpha \cdot (1 - \cos 2\alpha) = a^2 \cdot \sin^3 \alpha, \text{ де } a > 0, 45^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Як бачимо, використання умов існування перерізу дало змогу спростити знайдений вираз (4) для обчислення шуканої величини.

3. Задачі на побудову

Під задачею на побудову розуміють задачу, в якій треба побудувати геометричну фігуру наперед обумовленими інструментами, якщо дано деяку іншу фігуру

та зазначено певні співвідношення між елементами даної і шуканої фігур.

Розв'язати задачу на побудову означає звести її до скінченного числа елементарних побудов, які виконуються за допомогою креслярських інструментів на основі прийнятих аксіом конструктивної геометрії.

Розв'язування геометричної задачі на побудову звичайно здійснюють за схемою, що складається з чотирьох етапів: 1) аналіз; 2) побудова; 3) доведення; 4) дослідження.

З логічного погляду алгоритм розв'язування задачі на побудову не завжди можна реалізувати, бо етап «побудова» принципово можливий, а практичне виконання побудови залежить від вибору величини даних в умові відрізків і кутів.

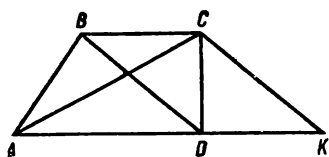
Складаючи план розв'язування задачі, слід прагнути до того, щоб він ґрунтувався лише на необхідних умовах, тобто на таких властивостях геометричних фігур, які випливають з існування розв'язування. За планами, складеними лише за необхідними умовами, можна знайти *всі* розв'язки задачі та вказати *всі* випадки їх відсутності (для тих значень параметрів, при яких ці умови є необхідними). Інший план розв'язування не може дати розв'язків, відмінних від знайдених за таким планом. Отже, якщо під час складання плану використано лише необхідні умови існування геометричної фігури, описаної умовою задачі, то дослідження задачі можна проводити за планом її розв'язування.

У процесі дослідження задачі за складеним в аналізі планом окремі випадки розв'язання спочатку встановлюють як можливі результати виконання певних пунктів плану. Далі для кожного з цих випадків можна знайти умови, які їх визначають. Звичайно такі умови виражаються алгебраїчними або трансцендентними нерівностями (іноді рівняннями), що зв'язують параметри, які характеризують задані в задачі величини та взаємне розміщення заданих геометричних фігур.

Щоб розв'язання задачі на побудову було повним, треба домагатися, щоб в області існування шуканої геометричної фігури окремі випадки, які розглядалися при аналізі і дослідженні, охоплювали всю множину фігур, визначену умовою задачі.

Задача 7. Побудуйте трапецію $ABCD$ за кутом A , що дорівнює α , діагоналями d_1 та d_2 ($d_1 \geq d_2$) і сумою m основ трапеції.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — шукана трапеція (мал. 4). Провівши $CK \parallel BD$ до перетину в точці K в продовженні відрізка AD , матимемо: $AK = m$, $BC = DK$, $CK = BD$. Тоді розв'язування задачі зводиться до побудови $\triangle ACK$ за трьома сторонами: $AC = d_2$, $CK = d_1$, $AK = m$ та побудови $\angle BAD = \alpha$ та $CB \parallel AK$.

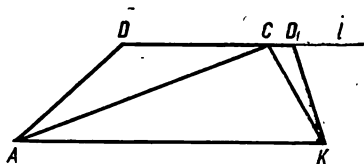


Мал. 4

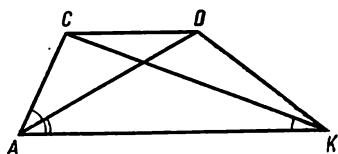
Щоб задача мала розв'язки, необхідне виконання умов:

$$d_1 - d_2 < m < d_1 + d_2.$$

Проте вони не є достатніми. Справді, позначивши $\angle CAD = \beta$, $\angle BDA = \gamma$, помічаємо, що задача не матиме розв'язків, якщо $\alpha \leq \beta$, $\alpha \leq \gamma$ (з урахуванням умови $d_1 \geq d_2$). Отже, достатність умов пов'язана з залежностями між кутами α , β , γ . Не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $\alpha \leq 90^\circ$, в протилежному випадку замість нього можна розглядати гострий кут $180^\circ - \alpha$.



Мал. 5



Мал. 6

Розглянемо співвідношення між α , β , γ , припускаючи, що необхідні умови існування $\triangle ACK$ виконуються.

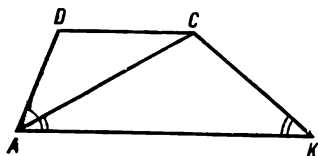
а) Нехай $\alpha < 90^\circ$, $\beta < \alpha$, $\gamma < \alpha$, $\beta \neq \gamma$ (мал. 5). Побудувавши $\triangle ACK$ за трьома сторонами та провівши $l \parallel AK$, побудуємо $\angle DAK = \angle D_1KA = \alpha$. Через те, що $CD = CD_1$, то трапеції $ADCK$ та ACD_1K будуть різними. Отже, задача має два розв'язки.

б) Нехай $\beta = \gamma < \alpha < 90^\circ$. Тоді, виконавши аналогічну побудову, дістанемо дві рівні трапеції—задача має один розв'язок з точністю до рівності фігур на площині.

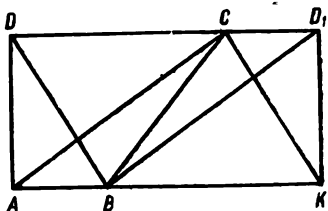
в) Нехай $\gamma < \alpha \leq \beta$ (мал. 6). У цьому випадку задача має один розв'язок, бо трапеція $ACDK$ визначається однозначно.

г) Нехай $\beta < \alpha \leq \gamma$ (мал. 7), тоді єдиність побудови трапеції $ADCK$ визначатиме один розв'язок задачі.

д) Нехай $\alpha = 90^\circ$ (мал. 8). Тоді, провівши $DB \parallel CK$, дістанемо: $DC = BK$, $AB = CD_1$, $D_1B \parallel CA$, тому $AC = BD_1$, $BD = CK$, отже, трапеції $ABCD$ та BKD_1C рівні — задача має один розв'язок.



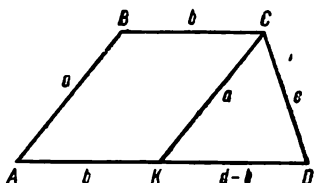
Мал. 7



Мал. 8

Легко переконатися, що реалізувати етап «побудова» вдається лише тоді, коли вибір заданих умовою задачі величин зроблено з області існування шуканої геометричної фігури. Якщо ж цього не дотримано, то побудова геометричної фігури неможлива, а це дає помилкову відповідь на запитання про кількість розв'язків задачі.

У зв'язку з цим автори праці ([4]) цілком слушно пропонують під час аналізу задачі встановлювати необхідні умови існування шуканої фігури. Тоді, вибравши належним чином величини заданих параметрів, можна успішно розв'язати задачу.



Мал. 9

Задача 8 ([9], § 6, № 71). Побудуйте трапецію за чотирма сторонами: a, b, c, d .

Д о с л і д ж е н н я. Оскільки (мал. 9) область існування трапеції $ABCD$ така сама, як область існування трикутника KCD (утвореного побудовою $CK \parallel BA$), то необхідною і достатньою умовами її існування будуть:

$$|a - c| < d - b < a + c.$$

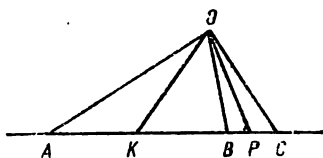
Вибравши довжини відрізків так, щоб вони задовольняли цю систему нерівностей, забезпечимо виконання плану розв'язування задачі.

4. Задачі на дослідження

Під задачею на дослідження розуміють задачу, в якій пропонують щось перевірити, порівняти, знайти умови існування тощо. Такі задачі, як правило, містять запитання: «Чи можна..?», «Як зміниться..?», «Чи правильно..?» та ін.

Задача 9 ([9], § 5, № 13₁). Точки A, B, C лежать на прямій, а точка O — зовні прямої. Чи можуть трикутники AOB і BOC з основами AB та BC бути рівнобедреними? Обґрунтуйте відповідь.

Розв'язання. Припустимо, що $\triangle AOB$ рівнобедрений з основою AB (мал. 10). Проведемо в ньому



Мал. 10

медіану OK , яка буде одночасно і висотою, тобто $OK \perp AB$. Провівши медіану OP у трикутнику OBC , дістанемо: $OP \perp BC$. Вилодить, з точки O на пряму AC опущено два перпендикуляри, що неможливо.

Отже, наше припущення

невірне. Залишається погодитись, що трикутники AOB та BOC одночасно не можуть бути рівнобедреними з основами AB та BC відповідно.

Як бачимо, для розв'язання даної задачі довелося використати доведення. В інших задачах на дослідження використовують також обчислення або побудову.

Задача 10. Чи існує паралельне перенесення, при якому точка $(1; 2)$ переходить у точку $(3; 4)$, а точка $(0; 1)$ — у точку $(-1; 0)$?

Розв'язання. Припустимо, що таке паралельне перенесення існує. Воно задається формулами: $x' = x + a$, $y' = y + b$.

Оскільки точка $(1; 2)$ переходить у точку $(3; 4)$, то $3 = 1 + a$, $4 = 2 + b$, звідси $a = b = 2$. Це означає, що згадане перенесення задається формулами: $x' = x + 2$, $y' = y + 2$. Через те, що координати точок $(0; 1)$ та $(-1; 0)$ не задовольняють знайдених формул, то наше припущення невірне.

Відповідь. Не існує.

Розв'язуючи цю задачу, ми використали обчислення і доведення.

§ 2. ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ СИСТЕМИ ЗАДАЧ У НАВЧАЛЬНОМУ ПОСІБНИКУ

Формування умінь розв'язувати задачі є однією з основних цілей навчання математики. Саме ця форма діяльності школярів дає змогу здійснювати контроль рівня їх математичної підготовки. Велике значення має система задачного матеріалу, яка повинна сприяти формуванню відповідних умінь і навичок у процесі навчання математики.

Які характерні риси системи задач, вміщеної у навчальному посібнику?

Задачі дібрані таким чином, що формуванню умінь їх розв'язувати сприяє спосіб навчання *за зразком*, який передбачає поступове підвищення рівня самостійної діяльності учнів у процесі пошуку способів розв'язування певного класу задач. Цей підхід здійснюється, коли у посібнику наведено зразок розв'язання задачі. Є також багато задач, в процесі розв'язування яких використовуються аналогічні міркування.

Задача 11 ([9], § 14, № 45). Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною b , і вписаного в нього.

Хід міркувань, які використовують під час її розв'язування, можна застосувати і під час розв'язування інших задач, наприклад 33, 34, 46 (§ 14).

У процесі вивчення геометрії корисно розв'язувати одну й ту саму задачу різними способами. Наприклад, задачу 32₂ (§ 14) можна розв'язати під час вивчення теореми Піфагора.

Задача 12 ([9], § 14, № 32₂). Бічні сторони трикутника 30 см і 25 см. Знайдіть висоту трикутника, опущену на основу, яка дорівнює 11 см.

Розв'язання. Щоб забезпечити повноту розв'язування задачі, треба розглянути два випадки взаємного розміщення висоти, проведеної до основи трикутника, і самої основи.

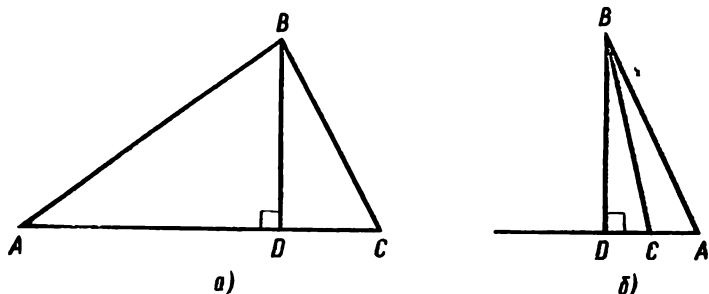
1-й випадок. — висота BD трикутника ABC перетинає основу AC (мал. 11, a). Нехай $AB = 30$ см, $BC = 25$ см, $AC = 11$ см. Позначивши $DC = x$, матимемо: $AD = 11 - x$. За теоремою Піфагора: $BD^2 = 25^2 - x^2$, $BD^2 = 30^2 - (11 - x)^2$.

Отже, $25^2 - x^2 = 30^2 - (11 - x)^2$, звідси $x = -7$. Це означає, що точка D не лежить на стороні AC .

2-й випадок — точка D (мал. 11, б) лежить на продовженні сторони AC . Якщо $CD = x$, то $AD = 11 + x$, тому за теоремою Піфагора: $BD^2 = 25^2 - x^2$, $BD^2 = 30^2 - (11 + x)^2$, звідси $25^2 - x^2 = 30^2 - (11 + x)^2$.

Розв'язавши рівняння, маємо: $x = 7$. Тоді $BD = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ (см).

Під час вивчення теми «Площі фігур» (9-й клас, § 14) цю саму задачу розв'язуємо, використовуючи метод площ.



Мал. 11

Справді, записавши площу трикутника різними формулами, матимемо:

$$\frac{1}{2} AC \cdot BD = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)},$$

де $p = \frac{AB + BC + AC}{2}$.

Підставимо числові дані: $\frac{1}{2} \cdot 11 \cdot BD = \sqrt{33 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 22}$, звідси $BD = 24$ см.

Багато задач посібника виконують роль дублюючих.

Задача 13 ([9], § 6, № 56). Середини сторін чотирикутника сполучено між собою. Знайдіть сторони утвореного паралелограма, якщо діагоналі чотирикутника 10 м і 12 м.

Якщо розв'язати цю задачу в класі, використавши властивість середньої лінії трикутника, то можна сподіватися, що розв'язування наступної задачі (§ 6, № 57) з аналогічною фабулою не становитиме для учнів труднощів.

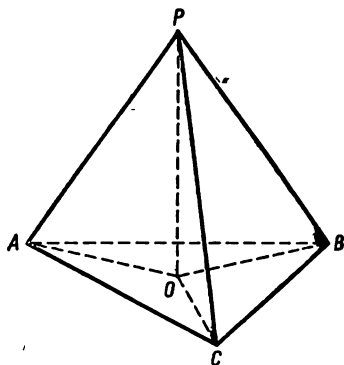
Багато задач посібника утворюють набори («блоки»), які розв'язують за певним алгоритмом розв'язування

однотипних задачних ситуацій, визначених фабулою задачі. Задачі в таких наборах можуть різнитися між собою рівнем обчислювальних навичок. Прикладами таких задач можуть бути: § 1, №№ 10, 24, 31; § 3, №№ 3, 16, 18 (1); § 5, №№ 14, 15; 22, 27, 31; § 5, №№ 19, 23, 24; § 7, №№ 61, 65, 72 та ін.

Наявність таких задач дає змогу вчителю організувати самостійну роботу в класі (за варіантами), дома, на додаткових заняттях.

Багато задач посібника є так званими задачами-теоремами, які розв'язано у тексті посібника або вміщено під рубрикою «Задачі». Сформульовані в них твердження порівняно часто використовуються під час розв'язування інших задач. Бажано добитися, щоб учні знали результати, одержані в цих задачах, бо вони сприяють раціональному розв'язуванню багатьох інших задач.

Задача 14 ([9], § 21, № 40). Основа піраміди — рівнобедрений трикутник із сторонами 6 см, 6 см і 8 см. Бічні ребра дорівнюють по 9 см кожне. Знайдіть об'єм піраміди.



Мал. 12

Розв'язання. Побудуємо PO — перпендикуляр до площини основи піраміди (мал. 12). Оскільки за умовою $PA = PB = PC$, то з рівності прямокутних трикутників POA , POB , POC (за катетом і гіпотенузою) випливає, що $OA = OB = OC$, тобто точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC .

Об'єм піраміди $PABC$ обчислимо за формулою:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot PO. \quad (1)$$

Використавши результат задачі 29, § 14, отримаємо:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{10 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} = 8\sqrt{5} \text{ (см}^2\text{)}. \quad (2)$$

Врахувавши результат задачі № 42, § 14, обчислимо:

$$OA = \frac{6 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot 8\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \text{ (см)}.$$

З прямокутного трикутника POA :

$$PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} = \sqrt{81 - \frac{81}{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5} \text{ (см)}. \quad (3)$$

Підставивши (2), (3) в (1), маємо:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{5} \cdot \frac{18\sqrt{5}}{5} = 48 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Наведемо перелік задач-теорем шкільного курсу геометрії: § 2, № 20; § 3, №№ 12, 20, 25, 28, 30; § 4, №№ 1, 9, 17, 26, 37, 43, 50; § 5, №№ 3, 4, 6, 8, 15, 41; § 6, №№ 18, 24, 25, 26, 33, 36, 40, 60, 74; § 7, № 17; § 9, №№ 8, 16, 17, 20—23; § 10, №№ 24, 38, 40; § 11, №№ 14, 36, 51, 52, 56, 59, 61, 62; § 12, № 13; § 13, № 11; § 14, №№ 1, 13, 20, 29, 40, 42; § 16, № 19; § 17, №№ 1, 2, 5, 9, 11, 12, 26, 30, 58; § 18, №№ 19—22, 26, 28, 34, 42; § 20, №№ 47, 48.

Бажано, щоб учні вели спеціальні зошити, де записували б різноманітні математичні факти, які можна використати під час розв'язування задач. У них мають зайняти належне місце також задачі-теореми, бо без них у багатьох випадках не обійтись.

Багато задач посібника дібрано таким чином, що для їх розв'язування використовують ознаки рівності трикутників. При цьому звичайно діють за алгоритмом: відшукати три пари відповідно рівних елементів, зробити висновок про рівність трикутників за певною ознакою і, як результат, знайти потрібні рівні (відповідні) елементи цих трикутників. Так поступають у випадку, коли пару рівних трикутників можна виділити на малюнку. Якщо цього безпосередньо зробити не вдається, то роблять спробу знайти трикутник, що дорівнює іншому, шляхом його побудови на малюнку.

Задача 15 ([9], § 6, № 60). Доведіть, що в рівнобічній трапеції кути при основі рівні.

В к а з і в к а. Побудувавши висоти трапеції, отримаємо пару рівних прямокутних трикутників (за катетом і гіпотенузою), звідки робимо висновок про рівність кутів при основі трапеції.

§ 3. ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

1. Доведення від супротивного

Суть методу міркувань від супротивного полягає в тому, щоб довести неможливість всякого іншого висновку, крім доводжуваного. При цьому важливо, щоб припущення, зроблене на початку міркувань (доведення, як правило, починається словами: «Припустимо, що сформульоване в задачі чи теоремі твердження неправильне...»), справді суперечило висновку з теореми і охоплювало всі можливі випадки, крім того, який доводять.

Звичайно роблять припущення, протилежне тому, яке стверджується теоремою, і зводять його до суперечності з умовою задачі (теореми), або висновком з раніше доведеної теореми, або твердженням аксіоми чи означення.

Учнів варто ознайомити з алгоритмом застосування розглядуваного методу. Він передбачає:

а) припущення існування твердження, протилежного тому, яке треба довести;

б) в'ясування змісту знайденого результату, виходячи з відомих аксіом, означень та раніше доведених теорем;

в) встановлення суперечності між знайденим результатом і умовою теореми чи відомими аксіомами, означеннями або теоремами;

г) формулювання висновку про те, що зроблене припущення неправильне, а тому правильне те твердження, яке треба було довести.

Метод доведення від супротивного широко використовується в шкільному курсі геометрії, який побудований на дедуктивній основі. Критерієм вибору методу часто буває трудність доведення певного твердження (пряма теорема). Тоді замість нього намагаються довести твердження, протилежне оберненому.

Застосування методу пояснюється в сьомому класі на прикладі доведення теореми 2.3 про відкладання кутів в одну півплощину. Фактичне використання його започатковане під час розв'язування задачі 3, § 1; хоча явно про це не сказано в тексті навчального посібника.

Пояснимо на прикладах використання цього методу.

Задача 16. Чи проходить промінь c між сторонами кута (ab) , якщо $\angle (ab) = 40^\circ$, $\angle (ac) = 50^\circ$?

Розв'язання. Припустимо, що промінь s проходить між сторонами кута (ab) . Тоді за аксіомою вимірювання кутів виконується співвідношення: $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$. Підставивши дані величини кутів, отримаємо: $40^\circ = 50^\circ + \angle(bc)$. Але за тією самою аксіомою $\angle(bc) > 0$, тому знайдена рівність неможлива. Зроблене припущення суперечить умові задачі.

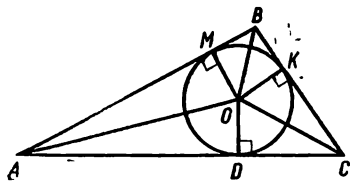
Задача 17 ([9], § 2, № 2₂). Чи можуть два суміжні кути бути обидва тупими? Відповідь поясніть.

Розв'язання. Припустимо, що обидва суміжні кути тупі. Тоді їх сума більша від 180° . Але це суперечить властивості суміжних кутів, тому зроблене припущення неправильне, отже, правильне твердження, що два суміжні кути не можуть бути обидва тупими.

Методом від супротивного можна розв'язати задачі з навчального посібника [9]: § 1, №№ 10—13, 41—43; § 4, №№ 1, 2, 11, 16, 20, 21, 48—50; § 5, №№ 1—4, 7, 8, 12, 13, 14, 16; § 7, №№ 32, 36, 37, 39; § 8, №№ 18, 43, 62; § 9, № 7; § 14, №№ 3, 6, 11.

2. Метод площ

Суть цього методу полягає в тому, що площу трикутника виражають різними формулами, порівнюючи які, знаходять шукані величини. Серед них найчастіше вживаються формули:



Мал. 13

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} a \cdot h_a = \\ &= \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = p \cdot r,$$

де a, b, c — довжини сторін трикутника, h_a — висота, проведена до сторони a , p — півпериметр, R, r — радіуси (відповідно) описаного та вписаного кіл.

Розглянемо застосування методу до розв'язування задач.

Задача 18 ([9], § 14, № 42). Виведіть формулу:

$r = \frac{2S}{a+b+c}$, де a, b, c — сторони трикутника, S — його площа.

Розв'язання. Позначимо: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $OD = OM = OK = r$, $S_{\triangle ABC} = S$ (мал. 13).
За адитивною властивістю площі:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COA}$$

або

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} c \cdot r + \frac{1}{2} a \cdot r + \frac{1}{2} b \cdot r = S,$$

звідси $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

Методом площ можна скористатися під час розв'язування задач з навчального посібника [9]: § 14, № 36₁, 37, 39, 48; § 20, №№ 40, 41.

Додаткові задачі

1. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють a та b . Знайти довжину бісектриси прямого кута.

2. У $\triangle ABC$ дано: $AC = b$, $BC = a$, $\angle ACB = \alpha$, $\angle ACD = \angle BCD = \frac{\alpha}{2}$. Знайти довжину CD .

3. Всередині правильного трикутника із стороною a взято довільну точку M . Знайти суму відстаней від точки M до сторін трикутника.

4. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки, взятої на основі рівнобедреного трикутника, до бічних сторін є величина стала і дорівнює висоті трикутника, проведений до бічної сторони.

5. Знайти медіану m_a трикутника, знаючи довжини a , b , c його сторін.

6. Знайти площу гострокутного трикутника ABC , у якому $AB = c$, медіана $BD = m$, $\angle BDA = \beta$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

7. Довести, що $r_a = \frac{S_{\triangle}}{p-a}$, де r_a — радіус зовнішнього кола, проведений до сторони a трикутника ABC , p — його півпериметр.

3. Метод геометричних перетворень

У шкільному курсі геометрії розглядаються геометричні перетворення двох видів: *рух* (зберігаються відстані між точками) і *перетворення подібності* (відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів). Як приклади перетворення руху вивчаються: *си-*

метрія відносно точки (на площині і в просторі); *симетрія відносно прямої* (на площині і в просторі), *симетрія відносно площини, паралельне перенесення* (на площині і в просторі), поворот навколо точки. Прикладом перетворення подібності є *гомотетія*.

Властивості геометричних перетворень використовуються ефективно до розв'язування задач лише тоді, коли учні вміють:

а) будувати геометричні фігури при конкретних видах перетворень;

б) визначати вид перетворення за окремими елементами геометричних фігур;

в) встановлювати (обчисленням, побудовою) положення відповідних точок при певному виді перетворення.

Для формування цих умінь корисно скористатися розв'язуванням задач на побудову. Задачі цього виду, вміщені в навчальному посібнику ([9]), можна умовно поділити на групи:

1) побудова відповідних точок при заданому геометричному перетворенні (задачі § 9, №№ 1—5, 7, 10, 11, 15, 36);

2) побудова фігури, для якої відповідне перетворення треба знайти (задачі § 9, №№ 10, 24).

Розглянемо використання геометричних перетворень на конкретних прикладах.

Метод *симетрії відносно точки* застосовується в задачах про центральну-симетричні фігури або про відрізки в середину в даній точці і кінцями на двох даних прямих. Хід міркувань зводиться до:

а) знаходження положення прямої, що проходить через центр симетрії двох геометричних фігур;

б) відшукування образу точки на одній з фігур, якщо відомі центр їх симетрії і прообраз цієї точки.

Задача 19 ([9], § 9, № 8). Доведіть, що точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії.

Д о в е д е н н я. Нехай точка O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. За теоремою 6.2 діагоналі AC та BD діляться нею пополам, тому точки A і C , B і D симетричні відносно точки O . Отже, відрізки AB та CD , BC та DA симетричні відносно точки O , яка є центром симетрії паралелограма.

Задача 20 ([9], § 18, № 11). Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є ромбом, якщо $A(6; 7; 8)$, $B(8; 2; 6)$, $C(4; 3; 2)$, $D(2; 8; 4)$.

Розв'язання. Щоб довести твердження задачі, скористаємось означенням ромба. Спочатку доведемо, що $ABCD$ — паралелограм. Оскільки за теоремою 6.2 діагоналі AC та BD точкою K перетину діляться пополам, то повинні виконуватись умови:

$$\text{для відрізка } AC: x_K = \frac{6+4}{2} = 5, \quad y_K = \frac{7+3}{2} = 5, \\ z_K = \frac{8+2}{2} = 5;$$

$$\text{для відрізка } BD: x_K = \frac{8+2}{2} = 5, \quad y_K = \frac{2+8}{2} = 5, \\ z_K = \frac{6+4}{2} = 5.$$

Це означає, що точка K — спільна для відрізків AC та BD , отже, є їх серединою. Звідси, $ABCD$ — паралелограм. Далі доведемо, що $AB = AD$.

Маємо:

$$AB = \sqrt{(8-6)^2 + (2-7)^2 + (6-8)^2} = \sqrt{33},$$

$$AD = \sqrt{(2-6)^2 + (8-7)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{33}.$$

Таким чином, $ABCD$ — паралелограм з рівними сторонами, тобто ромб.

Метод *симетрії відносно прямої* використовується в задачах про геометричні фігури, що мають вісь симетрії, або в тих випадках, коли в задачі дано суму (різницю) лінійних або кутових елементів. При цьому учні повинні вміти знаходити:

а) образи геометричних фігур при заданій симетрії;

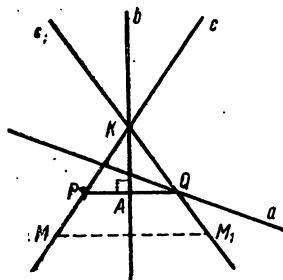
б) точки на фігурах, симетричних відносно деякої осі.

Задача 21 ([9], § 9, № 24).

Дано три прямі a , b , c , що попарно перетинаються. Побудуйте відрізок, перпендикулярний до прямої b , середина якого лежить на прямій b , а кінці на прямих a і c . Чи завжди задача має розв'язок?

Розв'язання.

Аналіз. Припустимо, що задачу розв'язано (мал. 14). Нехай відрізок PQ — шуканий. Оскільки пряма b — вісь його симетрії, то точки P та Q симетричні відносно прямої b . За умовою задачі точки P та Q повинні належати різним прямим a і c . Для довільної точки P



Мал. 14

симетричною буде точка, що належить прямій c_1 , отже, є точкою перетину прямих a та c_1 .

Побудова. Побудуємо пряму c_1 , симетричну прямій c відносно прямої b . Через те, що точка K переходить у себе, то для цього досить побудувати ще одну точку M_1 , симетричну точці M відносно прямої b . З точки Q проведемо перпендикуляр QA до перетину з прямою c . Відрізок PQ — шуканий.

Доведення впливає з побудови і означення симетрії відносно прямої.

Задача 22 ([9], § 18, № 8). Складіть рівняння геометричного місця точок простору, рівновіддалених від точки $A(1; 2; 3)$ і початку координат.

Розв'язання. Нехай $B(x, y, z)$ — точка шуканого ГМТ. За умовою задачі $BO = BA$, тобто:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} &= \\ &= \sqrt{(1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-z)^2}.\end{aligned}$$

Спростивши вираз, матимемо:

$$x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

Це — рівняння площини, яка є для точок $O(0; 0; 0)$ та $A(1; 2; 3)$ площиною симетрії.

Метод *повороту навколо даної точки* застосовується в тих задачах, в умовах яких можна виділити рівнобедрений трикутник з відомим кутом між рівними сторонами.

Успіх у його застосуванні залежить від рівня умінь:

а) будувати образи геометричних фігур (точки, відрізка, променя, прямої, трикутника тощо);

б) відшукувати центр повороту;

в) будувати відповідні при даному повороті точки на довільних фігурах, описаних задачними ситуаціями.

Задача 23. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник, вершини якого лежать на трьох даних паралельних прямих (по одній на кожній).

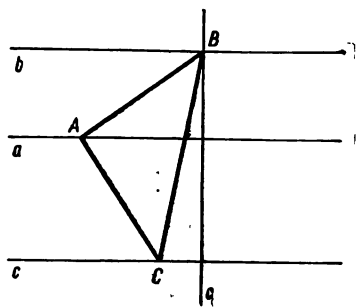
Розв'язання.

Аналіз. Припустимо, що $\triangle ABC$ задовольняє умову задачі (мал. 15). Прийmemo точку A за центр повороту на кут 90° (проти напрямку руху стрілки годинника). Виконаємо поворот навколо точки A . Тоді образом точки C буде точка B . Знайдемо образ прямої c при тому самому повороті. Ним буде пряма c_1 . Оскільки точка C лежить на прямій c , то точка B лежить на прямій c_1 . Крім того, точка B лежить на прямій b (за умовою), тому

вона є точкою перетину прямих b та c_1 . Побудувавши точку B , будують точку C при тому самому повороті (але в напрямі за годинниковою стрілкою).

П о б у д о в а. Взявши довільну точку A на прямій a за центр повороту, здійснимо поворот прямої c на кут 90° (проти напрямку руху стрілки годинника). Для цього досить побудувати відрізок, що є відстанню точки A до прямої c і виконати зазначений поворот. Отримаємо точку B . Здійснивши поворот відрізка AB на кут 90° (в напрямі руху стрілки годинника), матимемо точку C — третю вершину трикутника.

Д о в е д е н н я. За побудовою $\angle BAC = 90^\circ$, бо $c_1 \perp b$ і точки A, B, C належать відповідно прямим a, b, c .



Мал. 15

Д о с л і д ж е н н я. Розв'язок задачі існує завжди, оскільки положення точки B при повороті точки C на 90° навколо точки A визначається однозначно. З точністю до рівності фігур на площині задача має один розв'язок.

Метод паралельного перенесення застосовують з метою «зближення» елементів геометричної фігури.

Щоб оволодіти умінням використовувати його, треба навчитися будувати образи геометричних фігур при цьому перетворенні, «бачити» його в конкретних задачних ситуаціях.

За навчальним посібником [9] означення і властивості паралельного перенесення вводяться в використанням декартових координат (§§ 9, 18). Це істотно позначається на характеристиці типів відповідних задач, виділених у ньому. За змістом їх можна розподілити на групи: а) виконання паралельного перенесення в координатах; б) використання властивостей паралельного перенесення.

Задача 24 ([9], § 18, № 25₃). Чи існує паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку B , а точка C — у точку D , якщо: $A(0; 1; 2)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(3; -2; 2)$, $D(2; -3; 1)$?

Р о з в ' я з а н н я. Пара точок A і B визначає паралельне перенесення, до того ж єдине. Знайдемо його

формули: $-1 = 0 + a$, $0 = 1 + b$, $1 = 2 + c$, звідси $a = -1$, $b = -1$, $c = -1$, тому маємо такі формули: $x' = x - 1$, $y' = y - 1$, $z' = z - 1$. Перевіримо, чи задовольняють ці формули координати другої пари точок C та D . Підставивши, матимемо: $2 = 3 - 1$, $-3 = -2 - 1$, $1 = 2 - 1$.

В і д п о в і д ь. Існує.

Метод *подібності* в задачах на побудову ґрунтується на тому, що спочатку будують допоміжну геометричну фігуру, подібну даній, але таку, яка не задовольняє лише одну з вимог задачі. Після цього перетворюють знайдену фігуру у подібну їй так, щоб задовольнити невикористану вимогу.

Цей метод застосовують найчастіше до задач, в яких задано довжину одного з відрізків, а інші дані, що визначають шукану фігуру, — або кути, або відношення інших відрізків. Щоб серед даних умовою задачі величин вибрати ті, за якими можна побудувати допоміжну фігуру, подібну шуканій, учневі треба знати, якими величинами можна задати форму геометричної фігури. Такими величинами є:

а) для трикутника — величини двох кутів, відношення двох сторін і величина кута між ними, відношення трьох сторін, відношення трьох медіан, відношення трьох висот;

б) для прямокутника — відношення суміжних сторін, відношення діагоналі і сторони, кут між діагоналями;

в) для паралелограма — відношення двох сторін і величина кута між ними, відношення діагоналей і величина кута між ними, відношення діагоналей і величина одного з його кутів;

г) для ромба — величина його кута, відношення діагоналей.

Задача 25. Побудуйте трикутник ABC за двома кутами A , C та медіаною m_b .

Р о з в' я з а н н я.

А н а л і з. Припустимо, що $\triangle ABC$ — шуканий (мал. 16). Знехтувавши лінійним розміром m_b , можна побудувати $\triangle A_1BC_1$, подібний шуканому, в якому медіана $BD_1 \neq m_b$. Положення точки D визначиться при гомотетії з центром B і коефіцієнтом $k = \frac{BD}{BD_1}$.

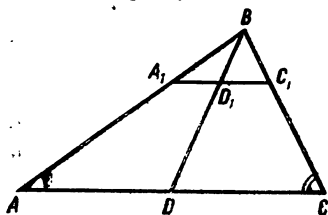
П о б у д о в а. Будуємо $\triangle A_1BC_1$ за двома кутами: $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, а в ньому — медіану BD_1 .

Якщо $BD_1 = m_b$, то задачу розв'язано. Якщо ж $BD_1 \neq m_b$, то на промені BD_1 побудуємо точку D таку, що $BD = m_b$. Провівши через D пряму, паралельну прямій A_1C_1 , дістанемо $\triangle ABC$.

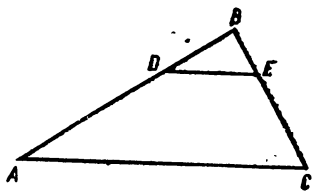
Доведення. Оскільки $AC \parallel A_1C_1$ за побудовою, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$ (§ 11, задача № 15). Крім того, $BD = m_b$ за побудовою, тому $\triangle ABC$ — шуканий.

Дослідження. Кожен крок побудови виконується однозначно, тому задача має єдиний розв'язок при умові, що $0^\circ < \angle A + \angle C < 180^\circ$.

В задачах на обчислення намагаються відшукати пару подібних трикутників за елементами, що входять в одну



Мал. 16



Мал. 17

з ознак подібності трикутників. Якщо безпосередньо це не вдається, то додатково обчислюють елементи, яких не вистачає.

Задача 26 ([9], § 11, № 19). В трикутнику ABC проведено відрізок DE паралельно стороні AC (кінець D відрізка лежить на стороні AB , а E — на стороні BC). Знайдіть відношення $AD : BD$, якщо $AC : DE = 55 : 28$.

Розв'язання. З подібності трикутників ABC та DBE (задача № 15, § 11) маємо (мал. 17):

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE}, \quad \frac{AB}{DB} = \frac{55}{28}.$$

Тоді

$$\frac{AB}{DB} - 1 = \frac{55}{28} - 1$$

або

$$\frac{AB - DB}{DB} = \frac{27}{28}, \quad \frac{AD}{DB} = \frac{27}{28}.$$

Задача 27 ([9], § 19, № 55). Висота піраміди дорівнює 16 м. Площа основи дорівнює 512 м^2 . На якій відстані від основи знаходиться переріз, паралельний їй, якщо площа перерізу 50 м^2 ?

Розв'язання. За теоремою 19.5 відрізана повна і дана піраміди подібні. Якщо позначити шукану відстань через x , то коефіцієнт подібності дорівнює $\frac{16-x}{16}$. За властивістю площ подібних фігур (§ 14) маємо рівняння:

$$\frac{50}{512} = \left(\frac{16-x}{16} \right)^2.$$

Розв'язавши його, знайдемо $x = 11$.

Додаткові задачі

8. Побудувати трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

9. Довести, що коли в трикутнику медіана і бісектриса, проведені з однієї вершини, збігаються, то трикутник рівнобедрений.

10. Всередині кута ABC дано точку O . Побудувати такий відрізок з кінцями на сторонах даного кута, щоб його серединою була точка O .

11. Побудувати бісектрису даного кута за допомогою лише лінійки.

12. На даній прямій знайти таку точку, щоб сума відстаней від цієї точки до двох даних точок була найменшою.

13. Побудувати трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і різницею двох інших його кутів.

14. Всередині трикутника ABC дано точку P . Побудувати на сторонах BC та AC відповідно точки K , M такі, що $PK = KM$ і $\angle KPM = 45^\circ$.

15. У даний квадрат вписати рівносторонній трикутник так, щоб одна з його вершин була у вершині квадрата, а дві інші лежали на його сторонах.

16. Дано два концентричні кола і точку A поза ними. Побудувати рівносторонній трикутник ABC , вершини B та C якого лежать на даних колах.

17. Довести, що коли дві бісектриси трикутника рівні, то він рівнобедрений.

18. Побудувати трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$), якщо $BC = a$, $AD = b$, $\angle CAD = \alpha$, $\angle BDA = \beta$.

19. Побудувати паралелограм за сторонами і кутом між діагоналями.

4. Метод введення допоміжного елемента

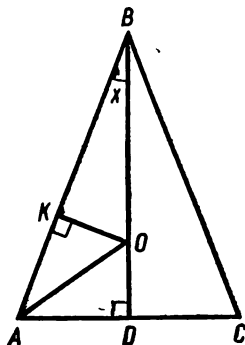
Якщо в процесі розв'язування задачі не вдається безпосередньо пов'язати дані та шукані величини, то користуються прийомом введення допоміжного елемента. Ним може виступати відрізок, кут, площа, об'єм.

Під час розв'язування задач можуть трапитися два випадки: а) допоміжний елемент доводиться знаходити (обчислювати); б) він не вимагає знаходження числової величини.

Задача 28. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з основою a і бічною стороною b .

Розв'язання. Якщо BD — висота трикутника ABC , то точка O лежить на BD , бо вона є точкою перетину бісектриси (мал. 18).

Введемо допоміжний $\angle ABD = x$. З прямокутного трикутника OBK :



Мал. 18

$$OK = OB \cdot \sin x =$$

$$= (BD - OD) \cdot \sin x = (BD - OK) \cdot \sin x;$$

відси:

$$OK = \frac{BD \cdot \sin x}{1 + \sin x}.$$

З прямокутного трикутника ABD :

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}.$$

Крім того, $\sin x = \frac{a}{2b}$, тому:

$$OK = \frac{a \sqrt{4b^2 - a^2}}{2 \cdot 2b \left(1 + \frac{a}{2b}\right)} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2b - a}{2b + a}}.$$

Задача 29. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює α , а висота дорівнює h . Знайдіть об'єм піраміди.

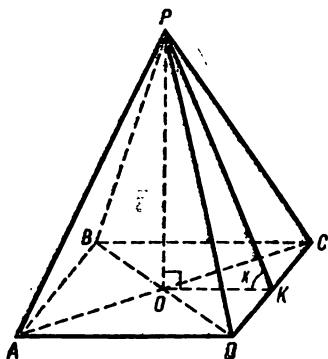
Розв'язання. Нехай $PABCD$ — зображення даної піраміди (мал. 19). За умовою задачі: $PO = h$, $\angle CPD = \alpha$. Об'єм піраміди обчислимо за формулою:

$$V = \frac{1}{3} \cdot DC^2 \cdot PO.$$

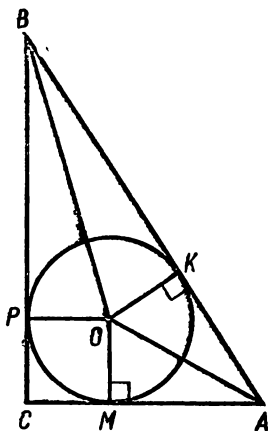
Побудуємо $OK \perp DC$, тоді за теоремою про три перпендикуляри $PK \perp DC$. Введемо допоміжний $\angle PKO = x$, де $0^\circ < x < 90^\circ$. Знайдемо відрізок PK з прямокутних трикутників PKO та PKD . Отримаємо відповідно

$$PK = \frac{OK}{\cos x}, \quad PK = \frac{DK}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Оскільки $OK = DK$, то $\cos x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.



Мал. 19



Мал. 20

Обчислимо: $\sin x = +\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$, тоді $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

З прямокутного трикутника POK : $OK = \frac{h}{\operatorname{tg} x} = \frac{h \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}}$. Але $DC = 2 \cdot OK = \frac{2h \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}}$, отже,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{4h^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \cdot h = \frac{4}{3} \cdot h^3 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Легко бачити, що задача має розв'язки, якщо $h > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Задача 30. Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, у 7 раз менший від гіпотенузи. Знайдіть гострі кути трикутника.

Розв'язання. Позначимо: $\angle ABC = 2x$, тоді $\angle BAC = 90^\circ - 2x$, $\angle OBK = x$, $\angle OAK = 45^\circ - x$ (мал. 20). За умовою задачі $AB = 7 \cdot OK$.

З прямокутних трикутників OKB та OKA маємо відповідно:

$$KB = \frac{OK}{\operatorname{tg} x}, \quad KA = \frac{OK}{\operatorname{tg} (45^\circ - x)}.$$

Але $KB + KA = AB$, тому

$$\frac{OK}{\operatorname{tg} x} + \frac{OK}{\operatorname{tg} (45^\circ - x)} = 7 \cdot OK,$$

або

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} (45^\circ - x)} = 7.$$

Оскільки $\operatorname{tg} (45^\circ - x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$, то рівняння набере вигляду:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 7.$$

Позначивши: $y = \operatorname{tg} x$, дістанемо: $8y^2 - 7y + 1 = 0$,

звідки $y_1 = \frac{7 + \sqrt{17}}{16}$, $y_2 = \frac{7 - \sqrt{17}}{16}$.

Переходячи до x , маємо: $x \approx 69^\circ 36'$ або $x \approx 20^\circ 24'$.

Додаткові задачі

20. Через деяку точку, взяту всередині трикутника, проведено три прямі, відповідно паралельні сторонам трикутника. Ці прямі ділять трикутник на 6 частин, з яких три — трикутники з площами S_1 , S_2 , S_3 . Знайти площу даного трикутника.

21. У трикутник ABC вписано коло, яке дотикається сторони AB у точці D , а сторони BC у точці E . Знайти кути трикутника, якщо $\frac{BD}{AD} = \frac{1}{2}$, $\frac{BE}{CE} = \frac{1}{3}$.

22. На колі радіуса R дано дві точки A і B , відстань між якими дорівнює l . Яке найбільше значення може набувати сума $AC^2 + BC^2$, якщо точка C лежить на цьому колі?

23. У трапеції з основами a і b через точку перетину діагоналей проведено пряму, паралельну основам. Знайти довжину відрізка цієї прямої, що міститься між бічними сторонами.

24. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює куту між бічним ребром і площиною основи. Знайти цей кут.

25. Площа повної поверхні конуса в $\frac{9}{4}$ рази більша від площі поверхні вписаної кулі. Знайти кут між твірною і висотою конуса.

5. Метод заміни даної фігури іншою

Суть методу полягає в тому, що шукану величину знаходять з іншої геометричної фігури, якою заміняють дану фігуру.

Задача 31. Довжина ребра правильного тетраедра дорівнює a . Знайдіть радіус кулі, яка дотикається всіх його ребер.

В к а з і в к а. Замінімо тетраедр кубом, у якого діагоналі граней — ребра даного правильного тетраедра. Тоді радіуси кулі, вписаної в цей куб, і кулі, яка дотикається всіх ребер тетраедра, мають однакову довжину, що дорівнює $\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Додаткові задачі

26. Знайти висоту рівнобічної трапеції, якщо її діагоналі взаємно перпендикулярні, а площа трапеції дорівнює S .

27. Побудувати квадрат так, щоб на прямій, яка містить одну сторону трикутника, лежали дві вершини квадрата, а дві інші сторони трикутника містили по одній вершині квадрата.

28. Дано трикутну піраміду AA_1BD , в якій ребра AA_1 , AB , AD попарно перпендикулярні, а їх довжини дорівнюють a , b , c . Знайти радіус кулі, описаної навколо цієї піраміди.

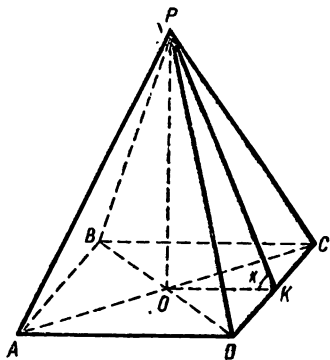
29. Довести, що сума квадратів довжин ребер тетраедра дорівнює почетвереній сумі квадратів відстаней між серединами його мимобіжних ребер.

6. Метод складання тригонометричного рівняння

Суть його полягає в тому, що за умовою задачі складають тригонометричне рівняння і, розв'язавши його, знаходять ті значення невідомого, серед яких є відпо-

відь задачі. Розв'язком тригонометричного рівняння можуть бути числа, що виражають собою кути, які задовольняють дане рівняння. Через це розглядуваний метод застосовний до задач на знаходження кутових величин геометричних фігур.

Для складання тригонометричного рівняння за умовою задачі часто зручно двічі виразити певний (лінійний) елемент з двох різних трикутників і порівняти між собою знайдені вирази. Такий прийом можливий у тому випадку, коли в умові задачі відсутні лінійні розміри фігури. Це означає, що фігуру задано з точністю до подібності, тобто умові задачі відповідають, крім заданої, також фігури, їй подібні. Тому правомірно вводити в ході розв'язування задачі допоміжні параметри, для яких виконуються задані умовою задачі співвідношення. В ході розв'язування задачі вони, як правило, скорочуються.



Мал. 21

Трудність розв'язування задачі значною мірою залежить від типу складеного рівняння (найпростіші, лінійні, квадратні, вище другого степеня відносно тригонометричної функції, ліва частина розкладається на множники тощо). Відбір коренів для відповіді проводять, виходячи з умови задачі.

Задача 32 ([9], § 19, № 58). У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайдіть двогранний кут x при основі піраміди.

Розв'язання. Знайшовши спільний елемент PK з двох прямокутних трикутників PKO та PKD (мал. 21), відповідно отримаємо:

$$PK = \frac{OK}{\cos x}, \quad PK = \frac{DK}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Але $OK = DK$, тому $\cos x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Даним методом можна розв'язати задачі: [9], § 19, №№ 1—4, 43; § 18, №№ 41, 62—64.

Додаткові задачі

30. Висота прямокутного трикутника ділить гіпотенузу у відношенні $3 : 1$. Знайти гострі кути трикутника.

31. Кут між бічним ребром і стороною основи правильної трикутної піраміди вдвічі менший від двогранного кута при бічному ребрі. Знайти ці кути.

32. Висота, проведена до однієї з рівних сторін рівнобедреного трикутника, ділить його кут у відношенні $2 : 1$. Знайти кути трикутника.

33. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди вдвічі більший від кута між апофемою піраміди і площиною основи. Знайти ці кути.

34. Основа піраміди — квадрат. Двогранні кути при основі відносяться як $1 : 2 : 4 : 2$. Знайти ці кути.

35. Сума висот рівнобедреного трикутника в $\frac{9}{4}$ рази більша від діаметра описаного кола. Знайти кути трикутника.

36. Знайти гострі кути прямокутного трикутника, якщо його площа в 2 рази менша площі рівностороннього трикутника, побудованого на гіпотенузі.

37. Числа, що виражають площу основи конуса, площу поверхні вписаної кулі і площу бічної поверхні конуса, утворюють арифметичну прогресію. Знайти кут між твірною і площиною основи конуса.

7. Метод координат

Суть методу координат полягає в тому, що розміщення геометричних фігур виражають числами у вибраній (чи заданій) системі координат. У шкільному курсі геометрії метод координат переважно зводиться до використання законів векторної алгебри для запису геометричних фактів, виражених відповідними твердженнями. У ході розв'язування задач знайдені результати інтерпретують у геометричній формі, що дає змогу одержати шукану відповідь.

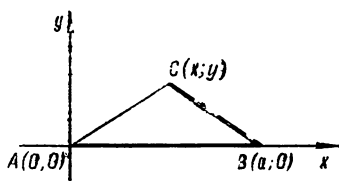
Часто процес розв'язування геометричної задачі методом координат допускає алгоритмічний підхід: а) переформулювання умови задачі на умову алгебри; б) застосування законів алгебри до знайдених математичних залежностей; в) інтерпретація кінцевого результату в потрібній термінології.

Теоретичну основу вивчення методу в школі становлять формули координат середини відрізка та відстані між двома точками як для площини, так і для простору.

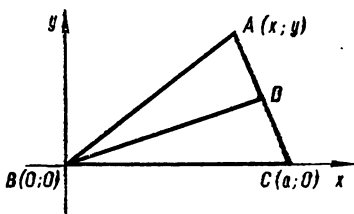
У шкільному курсі геометрії розв'язують задачі такого змісту: а) встановлення залежностей між елементами геометричних фігур за допомогою згаданих формул (лише для лінійних елементів); б) складання рівнянь ГМТ, описаних умовами задач.

Вибираючи точки у системі координат, доцільно деякі з них брати на осях координат. Це суттєво спростить обчислення.

Задача 33. Складіть рівняння геометричного місця точок площини, однаково віддалених від двох даних точок.



Мал. 22



Мал. 23

Розв'язання. Виберемо систему координат так, щоб вісь абсцис збігалася з прямою, на якій лежать дані точки A і B , а точка A — з початком координат (мал. 22). Покладемо: $AB = a$. Тоді координати точок A та B запишуться так: $A(0; 0)$, $B(a; 0)$. Нехай точка $C(x; y)$ належить шуканому ГМТ. Згідно з умовою задачі виконується співвідношення: $AC = BC$. За формулою відстані між двома точками:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Спростивши вираз, маємо: $x = \frac{a}{2}$, бо $a \neq 0$.

Це означає, що шуканим ГМТ є пряма, яка збігається з серединним перпендикуляром до відрізка, кінцями якого служать дані точки.

Задача 34. У трикутнику ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Відрізок BD — медіана. Доведіть, що $BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

Доведення. Виберемо систему координат так, як показано на малюнку 23. Оскільки $D\left(\frac{a+x}{2}; \frac{y}{2}\right)$, то

$$BD^2 = \left(\frac{a+x}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{ax}{2} + \frac{x^2+y^2}{4}.$$

Але $x^2 + y^2 = c^2$, тому $(a-x)^2 + y^2 = b^2$ або $a^2 - 2ax + x^2 + y^2 = b^2$, звідки $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Підставивши знайдені значення у вираз BD^2 , матимемо:

$$BD^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} + \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

Задача 35. ([9], § 18, № 8). Складіть рівняння геометричного місця точок простору, рівновіддалених від точки $A(1; 2; 3)$ і початку координат.

Розв'язання. Нехай точка $M(x; y; z)$ належить шуканому ГМТ, тоді $MA = MO$, де $O(0; 0; 0)$ — початок системи координат. Маємо: $(1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$, звідки $x + 2y + 3z - 7 = 0$.

Додаткові задачі

38. На площині дано дві точки A і B . Точка O переміщується у площині так, що довжина медіани AD трикутника ABC залишається сталою. Знайти геометричне місце точок, якому належить точка C .

39. Дано рівносторонній трикутник ABC . Знайти геометричне місце точок, якому належить точка M , якщо $MC^2 = MA^2 + MB^2$.

40. Довести, що діагоналі прямокутника рівні.

41. У площині прямокутника $ABCD$ дано точку M . Довести, що $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

42. Дано прямокутний трикутник ABC з катетами a , b , $\angle C = 90^\circ$. Скласти рівняння геометричного місця точок, для яких $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

43. У квадрат вписано коло. Довести, що сума квадратів відстаней точки кола до вершин квадрата не залежить від вибору точки на колі.

44. Точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ є вершинами трикутника ABC . Знайти координати точки M перетину його медіан.

8. Метод векторів

Він полягає в тому, що деяке розміщення геометричних фігур чи залежність між ними виражають за допомогою векторів і навпаки — мову векторних рівностей «переводять» на геометричну мову.

Задачі на застосування векторного апарату поділяються на афінні і метричні. Для розв'язування афінних задач використовують лінійні операції над векторами та їх властивості (додавання векторів, множення вектора на число). Розв'язування метричних задач, крім того, вимагає використання поняття скалярного добутку векторів. У таких задачах, зокрема, треба знайти довжину вектора, величину кута між векторами, обґрунтувати перпендикулярність прямих тощо.

У ході розв'язування задач векторним методом виникає потреба користуватися відповідними правилами, що являють собою певні векторні залежності. У навчальному посібнику [9] до них можна віднести: паралельне перенесення та його властивості, умови рівності двох векторів, правила додавання векторів та множення вектора на число, формули довжини вектора, скалярного добутку векторів, умови перпендикулярності та колінеарності векторів (для площини і простору).

У зв'язку з вивченням декартових координат деякі з цих правил формулюються, крім геометричної, в координатній формі. Це дає можливість раціоналізувати розв'язування багатьох задач.

Загального алгоритму розв'язування задач векторним методом не існує, проте часто буває корисно скористатися такими прийомами: а) «векторизувати» умову задачі; б) у вибраних позначеннях (чи координатах) виразити потрібні вектори; в) виконати зазначені операції над векторами згідно правил; г) знайденому результату надати геометричного тлумачення.

Задача 36 ([9], § 10, № 22). Точки M і N є серединами відрізків відповідно AB і CD . Доведіть векторну рівність: $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$.

Доведення. За теоремою 10.1 маємо (мал. 24):

$$\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DN} = \overline{MB} + \overline{BD} + \overline{DN},$$

$$\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CN} = \overline{MA} + \overline{AC} + \overline{CN}.$$

Склавши ці рівності і врахувавши, що $\overline{MB} = -\overline{MA}$, $\overline{DN} = -\overline{CN}$, матимемо доводжуване твердження.

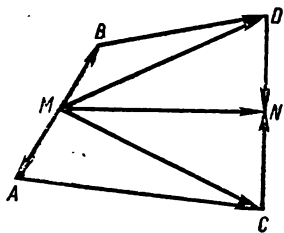
Примітка. Розміщення точок A, B, C, D , якщо точки C та D на малюнку поміняти місцями, умову задачі не задовольняє.

Задача 37 ([9], § 10, № 42). Доведіть за допомогою векторів, що діагоналі ромба перпендикулярні.

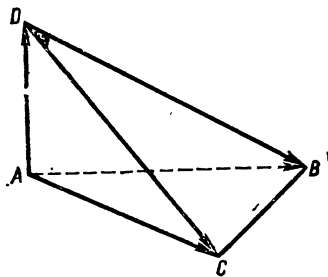
Доведення. Якщо $ABCD$ — даний ромб, то $\overline{AC} \neq \overline{0}$, $\overline{BD} \neq \overline{0}$, $\overline{AB} \neq \overline{AD}$. Скориставшись результатами задач 11, 21 § 10, матимемо:

$$\begin{aligned}\overline{AC} \cdot \overline{BD} &= (\overline{AB} + \overline{AD}) \cdot (\overline{AD} - \overline{AB}) = \overline{AB} \cdot \overline{AD} - \\ &\quad - \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0,\end{aligned}$$

тобто $AC \perp BD$ (на основі наслідку з теореми 10.3).



Мал. 24



Мал. 25

Задача 38 ([9], § 18, № 64). З точки поза площиною проведено перпендикуляр і дві рівні похилі, які утворюють з перпендикуляром кути α . Знайдіть кут φ між проекціями похилих, якщо кут між похилими β .

Розв'язання. Позначимо: $\overline{AD} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AC} = \overline{c}$ (мал. 25). За умовою задачі: $DB = DC$, $\angle ADB = \angle ADC = \alpha$, $\angle BDC = \beta$, $\angle BAC = \varphi$. Тоді $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{c} = 0$.

Обчислимо:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{\overline{DB} \cdot \overline{DC}}{|\overline{DB}| |\overline{DC}|} = \frac{(\overline{b} - \overline{a}) (\overline{c} - \overline{a})}{\overline{DB} \cdot \overline{DC}} = \\ &= \frac{\overline{b} \cdot \overline{c} - \overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{a}^2}{\overline{DB} \cdot \overline{DC}} = \frac{\overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a}^2}{\overline{DB} \cdot \overline{DC}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Але } DB &= \frac{\bar{b}}{\sin \alpha}, \quad DC = \frac{\bar{c}}{\sin \alpha}, \text{ тому:} \\ \cos \beta &= \frac{(|\bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos \varphi + \bar{a}^2) \cdot \sin^2 \alpha}{\bar{b} \cdot \bar{c}} = \sin^2 \alpha \times \\ &\times \cos \varphi + \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot \cos \varphi + \\ &+ \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cos \varphi + \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Додаткові задачі

45. У трикутнику ABC відомо: $AC = 1$ м, $BC = 2$ м, $\angle ACB = 120^\circ$. На стороні AB взято точку M так, що $AM:MB = 1:3$. Чи правильно, що $CM = \frac{7}{16}$ м?

46. Бічні сторони трапеції взаємно перпендикулярні. Довести, що сума квадратів її основ дорівнює сумі квадратів діагоналей.

47. Довести, що середини основ трапеції і точка перетину продовжень її бічних сторін належать одній прямій.

48. Поза площиною прямокутника $ABCD$ взято точку M . Довести, що $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

49. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює a . Точка M — середина ребра $C_1 D_1$. Знайти відстань між $B_1 D$ та CM .

50. Знайти величину кута між двома бісектрисами прямого тригранного кута.

Докладніше про ці та інші методи розв'язування геометричних задач читач може довідатись з [1], [3], [5], [7].

Розділ II

СПОСОБИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБЛАСТІ ІСНУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФІГУРИ

§ 1. ДОВЕДЕННЯ ІСНУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФІГУРИ

Виходитимемо з того, що геометрична задача має розв'язок (розв'язки), якщо існує принаймні одна геометрична фігура, описана в задачній ситуації. У протилежному випадку вважатимемо, що задача не має розв'язків.

З'ясуємо деякі поняття, які будуть потрібні надалі.

Означення. Геометрична фігура *існує (визначена)* при даних значеннях параметрів, якщо доведено можливість її *аксіоматичної побудови* при цих значеннях параметрів.

Під *аксіоматичними* розуміють побудови, які здійснюються за допомогою лише аксіом геометрії без використання інструментів. Перевага аксіоматичних побудов над *ефективними* побудовами (тобто такими, що виконуються за допомогою інструментів), полягає в тому, що останні суттєво залежать від інструментів і не завжди здійсненні. Ця обставина дає можливість покласти аксіоматичні побудови в основу методу доведення існування математичних об'єктів (зокрема геометричних фігур).

Проте в процесі навчання математиці буває зручно (там, де це можливо) користуватися ефективними побудовами як методом доведення існування геометричної фігури. В такому разі вважають, що геометрична фігура існує, якщо вона є результатом розв'язування деякої задачі на побудову.

Означення. Множина значень параметрів називається *допустимою*, якщо для неї існує геометрична фігура, описана умовою задачі.

Окремі елементи реально існуючих геометричних форм можна описати за допомогою системи значень параметрів, тому деякі обмеження на значення параметрів можуть бути накладені умовою задачі.

Розрізняють *необхідні, достатні, необхідні і достатні* умови існування геометричної фігури.

Означення. *Необхідними умовами* існування геометричної фігури називаються такі умови, які *завжди* вико-

нуються, якщо задача, в якій ідеться про дану фігуру, має розв'язок (розв'язки).

Обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне. Наприклад, необхідними умовами існування трикутника із сторонами 3 см, 5 см, x см є множина $x < 8$. Якщо $x = 1$ см, ці умови виконуються, але трикутник із сторонами 3 см, 5 см, 1 см не існує.

Означення. *Достатніми* називаються ті *допустимі* множини значень параметрів задачі, при яких існує *принаймні одна* геометрична фігура, яка задовольняє умову задачі.

На відміну від необхідних умов, невиконання якої-небудь достатньої умови не завжди веде до відсутності розв'язків задач.

Так, у наведеному прикладі для існування трикутника досить взяти $3 < x < 5$, але і при порушенні цієї умови можуть існувати трикутники із сторонами 3 см, 5 см, x см (наприклад, якщо $x = 6$ см).

Розв'язування геометричної задачі можна вважати закінченим, якщо встановлено умови, необхідні і достатні для того, щоб описана в умові задачі геометрична фігура мала зазначені в ній властивості.

Досліджуючи геометричні задачі, розрізняють вихідні і вивідні умови.

Під *вихідними* розуміють умови, які знаходять з припущення, що описана умовою задачі геометрична фігура існує.

Під *вивідними* розуміють умови, виведені з вихідних шляхом використання рівносильних перетворень рівнянь, нерівностей та їх систем.

Оскільки вивідні умови мають бути необхідними і достатніми для існування даної фігури, а їх знаходять з вихідних умов, то останні також повинні бути необхідними і достатніми для існування згаданої геометричної фігури.

Пояснимо це. Нехай у запису вихідних умов не було враховано деяких необхідних умов. Тоді вихідні умови виявляться «ширшими», тобто крім значень параметрів, що визначають геометричну фігуру, матимемо також умови, при яких фігура не існує. Тому в процесі дослідження геометричних задач треба враховувати ті необхідні умови, які разом з достатніми виражають область існування даної геометричної фігури.

Щоб знайти вивідні умови, треба у вихідних умовах виразити невідомі елементи через задані параметричні дані.

Вимога знайти допустимі множини значень параметрів означає не стільки формальний підрахунок кількості параметрів, скільки встановлення залежностей між ними.

Означення. Областю існування геометричної фігури називається множина всіх допустимих значень параметрів, за допомогою яких фігура задана.

Щоб її знайти, досить встановити необхідні і достатні умови для існування даної геометричної фігури.

Наприклад, областю існування трикутника, заданого стороною a та двома прилеглими до неї кутами β і γ , є множина значень параметрів: $a > 0$, $0^\circ < \beta + \gamma < 180^\circ$.

Щоб під час доведення достатності знайдених умов не виконувати аксіоматичні побудови у кожній задачі, встановимо області існування «елементарних» геометричних фігур, на які можна розбити дану геометричну фігуру.

Відомо, що елементи геометричної фігури визначаються однозначно, якщо вона має властивість *жорсткості*.

У планіметрії роль жорсткої фігури виконує трикутник, а в стереометрії його аналог — тетраедр. Тому ці фігури зручно взяти як елементарні фігури.

У ході дослідження геометричних задач часто доводиться користуватися необхідними і достатніми умовами існування деяких геометричних фігур. Сформулюємо їх, а деякі спробуємо довести.

Теорема 1. Необхідними і достатніми умовами існування трикутника зі стороною a і прилеглими до неї кутами β та γ є: $a > 0$, $0^\circ < \beta + \gamma < 180^\circ$.

Д о в е д е н н я.

Не о б х і д н і с т ь зазначених умов впливає з припущення існування заданого в умові задачі трикутника.

Д о с т а т н і с т ь. Якщо $a > 0$, $0^\circ < \gamma < 180^\circ$, $0^\circ < \beta < 180^\circ$, то існують відповідно відрізок довжини a та два кути величиною β і γ (обернена задача вимірювання відрізків і кутів). Згідно з аксіомою VII (I9) про відкладання кутів у даній півплощині, існує єдиний кут з даною градусною мірою, менший від 180° , що дорівнює за величиною куту β і має вершиною один з кінців даного відрізка. Аналогічно в тій самій півплощині існує другий (єдиний) кут, що дорівнює за величиною куту γ і має своєю вершиною другий кінець відрізка.

Оскільки $\beta + \gamma < 180^\circ$, то на основі аксіоми IX (еквівалентній 5-му постулату Евкліда) існує точка перетину

півпрямих, що є сторонами кутів β і γ — третя вершина трикутника. Отже, при даних умовах трикутник існує. Теорему доведено.

Теорема 2. Необхідними і достатніми умовами існування трикутника зі сторонами a, b та кутом γ між ними є: $a > 0, b > 0, 0^\circ < \gamma < 180^\circ$.

Доведення. Необхідність умов випливає з припущення про те, що даний трикутник існує.

Достатність. Якщо $a > 0, b > 0, 0^\circ < \gamma < 180^\circ$, то згідно з аксіомою VII існує єдиний $\angle BOA = \gamma$. За аксіомою VI на сторонах кута BOA існують (єдині) точки C та D такі, що $OC = a, OD = b$. Згідно з аксіомою I існує єдина пряма CD . Точки O, C, D визначають трикутник OCD з точністю до рівності фігур на площині. Теорему доведено.

Теорема 1 і 2 можна також довести, побудувавши трикутники за допомогою інструментів.

Теорема 3. Необхідними і достатніми умовами існування трикутника зі сторонами a, b, c є: $|a - b| < c < a + b$.

Доведення. Областю існування трикутника зі сторонами a, b та кутом γ між ними є:

$$a > 0, b > 0, 0^\circ < \gamma < 180^\circ. \quad (1)$$

З другого боку, $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, $-1 < \cos \gamma < 1$, тому

$$-1 < \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 1,$$

звідси

$$|a - b| < c < a + b. \quad (2)$$

Оскільки умови (1) і (2) еквівалентні в силу оборотності перетворень, то вони визначають область існування даного трикутника. Теорему доведено.

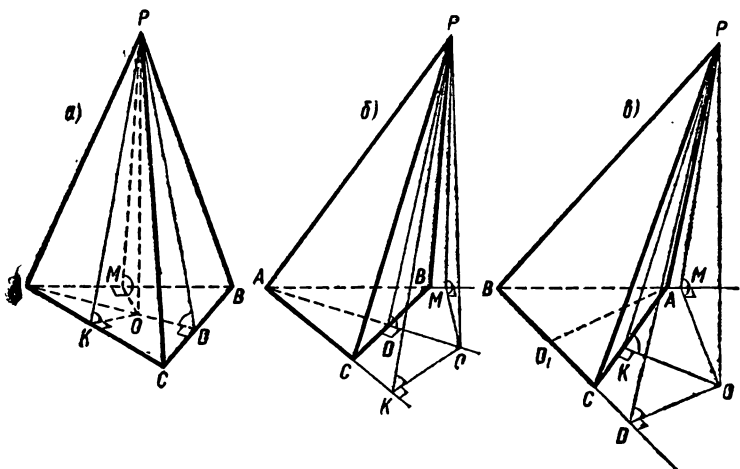
Області існування трикутників інших видів (щодо кутів і сторін), заданих параметричними даними, вміщено в додатку 1. Їх можна дістати як наслідки з теорем 1—3, врахувавши деякі залежності між параметричними даними.

Так, наприклад, щоб знайти область існування рівнобедреного трикутника з основою a та бічною стороною l , досить у теоремі 3 покласти $a = b = l, c = a$.

Використання областей існування найпростіших («елементарних») фігур дає змогу уникнути застосуван-

ня аксіом геометрії у кожній задачі окремо під час її дослідження.

Якщо деякій множині допустимих систем значень параметрів відповідає кілька геометричних фігур, що задовольняють умову задачі, то в кожному конкретному випадку треба знаходити окремо область існування даної геометричної фігури. До них, зокрема, відносяться задачі, в яких бічні грані піраміди нахилені до площини її основи під рівними кутами. Основи висот таких пірамід, зокрема тетраедрів, збігаються з центром вписаного або одного із зовнівписаних в основу кіл.



Мал. 26

Задача 39 ([9], § 19, № 41). Основа піраміди — рівнобедрений трикутник, у якого основа 12 см, а бічна сторона 10 см. Бічні грані утворюють з основою рівні двогранні кути, кожний з яких дорівнює 45° . Знайдіть висоту піраміди.

Р о з в' я з а н н я. Можливі три різні випадки розміщення основи висоти піраміди.

1) Вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в її основу (мал. 26, а).

Побудуємо $OK \perp AC$, $OM \perp AB$, тоді за теоремою про три перпендикуляри $PK \perp AC$, $PM \perp AB$. Трикутники POD , POK , POM рівні за катетом і протилежним кутом, тому $OD = OK = OM$, тобто точка O — центр

кола, вписаного в основу піраміди. Оскільки $\angle PDO = \angle PKO = \angle PMO = 45^\circ$ за умовою задачі, то $PO = OD$.

Радіус OD кола, вписаного в трикутник ABC , знайдемо за формулою:

$$OD = \frac{S_{\triangle ABC}}{p}, \text{ де } p = \frac{AB + BC + AC}{2}.$$

Оскільки $p = 16$ см, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48$ (см²), то $OD = 3$ см. Отже, $PO = 3$ см.

2) Вершина піраміди проектується в центр кола, зовнішнього вписаного в трикутник ABC (мал. 26, б), яке дотикається основи BC .

Виконавши аналогічні побудови та розглянувши трикутники POD , POK , POM , прийдемо до висновку, що $OD = OK = OM$ — радіуси зовнішнього кола, яке дотикається сторони BC та продовження двох інших сторін AB , AC . Центр O кола — точка перетину бісектрис кутів BCK та CBM .

Радіус OD кола знайдемо за формулою (розділ I, § 3, задача 7):

$$OD = \frac{S_{\triangle ABC}}{p - BC}. \text{ Маємо: } OD = \frac{48}{16 - 12} = 12 \text{ (см).}$$

3) Вершина піраміди проектується в центр кола, зовнішнього вписаного в трикутник ABC (мал. 26, в), яке дотикається бічної сторони AC .

Виконавши аналогічні побудови і обґрунтування, матимемо: $OD = \frac{48}{16 - 10} = 8$ (см).

Якщо позначити в задачі $a = 12$ см, $b = 10$ см, $\alpha = 45^\circ$, то областю існування піраміди в кожному з трьох різних випадків, розглянутих вище, буде: $0 < a < 2b$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Аналогічно розв'язується задача 45, § 19 ([9]), в якій відповіддю є числа: $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$, $12\sqrt{3}$.

Необхідні і достатні умови існування деякої геометричної фігури являють собою певні математичні твердження, тому до них можна застосувати поняття «еквівалентні твердження».

Означення. Два твердження називаються *еквівалентними*, якщо кожне з них є наслідком другого. Заміна одних тверджень іншими, їм еквівалентними, називається *еквівалентним перетворенням*.

Щоб одержати еквівалентні перетворення, користуються відомими перетвореннями, які зберігають їх рівносильність.

Можна довести (пропонуємо читачеві зробити це самостійно), що необхідні і достатні умови існування фігури, виражені через різні параметричні дані, еквівалентні.

Це твердження дає змогу виражати область існування геометричної фігури за допомогою різних параметричних даних. Суттєвим при цьому є той факт, що за вихідні умови існування даної геометричної фігури можна брати будь-які з них, треба тільки, щоб вони виражали необхідні і достатні умови існування цієї фігури.

Покажемо на прикладах, як знайти область існування однієї з правильних трикутних пірамід (див. додаток 1).

Задача 40. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює l , а радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює R . Знайдіть область існування піраміди.

Розв'язання. Доведемо, що область існування даної піраміди є: $0 < R < l$.

Необхідність випливає з припущення, що дана піраміда існує.

Достатність. Якщо $R > 0$, то за аксіомою VI на півпрямій OA існує єдина точка K така, що $OK = \frac{1}{2} OA$. Згідно з аксіомою VII існує єдиний $\angle AKC$, що дорівнює 90° , та точки B, C такі, що $KC = KB = \frac{RV\sqrt{3}}{2}$, тобто існує трикутник ABC — основа піраміди. Якщо $0 < R < l$, то існує прямокутний трикутник з катетом R та гіпотенузою l , тобто існує точка D — четверта вершина піраміди.

Задача 41. Доведіть, що необхідними і достатніми умовами існування правильної трикутної піраміди зі стороною основи a та плоским кутом α при вершині є: $a > 0, 0^\circ < \alpha < 120^\circ$.

Доведення. За умовою задачі знаходимо: $a > 0, 0^\circ < \alpha < 180^\circ, OK < DK$ (мал. 27).

Необхідність умов випливає з припущення, що така піраміда існує. Доведемо, що ці умови є достатніми. Якщо $a > 0, 0^\circ < \alpha < 180^\circ$, то існують (див. додаток 1) правильний $\triangle ABC$ — основа піраміди і рівнобедрений $\triangle DBC$ з основою $BC = a$ та кутом $BDC = \alpha$ при вершині. Звідси випливає, що існують відрізки $OK > 0, DK > 0$. Якщо $0 < OK < DK$, то іс-

не прямокутний $\triangle DOK$, отже, існує і правильна трикутна піраміда.

Оскільки $OK = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $DK = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, то $\frac{a}{2\sqrt{3}} < \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

Розв'язавши систему нерівностей, матимемо: $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 120^\circ$.

Означення. Допоміжною називається геометрична фігура, аксіоматична побудова якої можлива і, використовуючи її можна здійснити аксіоматичну побудову даної фігури, для якої допоміжна є елементарною.

Через те, що області існування допоміжної і даної фігур однакові, зручно скористатися знаходженням першої з них, щоб дослідити геометричну задачу.

Алгоритм дослідження геометричної задачі можна схематично подати так:

а) виділити допоміжну геометричну фігуру;

б) довести, що вона задовольняє означення допоміжної фігури;

в) встановити область існування допоміжної фігури;

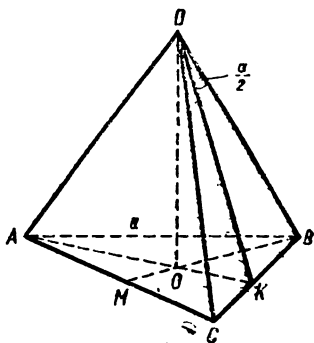
г) обчислити в ній невідомі елементи через дані умовою задачі параметри.

Під час дослідження геометричних задач на обчислення виникає потреба замінювати область існування геометричної фігури, даної системою деяких параметрів, іншою системою параметрів. Підстави для цього дає наступна теорема.

Теорема 4. Системи умов, що виражають необхідні і достатні умови існування даної геометричної фігури при різних параметрах, еквівалентні.

Доведення цієї теореми можна знайти у книжці ([2], с. 13).

Можливість запису області існування геометричної фігури різними залежностями дає змогу замінювати область існування, виражену деякою сукупністю параметрів, іншою їх сукупністю. Кількість параметрів, за допомогою яких визначаються необхідні і достатні умови



Мал. 27

існування геометричної фігури, для різних систем значень параметрів залишається незмінною.

Теорема 5 (обернена). Системи умов, що виражають область існування геометричної фігури при певних параметрах, можна замінити системами умов, вираженими через інші параметри.

Доведення див. у книжці [2].

Ця теорема дає можливість обґрунтувати вибір системи вихідних умов при будь-яких параметрах, якщо вони необхідні і достатні для існування даної фігури.

§ 2. ВИКОРИСТАННЯ ДОПОМІЖНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФІГУРИ

Геометрична фігура складається, як правило, з елементарних фігур (відрізків, кутів, трикутників тощо). Взагалі кажучи, області існування елементарних фігур є необхідними умовами існування даних фігур, складовими частинами яких вони є.

Необхідних умов для дослідження геометричної задачі треба взяти стільки, щоб, разом узяті, вони були достатніми для існування фігури. Крім того, вони повинні бути незалежними, тобто такими, серед яких ніякі відомі не повинні виражатися через дані величини.

Отже, в основу дослідження геометричних задач з параметричними даними можна покласти ідею знаходження необхідних і достатніх умов існування елементарних геометричних фігур. Кожна умова описується не менш як одним параметром, тому загальна кількість параметрів, за допомогою яких можна визначити область існування геометричної фігури, дорівнює кількості параметрів, якими задано елементарну фігуру.

Умова незалежності параметричних даних, серед яких має бути принаймні одна лінійна величина, є суттєвою, бо істотно впливає на кількість розв'язків задачі.

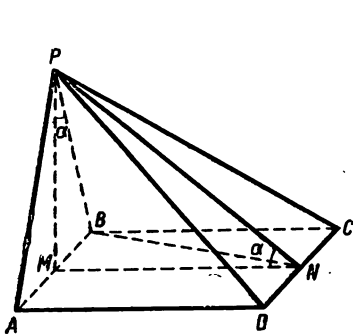
Задача 42. Основою піраміди $PABCD$ є квадрат із стороною a . Бічна грань PAB перпендикулярна до площини основи, а протилежна їй грань утворює з площиною основи кут α . Ребра PA та PB нахилені до площини основи під кутом $90^\circ - \alpha$. Обчисліть суму площ граней PAD та PDC , якщо $a = 18,7$ дм, $\alpha = 63^\circ 20'$.

Розв'язання. Позначимо $\angle PBA = \angle PAB = 90^\circ - \alpha = \beta$ (мал. 28). Покажемо, що параметри α та β залежні.

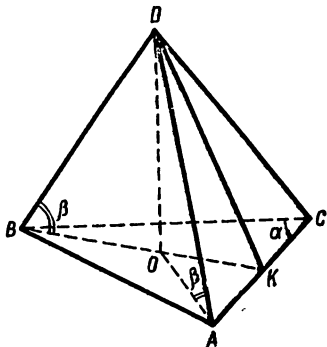
Розглядаючи прямокутні трикутники PAM та PNM , маємо відповідно: $PM = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, $PM = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Прирівнюючи праві частини цих рівностей, матимемо: $\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \alpha = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$, звідси $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ або $\alpha \approx 35^\circ 15'$.

При даних числових значеннях параметрів задача не має розв'язку, бо дане в умові задачі значення не належить області існування піраміди (дослідження задачі див. розділ III, § 4).



Мал. 28



Мал. 29

Як було встановлено, вихідні (початкові) умови повинні бути необхідними і достатніми для існування даної фігури. Їх можна виразити безпосередньо через дані параметри або за допомогою допоміжних (невідомих) параметрів.

Дослідження геометричних задач допускає два принципово різних підходи вибору методів доведення достатності знайдених необхідних умов існування геометричної фігури: а) з використанням вихідних умов; б) з використанням вивідних умов.

Розглянемо їх на прикладах:

Задача 43. Основа тетраедра — рівнобедрений трикутник, у якого довжини бічних сторін дорівнюють b , а величини кутів при основі α . Бічні ребра утворюють з площиною основи кут β . Знайдіть область існування тетраедра.

Розв'язання. За умовою задачі (мал. 29): $b > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $OB < BK$. (1).

Ці умови не лише необхідні, а й достатні для існування піраміди. Справді, якщо $b > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, існує основа піраміди, а коли $0 < OB < BK$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$, існує прямокутний трикутник DBO , тобто існує піраміда $DABC$. Підставляючи $OB = \frac{b}{2 \sin \alpha}$, $BK' = b \times \sin \alpha$ в (1), матимемо:

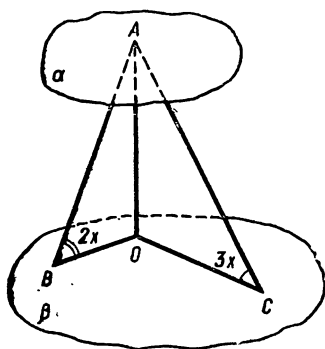
$$\frac{b}{2 \sin \alpha} < b \cdot \sin \alpha.$$

Розв'язавши систему нерівностей і врахувавши обмеження на параметри за умовою задачі, дістанемо: $b > 0$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Знайдені умови еквівалентні вихідним умовам, тому вони визначають область існування піраміди.

Як бачимо, використання вихідних умов дало можливість порівняно легко довести достатність знайдених необхідних умов існування піраміди.

Пропонуємо самостійно розглянути випадки, коли $\triangle ABC$ — прямокутний або тупокутний.



Мал. 30

Задача 44. Відношення довжин двох відрізків, що лежать між паралельними площинами, дорівнює k , а кути, які кожен з цих відрізків утворює з однією з площин, відносяться відповідно, як $2 : 3$. Знайдіть ці кути.

Розв'язання. Припустимо, що існує фігура, яка задовольняє умову задачі. Тоді: $\angle B = 2x$, $\angle C = 3x$, $AB : AC = k > 0$ (мал. 30). Оскільки B, C — кути прямих з площиною, то:

$$\begin{cases} 0^\circ < 2x \leq 90^\circ, \\ 0^\circ < 3x \leq 90^\circ. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, матимемо: $0^\circ < x \leq 30^\circ$. (1). Через те що $AO = AB \cdot \sin 2x$, $AO = AC \cdot \sin 3x$, то

$$AB \cdot \sin 2x = AC \cdot \sin 3x \text{ або } k \cdot \sin 2x = \sin 3x.$$

Заміняючи $\sin 3x$ через $3 \sin x - 4 \sin^3 x$, матимемо:

$$2k \cdot \cos x = 3 - 4 \sin^2 x.$$

Розв'язавши рівняння, матимемо:

$$\cos x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{4}. \quad (2)$$

Але $k - \sqrt{k^2 + 4} < 0$, тому

$$\cos x = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{4}. \quad (3)$$

Враховуючи (1), матимемо:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{4} < 1. \quad (4)$$

Розв'язавши систему нерівностей, отримаємо:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \leq k < \frac{3}{2}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \angle B &= 2 \arccos \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{4}, \\ \angle C &= 3 \arccos \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{4}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким чином, якщо існує описана в умові задачі геометрична фігура, то її кути виражаються співвідношеннями (5), причому $\frac{2}{\sqrt{3}} \leq k < \frac{3}{2}$.

Доведемо, що й навпаки: якщо $\frac{2}{\sqrt{3}} \leq k < \frac{3}{2}$, то співвідношення (5) виражають кути деяких прямокутних трикутників, причому ці трикутники задовольняють умову задачі. Насамперед з того, що $\frac{2}{\sqrt{3}} \leq k < \frac{3}{2}$, випливає

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{k^2 + 4} < \frac{5}{2} \text{ або } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{4} < 1.$$

Тоді: $0 < \arccos \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{4} \leq 30^\circ$, тому $0^\circ < \angle B \leq 60^\circ$, $0^\circ < \angle C \leq 90^\circ$, тобто існують прямокутні трикутники із спільним катетом AO та кутами, величини яких виражаються співвідношеннями (5).

Доведемо далі, що ці трикутники задовольняють умову задачі.

Очевидно, що $\angle B : \angle C = 2 : 3$. Покажемо, що $AB : AC = k$.

Маємо:

$$AB = \frac{AO}{\sin 2x}, \quad AC = \frac{AO}{\sin 3x},$$

ввідси

$$AB : AC = \sin 3x : \sin 2x$$

або

$$\begin{aligned} AB : AC &= (3 \sin x - 4 \sin^3 x) : 2 \sin x \cdot \cos x = \\ &= (3 - 4 \cdot (1 - \cos^2 x)) : 2 \cos x = (-1 + 4 \cos^2 x) : 2 \cos x. \end{aligned}$$

Підставивши $\cos x = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{4}$, дістанемо:

$$AB : AC = k.$$

Цим показано, що знайдені необхідні умови є достатніми для існування геометричної фігури, описаної в умові задачі.

Порівнюючи використані для дослідження задач методи, бачимо, що у другому з них доведення достатності знайдених необхідних умов існування геометричної фігури вимагає більш громіздких аналітичних викладок, ніж у першому. Це не випадково. Справа в тому, що в першому з методів доведення проводиться «згорнутими» умовами, а в другому — умовами, вираженими через дані параметри.

З означення допоміжної геометричної фігури випливає, що область її існування є областю існування даної фігури. В зв'язку з цим доцільно розглянути різні випадки знаходження області існування даної геометричної фігури залежно від даних умовою задачі параметрів.

У випадку, коли область існування допоміжної фігури визначається безпосередньо через дані умовою задачі параметри, серед яких принаймні один лінійний, для знаходження області існування геометричної фігури досить встановити обмеження даних параметрів безпосередньо за умовою задачі.

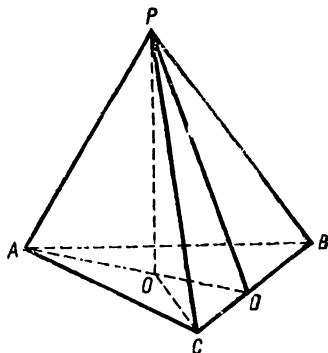
Задача 45. Довжина висоти правильної трикутної піраміди дорівнює H , а кут нахилу бічної грані до площини основи дорівнює α . Знайдіть область існування піраміди.

Розв'язання. За умовою задачі (мал. 31) маємо:

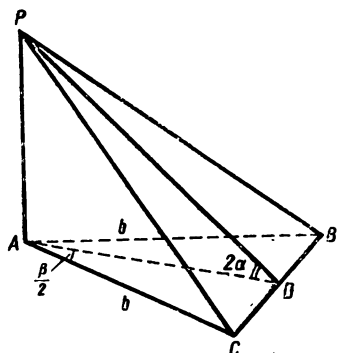
$$H > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad (1)$$

Як допоміжну фігуру виберемо прямокутний $\triangle POD$. При умовах (1) він існує (див. додаток 1).

Доведемо, що з існування його випливає існування піраміди $PABC$. Справді, якщо $H > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, існує $OD > 0$, тобто існує $\triangle ABC$, що є основою піраміди. Якщо $H > 0$, існує точка P — четверта вершина піраміди, отже, існує піраміда $PABC$. Умови (1) є областю її існування.



Мал. 31



Мал. 32

Якщо область існування даної фігури не визначається безпосередньо з області існування допоміжної фігури через дані параметри, то її виражають через дані та допоміжні параметри. В області існування допоміжної фігури лінійні елементи визначаються за допомогою елементарних фігур, існування яких для даних параметрів можна довести. Довівши достатність знайдених так необхідних умов існування фігури, виражають далі допоміжні параметри через дані, використовуючи рівносильні перетворення рівнянь, нерівностей та їх систем.

Задача 46. Основою тетраедра є рівнобедрений трикутник, рівні сторони якого мають довжину b . Бічні грані тетраедра, яким належать ці сторони, перпендикулярні до площини основи і утворюють між собою кут β . Кут між третьою бічною гранню і площиною основи дорівнює 2α . Знайдіть область існування тетраедра.

Розв'язання. За умовою задачі (мал. 32) маємо:

$$b > 0, 0^\circ < \beta < 180^\circ, 0^\circ < \alpha < 45^\circ, AP > 0. \quad (1)$$

Як допоміжну фігуру виділимо тетраедр $PABD$. Він існує при умовах (1). Справді, якщо $b > 0$, $0^\circ < \frac{\beta}{2} < 90^\circ$, існує прямокутний трикутник ABD (додаток 1),

тобто існує трикутник ABC — основа піраміди. З існування трикутника ABD випливає існування $AD > 0$.

Умови $AD > 0$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ є необхідними і достатніми для існування трикутника PAD (чому?), отже, існує точка P — четверта вершина тетраедра. Область існування тетраедра $PABD$:

$$0 < BD < AB, AP > 0. \quad (2)$$

Підставляючи $BD = b \cdot \sin \frac{\beta}{2}$, $AP = b \cdot \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} 2\alpha$ в умови (2), дістанемо:

$$\begin{cases} 0 < b \cdot \sin \frac{\beta}{2} < b, \\ b \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha > 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему нерівностей, матимемо:

$$b > 0, 0^\circ < \beta < 180^\circ, 0^\circ < \alpha < 45^\circ.$$

Це і є область існування даного тетраедра.

Зазначимо, що область існування тетраедра $PABD$ можна виразити інакше, наприклад: $AD > 0$, $BD > 0$, $AP > 0$ або $0 < BD < AB < PB$ тощо.

Якщо в області існування допоміжної фігури лінійні елементи не визначаються за допомогою елементарних фігур, які існують при заданих параметрах, то щоб знайти вихідні умови, які є необхідними і достатніми для існування допоміжної фігури, треба до обмежень, накладених на параметри за умовою задачі, додати умови, що визначають область існування допоміжної фігури при даних та допоміжних параметрах. Достатність знайдених умов треба обов'язково довести. Виразивши у вихідних умовах допоміжні параметри через дані параметри і виконавши еквівалентні перетворення вихідних умов, дістанемо область існування геометричної фігури при даних параметрах.

Задача 47. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a , кут між суміжними бічними гранями дорівнює α . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

Д о с л і д ж е н н я. За умовою задачі :

$$a > 0, 0^\circ < \alpha < 180^\circ. \quad (1)$$

Позначимо $\angle PCO = x$ (мал. 33).

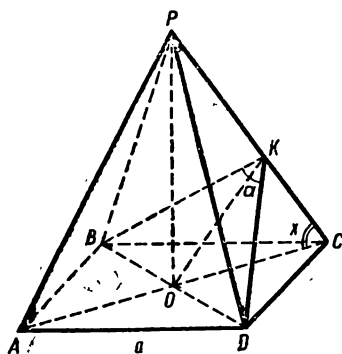
Як допоміжну фігуру виберемо тетраедр $POCD$. Вихідні умови:

$$a > 0, PO > 0. \quad (2)$$

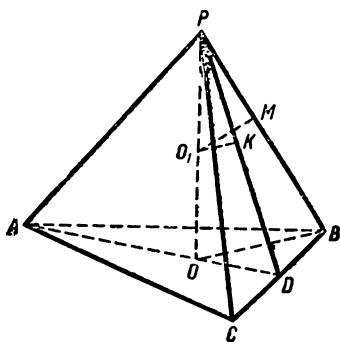
Справді, при умовах (2) існує рівнобедрений прямокутний трикутник OCD та висота PO тетраедра, тому останній існує, отже, існує і піраміда $PABCD$.

Замінімо умови (2) еквівалентними умовами:

$$a > 0, 0^\circ < x < 90^\circ. \quad (3)$$



Мал. 33



Мал. 34

Справді, умови (3) визначають тетраедр $POCD$, бо, коли $a > 0$, існує рівнобедрений прямокутний трикутник OCD , а коли $a > 0, 0^\circ < x < 90^\circ$, існує прямокутний $\triangle POC$, тому існує тетраедр $POCD$.

З прямокутних трикутників OKD та OKC знаходимо:

$$\sin x = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

Підставляючи (4) в (3), отримаємо: $a > 0, 0 < \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} < 1$, звідси, з урахуванням умови (1), маємо: $a > 0, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Зазначимо, що за вихідні умови також можна було взяти, наприклад, такі: $PO > 0, 0^\circ < x < 90^\circ$ або $OC > 0, 0^\circ < x < 90^\circ$ і т. д.

Якщо вдається виразити область існування допоміжної фігури через допоміжні параметри, для яких вона раніше була знайдена, то в ній, використовуючи теореми 4, 5, виражають вихідні умови через дані параметри.

Задача 48 (ж. «Математика в школі», 1975, № 1, с. 73). У правильній трикутній піраміді із середини ви-

соти проведено перпендикуляри до бічної грані і до бічного ребра, довжини яких відповідно дорівнюють p та q . Знайдіть область існування піраміди.

Р о з в' я з а н н я. За умовою задачі: $p > 0, q > 0$. Позначимо (мал. 34): $BC = a, \angle PDO = \angle PO_1K = \alpha, \angle PBO = \angle PO_1M = \beta$, де $0^\circ < \alpha < 90^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Використаємо раніше встановлену область існування правильної трикутної піраміди (додаток 1):

$$a > 0, 30^\circ < \angle PBD < 90^\circ. \quad (1)$$

Виразимо a та $\angle PBD$ через параметри p, q .

З прямокутних трикутників PO_1K та PO_1M маємо:

$$p = PO_1 \cdot \cos \alpha, \quad q = PO_1 \cos \beta \quad \text{або} \quad \frac{p}{q} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (2)$$

З прямокутних трикутників POD та POB виразимо β через α :

$$\begin{cases} PO = OB \cdot \operatorname{tg} \beta, \\ PO = OD \cdot \operatorname{tg} \alpha, \end{cases}$$

звідси $\operatorname{tg} \alpha = 2 \cdot \operatorname{tg} \beta$. Оскільки $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, то

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta}}. \quad (3)$$

Підставивши (3) в (2), дістанемо:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\cos \beta \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta}}.$$

Розв'язавши це рівняння відносно $\cos \beta$, матимемо:

$$\cos \beta = \frac{1}{p \sqrt{3}} \sqrt{4p^2 - q^2}. \quad (4)$$

Помічаючи, що $\cos \angle PBD = \cos \beta \cdot \cos 30^\circ$, отримаємо:

$$\cos \angle PBD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{p \sqrt{3}} \sqrt{4p^2 - q^2},$$

звідси

$$\angle PBD = \arccos \frac{1}{2p} \sqrt{4p^2 - q^2}. \quad (5)$$

Послідовно знайдемо:

$$PO = 2 \cdot PO_1 = \frac{2q}{\cos \beta}, \quad PO = OB \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \beta,$$

отже,

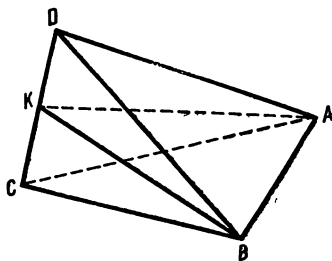
$$a = \frac{2q\sqrt{3}}{\sin \beta} = \frac{6pq}{\sqrt{q^2 - p^2}}. \quad (6)$$

Підставивши (5), (6) в (1) і розв'язавши цю систему нерівностей, матимемо: $0 < p < q < 2p$.

§ 3. ВИКОРИСТАННЯ ВИВІДНИХ УМОВ

Якщо в ході дослідження задачі не було доведено достатності вихідних умов існування геометричної фігури, то це треба зробити для вивідних обмежень на параметри.

Зрозуміло, результат дослідження істотно залежатиме від того, чи були достатніми знайдені вихідні умови, в противному разі такими самими (лише необхідними) будуть вивідні умови.



Мал. 35

Приклад дослідження задачі цим методом уже був розглянутий (задача 44). Проте можна запропонувати інше (більш компактне) оформлення процесу доведення достатності вивідних умов. Пояснимо сказане на прикладі.

Задано на прикладі.

Задача 49. Знайдіть необхідні і достатні умови існування тетраедра $ABCD$, у якого $AB = CD = a$, $AC = AD = BC = BD = b$, $\angle (AB, CD) = \varphi$.

Розв'язання.

Необхідність. Припустимо, що тетраедр існує (мал. 35). Тоді $a > 0$, $b > 0$, $0^\circ < \varphi < 180^\circ$.

Якщо $KC = KD$, то в рівнобедрених трикутниках DBC та DAC відповідно BK та AK — висоти, тому за ознакою перпендикулярності прямої і площини $DC \perp \text{пл. } AKB$, отже, $DC \perp AB$, і $\varphi = 90^\circ$.

Крім того, $|BK - AK| < AB < BK + AK$ або

$$0 < a < 2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}},$$

звідси $0 < a < b\sqrt{2}$.

Таким чином,

$$0 < a < b\sqrt{2}, \quad \varphi = 90^\circ. \quad (1)$$

Достатність. Доведемо, що при умовах (1) існує вазначений в умові задачі тетраедр.

Справді, з того, що $0 < a < b\sqrt{2}$ випливає $0 < a < 2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, тобто існує трикутник ABK , у якого $AB = a$, $AK = BK = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Якщо $a > 0$, існує $CD \perp$ пл. ABK , тобто існують точки C та D , отже, існує тетраедр $DABC$. Доведемо, що він задовольняє умову задачі.

Для цього знайдемо: $BC = BD = AC = AD = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)} = b$. Отже, умови (1) є необхідними і достатніми для існування тетраедра $ABCD$.

§ 4. ВИКОРИСТАННЯ ФОРМУЛИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

У геометричних задачах на обчислення з параметричними даними формулу розв'язку задачі знаходять з припущення, що геометрична фігура, про яку йдеться в умові задачі, існує. У цьому випадку вона дає відповідь на запитання задачі.

Суть названого методу дослідження геометричної задачі полягає в тому, що, використовуючи вихідні умови (які повинні бути необхідними і достатніми для існування заданої фігури), записують обмеження на параметри безпосередньо з умови задачі і на невідомі величини, що відіграють роль допоміжних.

Якщо під час дослідження задачі, крім обмежень на параметри за її умовою, єдиним суттєвим є обмеження на знайдену величину, виражену формулою, то дослідження можна провести, використавши лише формулу.

Задача 50. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з гіпотенузою c та більшим гострим кутом α . Діагоналі двох більших бічних граней, проведені з однієї вершини нижньої основи, утворюють кут β . Знайдіть об'єм призми.

Розв'язання. Об'єм призми $ABCA_1B_1C_1$ (мал. 36) обчислимо за формулою:

$$V = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot CC_1. \quad (1)$$

З прямокутного трикутника ABC :

$$AC = c \cdot \cos \alpha, \quad (2)$$

$$BC = c \cdot \sin \alpha. \quad (3)$$

Оскільки $A_1C_1 \perp C_1B_1$, $A_1C_1 \perp CC_1$, то за ознакою перпендикулярності прямої і площини $A_1C_1 \perp$ пл. CC_1B_1 , тому за означенням перпендикуляра до площини $A_1C_1 \perp C_1B$, тобто $\angle A_1C_1B = 90^\circ$.

З прямокутного трикутника A_1C_1B :

$$C_1B = \frac{A_1C_1}{\operatorname{tg} \angle A_1BC_1}, \quad C_1B = \frac{c \cdot \cos \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

З прямокутного трикутника CC_1B :

$$\begin{aligned} CC_1 &= \sqrt{C_1B^2 - CB^2}, \quad CC_1 = \sqrt{\frac{c^2 \cdot \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \beta} - c^2 \cdot \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{c}{\sin \beta} \sqrt{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{c}{\sin \beta} \sqrt{(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)} = \\ &= \frac{c}{\sin \beta} \sqrt{\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Підставимо (2), (3), (4) в (1):

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \cos \alpha \cdot c \cdot \sin \alpha \cdot \frac{c}{\sin \beta} \times \\ &\times \sqrt{\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)} = \frac{c^3 \cdot \sin 2\alpha}{4 \sin \beta} \times \\ &\times \sqrt{\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Дослідження. За умовою задачі (мал. 36) знаходимо:

$$\begin{aligned} c > 0, \quad 45^\circ < \alpha < 90^\circ, \\ 0^\circ < \beta < 90^\circ \text{ та } V > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

З цих умов дістанемо:

$$\cos(\alpha + \beta) > 0. \quad (6)$$

Але $45^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$, тому, враховуючи (6), маємо:

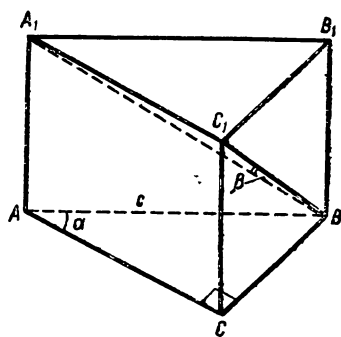
$$45^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ. \quad (7)$$

Знайдені умови

$$c > 0, \quad 45^\circ < \alpha < 90^\circ, \quad 45^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ \quad (8)$$

не лише необхідні, а й достатні для існування даної призми.

Справді, якщо $c > 0$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$, існує прямокутний $\triangle ABC$, тобто існує $AC > 0$. Крім того, з нерів-

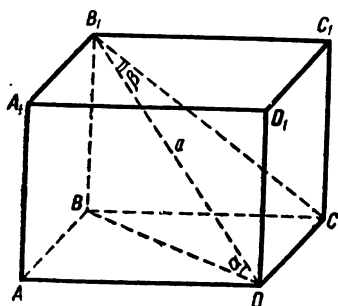


Мал. 36

ності $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ впливає, що $0^\circ < 90^\circ - \alpha < 45^\circ$. Це означає, що $\angle B < \angle A$.

З умов $A_1C_1 = AC > 0$, $45^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ$ впливає існування прямокутного трикутника A_1BC_1 , отже, існує призма $ABCA_1B_1C_1$. Тому знайдені умови (8) визначають область існування призми.

Зауважимо, що коли в умові задачі для даної геометричної фігури задано деякі співвідношення між її елементами, то їх слід враховувати під час дослідження задачі. Так, наприклад, вказівку задачі 50, що α — більший з гострих кутів прямокутного трикутника, було враховано при знаходженні області існування призми.



Мал. 37

Якщо шукана величина не є елементом описаної в умові задачі геометричної фігури (наприклад, площа поверхні, об'єм), то під час доведення достатності знайдених вихідних (необхідних) умов існування геометричної фігури доцільно замінити їх еквівалентними умовами, вираженими через шукану величину та задані параметри.

Задача 51 ([9], § 21, № 10). Чому дорівнює об'єм прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого a утворює з площиною основи кут α , а з бічною гранню — кут β ?

Розв'язання. Об'єм паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (мал. 37) знайдемо за формулою:

$$V = BB_1 \cdot BC \cdot CD. \quad (1)$$

Оскільки $B_1B \perp$ пл. ABC , то за означенням перпендикуляра до площини $B_1B \perp BD$.

З прямокутного трикутника B_1BD :

$$BB_1 = a \cdot \sin \alpha, \quad (2)$$

$$BD = a \cdot \cos \alpha. \quad (3)$$

Через те, що BC — проекція B_1C на площину ABC та $BC \perp CD$, то за теоремою про три перпендикуляри $B_1C \perp CD$.

З прямокутного трикутника B_1CD :

$$CD = a \cdot \sin \beta. \quad (4)$$

З прямокутного трикутника BCD :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{BD^2 - CD^2}, \quad BC = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \alpha - a^2 \cdot \sin^2 \beta} = \\ &= a \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} = \\ &= a \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) - \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)} = \\ &= a \sqrt{\frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 2\beta)} = a \sqrt{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Підставимо (2), (4), (5) в (1):

$$\begin{aligned} V &= a \cdot \sin \alpha \cdot a \sqrt{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)} \cdot a \sin \beta = \\ &= a^3 \sin \alpha \cdot \sin \beta \sqrt{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Д о с л і д ж е н н я. За умовою задачі (мал. 37) знайдемо:

$$a > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ \text{ та } V > 0. \quad (6)$$

Підставляючи в (6) вираз для об'єму, матимемо:

$$\cos (\alpha - \beta) \cdot \cos (\alpha + \beta) > 0.$$

Але $\cos (\alpha - \beta) > 0$, тому

$$\cos (\alpha + \beta) > 0. \quad (7)$$

Знайшовши, що $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$, з нерівності (7) дістанемо: $0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ$.

Остаточно маємо:

$$a > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ, 0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ. \quad (8)$$

Доведемо, що умови (8) є достатніми для існування паралелепіпеда. Справді, якщо $a > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ$, існують прямокутні трикутники B_1BD та B_1CD , тоді існують відрізки $BD > 0, BC > 0$. Але $0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ$, тоді $BD = a \cdot \cos \alpha = a \cdot \sin (90^\circ - \alpha) > a \cdot \sin \beta = CD$ (тобто $BD > CD$), тому існує прямокутний трикутник BDC . Тобто, існує тетраедр B_1BDC , отже, існує і прямокутний паралелепіпед.

Таким чином, умови (8) визначають область існування даного паралелепіпеда.

Зазначимо, що замість умов (6) можна скористатися як вихідними, наприклад, такими умовами: $B_1B > 0$, $BC > 0$, $V > 0$.

Тоді, замінивши їх еквівалентними умовами $B_1B > 0$, $BC > 0$, $BA > 0$, які є необхідними і достатніми для існування даного паралелепіпеда (доведіть це), прийдемо до умов (8).

Розглянуті методи дослідження геометричних задач можуть бути основою для вивчення і застосування їх у процесі навчання геометрії в школі.

При цьому слід пам'ятати, що в процесі вивчення програмних питань учитель має організувати паралельне повторення відповідного матеріалу курсу алгебри з тим, щоб при аналітичному способі встановлення необхідних і достатніх умов існування геометричних фігур учні змогли розв'язати одержувані нерівності та їх системи. Радимо звернути увагу на рівносильність перетворень алгебраїчних виразів та способи розв'язування нерівностей та їх систем, це підсилює внутріпредметні зв'язки у вивченні математики.

Розділ III.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ ДОСЛІДЖЕННЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

§ 1. ПРО НЕОБХІДНІСТЬ ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

У процесі вивчення систематичного курсу геометрії в школі виникає потреба показати учням необхідність дослідження задач на прикладах їх розв'язування у випадках, коли задачі не мають розв'язку. Програма шкільного курсу геометрії дає учителю такі можливості. Поняття дослідження задачі є одним з основних у процесі їх розв'язування. Знайдена в результаті формальних викладок формула (або її числове вираження) далеко не завжди може бути відповіддю задачі на обчислення.

Щоб виховати в учнів потребу у дослідженні геометричних задач, корисно запропонувати їм для розв'язування таку задачу, розв'язування якої без дослідження не можливе.

Оскільки шкільні задачі традиційно побудовано так, що описані їх умовами геометричні фігури, як правило, існують, учні не помічають внутрішньої логіки у зв'язках між елементами даних геометричних фігур. Тому, як показує досвід, корисно формулювати умови таких задач у формі: «Чи існує...?», «Чи можна ...?», «При яких умовах ...?» та ін. Це привчає учнів до критичного осмислення задачних ситуацій, спонукає їх до встановлення умов існування розв'язків задач.

Наприклад, задачу 52 ([9], § 5, № 30) сформульовано так: «Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них». Якщо переформулювати її, наприклад, так: «Чи існує трикутник зі сторонами 3 см, 5 см і медіаною 3,5 см, проведеною до меншої сторони?», то учні будуть поставлені перед необхідністю доводити існування описаної в умові задачі геометричної фігури.

Вихованню необхідності досліджувати геометричні задачі сприяє розгляд таких задач, в яких дослідження є складовою частиною розв'язування. Обмежимося кількома прикладами.

Задача 53. Довжини сторін паралелограма 4 см і 2 см, кут між його діагоналями дорівнює 60° . Обчисліть меншу висоту паралелограма.

Розв'язання. Нехай у паралелограмі $ABCD$ маємо: $AD = 4$, $CD = 2$, $\angle COD = 60^\circ$, де O — точка перетину діагоналей AC і BD . Обчислимо:

$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\triangle COD} = 2 \cdot OD \cdot OC \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \cdot OD \cdot OC$.
За теоремою косинусів: $2^2 = OD^2 + OC^2 - 2 \cdot OD \cdot OC \times \times \cos 60^\circ$. Але $OD^2 + OC^2 = \frac{1}{4} \cdot (AC^2 + BD^2) = \frac{1}{2} (4^2 + 2^2) = 10$, тоді $OD \cdot OC = 6$, отже, $S_{ABCD} = 6\sqrt{3}$.

Площу паралелограма запишемо інакше: $S_{ABCD} = AD \cdot BK$, де $BK \perp AD$.

Врахувавши знайдену величину площі, матимемо: $BK = 1,5\sqrt{3}$.

Розв'язування задачі не викликає сумніву, але воно неправильне. Задача не має розв'язку, бо паралелограм, про який ідеться в ній, при даних значеннях величин не існує. Справді, маємо суперечність: катет прямокутного трикутника більший за його гіпотенузу, чого не може бути.

Як бачимо, без дослідження задачі неможливо встановити причину появи помилки у відповіді, як треба змінити умову задачі, щоб вона мала розв'язок.

Задача 54 ([9], § 19, № 68). У правильній чотирикутній піраміді знайдіть сторону основи, якщо бічне ребро 5 см, а повна поверхня 16 см².

Розв'язання. Позначивши сторону основи піраміди через $2x$, а апофему — через y , матимемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy = 16, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, матимемо:

$$\begin{aligned} xy &= 4 - x^2, \\ x^2 y^2 &= (4 - x^2)^2. \end{aligned}$$

Але

$$y^2 = 25 - x^2,$$

тому

$$x^2 (25 - x^2) = (4 - x^2)^2,$$

звідки $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тоді $y_1 = 3$, $y_2 = \frac{7}{\sqrt{2}}$.

Умови існування даної піраміди збігаються з умовами існування прямокутного трикутника, одним з катетів якого є радіус кола, вписаного в основу цієї піраміди, а гіпотенузою — її апофема. Через це необхідні і достатні умови існування піраміди виражаються тут системою нерівностей: $0 < x < y$ (див. додаток 1).

Відповіддю задачі є лише $2x = \sqrt{2}$.

Аналогічного дослідження потребує також задача ([9], § 19, № 67).

Якщо розглядати задачі, в яких множину значень параметрів задано так, що вона є підмножиною області існування геометричної фігури, то без дослідження такі задачі розв'язати не можна.

Задача 55. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює l і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить всередині піраміди через її вершину паралельно стороні основи і утворює кут β з площиною основи, причому відомо, що $0^\circ < \alpha < \arctan(2 \tan \alpha) < \beta < 90^\circ$.

Перед розв'язуванням задачі потрібно:

а) знайти область існування піраміди і переконатися, що дані значення кутів α , β їй належать;

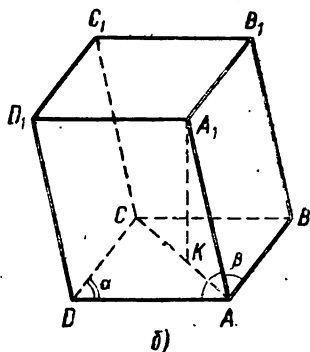
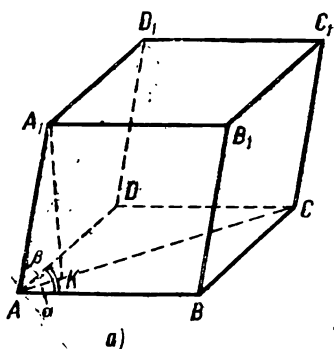
б) побудувати малюнок до задачі, врахувавши дані залежності між параметрами α та β .

Ігнорування цих умов тягтиме за собою помилку, пов'язану з обчисленням величин елементів неіснуючої геометричної фігури або з використанням малюнка, що не відповідає умові.

Під час розв'язування геометричних задач можуть зустрітися випадки, коли різними значеннями параметрів, узятим з області існування геометричної фігури, відповідають різні розв'язки (відповіді) задачі. В такому разі формула, знайдена для одних значень параметрів, може виявитися непридатною для інших значень параметрів (узятих з області існування даної фігури). Щоб забезпечити повноту розв'язування такої задачі, треба в кожному конкретному випадку окремо розглянути взаємне розміщення елементів геометричної фігури.

Задача 56. Основою похилого паралелепіпеда є ромб $ABCD$ із стороною a і гострим кутом α . Ребро $AA_1 = b$ і утворює з ребрами AB та AD кути, кожний з яких дорівнює β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання. Умову задачі задовольняють два види паралелепіпедів (мал. 38), тому відповідно матимемо:



Мал. 38

$$V = 2a^2b \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\beta - \frac{\alpha}{2} \right)},$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \beta < \pi - \frac{\alpha}{2},$$

$$V = 2a^2b \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{-\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)},$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

У процесі розв'язування геометричних задач важливим є обґрунтування алгебраїчних перетворень, які виконують під час обчислення шуканої величини. Щоб забезпечити їх рівносильність, треба спочатку знайти ту множину значень параметрів, при яких існує дана геометрична фігура. Тоді в процесі розв'язування задачі в загальному вигляді (для задач на обчислення) знаходження проміжних результатів буде вмотивованим і зрозумілим.

Задача 57. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, у якого бічні сторони дорівнюють b , а кути при основі α . Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β . Обчисліть площу перерізу, проведеного через висоту піраміди і вершину кута α .

Розв'язання. Нехай $PABC$ — зображення даної піраміди (мал. 39), у якої $AB = AC = b$, $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$. Побудуємо $PO \perp$ пл. ABC , тоді $\angle PAO = \angle PBO = \angle PCO = \beta$.

Площу перерізу знайдемо за формулою:

$$S_{\triangle PDB} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot PO. \quad (1)$$

З трикутника DBC за теоремою синусів дістанемо:

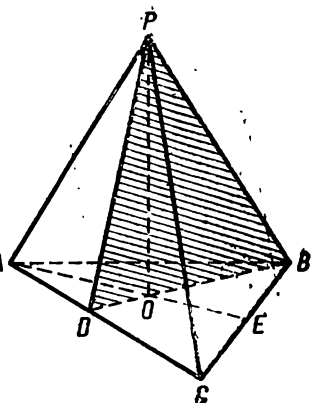
$$DB = \frac{BC \cdot \sin \angle DCB}{\sin \angle BDC}. \quad (2)$$

Знайдемо

$$\begin{aligned} \angle BDC &= \angle DAB + \angle ABD = \\ &= (180^\circ - 2\alpha) + \\ &+ (90^\circ - \alpha) = 270^\circ - 3\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Підставивши (3) в (2), матимемо:

$$\begin{aligned} DB &= \frac{2b \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\sin (270^\circ - 3\alpha)} = \\ &= - \frac{2b \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos 3\alpha}. \end{aligned} \quad (4)$$



Мал. 39

З прямокутного трикутника POB :

$$PO = OB \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (5)$$

З трикутника ABC за теоремою синусів:

$$OB = \frac{b}{2 \cdot \sin \alpha}. \quad (6)$$

Підставимо (6) в (5):

$$PO = \frac{b \cdot \operatorname{tg} \beta}{2 \cdot \sin \alpha}. \quad (7)$$

Підставивши (4), (7) в (1), матимемо:

$$S_{\triangle PDB} = - \frac{b^2 \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{2 \cdot \cos 3\alpha}.$$

Цілком зрозуміло, що, записавши рівність (4), маємо знати множину значень параметрів α , β , інакше вираз для DB (як і подальші перетворення) набуває неприродного смислу.

Таким чином, дослідження задачі вимагає від учня належної уваги, бо можна формально знайти результат, який не має нічого спільного із задачею.

§ 2. МЕТОДИКА ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ «ГЕОМЕТРИЧНА ФІГУРА ІСНУЄ» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Математика користується різними способами доведення існування математичних об'єктів. Залежно від того, що є основою цих способів, вони діляться на: ефективні і аксіоматичні. Під *ефективними* розуміють такі доведення, які забезпечують не лише доведення того факту, що об'єкт, про який ідеться в математичному твердженні, існує, але і вказують його фактичну побудову. Використовуючи *аксіоматичні* доведення, обмежуються доведенням існування математичного об'єкта, не турбуючись про шляхи його конструктивної побудови.

Ефективні доведення можливі в тому випадку, коли побудови математичних об'єктів, існування яких треба довести, принципово здійсненні. Тобто, той, хто розв'язує задачу, абстрагується від реальних можливостей побудови об'єкта і припускає абстрактну можливість його конструктивної побудови.

Іншими словами, абстрагуючись від фактичної здійсненності побудов, як системи найпростіших задач на побудову, ми повинні враховувати різницю між здійсненністю побудови об'єкта, яка вимагає для цього *скінченного* числа елементарних побудов, і об'єкта, побудова якого вимагає нескінченного числа таких кроків. В останньому випадку доводиться говорити про нескінченне, як про нездійсненне.

Побудова як система елементарних операцій може виступати лише як ілюстрація для окремих випадків задачі з параметричними даними (бо принципово неможливо виконати побудови для нескінченної множини систем значень параметрів задачі), причому можливість побудови повинна бути доведена, інакше вона виявиться невизначеною. Так, наприклад, побудувати правильний трикутник із стороною $a = \sqrt[3]{3}$ за допомогою циркуля і лінійки не можна, хоча можна довести, що він існує.

Аксіоматичні доведення існування математичних об'єктів передбачають додержання принципу *несуперечливості*. Це означає, що поняття про об'єкт має право на існування, якщо його означення не містить суперечності ні в собі, ні в раніше введених математичних твердженнях.

Дедуктивний характер доведень тверджень вимагає побудови їх на основі первісних тверджень (означень, аксіом) із залученням властивостей логічного виведення

(дедукції). Це дає можливість виділити аксіоматичний метод як один з основних методів побудови математичних (і не лише їх) теорій. Як спосіб виведення формальних теорій обґрунтування математичних тверджень, він дав можливість виключити елементи інтуїції та очевидності у доведеннях, забезпечивши тим самим належний рівень строгості доведень математичних тверджень.

Завдяки цьому доцільно означити поняття «існує», розглядаючи аксіоматичні побудови (тобто такі, які виконуються на основі аксіом і не залежать від інструментів побудови).

Система аксіом О. В. Погорелова, покладена в основу навчального посібника [9], дає змогу порівняно легко обґрунтовувати аксіоматичні побудови. Перевага її перед іншими системами аксіом (наприклад, А. М. Колмогорова) полягає в тому, що в ній підсилена роль «метричних» аксіом, що дає можливість широко використовувати її під час доведення математичних тверджень, зокрема для дослідження геометричних задач.

Пропедевтику дослідження геометричних задач слід проводити, як показує досвід, у сьомому класі. Щоб підвести учнів до розуміння понять, які використовуються при дослідженні задач, варто в ході їх розв'язування акцентувати увагу учнів на з'ясуванні умов існування розв'язків.

Вивчаючи тему «Геометричні побудови» (7-й клас, § 5), учням можна запропонувати задачу: «Побудуйте трикутник за сторонами 3 см, 4 см, 8 см». В ході розв'язування з'ясовується, що побудову трикутника виконати не вдається. Щоб встановити причину цього, даємо учням завдання: змінюючи довжину лише однієї із сторін (наприклад, найбільшої), знайти підбором хоч одне числове значення її довжини, при якому шуканий трикутник можна побудувати. Після того, як учні усвідомлять причину появи розв'язку задачі, можна запропонувати їм скласти кілька аналогічних задач на побудову трикутника, які не мають розв'язків, і запитати, як треба змінити числові дані, щоб задача мала розв'язок.

Розв'язуючи задачі на побудову з навчального посібника [9], корисно їх умови формулювати так, щоб під час розв'язування виникало питання про існування розв'язків. Наприклад.

1. (§ 5, № 30). Чи можна побудувати трикутник за сторонами 2 см, 5 см і медіаною 6 см, проведеною до однієї з них?

2. (§ 5, № 32). Чи можна побудувати трикутник із сторонами 6 см, 8 см та медіаною 7 см, проведеною до третьої сторони?

3. (§ 5, № 37). Чи можна побудувати трикутник за сторонами 4 см, 6 см та висотою 5 см, проведеною до третьої сторони?

4. (§ 5, № 39). Чи можна побудувати трикутник за стороною 8 см, висотою 5 см і медіаною 4 см, проведеними до цієї сторони?

5. (§ 5, № 38). Чи можна побудувати трикутник за сторонами 3 см і 5 см та висотою 4 см, проведеною до однієї з них?

Учні переконуються в тому, що ствердна відповідь про існування розв'язків у розглянутих задачах залежить від співвідношень між елементами трикутника. Цінність таких задач полягає в тому, що вони сприяють критичному осмисленню умови задачі, не робити безпідставних висновків про кількість її розв'язків.

Починаючи розв'язувати геометричну задачу, ми не завжди знаємо наперед, чи має вона розв'язки. Через це, розв'язуючи задачі на обчислення та доведення, міркування і розрахунки проводимо, виходячи з припущення, що задача має розв'язки. Тому процес розв'язування задачі (доки не встановлено умов існування розв'язків) носить умовний характер. Як було встановлено раніше, він може бути поданий у вигляді твердження: «якщо розв'язування існує, то повинні виконуватись такі співвідношення...»

Якщо в ході міркувань дістаємо суперечність, то це означає, що задача не має умовного розв'язку. Коли суперечність відсутня, приходимо до висновку: «якщо розв'язок існує, то шукані величини повинні бути такими...»

Щоб підвести учнів до розуміння цих положень, корисно розв'язати з ними задачі, що містять «зайві» дані. При цьому треба пам'ятати, що задачі з зайвими даними бувають двох видів: 1) в яких зайва величина є функцією від інших (основних) величин; 2) в яких зайва величина не зв'язана функціональною залежністю з іншими (основними) величинами.

Наведемо приклади таких задач.

1. Висоти трикутника ABC , проведені з вершин A та C , перетинаються в точці M . Знайдіть $\angle AMC$, якщо

$\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, $\angle MAC = 10^\circ$ (порівняйте з № 46, § 4).

2. З вершини прямого кута трикутника ABC проведено висоту BD . Знайдіть $\angle CBD$, знаючи, що $\angle A = 20^\circ$, $AB = 10$ см (порівняйте з № 41 (1), § 4).

У задачі 1 $\angle MAC$ є зайвою величиною, причому задача має розв'язок, хоч зайва величина залежить від інших даних величин.

У задачі 2 зайвою величиною є довжина AB , яка не залежить від іншої даної величини, причому задача має розв'язок.

Корисно добитися від учнів розуміння того, що в задачах із зайвими елементами необхідно виразити зайві елементи через основні і з'ясувати, чи має розв'язки дана задача з числовими даними. Якщо дані задано за допомогою параметрів, то треба знайти функцію, що зв'яже зайвий параметр з основними.

Задача 58. З вершини тупого кута B трикутника ABC проведено висоту BD . Знайдіть кути трикутників ABD та CBD , знаючи, що $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle BCD = \gamma$ (порівняйте з № 42, § 4).

Якщо прийняти $\angle BCD$ за зайвий параметр, то виявляється, що $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, тобто він зв'язаний залежністю $\gamma = f(\alpha, \beta)$, де f — функція.

Під час розв'язування переозначених задач доцільно поставити учням запитання:

а) Який параметр (числова величина) в задачі зайвий (зайва)?

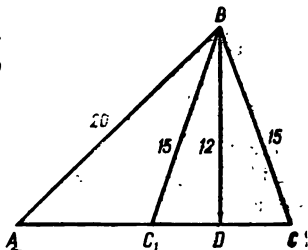
б) Чи залежить він від інших параметрів (числових величин)?

в) Чи має розв'язки дана задача? Чому?

У процесі вивчення питання про кількість розв'язків геометричних задач корисно розв'язувати задачі, в яких не вистачає даних.

Задача 59. Знайдіть периметр трикутника, у якого бічні сторони дорівнюють 15 см і 20 см, а висота, проведена до основи, 12 см (порівняйте з № 32, § 14).

Задача допускає два випадки взаємного розміщення елементів трикутника (мал. 40), що й зумовлює кіль-



Мал. 40

кість розв'язків задачі — їх два, а саме: 42 см (для трикутника ABC_1) і 60 см (для трикутника ABC).

Для самостійної роботи учнів можна запропонувати такі задачі.

1. Побудуйте трикутник за сторонами 6 см і 8 см та висотою 5 см, проведеною до третьої сторони. (2 розв'язки з точністю до розміщення фігур на площині).

2. Побудуйте трикутник за сторонами 6 см і 4 см та кутом 30° , що прилягає до однієї з них. (4 розв'язки в точністю до розміщення фігур на площині).

3. Радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, дорівнює 10 см. Знайдіть площу трикутника, якщо його основа дорівнює 12 см. (108 см^2 ; 12 см^2).

4. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а висота — 6 см. Знайдіть площу трикутника. (24 см^2 або $\frac{48}{\sqrt{7}} \text{ см}^2$).

Під час вивчення ознак рівності трикутників (7-й клас, § 3) доцільно звернути увагу учнів на кількість елементів трикутника, що фігурують у кожній з ознак. Пізніше, в процесі вивчення геометричних побудов (§ 5) наголошуємо, що між умовами, які визначають трикутник (дві сторони і кут між ними, сторона і прилеглі до неї кути, три сторони) і ознаками їх рівності існує тісний зв'язок. Такі трикутники можна побудувати, якщо взяти числові величини, що входять в умови, які визначають трикутник. При цьому пояснюємо, що для задач з параметричними даними треба розрізняти поняття — кількість параметрів, за допомогою яких геометричну фігуру можна задати, і кількість умов, що однозначно визначають геометричну фігуру. Взагалі кажучи, вони не однакові.

Наприклад, трикутник, заданий двома сторонами a , b і кутом γ між ними, визначається трьома елементами, а кількість умов, що визначають його: $a > 0$, $b > 0$, $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ — дорівнює 4.

Під час вивчення теми «Геометричні побудови» (7-й клас) можна пояснити необхідність дослідження задачі, коли розв'язуємо задачу 60.

Задача 60 ([9], § 5, № 46). Побудуйте трикутник, якщо дано сторону, прилеглий до неї кут і суму двох інших сторін.

Легко бачити, що розв'язування задачі зводиться до побудови трикутника за двома сторонами a і $m = b + c$

та кутом α між ними. Вибравши $a > m$, пояснюють, що задача не має розв'язку.

Під час вивчення теми «Подібність фігур» (9-й клас) можна запропонувати задачу 61.

Задача 61. На стороні AC трикутника ABC взято точку D так, що $\angle ABD = \angle ACB$. Обчисліть BD , якщо $AB = 10$ см, $BC = 6$ см, $AD = 4$ см.

Формальне застосування ознаки подібності трикутників дає відповідь: $BD = 2,4$ см, проте задача не має розв'язків, бо не виконуються необхідні і достатні умови існування даного трикутника.

Розв'язуючи задачу «Чи існує паралелограм, дві діагоналі і сторона якого відповідно дорівнюють 8 см, 10 см, 9 см?» (8-й клас), учні можуть застосувати необхідну і достатню умови існування трикутника, утвореного даною стороною і половинами діагоналей ([9], § 7, № 41), з'ясувавши, що задача не має розв'язків.

Не можна не погодитися з думкою П. М. Ерднієва про те, що «навчання математиці в школі цілком можна і треба будувати так, щоб воно здавалося для учня серією маленьких відкриттів» ([13], с. 67). З огляду на це роль дослідження задач важко переоцінити, бо дослідження розвиває ініціативу учня, привчає його критично осмислювати знайдені результати, дає змогу уникати помилок під час розв'язування задач, є дійовим засобом повторення курсу алгебри та початків аналізу і особливо тригонометричного матеріалу.

До дослідження планіметричних задач на обчислення з параметричними даними учнів також можна підвести, якщо пропонувати для розв'язування комбіновані задачі на побудову і обчислення. Перевага таких задач перед задачами на обчислення полягає в тому, що учні, розв'язуючи власне задачу на побудову, встановлюють умови розв'язуваності задачі, тим самим знаходять умови існування побудованої геометричної фігури і використовують їх для розв'язування задачі на обчислення раціональним способом. Наведемо приклад.

Задача 62 ([9], § 6, № 72). Побудуйте трапецію $ABCD$, коли відомо, що $AD \parallel BC$, $AD = a$, $BC = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$.

Поставивши додаткове завдання — «знайти площу трапеції», — розв'язування задачі можна звести до побудови трикутника за трьома сторонами d_1 , d_2 , $a + b$. Область його існування:

$$|d_1 - d_2| < a + b < d_1 + d_2.$$

Побудований малюнок та знайдені необхідні і достатні умови існування трапеції дають можливість обчислити її площу раціональним способом. Оскільки $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DCE}$ (де $E = T_{\overline{BD}}(C)$), то $S_{ABCD} = S_{\triangle ACE}$, тому $S_{ABCD} = \sqrt{p(p-a-b)(p-d_1)(p-d_2)}$, де $p = \frac{a+b+d_1+d_2}{2}$, причому $|d_1 - d_2| < a + b < d_1 + d_2$.

Щоб учні свідомо оволоділи поняттям «геометрична фігура існує», їм треба навчитися виконувати аксіоматичні побудови геометричних фігур.

Не дивлячись на те, що в навчальному посібнику [9] термін «існує» не означається, учням пояснюють його «конструктивний» характер. Так, наприклад, формулюючи основну властивість 1 (§ 1), дають її геометричну ілюстрацію. Аналогічно поступають у випадку, коли пояснюють аксіому існування трикутника, що дорівнює даному. При цьому суттєвим є обґрунтованість кожного кроку з посиланням на відповідні аксіоми.

Формуванню навичок застосування аксіом до побудови геометричних фігур служать задачі: [9], § 1, №№ 3, 11, 18, 24 та ін., а також доведення ознак рівності трикутників (§ 3). Особливу роль при цьому відіграє названа аксіома існування трикутника, що дорівнює даному.

Повернутися до аксіоматичних побудов в учителя буде нагода також під час вивчення курсу стереометрії. Так, наприклад, доводячи теорему 15.1 за допомогою аксіом планіметрії і стереометрії, будують конфігурацію, про яку в ній ідеться.

Задача 63. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a , апофема дорівнює m . Доведіть, що умовами існування піраміди є: $0 < a < 2m\sqrt{3}$.

Д о в е д е н н я. Якщо $a > 0$, існує правильний трикутник ABC (мал. 31) із стороною a (додаток 1), що є основою піраміди з центром O . Якщо $\frac{a}{2\sqrt{3}} < m$, існує

прямокутний $\triangle POD$, для якого катет $OD = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, а гіпотенуза $PD = m$, отже, існують всі чотири вершини піраміди.

Після розв'язування достатньої кількості задач можна ввести означення.

О з н а ч е н н я. Геометрична фігура існує (визначена) при певних значеннях параметрів, якщо доведено можливість її аксіоматичної побудови.

Якщо значення параметрів задані (в задачах з числовими даними), то доведення існування геометричної фігури при цих умовах встановлюють доведенням можливості її аксіоматичної побудови при цих умовах.

Слід сказати, що в шкільному курсі математики широко використовують ефективні побудови як засіб доведення існування плоскої геометричної фігури. При цьому не можна забувати, що такі побудови не завжди здійсненні. Покажемо, як це здійснюється на конкретних задачах.

Задача 64 ([9], § 5, № 37). Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, опущеною на третю сторону.

Вибравши: 1) $a = 6$, $b = 4$, $h_c = 3$; 2) $a = 6$, $b = 4$, $h_c = 5$, учні переконуються побудовою, що в першому випадку існують два трикутники, які задовольняють умову задачі, а в другому — жодного.

Задача 65 ([9], § 6, № 22₁). Побудуйте паралелограм за двома сторонами і діагоналлю.

Можна запропонувати учням такі числові дані: 1) $a = 5$ см, $b = 3$ см, $d = 6$ см; 2) $a = 7$ см, $b = 5$ см, $d = 13$ см.

У другому випадку паралелограм не існує, бо його не можна побудувати.

Задача 66 ([9], § 6, № 72). Побудуйте трапецію за основами і діагоналями.

Позначивши бічні сторони через a , c , а основи — через b , d , причому $b < d$, можна переконатися, що побудова можлива, якщо виконуються умови:

$$|a - c| < d - b < a + c.$$

§ 3. НЕОБХІДНІ І ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФІГУРИ

За діючою програмою шкільного курсу математики поняття *необхідні і достатні умови* не вводиться; проте в темі «Ознаки рівності трикутників» (7-й клас, § 3) вивчається поняття про теорему, обернену до даної. За навчальним посібником [9] прикладами таких теорем є: властивість кутів, медіани, бісектриси рівнобедреного трикутника, ознаки паралельності прямих, ознаки паралелограма, прямокутника, ромба, теорема Піфагора, про три перпендикуляри тощо. При цьому, як правило, пряму теорему доведено в тексті посібника, а обернену — вміщено у вигляді текстової (розв'язаної) задачі. Це не

випадково, бо в такому разі теорема є ознакою деякого математичного поняття.

Досвід роботи учителів математики свідчить про те, що учні далеко не завжди розуміють види теорем та логічні зв'язки між ними. Діюча програма відводить належне місце розвитку логічної грамотності учнів, треба лише повніше використати в цьому її можливості.

Поняття необхідних і достатніх умов можна ввести під час вивчення теми «Чотирикутники» (8-й клас, § 6). Подаючи умовне твердження схематично у вигляді « $A \rightarrow B$ », кажуть, що A — умова, B — висновок. Переважна більшість математичних теорем — умовні твердження.

Розрізняють такі види теорем:

- а) « $A \rightarrow B$ » — пряма теорема;
- б) « $B \rightarrow A$ » — обернена теорема;
- в) « $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$ » — теорема, протилежна до прямої;
- г) « $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ » — теорема, протилежна до оберненої.

Суттєвим є те, що термін «твердження правильне» означає правильність висновку одночасно з правильністю умови. Для висловлення «твердження не правильне» його трактування аналогічне до наведеного, тобто умова виконується, а висновок — ні.

Як приклад для ілюстрації видів теорем можна взяти, наприклад, таку теорему: «Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться пополам». Пропонуємо учням сформулювати інші три види теорем, прийнявши дану теорему за пряму. Зазначимо, що всі чотири правильні.

Кажуть, що в твердженні « $A \rightarrow B$ » умова A є *достатньою* для B , а умова B є *необхідною* для справедливості умови A .

П р и к л а д и.

1) Для того щоб діагоналі чотирикутника були взаємно перпендикулярними, *достатньо*, щоб цей чотирикутник був ромбом.

2) Для того щоб чотирикутник був ромбом, *необхідно*, щоб його діагоналі були взаємно перпендикулярними.

Якщо для деякої прямої теореми виду « $A \rightarrow B$ » (1) справедлива і обернена до неї « $B \rightarrow A$ » (2), то умова A є одночасно *достатньою* і *необхідною* для умови B . Аналогічно, умова B є *необхідною* і *достатньою* для умови A . Тому теорему (1) та (2) можна виразити за допомогою

однієї теореми, використавши для цього один з термінів: «необхідно і достатньо», «тоді і тільки тоді», «в тому і лише в тому випадку» тощо.

При цьому доцільно розглянути ряд прикладів, у процесі розв'язування яких виявляються дві можливості:

достатня умова не є необхідною; достатня умова є одночасно і необхідною.

Скажімо, довівши спочатку властивості паралелограма, варто записати їх для учнів у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

№№	Вид чотирикутника	Паралелограм	Прямокутник	Ромб	Квадрат
	Властивість чотирикутника				
1	Протилежні сторони попарно рівні	+	+	+	+
2	Протилежні сторони попарно паралельні	+	+	+	+
3	Центр симетрії — середина діагоналі	+	+	+	+
4	Діагоналі взаємно перпендикулярні	—	—	+	+
5	Діагоналі рівні	—	+	—	+

Корисно запропонувати учням вправи на закріплення понять.

Заповнити пропуски.

1. Щоб кути були суміжними, ... , щоб дві сторони їх були протилежними півпрямими.

2. Щоб трикутник був прямокутним, ... , щоб він мав два гострі кути.

3. Щоб чотирикутник був паралелограмом, ... , щоб його дві сторони були паралельними.

4. Щоб чотирикутник був ромбом, ... , щоб його діагоналі були взаємно перпендикулярними.

5. Щоб чотирикутник був прямокутником, ... , щоб всі його кути були рівні між собою.

6. Щоб трапеція була рівнобедреною, ..., щоб у неї діагоналі були рівними.

7. Щоб трикутник був рівнобедреним, ... , щоб дві його медіани були рівними.

8. Щоб пряма була перпендикулярною до площини,

... , щоб вона була перпендикулярною до двох прямих цієї площини, які перетинаються.

9. Щоб пряма була паралельна площині, ..., щоб вона була паралельна прямій цієї площини.

Геометричні задачі на обчислення, доведення, побудову, дослідження можна формулювати у вигляді необхідних і достатніх умов існування математичних об'єктів, описаних задачними ситуаціями. Наведемо приклади.

Задача 67. Знайдіть бічну поверхню правильної трикутної піраміди, знаючи довжину сторони основи a та бічного ребра b .

Умову задачі сформулюємо, наприклад, так: (А) «Якщо існує правильна трикутна піраміда з довжиною сторони основи a і бічним ребром b , то величину її бічної поверхні можна знайти за формулою: $S_6 = \frac{3}{2} a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, причому $0 < a < b\sqrt{3}$ ».

Навпаки: (В) «Якщо

$$0 < a < b\sqrt{3}, \quad S_6 = \frac{3}{2} a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}},$$

то існує правильна трикутна піраміда, у якій довжина сторони основи дорівнює a , бічного ребра b , бічної поверхні S_6 ».

Відповідь. $S_6 = \frac{3}{2} a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad 0 < a < b\sqrt{3}.$

Задача 68. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді довжина сторони більшої основи і висота дорівнюють a , двогранний кут при більшій основі дорівнює α . Доведіть, що бічна поверхня S піраміди дорівнює $\frac{4a^2(\sin \alpha - \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha}$, де $a > 0, 0^\circ < \arctg 2 < 90^\circ$.

Умову цієї задачі можна сформулювати, скажімо, так: «Необхідними і достатніми умовами існування правильної зрізаної чотирикутної піраміди, сторона більшої основи і висота якої a , а двогранний кут при більшій основі α є умови:

$$S = \frac{4a^2(\sin \alpha - \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha}, \quad a > 0, \quad 0^\circ < \arctg 2 < 90^\circ,$$

де S — бічна поверхня піраміди».

Задача 69. У трикутнику ABC дано: $AC = b, BC = a$, бісектриса кута $CD = l$. Знайдіть $\angle ACB = x$. Чи будуть достатніми для існування цього трикутника умови: $x = 2 \arccos \frac{l(a+b)}{2ab}, \quad 0 < l < \frac{2ab}{a+b}$?

Розв'язання. Умову задачі подамо у вигляді: « $A \rightarrow B$ », де (A) — «Існує трикутник ABC з $AC = b$, $BC = a$, $CD = l$, де CD — бісектриса кута C », (B) — « $x = 2 \arccos \frac{l(a+b)}{2ab}$, $0 < l < \frac{2ab}{a+b}$, $x = \angle ACB$ ».

Розв'яжемо задачу виду « $A \rightarrow B$ ». Маємо:

$$\frac{1}{2} ab \cdot \sin x = \frac{1}{2} al \cdot \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} b \cdot l \cdot \sin \frac{x}{2},$$

звідки

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{l(a+b)}{2ab}, \text{ або } x = 2 \arccos \frac{l(a+b)}{2ab}.$$

Розв'яжемо задачу виду « $B \rightarrow A$ »: «Якщо $x = 2 \arccos \frac{l(a+b)}{2ab}$, $0 < l < \frac{2ab}{a+b}$, то існує трикутник ABC , у якого $AC = b$, $BC = a$, $CD = l$, де CD — бісектриса кута C ».

Маємо: $0 < l < \frac{2ab}{a+b}$, тоді $0 < \frac{l(a+b)}{2ab} < 1$, тобто існує такий кут x , що $0 < \cos x < 1$, отже, існує трикутник ABC , у якого $\angle ACB = x$, $BC = a$, $AC = b$.

Знайдемо CD , де CD — бісектриса кута C . Помічаючи, що $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$, матимемо:

$$\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin x = \frac{1}{2} a \cdot CD \cdot \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} b \cdot CD \cdot \sin \frac{x}{2},$$

звідси

$$CD = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{l(a+b)}{2ab} = l.$$

В і д п о в і д ь. Будуть.

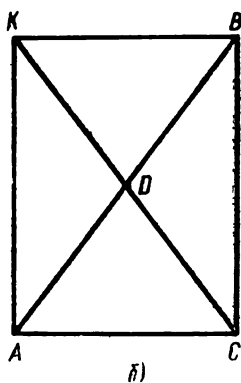
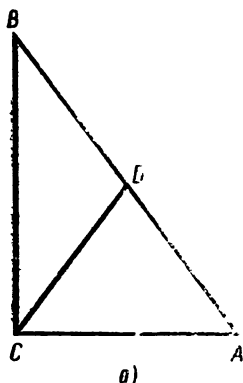
Важливо підкреслити, що в пропедевтичному плані учні знайомляться з одним із способів дослідження геометричних задач — доведенням достатності вивідних умов (розділ II, § 3).

Задача 70. Доведіть, що необхідною і достатньою умовами того, щоб трикутник був прямокутним, є умова: довжина медіани, проведеної до найбільшої сторони, дорівнює половині довжини цієї сторони (порівняйте з № 51, § 11).

Розв'язання.

Необхідність. Нехай у трикутнику ABC : $\angle C = 90^\circ$, $AD = BD$ (мал. 41, а), тоді існує коло з центром у точці D радіуса AD , тому $DC = DA$, бо точка C належить колу.

Достатність. Нехай у трикутнику ABC : $AB > AC$, $AB > BC$, $AD = BD$, де точка D — середина AB , $CD = \frac{1}{2} AB$ (мал. 41, а). Доповнимо трикутник ABC до паралелограма $AKBC$, тоді AB та CK — його діагоналі, тому $CD = \frac{1}{2} CK$, $CD = \frac{1}{2} AB$, отже, $CK = AB$. Виходить, $AKBC$ — паралелограм з прямим кутом A , тобто прямокутник, тому $\angle ACB = 90^\circ$.



Мал. 41

Дослідження геометричних задач вимагає доведення того, що знайдені необхідні умови існування геометричної фігури є достатніми. Способи дослідження задач можна класифікувати залежно від того, доведення достатності яких умов — вихідних (початкових) чи вивідних (знайдених) — покладено в їх основу.

Практика свідчить, що в середній школі можна рекомендувати ті методи, в яких доведення достатності вивідних умов здійснюється безпосередньо в кінці дослідження (розділ II, § 3) або ті, в яких за вихідні (початкові) приймають умови, що визначають область існування допоміжної геометричної фігури (розділ II, § 2).

Щоб запобігти знаходженню необхідних умов існування геометричних фігур у кожній конкретній задачі, потрібно встановити їх окремо, розв'язуючи відповідні задачі, і надалі користуватися ними як відомими геометричними фактами (див. додаток 1). Доведення достатності знайдених необхідних умов обов'язкове в кожній задачі.

Учням пояснюють, що область існування даної фігури можна записати за допомогою різних систем значень параметрів. Наприклад, область існування трикутника можна задати за допомогою трьох параметрів, з яких хоча б один лінійний або похідний від нього, порізному, але вона має виражати необхідні і достатні умови його існування.

Під час вивчення теми «Нерівність трикутника» пропонуємо встановити область його існування, якщо задано основу a і бічну сторону l . *Необхідність* умов $0 < a < 2l$ учні встановлюють безпосередньо з малюнка. Для доведення *достатності* цих умов вони скористаються побудовою (аксіоматичною чи фактичною).

Можна запропонувати учням знайти області існування трикутників, заданих за допомогою різних параметричних даних (додаток 1). При цьому можна скористатися нерівністю $|b - c| < a < b + c$ для окремих видів трикутників (за сторонами і за кутами) і вивести з неї наслідки. Це значно спрощує процес дослідження задачі.

Розв'язуючи задачу № 19 ([9], § 17): «Сторони рівностороннього трикутника дорівнюють 3 м. Знайдіть відстань від точки до площини трикутника, якщо точка віддалена від кожної вершини трикутника на 2 м», учні знаходять область існування правильної трикутної піраміди за допомогою параметрів: a — сторона основи, l — бічне ребро піраміди. При цьому міркування можуть бути такими: «Якщо задана фігура існує, то $0 < a < l\sqrt{3}$. Доведемо, що і навпаки: якщо $0 < a < l\sqrt{3}$, то існує описана в умові задачі фігура, для якої a — довжина сторони правильного трикутника, l — відстань від точки до кожної з вершин трикутника. Оскільки (мал. 31) $0 < a < l\sqrt{3}$ або $0 < \frac{a}{\sqrt{3}} < l$, тобто $0 <$

$OB < PB$, то існує прямокутний трикутник POB з катетом OB та гіпотенузою PB , отже існує піраміда $PABC$ ».

Доведення того, що необхідні умови існування геометричної фігури є достатніми (якщо це справді так), як правило, простіше виконувати для вихідних умов, їх записують, виходячи із змісту задачі або використовують область існування відомих геометричних фігур (додаток 1), які можуть грати роль допоміжних (див. розділ II, § 2).

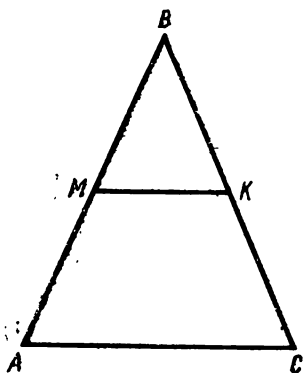
Для знаходження області існування геометричної фігури в задачах з числовими даними переходять до параметричних, позначаючи задані величини буквами.

Задача 71 ([9], § 6, № 52). Середня лінія рівнобедреного трикутника, паралельна основі, дорівнює 3 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр становить 16 см.

Дослідження.

Необхідність. Позначивши в трикутнику ABC (мал. 42): $MK \parallel AC$, $MK = m$, $2 \cdot AB + AC = p$, безпосередньо прийемо за *вихідні* необхідні і достатні умови існування рівнобедреного трикутника ABC , заданого за допомогою основи і бічної сторони (додаток 1): $0 < AC < 2 \cdot AB$.

Виразимо величини AC та AB через m і p . Оскільки $AC = 2m$, $AB = \frac{1}{2}(p - AC) = \frac{1}{2}(p - 2m)$, то, підставивши знайдені значення в нерівність, матимемо: $0 < 2m < p - 2m$, звідки $0 < m < \frac{1}{4}p$.



Мал. 42

Достатність. Якщо $0 < m < \frac{1}{4}p$, тобто $0 < 2m < p - 2m$, або $0 < 2m < 2 \cdot \frac{1}{2}(p - 2m)$, то існує рівнобедрений $\triangle ABC$, у якого основа $AC = 2m$, а бічна сторона $AB = \frac{1}{2}(p - 2m)$.

Зазначимо, що дослідити задачу можна також методом введення допоміжної фігури, за яку зручно прийняти $\triangle MBK$.

Як бачимо, безпосередньо використовуючи вихідні умови при дослідженні задачі, відповідні міркування можна схематично подати так:

а) записати вихідні умови, які повинні бути необхідними і достатніми для існування заданої фігури;

б) виразити в них невідомі елементи геометричних фігур через дані величини;

в) розв'язати записані нерівності (або їх системи);

г) довести достатність знайдених (необхідних) умов.

Аналогічно до розглянутої, можна дослідити, наприклад такі задачі з [9]: § 3, №№ 9—11, 27; § 6, №№ 10, 29, 69; § 11, № 41; § 13, № 27; § 14, №№ 8, 17, 19, 24, 32, 33, 37—39, 46; § 17, №№ 16, 19, 21, 23, 24, 47, 51; § 18, №№ 37, 45; § 19, № 59; § 21, № 33; § 22, №№ 9, 10.

З поняттям *допоміжна фігура* учні знайомляться у восьмому класі, розв'язуючи задачі на побудову з теми «Чотирикутники» (§ 6). Щоб виробити в учнів навички у застосуванні допоміжної фігури до дослідження задач на обчислення, доведення, дослідження можна пропонувати їм у процесі розв'язування відповідних задач такі вправи:

Доведіть, що допоміжну фігуру можна вибрати: на малюнку 1 — $\triangle POC$, $\triangle OKC$; на малюнку 4 — $\triangle ACK$, на малюнку 9 — $\triangle KCD$; на малюнку 18 — $\triangle ABD$; на малюнку 19, 21 — $\triangle POC$, $\triangle POK$; на малюнку 27 — $\triangle DOB$, $\triangle DOK$; на малюнку 29 — $\triangle DOA$, $\triangle DOK$; на малюнку 31 — $\triangle POB$, на малюнку 34 — $\triangle POB$, $\triangle POD$.

Як приклад, дослідимо задачу 2, використавши допоміжну фігуру — трикутник OKC (мал. 1), областю існування якого є

$$0 < OK < OC. \quad (1)$$

Доведемо, що умови (1) є достатніми для існування піраміди $PABCD$.

Справді, якщо $0 < OK < OC$, існує прямокутний $\triangle OKC$, тоді існує прямокутний $\triangle POK$, отже, існує і правильна чотирикутна піраміда $PABCD$.

Оскільки $OK = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$, $OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$, то підставив-

ши в (1), матимемо:

$$0 < \frac{a}{\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} < \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Врахувавши, що $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, дістанемо: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Остаточо матимемо: $a > 0$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. На факультативних заняттях корисно ознайомити учнів із застосуванням тетраедра як допоміжної фігури для дослідження геометричних задач (розділ II, § 2).

§ 4. ДЕЯКІ ПРИЙОМИ ЗНАХОДЖЕННЯ НЕОБХІДНИХ УМОВ ІСНУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФІГУРИ

Як було вже обгрунтовано (розділ II, § 1) під час дослідження геометричних задач з параметричними даними, в кожній з них потрібно доводити достатність знайдених необхідних умов, інакше можна одержати помилковий результат.

У процесі розв'язування багатьох геометричних задач часто вдається знайти такі необхідні умови існування геометричної фігури, які є і достатніми. Формуванню умінь знаходити необхідні умови існування геометричної фігури сприяє ознайомлення учнів з деякими прийомами, що ґрунтуються на використанні певних теорем чи властивостей геометричних фігур.

Серед багатьох співвідношень між окремими елементами геометричних фігур найбільш уживаними є ті, що можна сформулювати у вигляді таких теорем.

1. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут.

2. Зовнішній кут трикутника більший від кожного з його внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

3. Якщо α — кут при вершині рівнобедреного трикутника, то виконується умова: $0 < \alpha < \pi$.

4. Катет прямокутного трикутника менший за гіпотенузу.

5. В опуклому многогранному куті сума всіх плоских кутів менша від 2π .

6. У тригранному куті кожний плоский кут менший від суми двох інших плоских кутів.

Пояснимо сказане на прикладі.

Задача 72 ([9], § 21, № 33₁). За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди.

Вказівка. Скориставшись малюнком 31 та теоремою 4, матимемо: $0 < OA < PA$. Оскільки $OA = \frac{2}{3} AD = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $PA = b$, то $0 < \frac{a}{\sqrt{3}} < b$ або $0 < a < b\sqrt{3}$.

Під час дослідження геометричної задачі часто порівнюють величини однорідних елементів геометричних фігур. При цьому використовують залежності між елементами геометричної фігури, які впливають з її властивостей та умови задачі.

Так, наприклад, в задачі 47 (мал. 33) порівнюємо

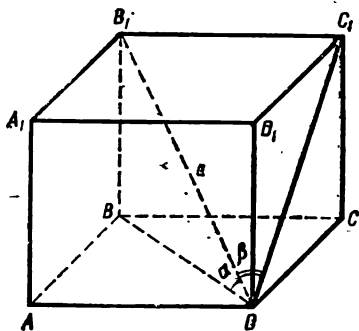
OK та OC : $0 < OK < OC$. Оскільки $OK = OD \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $OC = OD$, то $0 < OD \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} < OD$ або $0 < \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} < 1$, звідси (з урахуванням того, що $0 < \alpha < \pi$) маємо: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Щоб використати однозначне задавання геометричної фігури, треба знати кількість незалежних параметрів, за допомогою яких це можна здійснити. При бажанні можна було б знайти її, а для користування досить задовольнитись додатком 3, маючи на увазі, що в кожній конкретній задачі треба вміти знайти потрібні незалежні елементи.

Задача 73 ([9], § 21, № 10). Чому дорівнює об'єм прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого a і утворює з площиною основи кут α , а з бічною гранню — кут β ?

Розв'язання.

Об'єм паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (мал. 43) обчислимо за формулою:



Мал. 43

$$V = BC \cdot CD \cdot BB_1. \quad (1)$$

Оскільки $B_1B \perp$ пл. ABC , то за означенням перпендикуляра до площини $B_1B \perp BD$, отже, $\angle B_1BD = 90^\circ$. За умовою задачі $B_1D = a$, $\angle B_1DB = \alpha$.

З прямокутного трикутника B_1BD :

$$BB_1 = a \cdot \sin \alpha, \quad (2)$$

$$BD = a \cdot \cos \alpha. \quad (3)$$

Через те що $B_1C_1 \perp C_1C$, $B_1C_1 \perp C_1D_1$, то за означенням перпендикулярності прямої до площини $B_1C_1 \perp$ пл. CC_1D_1 , отже, $B_1C_1 \perp C_1D$ за означенням перпендикуляра до площини. За умовою задачі $\angle C_1DB_1 = \beta$.

З прямокутного трикутника B_1C_1D :

$$B_1C_1 = a \cdot \sin \beta. \quad (4)$$

З прямокутного трикутника BCD :

$$CD = \sqrt{BD^2 - BC^2}, \quad CD = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \alpha - a^2 \cdot \sin^2 \beta} = a \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} =$$

$$= a \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta)} =$$

$$= a \sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)} = a \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}. \quad (5)$$

Врахувавши, що $BC = B_1C_1$, підставимо (2), (4), (5) в (1):

$$V = a \cdot \sin \beta \cdot a \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \cdot a \cdot \sin \alpha =$$

$$= a^3 \sin \alpha \cdot \sin \beta \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

За змістом умови задачі: $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Даний паралелепіпед визначається за допомогою трьох (незалежних) елементів, наприклад ребер CC_1 , BC , CD . Але $CC_1 = BB_1 = a \cdot \sin \alpha$, $C_1D = a \cdot \cos \beta$, тому, щоб знайти CC_1 , потрібно, щоб виконувалась умова $CC_1 < C_1D$, тобто

$$a \cdot \sin \alpha < a \cdot \cos \beta.$$

Врахувавши, що $a > 0$, $\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta)$, отримаємо:

$$\sin \alpha < \sin(90^\circ - \beta). \quad (6)$$

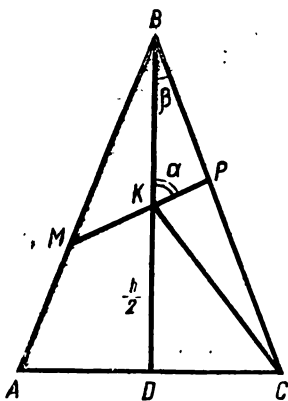
Оскільки $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < 90^\circ - \beta < 90^\circ$, то з нерівності (6) маємо: $\alpha < 90^\circ - \beta$, тобто $\alpha + \beta < 90^\circ$.

Остаточно: $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ$.

Ідея використання повороту елементів геометричної фігури полягає в тому, щоб, розмістивши ці елементи в одній площині з вибраною площиною, можна було порівняти їх однойменні величини.

Задача 74. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює h і утворює з його бічною стороною кут β . Через середину цієї висоти під кутом α ($\alpha \neq 90^\circ$) до неї проведено пряму, яка перетинає обидві бічні сторони. Знайдіть довжину відрізка січної, яка лежить всередині трикутника.

Розв'язання. За умовою задачі $BD = h$, $\angle BKP = \alpha$, $\angle DBC = \beta$, $BK = DK = \frac{h}{2}$ (мал. 44).



Мал. 44

Довжину шуканого відрізка знайдемо за формулою:

$$MP = MK + KP. \quad (1)$$

Оскільки $\angle KBM = \beta$, $\angle BKM = 180^\circ - \alpha$, $\angle BPK = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, $\angle BMK = 180^\circ - (180^\circ - \alpha + \beta) = \alpha - \beta$, то з трикутників BKM та BKP відповідно за теоремою синусів маємо:

$$\frac{MK}{\sin \beta} = \frac{h}{2 \sin (180^\circ - (\alpha + \beta))}, \text{ звідки } MK = \frac{h \cdot \sin \beta}{2 \sin (\alpha + \beta)}. \quad (2)$$

$$\frac{KP}{\sin \beta} = \frac{h}{2 \sin (\alpha - \beta)}, \text{ або } KP = \frac{h \cdot \sin \beta}{2 \sin (\alpha - \beta)}. \quad (3)$$

Підставивши (2), (3) в (1), маємо:

$$\begin{aligned} MP &= \frac{h \cdot \sin \beta}{2 \sin (\alpha + \beta)} + \frac{h \cdot \sin \beta}{2 \sin (\alpha - \beta)} = \\ &= \frac{h \cdot \sin \beta (\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta))}{2 \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)} = \frac{h \cdot \sin \alpha \cdot \sin 2\beta}{2 \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Д о с л і д ж е н н я. Умовою того, що пряма MP перетинає обидві сторони трикутника ABC , є: $0^\circ < \alpha < \angle BKC$. Очевидно, що $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

З трикутника BDC :

$$BC = \frac{h}{\cos \beta}. \quad (4)$$

З трикутника BKC за теоремою синусів:

$$\frac{BC}{\sin \angle BKC} = \frac{KC}{\sin \angle KBC}. \quad (5)$$

За теоремою косинусів

$$KC^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{\cos^2 \beta} - 2 \frac{h^2}{2 \cos \beta} \cdot \cos \beta,$$

звідси

$$KC = \frac{h}{2 \cos \beta} \sqrt{4 - 3 \cos^2 \beta}. \quad (6)$$

Підставивши (4), (6) в (5), матимемо: $\sin \angle BKC = \frac{2 \sin \beta}{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \beta}}$. Остаточно маємо:

$$0 < \sin \alpha \leq \frac{2 \sin \beta}{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \beta}}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}.$$

Задача 75. В конусі, радіус основи якого дорівнює R , а твірна нахилена до площини основи під кутом α , проведено площину через вершину конуса під кутом β до його висоти. Знайдіть площу перерізу.

Розв'язання. Побудуємо $OC \perp AB$ (мал. 45). Оскільки $OA = OB$, то $CA = CB$. Через те, що OC — проекція PC на пл. AOB , то за теоремою про три перпендикуляри $PC \perp AB$. За умовою задачі: $OB = R$, $\angle PBO = \alpha$, $\angle CPO = \beta$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Площу перерізу знайдемо за формулою:

$$S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PC. \quad (1)$$

З прямокутного трикутника POB ($\angle POB = 90^\circ$):

$$PO = R \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

З прямокутного трикутника POC ($\angle POC = 90^\circ$):

$$OC = PO \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

$$OC = R \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (3)$$

$$PC = \frac{PO}{\cos \beta},$$

$$PC = \frac{R \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}. \quad (4)$$

З прямокутного трикутника OCB ($\angle OCB = 90^\circ$):

$$CB = \sqrt{OB^2 - OC^2},$$

$$CB = \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta} =$$

$$= R \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta} =$$

$$= \frac{R}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \sqrt{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} =$$

$$= \frac{R}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}. \quad (5)$$

Але $AB = 2 \cdot CB$, тому

$$AB = \frac{2R}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}. \quad (6)$$

Підставимо (4), (6) в (1):

$$S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2R}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \times \\ \times \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} = \frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos^2 \beta} \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}.$$

Здійснимо поворот трикутника POC навколо PO до суміщення його площини з площиною трикутника PBO .

Тоді $\angle BPO = 90^\circ - \alpha > \beta$, звідси $\alpha + \beta < 90^\circ$, або остаточно $0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ$. Пропоновані прийоми полегшують знаходження необхідних умов існування геометричних фігур.

§ 5. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ОБЧИСЛЕННЯ

Покажемо застосування методів знаходження області існування геометричної фігури до дослідження задач. З кількох способів розв'язування задачі зупинимось на одному, звертаючи основну увагу на дослідження, виділивши їх окремо в кожній задачі.

Задача 76. Обчисліть катети прямокутного трикутника за радіусом r вписаного кола та гіпотенузою c .

Розв'язання. Нехай O — центр, OK , OM , OP — радіуси вписаного кола (мал. 46). За властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола, маємо: $AP = AM$, $BK = BM$. Позначимо $AB = c$, $AC = x$, $BC = y$. Маємо:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} xy = p \cdot r,$$

$$\text{де } p = \frac{x + y + c}{2}.$$

Але $x + y = c + 2r$, тому $xy = r(c + 2r + c)$, або $xy = 2r(c + r)$. Дістали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = c + 2r, \\ xy = 2r(c + r). \end{cases}$$

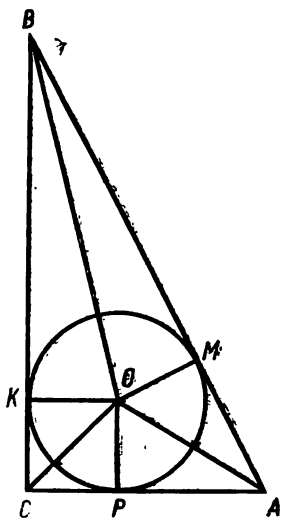
На основі теореми Вієта x та y — суть корені рівняння

$$z^2 - (c + 2r)z + 2r(c + r) = 0.$$

Розв'язавши його, матимемо:

$$z_1 = x = \frac{1}{2} (2r + c + \sqrt{c^2 - 4rc - 4r^2}),$$

$$z_2 = y = \frac{1}{2} (2r + c - \sqrt{c^2 - 4rc - 4r^2}). \quad (1)$$



Мал. 46

Дослідження. Областю існування трикутника ABC (див. додаток 1) є:

$$0 < AC < AB. \quad (2)$$

Підставивши (2) в (1), дістанемо:

$$0 < \frac{1}{2}(2r + c + \sqrt{c^2 - 4rc - 4r^2}) < c.$$

Розв'язавши систему нерівностей, маємо:

$$0 < 2r \leq c(\sqrt{2} - 1).$$

Відповідь. Катети дорівнюють $\frac{1}{2}(2r + c \pm \sqrt{c^2 - 4rc - 4r^2})$, причому $0 < 2r \leq c(\sqrt{2} - 1)$.

Задача 77 ([9], § 14, № 33). Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює P , а його бічна сторона на m більша основи. Знайдіть висоту, опущену на бічну сторону.

Розв'язання. Позначимо $AB = BC = x$, $BD = y$, де $AD \perp BC$ (мал. 47). Тоді за умовою задачі $x + x + x - m = P$, звідки

$$x = \frac{1}{3}(P + m). \quad (1)$$

$$AC = x - m = \frac{P - 2m}{3}. \quad (2)$$

Виразивши AD з прямокутних трикутників ADB та ADC , матимемо:

$$\begin{cases} AD^2 = \left(\frac{P+m}{3}\right)^2 - y^2, \\ AD^2 = \left(\frac{P-2m}{3}\right)^2 - \left(\frac{P+m}{3} - y\right)^2. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, дістанемо:

$$y = \frac{P^2 + 8Pm - 2m^2}{6(P + m)}.$$

Знайдемо висоту AD :

$$AD = \sqrt{\left(\frac{P+m}{3}\right)^2 - \left(\frac{P^2 + 8Pm - 2m^2}{6(P+m)}\right)^2}.$$

Дослідження. Необхідною і достатньою умовами існування різнобедреного трикутника ABC (див. додаток 1) є:

$$0 < AC < 2 \cdot BC. \quad (3)$$

Підставивши (1), (2) в (3), дістанемо:

$$0 < \frac{P-2m}{3} < \frac{2(P+m)}{3}.$$

Розв'язавши систему нерівностей, матимемо:

$$0 < m < \frac{P}{2}.$$

Відповідь. Висота трикутника дорівнює $\sqrt{\left(\frac{P+m}{3}\right)^2 - \left(\frac{P^2 + 8Pm - 2m^2}{6(P+m)}\right)^2}$, причому $0 < m < \frac{P}{2}$.

Задача 78. Обчисліть об'єм правильної чотирикутної піраміди, знаючи двогранний кут α між бічними гранями та відстань d від центра основи до бічного ребра.

Розв'язання. Побудуємо $OK \perp PC$, тоді $PC \perp$ пл. BKD , отже, $\angle BKD = \alpha$ (мал. 48). Але $BO = OD$, тому $\angle OKD = \frac{\alpha}{2}$, $OK = d$. Об'єм піраміди обчислимо за формулою:

$$V = \frac{1}{3} \cdot AD^2 \cdot PO. \quad (1)$$

Позначимо $\angle KCO = x$, тоді $OK:OD = OK:OC$, або $\sin x = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $0^\circ < x < 90^\circ$.

Але $OD = d \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, тому $BD = 2d \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$,

$$AD = d\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Маємо:

$$\begin{aligned} PO &= OC \cdot \operatorname{tg} x = OC \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \\ &= \frac{OC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos \alpha}}. \end{aligned} \quad (3)$$

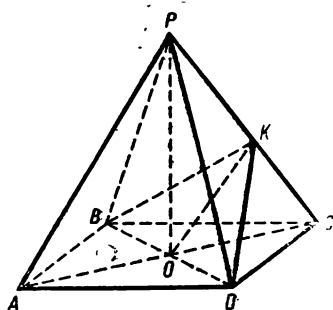
Підставивши (2), (3) в (1), дістанемо:

$$V = \frac{2d^3}{3\sqrt{-\cos\alpha}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

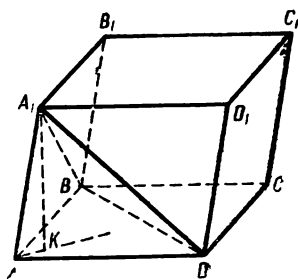
Дослідження. За умовою задачі знайдемо:

$$d > 0, 0^\circ < \alpha < 180^\circ, PO > 0. \quad (4)$$

Ці умови є необхідними і достатніми для існування даної піраміди. Справді, якщо $d > 0$ та $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, існують рівнобедрений трикутник BKD і квадрат $ABCD$,



Мал. 48



Мал. 49

тому існує відрізок $OC > 0$. Якщо $PO > 0, CO > 0$, існує прямокутний трикутник POC , отже, існує тетраедр $POCD$, а отже, і піраміда $PABCD$.

З того, що $\frac{d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos \alpha}} > 0$ та враховуючи (4), маємо:
 $d > 0, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Відповідь. Об'єм піраміди дорівнює $\frac{2d^3}{3\sqrt{-\cos \alpha}} \times \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$, причому $d > 0, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Задача 79 ([9], § 21, № 18). У паралелепіпеді довжини трьох ребер, що виходять з однієї вершини, дорівнюють a, b, c . Ребра a і b взаємно перпендикулярні, а ребро c утворює з кожним з них кут α . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання. Побудуємо $A_1K \perp$ пл. ABC (мал. 49). За умовою задачі: $AB = a, AD = b, AA_1 = c, \angle A_1AB = \angle A_1AD = \alpha$.

За теоремою косинусів для тригранного кута: $\cos \alpha = \cos \angle A_1AK \cdot \cos \angle BAK$, або $\cos \alpha = \cos \angle A_1AK \times \cos \angle DAK$, звідки $\cos \angle BAK = \cos \angle DAK$, але $0^\circ < \angle BAK < 90^\circ$, $0^\circ < \angle DAK < 90^\circ$, тому $\angle BAK = \angle DAK = 45^\circ$.

Знайдемо: $\cos \angle A_1AK = \frac{\cos \alpha}{\cos \angle BAK} = \frac{\cos \alpha}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \times \cos \alpha$.

З прямокутного трикутника A_1AK :

$$A_1K = A_1A \cdot \sin \angle A_1AK, \quad A_1K = c \sqrt{1 - \cos^2 \angle A_1AK} = \\ = c \sqrt{1 - 2 \cos^2 \alpha} = c \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Шуканий об'єм дорівнює $abc \sqrt{-\cos 2\alpha}$.

Д о с л і д ж е н н я. За допоміжну фігуру візьмемо тетраедр A_1ABD . Областю його існування буде: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $2\alpha > 90^\circ$, $2\alpha + 90^\circ < 360^\circ$.

Справді, якщо $a > 0$, $c > 0$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, існує $\triangle AA_1B$ (див. додаток 1), отже, існують вершини A_1 та B .

Аналогічно можна довести існування вершини D .

Якщо $2\alpha + 90^\circ < 360^\circ$, існує тригранний кут з ребрами, що є сторонами трикутників AA_1B , ABD , AA_1D . Тоді існує тетраедр AA_1BD , отже, і паралелепіпед AC_1 . Отже, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $45^\circ < \alpha < 135^\circ$.

В і д п о в і д ь. Об'єм паралелепіпеда дорівнює $abc \times \sqrt{-\cos 2\alpha}$, причому $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $45^\circ < \alpha < 135^\circ$.

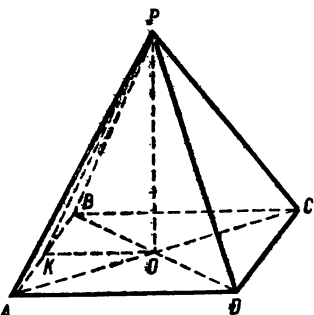
Задача 80 ([9], § 21, № 39). Основа піраміди — прямокутник із сторонами a і b , всі бічні ребра дорівнюють l . Знайдіть об'єм піраміди.

Р о з в' я з а н н я. За умовою задачі (мал. 50): $AB = a$, $AD = b$, $PA = l$. Об'єм піраміди обчислимо за формулою:

$$V = AB \cdot AD \cdot PO. \quad (1)$$

Але

$$OA = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (2)$$



Мал. 50

тому

$$PO = \sqrt{l^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)}. \quad (3)$$

Підставляючи (3) в (1), матимемо

$$V = ab \sqrt{l^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)}.$$

Д о с л і д ж е н н я. Побудуємо $OK \perp AB$. За допоміжну фігуру виберемо тетраедр $PAKO$, областю існування якого є:

$$0 < OK < OA < PA. \quad (4)$$

Справді, якщо $0 < OK < OA$, існує (див. додаток 1) прямокутний трикутник AOK — основа тетраедра, а коли $0 < OA < PA$, існує прямокутний трикутник PAO , існує тетраедр $PAKO$, а отже, і піраміда $PABCD$.

Підставимо (3) в (4): $0 < \frac{b}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, або $0 < b < \sqrt{a^2 + b^2} < 2l$.

Відповідь. Об'єм піраміди дорівнює $ab \times \sqrt{l^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)}$, причому $0 < b < \sqrt{a^2 + b^2} < 2l$.

Задача 81 ([9], § 21, № 41). Одне ребро трикутної піраміди дорівнює b , кожне з решти — a . Знайдіть об'єм піраміди.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $PA = PB = PC = AB = AC = a$, $BC = b$ (мал. 51). Побудуємо $AD \perp BC$, $PO \perp$ пл. ABC , тоді $AO \perp PO$. Об'єм піраміди обчислимо за формулою:

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PO. \quad (1)$$

Маємо

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2}. \quad (2)$$

Оскільки $PA = PB = PC$, то $OA = OB = OC$, тобто точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC . Тоді:

$$OA = \frac{a \cdot a \cdot b}{4S} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}. \quad (3)$$

З прямокутного трикутника POA :

$$PO = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4a^2 - b^2}} = a \sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{4a^2 - b^2}}. \quad (4)$$

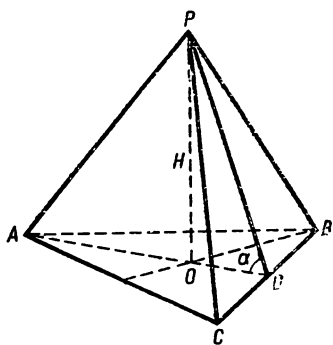
Підставивши (2), (4) в (1), дістанемо:

$$V = \frac{ab}{12} \sqrt{3a^2 - b^2}.$$

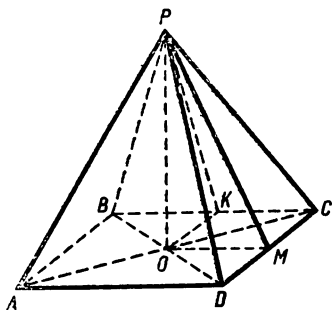
Д о с л і д ж е н н я. За допоміжну фігуру прийемо тетраедр $PODC$. Необхідними і достатніми умовами його існування є:

$$0 < CD < OC, PO > 0. \quad (5)$$

Справді, якщо $0 < CD < OC$, існує прямокутний трикутник ODC , а коли $OC > 0, PO > 0$, існує прямокутний трикутник POC , існує тетраедр $PODC$, а, отже, і піраміда $PABC$.



Мал. 51



Мал. 52

Підставивши (4) в (5) та врахувавши, що $a > 0, b > 0$, маємо:

$$0 < \frac{b}{2} < \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \quad a \sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{4a^2 - b^2}} > 0.$$

Розв'язавши систему нерівностей, дістанемо: $0 < b < a\sqrt{3}$.

В і д п о в і д ь. Об'єм піраміди дорівнює $\frac{ab}{12} \sqrt{3a^2 - b^2}$, де $0 < b < a\sqrt{3}$.

Задача 82 ([9], §21, № 42). В основі піраміди лежить прямокутник. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює l і утворює з суміжними сторонами основи кути α та β . Знайдіть об'єм піраміди.

Р о з в' я з а н н я. За умовою задачі $PC = l, \angle PCD = \alpha, \angle PCB = \beta$ (мал. 52). Побудуємо $OM \perp$

$\perp CD$, $OK \perp BC$, тоді $PM \perp CD$, $PK \perp BC$. Знайдемо

$$V = \frac{1}{3} \cdot CB \cdot CD \cdot PO. \quad (1)$$

Але

$$CB = 2 \cdot CK = 2l \cdot \cos \beta, \quad (2)$$

$$CD = 2CM = 2l \cdot \cos \alpha, \quad (3)$$

$$OC = l \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}. \quad (4)$$

З прямокутного трикутника POC :

$$PO = \sqrt{l^2 - l^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)} = l \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}. \quad (5)$$

Підставивши (2), (3), (5) в (1), матимемо:

$$V = \frac{4}{3} l^3 \cos \alpha \cdot \cos \beta \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

Д о с л і д ж е н н я. Як допоміжну фігуру виберемо тетраедр $POKC$. Необхідними і достатніми умовами його існування є:

$$0 < OK < OC < PC. \quad (6)$$

Справді, ці умови визначають область існування системи прямокутних трикутників OKC , POC , PKC , а вони — область існування тетраедра $POKC$ і, отже, піраміди $PABCD$.

За умовою задачі:

$$l > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ. \quad (7)$$

Виразимо OK , OC , PC через l , α , β . Оскільки $OK = CM$, то, підставивши (3), (4) в (6), дістанемо:

$$0 < l \cdot \cos \alpha < l \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} < l. \quad (8)$$

Розв'язавши цю систему та врахувавши умови (7), матимемо:

$$l > 0, 90^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ.$$

Дослідження задачі можна здійснити також на основі інших вихідних умов, необхідних і достатніх для існування даної фігури при даних параметрах l , α , β , а саме:

а) $l > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ, OK < PK$;

б) $l > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ, OM < PM$

та ін.

Задача 83. Діагональ d основи прямокутного паралелепіпеда утворює з стороною основи кут φ . Кут між цією

стороною і діагоналлю паралелепіпеда дорівнює β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

Розв'язання. Побудуємо відрізки AC , B_1A , B_1D (мал. 53). За умовою задачі: $AC = d$, $\angle B_1DA = \beta$, $\angle CAD = \varphi$.

Бічну поверхню паралелепіпеда знайдемо за формулою:

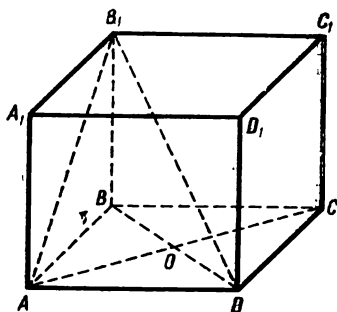
$$S_6 = 2 \cdot (AD + DC) \cdot AA_1. \quad (1)$$

Розглядаючи прямокутні трикутники ACD , AB_1D , AA_1B_1 , знайдемо:

$$AD = d \cdot \cos \varphi. \quad (2)$$

$$DC = d \cdot \sin \varphi. \quad (3)$$

$$B_1A = AD \cdot \operatorname{tg} \beta = d \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad AA_1 = \sqrt{B_1A^2 - B_1A_1^2},$$



Мал. 53

$$\begin{aligned} AA_1 &= \sqrt{d^2 \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \beta - d^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{d}{\cos \beta} \sqrt{\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \beta - \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \beta} = \\ &= \frac{d}{\cos \beta} \sqrt{\sin(\beta + \varphi) \sin(\beta - \varphi)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Підставивши (2), (3), (4) в (1), маємо:

$$\begin{aligned} S_6 &= 2 \cdot (d \cdot \cos \varphi + d \cdot \sin \varphi) \cdot \frac{d}{\cos \beta} \sqrt{\sin(\beta + \varphi) \sin(\beta - \varphi)} = \\ &= \frac{2d^2}{\cos \beta} (\cos \varphi + \sin \varphi) \sqrt{\sin(\beta + \varphi) \sin(\beta - \varphi)} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}d^2}{\cos \beta} \sin(45^\circ + \varphi) \sqrt{\sin(\beta + \varphi) \sin(\beta - \varphi)}. \end{aligned}$$

Дослідження. За умовою задачі знаходимо:

$$d > 0, \quad 0^\circ < \varphi < 90^\circ, \quad 0^\circ < \beta < 90^\circ. \quad (5)$$

Як допоміжну фігуру виберемо тетраедр B_1ABD . Областю його існування є:

$$0 < AB < BD < B_1D. \quad (6)$$

Справді, якщо $0 < AB < BD$, існує прямокутний трикутник ABD — основа тетраедра (див. додаток 1), а коли $0 < BD < B_1D$, існує прямокутний трикутник B_1BD , отже, існує точка B_1 — четверта вершина тетраедра.

Знайшовши з прямокутного трикутника AB_1D

$$B_1D = \frac{AD}{\cos \beta} = \frac{d \cdot \cos \varphi}{\cos \beta}$$

та врахувавши, що $AB = DC$, $BD = d$, підставимо в (6):

$$0 < d \cdot \sin \varphi < d < \frac{d \cdot \cos \varphi}{\cos \beta}.$$

Розв'язавши знайдену систему нерівностей та врахувавши (5), маємо: $d > 0$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, $0^\circ < \beta - \varphi < 90^\circ$.

Відповідь. Бічна поверхня паралелепіпеда дорівнює $\frac{2\sqrt{2}d^2}{\cos \beta} \sin(45^\circ + \varphi) \sqrt{\sin(\beta + \varphi) \sin(\beta - \varphi)}$, причому $d > 0$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, $0^\circ < \beta - \varphi < 90^\circ$.

За вихідні умови, необхідні і достатні для існування паралелепіпеда, при даних параметрах d , β , φ можна взяти інші умови:

- а) $BA > 0$, $BD > 0$, $BB_1 > 0$;
- б) $0 < AD < BD$, $B_1B > 0$;
- в) $AD > 0$, $0 < B_1B < B_1A$;
- г) $AD > 0$, $AB > 0$, $0^\circ < \angle B_1DB < 90^\circ$;
- д) $0 < BB_1 < AB_1$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$ та ін.

Задача 84. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при бічному ребрі дорівнює α . Знайдіть висоту піраміди, якщо відстань від основи висоти до бічного ребра дорівнює d .

Розв'язання. Побудуємо $C_1B_1 \parallel CB$, $OD \perp PA$ (мал. 54), тоді $PA \perp$ пл. B_1C_1D , тому $\angle B_1DC_1 = \alpha$, $OD = d$ (за умовою задачі).

Оскільки $S_{\triangle APO} = \frac{1}{2} AO \cdot PO = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot OD$, то

$$PO = \frac{AP \cdot OD}{AO}. \quad (1)$$

Підставивши (2), (3) та $OC_1 = d \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ в (5), матимемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} d\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0, \\ d \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0, \\ \frac{d\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}} > 0. \end{cases}$$

Розв'язавши її з урахуванням (4), дістанемо: $d > 0$, $60^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Відповідь. Висота піраміди дорівнює $\frac{d\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}$,

причому $d > 0$, $60^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Задача 85. Бічні ребра трикутної піраміди мають однакову довжину l . З трьох плоских кутів, утворених при вершині піраміди цими ребрами, два дорівнюють α , а третій — β . Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання. Нехай за умовою задачі: $PA = l$, $\angle APB = \angle APC = \alpha$, $\angle BPC = \beta$ (мал. 55).

Через те, що $PA = PB = PC$, то O — центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC , де $AB = AC$. Побудуємо $AD \perp BC$, тоді $DC = DB$ і точка O належить AD . Отже, об'єм піраміди обчислимо за формулою:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD \cdot PO. \quad (1)$$

Але

$$BC = 2 \cdot CD = 2l \cdot \sin \frac{\beta}{2}. \quad (2)$$

Проведемо $PK \perp AC$, тоді $AC = 2 \cdot KA = 2l \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$. Знайдемо

$$AD = \sqrt{4l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} = l \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}. \quad (3)$$

Обчислимо радіус описаного кола

$$OC = \frac{2l \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}.$$

Тоді

$$PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} = l \sqrt{\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}. \quad (4)$$

Підставивши (2), (3), (4) в (1), дістанемо:

$$V = \frac{1}{3} l^3 \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Д о с л і д ж е н н я. Умови існування даної піраміди $PABC$ складаються з умов існування бічних граней та тригранного кута з вершиною P , тобто: $l > 0$, $2\alpha > \beta$, $2\alpha + \beta < 360^\circ$.

Справді, при цих умовах існують трикутники PAB , PAC , PBC та тригранний кут з вершиною P .

Остаточнo: $l > 0$, $0^\circ < \frac{\beta}{2} < \alpha < 180^\circ - \frac{\beta}{2}$.

В і д п о в і д ь. Об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{3} l^3 \times$

$$\times \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \left(\sin \alpha + \frac{\beta}{2}\right)},$$

причому $l > 0$, $0^\circ < \frac{\beta}{2} < \alpha < 180^\circ - \frac{\beta}{2}$.

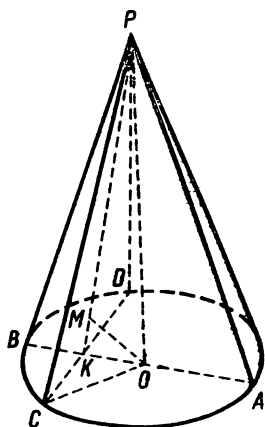
Задача 86 ([9], № 13, § 20). Висота конуса h , радіус його основи R . Знайдіть площу перерізу, проведеного через вершину конуса, якщо відстань від нього до центра основи конуса дорівнює d .

Р о з в' я з а н н я. За умовою задачі: $PO = h$, $OM = d$, $OC = R$ (мал. 56). Оскільки $OK \perp CD$, то $PK \perp CD$, тому:

$$S_{\Delta CPD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot PK. \quad (1)$$

З подібності прямокутних трикутників OMP та KOP маємо: $MP : OP = OP : PK$. Але $MP = \sqrt{h^2 - d^2}$, тому

$$PK = \frac{h^2}{\sqrt{h^2 - d^2}}. \quad (2)$$



Мал. 56

З прямокутного трикутника OKP_1 $OK = \frac{dh}{\sqrt{h^2 - d^2}}$.

З прямокутного трикутника $СОК_1$

$$CK = \sqrt{R^2 - \frac{d^2 h^2}{h^2 - d^2}}. \quad (3)$$

Але $CD = 2 \cdot CK$, тому

$$CD = 2 \sqrt{R^2 - \frac{d^2 h^2}{h^2 - d^2}}. \quad (4)$$

Підставивши (2) та (4) в (1), дістанемо:

$$S = \frac{h^2 \sqrt{R^2 h^2 - R^2 d^2 - d^2 h^2}}{h^2 - d^2}.$$

Дослідження. За умовою задачі:

$$0 < d < h, R > 0. \quad (5)$$

Як допоміжну фігуру візьмемо тетраедр $POCK$. Його областю існування є: $0 < CK < OC, OP > 0$. (6)

Підставивши (3) в (6), матимемо:

$$0 < \sqrt{R^2 - \frac{d^2 h^2}{h^2 - d^2}} < R, h > 0.$$

Розв'язавши цю систему нерівностей та врахувавши (5), отримаємо: $0 < d < \frac{Rh}{\sqrt{R^2 + h^2}} < h$.

Відповідь. Площа перерізу дорівнює

$$\frac{h^2 \sqrt{R^2 h^2 - R^2 d^2 - d^2 h^2}}{h^2 - d^2}, \text{ причому } 0 < d < \frac{Rh}{\sqrt{R^2 + h^2}} < h.$$

Задача 87. У циліндрі проведено паралельно осі площину, яка відтинає від кола основи дугу α . Знайдіть площу перерізу, якщо радіус кола основи дорівнює R , а відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з серединою хорди, яка стягує дану дугу, нахилений до площини основи теж під кутом α .

Розв'язання. За умовою задачі $OA = R$, $\angle AOB = \alpha$, $\angle O_1CO = \alpha$ (мал. 57).

Площу перерізу обчислимо за формулою:

$$S_{AA_1B_1B} = AB \cdot AA_1. \quad (1)$$

Але

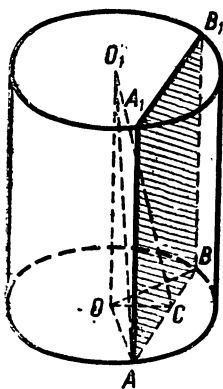
$$AB = 2 \cdot AC = 2R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (2)$$

$$OC = R \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (3)$$

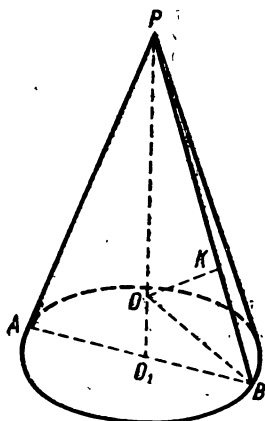
тому

$$AA_1 = OO_1 = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha = R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

Підставивши (2), (4) в (1), матимемо: $S_{AA_1B_1B} = R^2 \times \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$.



Мал. 57



Мал. 58

Д о с л і д ж е н н я. За умовою задачі:

$$R > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad (5)$$

За допоміжну фігуру виберемо тетраедр O_1OAC . Областю його існування є:

$$0 < OC < OA, OO_1 > 0. \quad (6)$$

Справді, якщо $0 < OC < OA$, існує прямокутний $\triangle OAC$, а коли $OC > 0, OO_1 > 0$, існує прямокутний $\triangle OO_1C$, тому існує тетраедр O_1OAC , а, отже, існує циліндр.

Підставивши (3), (4) в (6), матимемо:

$$\begin{cases} 0 < R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} < R, \\ R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha > 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему нерівностей і врахувавши (5), матимемо: $R > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Відповідь. Площа перерізу дорівнює $R^2 \times \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$, причому $R > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Задача 88. Обчисліть об'єм конуса, якщо радіус вписаної в нього кулі дорівнює r , а кут, під яким твірну видно з центра кулі, дорівнює α .

Розв'язання. За умовою задачі $OK = OO_1 = r$, $\angle POB = \alpha$ (мал. 58).

Об'єм конуса обчислимо за формулою:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot O_1 B^2 \cdot PO_1. \quad (1)$$

З прямокутного трикутника OO_1B :

$$O_1 B = r \cdot \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -r \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Оскільки $\angle PBO_1 = 2 \cdot \angle OBO_1 = 2 \cdot (90^\circ - \angle O_1OB) = 2 \cdot (90^\circ - (180^\circ - \alpha)) = 2\alpha - 180^\circ$, то з прямокутного трикутника PO_1B

$$PO_1 = O_1 B \cdot \operatorname{tg} \angle PBO_1 = -r \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha. \quad (3)$$

Підставивши (2), (3) в (1), матимемо:

$$V = -\frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Дослідження. За умовою задачі:

$$r > 0, 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \angle O_1OB < \alpha, V > 0. \quad (4)$$

Через те, що $\angle O_1OB = 180^\circ - \alpha$, то $\alpha > 90^\circ$.

Розв'язавши систему нерівностей

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha > 0, \\ \alpha > 90^\circ \end{cases}$$

та врахувавши (4), матимемо: $r > 0, 90^\circ < \alpha < 135^\circ$.

Відповідь. Об'єм конуса дорівнює $-\frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \times \operatorname{tg} 2\alpha$, причому $r > 0, 90^\circ < \alpha < 135^\circ$.

Задача 89. У паралелепіпеді менша сторона основи дорівнює a . Діагональ паралелепіпеда утворює з більшою бічною гранню кут α , а з площиною основи — кут β . Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо паралелепіпеда.

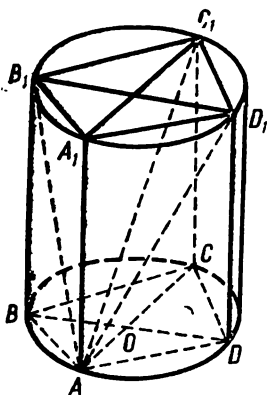
Розв'язання. Нехай у паралелепіпеді A_1C_1
 $AB < AD$, $AB = a$, $\angle C_1AD_1 = \alpha$, $\angle C_1AC = \beta$ (мал. 59).

Об'єм циліндра обчислимо за формулою:

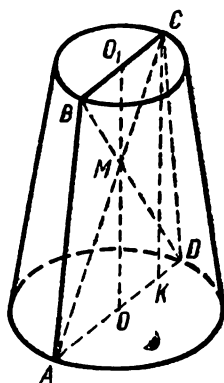
$$V = \pi \cdot OA^2 \cdot CC_1. \quad (1)$$

З прямокутного трикутника AC_1D_1

$$AC_1 = \frac{a}{\sin \alpha}. \quad (2)$$



Мал. 59



Мал. 60

З прямокутного трикутника AC_1C :

$$AC = AC_1 \cdot \cos \beta = \frac{a \cdot \cos \beta}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

$$CC_1 = AC_1 \cdot \sin \beta = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}, \quad (4)$$

тому

$$OA = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{a \cdot \cos \beta}{2 \sin \alpha}. \quad (5)$$

Підставимо (4), (5) в (1):

$$V = \frac{\pi a^3 \sin \beta \cos^2 \beta}{4 \sin^3 \alpha}.$$

Дослідження. За умовою задачі:

$$a > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ. \quad (6)$$

За допоміжну фігуру візьмемо тетраедр C_1ACD . Областю його існування є:

$$0 < CD < AD < AC, CC_1 > 0. \quad (7)$$

Справді, якщо $0 < AD < AC$, існує прямокутний $\triangle ACD$, у якого (за умовою задачі) $CD < AD$. Якщо $AC > 0$, $CC_1 > 0$, існує прямокутний $\triangle AC_1C$, тобто існує тетраедр C_1ACD , а, отже, паралелепіпед AC_1 і циліндр.

Знайшовши

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{a}{\sin \alpha} \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}, \quad (8)$$

підставимо (3), (4), (8) в (7):

$$0 < a < \frac{a}{\sin \alpha} \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha} < \frac{a \cdot \cos \beta}{\sin \alpha}; \quad \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} > 0.$$

Розв'язавши знайдену систему нерівностей та врахувавши (6), матимемо: $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$, $0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < \arccos(\sqrt{2} \sin \alpha)$.

Задача 90. У зрізаному конусі діагоналі осевого перерізу взаємно перпендикулярні, а твірна утворює з площиною більшої основи кут α і дорівнює l . Знайдіть бічну поверхню конуса.

Розв'язання. Нехай у зрізаному конусі: $AB = l$, $\angle AMD = 90^\circ$, $\angle BAD = \alpha$ (мал. 60).

Бічну поверхню конуса знайдемо за формулою:

$$S_{б.} = \pi \cdot (OD + O_1C) \cdot CD. \quad (1)$$

Провівши $CK \perp AD$, знайдемо:

$$CK = l \cdot \sin \alpha. \quad (2)$$

Через те, що $AC \perp BD$, $AB = CD$, то $O_1C = O_1M$, $OD = OM$, тому

$$OD + O_1C = O_1O = CK = l \cdot \sin \alpha. \quad (3)$$

Підставивши (3) в (1), матимемо:

$$S_{б.} = \pi l^2 \cdot \sin \alpha.$$

Дослідження. За умовою задачі знаходимо:

$$l > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ та } 0^\circ < \angle MDA < \angle CDA. \quad (4)$$

Справді, якщо $l > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, існує (див. додаток 1) прямокутний $\triangle CKD$, а коли $l > 0$, $0^\circ < \angle MDA < \angle CDA$, існує прямокутний $\triangle DMC$, тому існує AD , а, отже, даний конус.

Але $\angle MDA = 45^\circ$, тому маємо: $0^\circ < 45^\circ < \alpha$. Остаточно: $l > 0$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

В і д п о в і д ь. Бічна поверхня конуса дорівнює $\pi l^2 \sin \alpha$, де $l > 0$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Повернемось до розв'язаної задачі 6 (розділ I, § 1). Знайдемо область існування геометричної фігури з цієї задачі.

Д о с л і д ж е н н я. За умовою $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (мал. 3). Виходитимемо з того, що переріз існує, якщо його площина проходить всередині двогранного кута при основі піраміди або, що звідси випливає, перпендикуляр KF до площини бічної грані BPC проходить всередині кута PKE . Звідси знаходимо шукану умову.

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай переріз існує, тобто FK проходить всередині кута PKE . Тоді $\angle FKE$ є його частиною і, отже, $0^\circ < \angle FKE < \alpha$ (аксіома V).

У прямокутному трикутнику EFK один з гострих кутів менший від α , другий дорівнює α . Тому $0^\circ < \angle FKE < 45^\circ$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай $45^\circ < \alpha < 90^\circ$, тоді $\triangle EPK$ — гострокутний, його висота FK проходить всередині $\angle PKE$. Переріз існує.

Задача 42 (Розділ II, § 2).

Д о с л і д ж е н н я. За умовою задачі (мал. 28): $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Виділимо допоміжну фігуру — тетраедр $PMNB$. Область його існування можна записати, наприклад, так:

$$0 < PM < PB < PN. \quad (1)$$

Ці умови є не лише необхідними, а й достатніми для існування тетраедра. Справді, якщо $0 < PM < PB$, існує прямокутний $\triangle PMB$, тобто існує $MB > 0$. З існування $MN = 2 \cdot MB > 0$ випливає існування $PB < PN$, тому існує тетраедр $PMNB$, а, отже, і піраміда $PABCD$.

З прямокутного трикутника PMN :

$$PM = a \operatorname{tg} \alpha, \quad (2)$$

$$PN = \frac{a}{\cos \alpha}. \quad (3)$$

З прямокутного трикутника PMB :

$$PB = \frac{a}{2 \sin \alpha}. \quad (4)$$

Підставивши (2), (3), (4) в (1), матимемо:

$$0 < a \cdot \operatorname{tg} \alpha < \frac{a}{2 \sin \alpha} < \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Розв'язавши систему нерівностей та врахувавши умову задачі, дістанемо $a > 0$, $\arctg \frac{1}{2} < \alpha < \arccos \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$, що дає (наближено) $26^\circ 34' < \alpha < 38^\circ 41'$.

Оскільки кут $\arctg \frac{1}{2}$ не належить знайденому проміжку, то це — приклад переозначеної задачі, яка при заданих числових величинах не має розв'язку.

§ 6. ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ ТА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТЬ

Планіметрія

1. У рівнобедреному трикутнику відношення довжини висоти до радіуса кола, описаного навколо нього, дорівнює n . Знайти величини кутів.

2. Обчислити довжини сторін прямокутного трикутника, периметр якого дорівнює P , а площа — S .

3. У прямокутному трикутнику дано площу S та радіус r вписаного кола. Знайти катети.

4. Сума одного катета і гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює m , а сума другого катета і гіпотенузи дорівнює n . Знайти гіпотенузу.

5. Знайти третю сторону трикутника, якщо дано дві його сторони a і b та відомо, що медіани, які відповідають цим сторонам, перетинаються під прямим кутом. При яких умовах такий трикутник існує?

6. У трапеції довжини меншої та більшої основ відповідно дорівнюють a і b , а величини кутів при більшій основі α , β . Знайти довжини бічних сторін.

7. Площа паралелограма дорівнює S , його периметр P , а різниця квадратів діагоналей дорівнює q^2 . Знайти сторони паралелограма.

8. Знайти відношення k периметра ромба до суми його діагоналей.

9. Площа ромба дорівнює Q , а площа вписаного в нього круга S . Знайти кути ромба.

10. З точки A , взятої поза колом на відстані $2R$ від центра, проведено дотичну AD та січну ACB ($AC < AB$). Обчислити довжини відрізків AB та AC , якщо січна утворює кут α з продовженням діаметра даного кола.

Стереометрія

11. З точки, що лежить поза площиною, проведено до неї дві похилі. Довжина однієї в n разів більша від довжини другої. Знайти косинус кута, який утворює з площиною перша похила, якщо друга утворює кут, в два рази більший, ніж перший. Для яких значень n задача має розв'язки?

12. З точки A , яка не належить площині α , проведено до цієї площини похилі $AB = c$ та $AC = b$. Кут між похилою AC та площиною в два рази більший від кута між похилою AB та тією самою площиною. Яка залежність між параметрами b та c ?

13. Відстань від точки M до вершини даного прямого кута дорівнює a , а від кожної з його сторін — b . Знайти відстань від точки M до площини прямого кута.

14. Відстань відрізків MK від площини, паралельної йому, дорівнює a , відстань точки A , що належить площині, до відрізка MK дорівнює b . Прямі AM та AK утворюють з площиною кути, величини яких відповідно дорівнюють 30° та 45° . Знайти довжину відрізка MK .

15. У прямокутному трикутнику через його гіпотенузу проведено площину P , яка утворює з площиною трикутника кут α , а з більшим катетом кут β . Знайти синус кута x між площиною P та меншим катетом.

16. З вершини A кута BAC , величина якого дорівнює α , проведено похилу до площини цього кута, що утвориться з його сторонами AB та AC рівні гострі кути β . Яка залежність між параметрами α і β ?

17. У тетраедрі $ABCD$ грань ACD — правильний трикутник із стороною a , грань ABC — рівнобедрений прямокутний трикутник ($\angle ACB = 90^\circ$); довжина ребра BD дорівнює b . Знайти величину двогранного кута при ребрі AC . При яких значеннях параметрів задача має розв'язки?

18. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник зі сторонами a , a , b . Кожне бічне ребро дорівнює l . Знайти об'єм піраміди.

19. Довести, що кути α і β , які утворює бічна грань правильної чотирикутної піраміди з площиною основи та з суміжною бічною гранню, зв'язані співвідношенням:

$$\cos \alpha = \sqrt{-\cos \beta}.$$

20. Повна поверхня правильної чотирикутної піраміди дорівнює S , а плоский кут бічної грані при вершині піраміди α . Знайти висоту піраміди.

21. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a , бічне ребро нахилене до площини основи під кутом α . Через вершину основи піраміди проведено переріз, перпендикулярний до протилежного бічного ребра. Знайти площу перерізу.

22. Обчислити об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює l , а двогранний кут між суміжними бічними гранями дорівнює α .

23. В основі піраміди лежить прямокутник із сторонами a і b . Рівні бічні ребра мають довжину l . Знайти область існування піраміди.

24. Основою піраміди є ромб із стороною a . Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи і утворюють між собою тупий кут β ; дві інші бічні грані нахилені до площини основи під кутом α . Обчислити бічну поверхню піраміди.

25. Знайти об'єм правильної зрізаної чотирикутної піраміди, якщо сторони основ a і b , де $a > b$, а бічне ребро нахилене до сторони більшої основи під кутом α .

26. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V , а кут між діагоналями двох граней, проведених з однієї і тієї самої вершини, дорівнює α . Знайти сторону основи призми.

27. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$), в якому сторона BC дорівнює a , а кут ABC дорівнює β . Діагональ однієї з рівних бічних граней утворює з нерівною іншою бічною гранню кут α . Знайти бічну поверхню призми.

28. Основа призми — рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом a ; бічне ребро, протилежне гіпотенузі, утворює з катетами гострі кути α і β . Знайти об'єм призми, якщо довжина бічного ребра дорівнює b .

29. У рівносторонньому циліндрі, радіус основи якого R , пряма, що сполучає точку кола верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут α . Обчислити відстань цієї прямої від осі циліндра.

30. У конусі, радіус основи якого R , а твірна нахилена до площини основи під кутом α , проведено площину через вершину конуса під кутом β до його висоти. Знайти площу утвореного перерізу.

31. Переріз, проведений через дві твірні зрізаного конуса, утворює з площиною основи конуса кут α . Знайти площу перерізу, якщо радіуси основ конуса R та r ($R > r$), а твірна конуса нахилена до площини основи під кутом β .

32. В основу конуса вписано квадрат, сторона якого дорівнює a . Площина, що проходить через вершину конуса і одну із сторін цього квадрата, утворює в перерізі з поверхнею конуса трикутник з кутом при вершині α . Знайти об'єм конуса.

33. У правильній чотирикутній піраміді бічні грані нахилені до основи під кутом α , апофема дорівнює m . Через сторону основи піраміди проведено площину, перпендикулярну до протилежної бічної грані і через сторону утвореного перерізу проведено нову площину, паралельну основі піраміди, яка відтинає від даної піраміди зрізану піраміду. Обчислити бічну поверхню зрізаної піраміди.

34. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді бічне ребро довжиною a дорівнює стороні більшої основи і утворює з нею кут α . Центр більшої основи є вершиною повної піраміди, основа якої суміщається з меншою основою зрізаної піраміди. Знайти різницю об'ємів зрізаної і повної піраміди.

35. У циліндр вписано паралелепіпед, в якого більша сторона основи дорівнює a . Діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом α , а з бічною гранню, що проходить через більшу сторону основи, утворює кут β . Знайти бічну поверхню циліндра.

36. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , двогранний кут при бічному ребрі α . Обчислити бічну поверхню конуса, описаного навколо піраміди.

37. У конус вписано піраміду, основою якої є прямокутний трикутник, а бічна грань, що проходить через один з його катетів, утворює з площиною основи кут α . Обчислити об'єм піраміди, якщо твірна конуса дорівнює l і утворює з площиною основи кут β .

38. Твірна конуса нахилена до площини його основи під кутом α . В основі піраміди $PABC$, вписаної в цей конус, лежить рівнобедрений трикутник ABC , в якому $AB = AC$; бічна грань PBC піраміди нахилена до площини основи під кутом β . Відстань від вершини A основи піраміди до протилежної бічної грані дорівнює d . Знайти об'єм піраміди.

39. У кулю радіуса R вписаний паралелепіпед, діагональ якого утворює з однією з бічних граней кут β , а з іншою — кут α .

Обчислити об'єм паралелепіпеда.

40. В кулю радіуса R вписано паралелепіпед, діагональ якого утворює з меншою бічною гранню кут α . Діагональ основи паралелепіпеда утворює з більшою стороною основи кут β . Обчислити бічну поверхню паралелепіпеда.

41. Двогранний кут при бічному ребрі правильної чотирикутної піраміди дорівнює α , радіус вписаної кулі дорівнює r . Знайти повну поверхню піраміди.

42. Обчислити об'єм кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди, бічне ребро якої l , а двогранний кут між бічними гранями дорівнює α .

43. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α ; через вершину основи піраміди і центр описаної навколо неї кулі проведено переріз піраміди, паралельний діагоналі основи. Знайти площу утвореного перерізу.

44. Радіус кулі, вписаної в правильну чотирикутну піраміду, дорівнює r . Двогранний кут при бічному ребрі піраміди дорівнює α . Знайти об'єм піраміди, що має вершину в центрі кулі, а вершини основи — в чотирьох точках дотику кулі до бічних граней даної піраміди.

45. У рівнобічній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони a , яка утворює з більшою основою кут $\alpha > 45^\circ$. Знайти поверхню тіла, утвореного обертанням трапеції навколо більшої основи.

46. У правильну чотирикутну піраміду вписано куб так, що його чотири вершини лежать на апофемах піраміди, а інші чотири — у площині її основи. Сторона основи піраміди дорівнює a , бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайти довжину ребра куба.

47. Куб, довжина ребра якого дорівнює a , вписано у правильну чотирикутну піраміду так, що його чотири вершини лежать на бічних ребрах піраміди, а чотири інші — у площині її основи. Бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом α . Знайти висоту піраміди.

48. У паралелепіпед, діагональ якого дорівнює d , а основою служить квадрат, вписано циліндр. Знайти його твірну, якщо радіус основи циліндра дорівнює r .

49. У циліндр, радіус основи якого дорівнює R ,

вписано правильну трикутну призму. Кут між діагоналями її двох суміжних бічних граней, що виходять з однієї вершини, дорівнює α . Знайти довжину твірної циліндра.

50. У правильну трикутну піраміду вписано конус, твірна якого нахилена до площини його основи під кутом α . Знайти кут нахилу бічного ребра піраміди до площини її основи.

51. У правильну чотирикутну піраміду, в якій двогранний кут при бічному ребрі дорівнює α , вписано конус. Чи правильно, що кут нахилу твірної до площини основи конуса дорівнює $\arctg\left(\frac{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \cos \alpha}}\right)$?

52. У правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює 6, вписано кулю радіуса 1. Чи правильно, що плоский кут χ при вершині піраміди дорівнює 60° ?

53. Відношення поверхні кулі до бічної поверхні вписаного в неї конуса дорівнює $\frac{8}{3}$. Знайти кут нахилу твірної конуса до площини його основи.

54. У конус вписано кулю, об'єм якої в 2 рази менший, ніж об'єм конуса. Знайти відношення площі повної поверхні конуса до площі поверхні кулі.

55. У кулю вписано конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α . Поверхня кулі дорівнює S . Знайти повну поверхню конуса.

56. Знайти бічну поверхню конуса, якщо радіус вписаної в нього кулі дорівнює r , а кут, під яким твірну конуса видно з центра кулі, дорівнює α .

57. У кулю вписано циліндр, у якого сума довжин діаметра основи і твірної дорівнює m , а кут між діагоналями в осьовому перерізі циліндра дорівнює α . Знайти радіус кулі.

58. У зрізаний конус вписано кулю. Сума діаметрів основ конуса дорівнює m , твірна нахилена до більшої основи під кутом α . Знайти радіус кулі.

59. Кулю вписано в правильну n -кутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a , двогранний кут при основі дорівнює α . Знайти радіус кулі.

60. У кулю радіуса R вписано циліндр з висотою H . Знайти об'єм циліндра. При якому H об'єм циліндра найбільший і чому він дорівнює?

61. У тетраедрі всі бічні ребра і дві сторони основи дорівнюють a . Величина кута між рівними сторонами основи дорівнює α . Знайти область існування тетраедра.

62. Дві бічні грані тетраедра — рівнобедрені прямокутні трикутники, довжини гіпотенуз яких дорівнюють b і утворюють між собою кут, величина якого дорівнює α . Знайти область існування тетраедра.

63. Прямокутний трикутник розміщений так, що його гіпотенуза належить площині P , а величини кутів між катетами і площиною P дорівнюють α та β . Довести, що $0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ$.

64. У прямокутному трикутнику через його гіпотенузу проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут α , а з більшим катетом — кут β . Довести, що $0^\circ < \beta < \chi < \alpha < 90^\circ$, де χ — величина кута між цією площиною і меншим катетом.

65. Бічні ребра тетраедра мають однакову довжину l . Величини плоских кутів, утворених при вершині тетраедра цими ребрами, дорівнюють α, α, β . Знайти область існування тетраедра.

66. У тетраедрі величини плоских кутів при вершині дорівнюють α, α, β . Ребро, що є спільною стороною рівних кутів, перпендикулярне до площини основи і дорівнює a . Знайти область існування тетраедра.

67. Плоскі кути тригранного кута при вершині тетраедра дорівнюють $\alpha, 60^\circ, 120^\circ$. Довжина сторони його основи дорівнює a . Знайти область існування тетраедра.

68. Довжина сторони основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , величина кута між бічним ребром і стороною її основи дорівнює β . Знайти область існування піраміди.

69. Основа тетраедра — рівнобедрений трикутник, у якого величини бічних сторін дорівнюють b , а кутів при основі — α . Величини кутів нахилу ребер до площини основи дорівнюють β . Знайти область існування тетраедра.

70. Основою тетраедра є рівнобедрений трикутник, рівні сторони якого мають однакову довжину b . Бічні грані тетраедра, що проходять через ці сторони, перпендикулярні до площини основи і утворюють між собою кут α . Величина кута між третьою бічною гранню і площиною основи дорівнює 2α . Знайти область існування тетраедра.

71. З центра основи правильної трикутної піраміди проведено перпендикуляр довжиною l до бічної грані. Величина кута між бічним ребром і стороною основи дорівнює α . Знайти область існування тетраедра.

72. Основою тетраедра $PABC$ є $\triangle ABC$, в якому $AB = AC$. Грані PAB та PAC перпендикулярні до площини основи, а третя грань утворює з площиною основи двогранний кут α . Бічне ребро, довжина якого b , нахилене до площини основи під кутом β . Знайти область існування тетраедра.

73. З точки, взятої поза площиною, проведені до неї дві похилі; довжина першої з них в n разів більша від довжини другої. Знайти косинус кута, який утворює з площиною перша похила, якщо друга утворює з площиною кут, величина якого вдвоє більша, ніж першого. Для яких значень n задача має розв'язки?

74. Довжини проєкцій похилих, проведених з точки M до площини, дорівнюють відповідно a і b ($a > b$), а різниця довжин похилих дорівнює d . Довести, що $0 < d < a - b$.

75. У правильній трикутній піраміді довжини висоти і сторони основи відповідно дорівнюють h і a . Знайти умову можливості проведення внутрішнього перерізу піраміди площиною, що проходить через сторону основи перпендикулярно до протилежного бічного ребра.

76. У правильній трикутній піраміді через сторону основи проведено площину, перпендикулярну до протилежного бічного ребра. Яких значень може набувати величина x плоского кута при вершині піраміди?

77. У правильній трикутній піраміді $PABC$ проведено переріз площиною, що проходить через сторону BC основи і перетинає ребро PA в точці K , причому пл. $BKC \perp PA$. Яких значень може набувати $\angle BKC = x$?

78. Знайти синус двогранного кута між основою і бічною гранню правильної трикутної піраміди, якщо величина двогранного кута між її бічними гранями дорівнює α .

79. У правильній трикутній піраміді через сторону основи проведено площину, перпендикулярну до протилежного бічного ребра. Яких значень може набувати величина x кута між бічним ребром і стороною основи піраміди?

80. У правильній трикутній піраміді відношення сторони основи до бічного ребра дорівнює m . Через сторону основи піраміди проведено переріз перпендикуляр-

но до протилежного бічного ребра. При яких значеннях m переріз буде внутрішнім?

81. Через сторону основи правильної трикутної піраміди проведено переріз під кутом α до її основи. Знайти площу перерізу, якщо довжина сторони основи піраміди дорівнює a і величина кута між бічним ребром і площиною основи піраміди дорівнює 2α .

82. У правильній трикутній піраміді довжина сторони основи дорівнює a і утворює з бічним ребром кут α . Знайти площу перерізу, що проходить через ребро і висоту піраміди.

83. У правильній трикутній піраміді величина двогранного кута між бічними гранями дорівнює α . Знайти висоту піраміди, якщо відстань від центра основи піраміди до бічного ребра дорівнює a .

84. У правильній трикутній піраміді величина кута між бічним ребром і стороною основи дорівнює α , а довжина радіуса кола, вписаного в бічну грань, дорівнює r . Знайти висоту піраміди.

85. У правильній трикутній піраміді довжина сторони основи дорівнює a і величина плоского кута при вершині піраміди дорівнює 2α . Знайти площу перерізу піраміди площиною, що проходить через сторону основи перпендикулярно до протилежного бічного ребра.

РОЗДІЛ I.

- § 3. 1. $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. 2. $\frac{2ab}{a+b} \cos \frac{\alpha}{2}$. 3. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 5. $\frac{1}{2} \times$
 $\times \sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$. 6. $\frac{1}{2} m^2 \sin 2\beta + m \sin \beta \sqrt{c^2 - m^2 \sin^2 \beta}$.
 20. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. 21. $\frac{\pi}{2}$, $\arccos \frac{4}{5}$, $\arcsin \frac{4}{5}$.
 22. $4R^2 + 2R \times \sqrt{4R^2 - l^2}$. 23. $\frac{2ab}{a+b}$. 24. $54^\circ 44'$. 25. 30° або
 $11^\circ 32'$. 26. В к а з і в к а. Замінити площу трапеції площею трикутника,
 побудованого перенесенням діагоналі трапеції паралельно самій
 собі. В і д п о в і д ь. $\sqrt{S}$. 27. В к а з і в к а. Спочатку замінити побу-
 дову шуканого квадрата побудовою квадрата, у якого три вершини
 задовольняють умову задачі, а четверта — ні. 28. В к а з і в к а. Добу-
 дувати піраміду до паралелепіпеда. В і д п о в і д ь. $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
 29. В к а з і в к а. Добудувати тетраедр до паралелепіпеда і для
 кожної його грані використати теорему, що зв'язує сторони і діа-
 agonалі паралелограма. 30. 30° , 60° . 31. 45° , 90° . 32. Немає роз-
 в'язків. 33. $48^\circ 47'$, $97^\circ 34'$. 34. 30° , 60° , 120° , 60° . 35. По 60° .
 36. 30° , 60° . 37. $\cos x = \frac{1}{3}$. 45. Так. 49. $a\sqrt{3,5}$. 50. 60° .

Розділ III.

- § 5. 1. $\arcsin \sqrt{n(2-n)}$, $\arcsin \sqrt{\frac{n}{2}}$; $0 < n < 2$. 2. $\frac{1}{2} \times$
 $\times \left(\frac{P^2 + 4S}{2P} \pm \sqrt{\left(\frac{P^2 + 4S}{2P} \right)^2 - 8S} \right)$, $S > \frac{P^2}{4(4P-1)} > 0$.
 3. $\frac{r^2 + S \pm \sqrt{(S-r^2)^2 - 4Sr^2}}{2r}$; $\sqrt{S} \geq r(\sqrt{2}+1)$. 4. $m+n-$
 $-\sqrt{2mn}$; $0 < m < 2n < 4m$. 5. $x^2 = \frac{a^2 + b^2}{5}$, $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$.
 6. $\frac{(a-b)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \frac{(a-b)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; $a > 0$, $b > 0$, $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$.
 7. $\frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4\sqrt{q^4 + 16S^2}}}{4}$; $P^2 \geq 4\sqrt{q^4 + 16S^2}$. 8. $\sqrt{2} \leq k < 2$.
 9. $\arcsin \frac{4S}{\pi Q}$, $\pi - \arcsin \frac{4S}{\pi Q}$; $0 < S \leq \frac{\pi}{4} Q$. 10. $2R \cdot \cos \alpha \pm R \times$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{4 \cos^2 \alpha - 3}; R > 0, 0^\circ < \alpha < 30^\circ. \quad 11. \cos x = \frac{n}{2}, \sqrt{2} < n < 2. \quad 12. 0 < b\sqrt{2} < c < 2b. \quad 13. \sqrt{2b^2 - a^2}; b < a \leq b\sqrt{2}. \\
& 14. \sqrt{4a^2 - b^2} + \sqrt{2a^2 - b^2}; 0 < a < b \leq a\sqrt{2}. \quad 15. \sin x = \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}, 0 < \beta < x < \alpha < 90^\circ. \quad 16. 0^\circ < \frac{\alpha}{2} < \beta < 90^\circ. \\
& 17. 0 < a\sqrt{2 - \sqrt{3}} < b \leq a\sqrt{2}. \quad 18. \frac{1}{12}b \times \times \sqrt{4a^2 l^2 - b^2 l^2 - a^4}, 0 < b < 2a, l^2 > \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}. \quad 19. 0^\circ < \alpha < 90^\circ, 90^\circ < \beta < 180^\circ. \\
& 20. \frac{\sqrt{S \cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}}, S > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ. \\
& 21. -2a^2 \cos \alpha \operatorname{ctg} 2\alpha; a > 0, 45^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad 22. \frac{-2a^3 \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{3 \sin \frac{\alpha}{2}}, \\
& a > 0, 90^\circ < \alpha < 180^\circ. \quad 23. 0 < \sqrt{a^2 + b^2} < 2l. \quad 24. a^2 \sin \beta \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right); a > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ, 90^\circ < \beta < 180^\circ. \\
& 25. \frac{a^3 - b^3}{6 \cos \alpha} \times \times \sqrt{-\cos 2\alpha}, 0 < b < a, 45^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad 26. \sqrt[3]{\frac{V}{V \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 3 \right)}}; \\
& V > 0, 0^\circ < \alpha < 60^\circ. \quad 27. \frac{a^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha \cos^2 \beta} \sqrt{-\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}; \\
& a > 0, 0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ. \quad 28. \frac{1}{2} a^2 b \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}; a > 0, b > 0, 90^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ. \quad 29. \frac{R}{\sin \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}; R > 0, 45^\circ < \alpha < 90^\circ. \\
& 30. \frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}}{\cos \alpha \cos^2 \beta}; R > 0, 0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ. \quad 31. \frac{(R^2 - r^2) \operatorname{tg} \beta \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}}{\sin^2 \alpha \cos \beta}, R > r > 0, 0^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ. \\
& 32. \frac{\pi a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}}; a > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad 33. 16m^2 \times \times \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha; m > 0, 45^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad 34. \frac{4}{3} a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{-\cos 2\alpha}; a > 0, 45^\circ < \alpha < 90^\circ. \\
& 35. \frac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}; a > 0, 0^\circ < \beta < 45^\circ, 0^\circ < \alpha < \arccos(\sqrt{2} \sin \beta). \quad 36. \frac{\pi a^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ\right)}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a > 0, \quad 60^\circ < \alpha < 180^\circ. \quad 37. \frac{2l^3 \sin^2 \beta \operatorname{ctg} \alpha}{3 \sin \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}, \\
& l > 0, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ, \quad 0^\circ < \beta < 90^\circ, \quad \alpha > \beta. \quad 38. \frac{d^3 \sin \varphi}{6 \sin(\beta \pm \alpha)}; \\
& d > 0, \quad 0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ, \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad 39. 8R^3 \sin \alpha \sin \beta \times \\
& \times \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}; \quad R > 0, \quad \alpha > 0^\circ, \quad \beta > 0^\circ, \quad 0^\circ < \alpha + \beta < \\
& < 90^\circ. \quad 40. \frac{8\sqrt{2}R^2 \sin \alpha \sin(45^\circ + \beta)}{\cos^2 \beta} \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}; \\
& R > 0, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ, \quad 0^\circ < \beta < 90^\circ. \quad 41. \frac{2r^2(1 + \sqrt{-\cos \alpha})^3}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{-\cos \alpha}}; \\
& r > 0, \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ. \quad 42. \frac{\sqrt{3}}{2} \pi l^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}; \quad l > 0, \quad 60^\circ < \alpha < 180^\circ. \\
& 43. -\frac{b^2 \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{\cos 3\alpha}; \quad b > 0, \quad 30^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad 44. \frac{4}{3} r^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \times \\
& \times \sqrt{-\cos \alpha}; \quad r > 0, \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ. \quad 45. 4\pi a^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha; \\
& a > 0, \quad 45^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad 46. \frac{a \cdot \sin \alpha}{2 \sin(45^\circ + \alpha)}; \quad a > 0, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ. \\
& 47. \frac{a}{2} (1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad a > 0, \quad \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad 48. \sqrt{d^2 - 8r^2}; \\
& 0 < 2r\sqrt{2} < d. \quad 49. \frac{3R}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}; \quad R > 0, \\
& 0^\circ < \alpha < 60^\circ. \quad 50. \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right); \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad 51. \text{Так}; \quad 90^\circ < \\
& < \alpha < 180^\circ. \quad 52. \text{Hi}; \quad x = 2\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 53. 60^\circ \text{ або } \approx 48^\circ 42'. \quad 54. 2. \\
& 55. S \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad \sin 2\alpha; \quad S > 0, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad 56. -\frac{\pi r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos 2\alpha}; \quad r > 0, \\
& 90^\circ < \alpha < 180^\circ. \quad 57. \frac{m}{2\sqrt{2} \cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}; \quad m > 0, \quad 0^\circ < \alpha < 180^\circ. \\
& 58. \frac{1}{4} m \cdot \sin \alpha; \quad m > 0, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad 59. \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}; \quad n \geq 3, \\
& 0^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad 60. \pi H \left(R^2 - \frac{H^2}{4}\right); \quad 0 < H < 2R; \quad \text{при } H = \frac{2}{\sqrt{3}} R; \\
& U_{\text{наб.}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \pi R^3. \quad 61. a > 0, \quad 0^\circ < \alpha < 120^\circ. \quad 62. b > 0, \quad 0^\circ < \\
& < \alpha < 90^\circ. \quad 65. l > 0, \quad 0^\circ < \frac{\beta}{2} < \alpha < 180^\circ - \frac{\beta}{2}. \quad 66. a > 0, \quad 0^\circ < \\
& < \frac{\beta}{2} < \alpha < 180^\circ - \frac{\beta}{2}. \quad 67. a > 0, \quad 60^\circ < \alpha < 180^\circ. \quad 68. a > 0, \quad 30^\circ <
\end{aligned}$$

- $\angle \beta < 90^\circ$. 69. $b > 0$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$. 70. $b > 0$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. 71. $l > 0$, $30^\circ < \alpha < 90^\circ$. 72. $b > 0$, $0^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ$. 73. $\cos x = \frac{n}{2}$, $\sqrt{2} < n < 2$. 75. $0 < a < h\sqrt{6}$. 76. $0^\circ < x < 90^\circ$. 77. $60^\circ < x < 90^\circ$. 78. $\sin x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\alpha}{2}$, $60^\circ < \alpha < 90^\circ$. 79. $45^\circ < x < 90^\circ$. 80. $0 < m < \sqrt{2}$. 81. $\frac{a^2 \sqrt{3} \cdot \sin 2\alpha}{4 \cdot \sin 3\alpha}$; $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. 82. $\frac{a^2}{4 \cos \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + 30^\circ) \sin(\alpha - 30^\circ)}$; $a > 0$, $30^\circ < \alpha < 90^\circ$. 83. $\frac{a \sqrt{3} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sqrt{\sin(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ) \sin(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ)}}$; $a > 0$, $60^\circ < \alpha < 180^\circ$. 84. $\frac{r}{\sqrt{3 \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} \sqrt{3 - 4 \cos^2 \alpha}$; $r > 0$, $80^\circ < \alpha < 90^\circ$. 85. $\frac{a^2}{2} \sqrt{\sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)}$; $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Області існування деяких геометричних фігур,
заданих параметричними даними

№№ пп	Геометрична фігура	Параметричні дані, за допомогою яких задано геометричну фігуру	Область існування геометричної фігури
1	2	3	4
1	Відрізок	a — його довжина	$a > 0$
2	Трикутник	a — основа, γ , β — прилегли кути	$a > 0$, $0^\circ < \beta + \gamma < 180^\circ$
3	—»—	a , b — сторони, γ — кут між сторонами	$a > 0$, $b > 0$ $0^\circ < \gamma < 180^\circ$
4	—»—	a , b , c — його сторони	$ b - c < a < b + c$
5	Рівнобедрений трикутник	a — основа, l — бічна сторона	$0 < a < 2l$
6	—»—	a — основа, h_a — висота	$a > 0$, $h_a > 0$
7	—»—	a — основа, β — кут при основі	$a > 0$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$
8	—»—	a — основа, α — кут між бічними сторонами	$a > 0$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$
9	—»—	l — бічна сторона, α — кут при основі	$l > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
10	—»—	h_a — висота, l — бічна сторона	$0 < h_a < l$
11	Правильний трикутник	a — сторона	$a > 0$
12	Прямокутний трикутник	a — катет, c — гіпотенуза	$0 < a < c$
13	—»—	a — катет, α — гострий кут	$a > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
14	Прямокутний трикутник	c — гіпотенуза, α — гострий кут	$c > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
15	—»—	a — катет, b — катет	$a > 0$, $b > 0$
16	Тригранний кут	α , β , γ — його плоскі кути	$\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$ $\alpha < \beta + \gamma$, де $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$
17	Правильна трикутна піраміда	R — радіус кола, описаного навколо основи, l — бічне ребро	$0 < R < l$
18	—»—	H — висота піраміди, l — бічне ребро	$0 < H < l$

1	2	3	4
19	—»—	r — радіус кола, вписаного в основу піраміди, m — апофема піраміди	$0 < r < m$
20	—»—	R — радіус кола, описаного навколо основи, H — висота піраміди	$R > 0, H > 0$
21	Правильна трикутна піраміда	r — радіус кола, вписаного в основу піраміди, H — висота піраміди	$r > 0, H > 0$
22	—»—	a — сторона основи, α — плоский кут при вершині піраміди	$a > 0, 0^\circ < \alpha < 120^\circ$
23	—»—	a — сторона основи, β — кут між бічним ребром і стороною основи піраміди	$a > 0, 30^\circ < \beta < 90^\circ$
24	—»—	a — сторона основи піраміди, H — висота піраміди	$a > 0, H > 0$
25	—»—	a — сторона основи піраміди, l — бічне ребро	$0 < a < l\sqrt{3}$
26	Правильна трикутна піраміда	a — сторона основи піраміди, m — апофема піраміди	$0 < a < 2m\sqrt{3}$
27	—»—	H — висота піраміди, m — апофема піраміди	$0 < H < m$

Додаток 2

Система аксіом шкільного курсу геометрії (Погорелов О. В. Геометрія 7—11, 1990)

I. Аксіоми належності точок і прямих на площині.

1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

2. Аксіома розміщення точок на прямій.

II. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

3. Аксіома вимірювання відрізків.

III. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

4. Аксіома розміщення точок відносно прямої на площині.

IV. Пряма розбиває площину на дві півплощини.

5. Аксиома вимірювання кутів.

V. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180° . Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

6. Аксиоми відкладання відрізків і кутів.

VI. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.

VII. Від будь-якої півпрямой у даній півплощині можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою 180° , і тільки один.

7. Аксиома існування трикутника, що дорівнює даному.

VIII. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому у заданому розміщенні відносно даної півпрямой.

8. Аксиома паралельних прямих.

IX. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більш як одну пряму, паралельну даній.

Додаток 3

Кількість незалежних параметрів, за допомогою яких визначаються деякі геометричні фігури

№№ пп	Назва геометричної фігури	Кількість незалежних параметрів
1	Пряма в просторі	4
2	Відрізок у просторі	4
3	Взаємне розміщення n прямих у просторі	$4n - 6$
4	Довільний плоский n -кутник	$2n - 3$
5	Трикутник	3
6	Ромб	2
7	Паралелограм	3
8	Квадрат	1
9	Прямокутник	2
10	Трапеція	4
11	Вписаний (описаний) n -кутник	n
12	Куб	1
13	Довільний многогранник, що має n вершин ($n \geq 3$)	$3n - 6$
14	Довільний опуклий многогранник, що має P ребер	P
15	Правильна n -кутна піраміда (призма)	2
16	Довільна n -кутна піраміда (призма)	$2n$
17	Циліндр	2
18	Конус	2
19	Куля	1

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Айзенштат Я. И., Белоцерковская Б. Г. Решение задач по тригонометрии.— М.: Учпедгиз, 1960.— 255 с.
2. Батраченко Г. М. Область существования геометрических фигур и методы ее исследования.— К.: Рад. шк., 1965.— 106 с.
3. Василевский А. В. Обучение решению задач по математике.— Минск: Вышэйшая шк., 1988.— 255 с.
4. Выгодский М. Я., Рабинович В. Л. Некоторые принципиальные вопросы, связанные с решением конструктивных задач // Математика в школе.— 1965.— № 4.— С. 27—35.
5. Готман Э. Г., Скопец З. А. Решение геометрических задач аналитическим методом.— М.: Просвещение, 1979.— 128 с.
6. Лоповок Л. М. Збірник задач з геометрії для 6—8 класів.— К.: Рад. шк., 1983.— 96 с.
7. Новиков И. Д. Метод площадей // Квант.— 1971.— № 12.— С. 41—46.
8. О реформе общеобразовательной и профессиональной школы. Сборник документов и материалов.— М.: Политиздат, 1984.— 112 с.
9. Погорелов О. В. Геометрія 7—11. Навч. посібн. для серед. шк.— К.: Рад. шк., 1990.—
10. Рудник А. Е., Ключева Л. А., Мосолова М. С. Сборник задач по элементарной математике для техникумов.— М.: Наука, 1974.— 320 с.
11. Фридман Л. М. О требованиях к решению геометрических задач на вычисление // Математика в школе.— 1955.— № 4.— С. 7—19.
12. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи. 3-е изд.— М.: Просвещение, 1989.— 192 с.
13. Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике.— М.: Просвещение, 1986.— 255 с.

ВМІСТ

Передмова	3
---------------------	---

Розділ I. Загальні питання методики розв'язування геометричних задач	5
§ 1. Що означає розв'язати геометричну задачу	5
§ 2. Особливості побудови системи задач у навчальному посібнику	17
§ 3. Деякі методи розв'язування геометричних задач	21

Розділ II. Способи дослідження області існування геометричної фігури	42
§ 1. Доведення існування геометричної фігури	42
§ 2. Використання допоміжної геометричної фігури	50
§ 3. Використання вивідних умов	59
§ 4. Використання формули розв'язку задачі	60

Розділ III. Методика навчання учнів дослідженню геометричних задач	65
§ 1. Про необхідність дослідження геометричних задач	65
§ 2. Методика введення поняття «геометрична фігура існує» в шкільному курсі геометрії	70
§ 3. Необхідні і достатні умови існування геометричної фігури	77
§ 4. Деякі прийоми знаходження необхідних умов існування геометричної фігури	86
§ 5. Приклади розв'язування геометричних задач на обчислення	91
§ 6. Задачі для позакласної роботи та факультативних занять	110
Відповіді і вказівки	119
Додатки	121
Список використаної та рекомендованої літератури	126

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Антоненко Николай Илларионович

Решение геометрических задач

Книга для учителя
На украинском языке

Киев, «Радянська школа»

Завідуючий редакцією літератури з математики і фізики *М. Ю. Зубченко*.
Художник обкладинки *В. Б. Волков*. Художній редактор *В. Б. Волков*.
Технічний редактор *В. М. Зайцева*. Коректори *Л. С. Командир, І. М. Ситниченко*

ИБ № 4552

Здано до набору 02.03.90. Підписано до друку 27.03.91. Формат 84×108/32.
Папір друк. № 2. Гарнітура літературна. Друк високий. Умовн. друк. арк.
6,72. Умовн. фарбо-відб. 7,02. Обл.-вид. арк. 6,20. Тираж 36 000 прим.
Вид. № 30636. Замовлення 344. Ціна 65 к.

Видавництво «Радянська школа», 254053, Київ, Ю. Коцюбинського, 6.

Харківська книжкова фабрика ім. М. В. Фрунзе, 310057, Харків-57,
вул. Донець-Захаржевського, 6/8.

Антоненко М. І.

A72 Розв'язування геометричних задач : Книга для вчителя. — К. : Рад. шк., 1991. — 126 с.
ISBN 5-330-01407-7

У посібнику розглядаються питання загальної методики розв'язування задач з навчального посібника «Геометрія, 7—11» О. В. Погорелова та основні прийоми дослідження їх розв'язків. Наводяться докладні зразки відповідних міркувань і записів.

Для вчителів математики загальноосвітньої школи.

A 4306010502—221 251-91
M210(04)—91

ББК 74.262

65 к.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

