Вступний курс Квантової Теорії Поля

Том I. Фейнманові діаґрами і квантова електродинаміка

Майкл Е. Пескін ♦ Деніел В. Шродер

TAXIOH

An Introduction to Quantum Field Theory

Michael E. Peskin
Stanford Linear Accelerator Center

Daniel V. Schroeder
Weber State University

Advanced Book Program

Addison-Wesley Publishing Company

Reading, Massachusetts Menlo Park, California New York
Don Mills, Ontario Wokingham, England Amsterdam Bonn
Sydney Singapore Tokyo Madrid San Juan
Paris Seoul Milan Mexico City Taipei

Майкл Е. Пескін
Деніел В. Шродер

ВСТУПНИЙ КУРС КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Том I

Фейнманові діаґрами
і квантова електродинаміка

Видавництво
ТАХІОН

ББК 7.3 США
У 46

Першу частину відомого підручника присвячено загальному формалізму теорії квантових полів і методам квантової електродинаміки. Детально розглянуто техніку діаґрам Фейнмана та її застосувань до найважливіших процесів КЕД. Особливу увагу приділено радіаційним поправкам, усуненню інфрачервоних та ультрафіолетових розбіжностей.

Книга орієнтована на судентів старших курсів і аспірантів, що спеціалізуються з квантової теорії поля, фізики елементарних часток і теорії конденсованої матерії. Також буде корисна для фахівців у інших галузях теоретичної, експериментальної та прикладної фізики.

Перекладено за виданням:

Peskin, Michael E. and Schroeder, Daniel V.,
An Introduction to Quantum Field Theory,
Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1995.

Переклав з анґлійської
Олег Авраменко.

ISBN 0-201-50397-2

© Addison-Wesley Publishing Company, 1995
© Переклад на українську мову, О. Авраменко, 2012
© Видання українською мовою, ПП „Видавництво ТАХІОН“, 2012

Зміст

Позначення і домовленості **7**

Розділ 1. Попередній розгляд: утворення пар при анігіляції e^+e^- . . . **11**
§ 1.1. Найпростіша ситуація 12
§ 1.2. Доповнення й запитання 17

Розділ 2. Поле Кляйна – Ґордона **22**
§ 2.1. Необхідність польового розгляду 22
§ 2.2. Елементи класичної теорії поля 24
§ 2.3. Поле Кляйна – Ґордона як система гармонійних осциляторів 29
§ 2.4. Поле Кляйна – Ґордона у просторі-часі 36
Задачі 46

Розділ 3. Діракове поле **48**
§ 3.1. Лоренц-інваріантність хвильових рівнянь 48
§ 3.2. Рішення рівняння Дірака для вільних часток 59
§ 3.3. Матриці Дірака та білінійні форми діракового поля 64
§ 3.4. Квантування діракового поля 68
§ 3.5. Дискретні симетрії в теорії Дірака 81
Задачі 91

Розділ 4. Поля із взаємодією і фейнманові діаґрами **99**
§ 4.1. Теорія збурень — філософія і приклади 99
§ 4.2. Пертурбативний ряд для кореляційних функцій 105
§ 4.3. Теорема Віка 112
§ 4.4. Фейнманові діаґрами 115
§ 4.5. Переріз розсіяння і S-матриця 125
§ 4.6. Обчислення елементів S-матриці з фейнманових діаґрам 135
§ 4.7. Фейнманові правила для ферміонів 143
§ 4.8. Фейнманові правила для квантової електродинаміки 152
Задачі 156

Розділ 5. Елементарні процеси квантової електродинаміки **162**
§ 5.1. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$: вступ 162
§ 5.2. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$: спіральна структура 174
§ 5.3. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$: нерелятивістська межа 180
§ 5.4. Кросинґ-симетрія 188

§ 5.5. Комптонове розсіяння 194
Задачі 208

Розділ 6. Радіаційні поправки: вступ 215
§ 6.1. М'яке гальмівне випромінювання 216
§ 6.2. Електронна вершинна функція: формальна структура 226
§ 6.3. Електронна вершинна функція: обчислення 231
§ 6.4. Електронна вершинна функція: інфрачервона розбіжність 243
§ 6.5. Підрахунок та інтерпретація інфрачервоних розбіжностей 247
Задачі 254

Розділ 7. Радіаційні поправки: формальний розгляд 258
§ 7.1. Перенормування напруженості поля 259
§ 7.2. Редукційна формула ЛСЦ 270
§ 7.3. Оптична теорема 280
§ 7.4. Тотожність Варда – Такахаші 288
§ 7.5. Перенормування електричного заряду 295
Задачі 310

Прикінцевий проект: випромінювання ґлюонних струменів 312

Додаток. Фізичні константи і перевідні множники 317

Бібліоґрафія 319

Позначення і домовленості

Одиниці виміру

Ми працюватимемо в природних одиницях, у яких $\hbar = c = 1$. В цій системі

$$[\text{довжина}] \;=\; [\text{час}] \;=\; [\text{енерґія}]^{-1} \;=\; [\text{маса}]^{-1}.$$

Тому маса (m) частки дорівнює її енерґії спокою (mc^2), а також її зворотній комптоновій довжині ($mc/\hbar$). Наприклад,

$$m_{\text{електрон}} = 9.109 \times 10^{-28}\,\text{г} = 0.511\,\text{МеВ} = (3.862 \times 10^{-11}\,\text{см})^{-1}.$$

Вибір інших корисних чисел і перевідних множників наведено в Додатку.

Релятивізм і тензори

Наші домовленості з релятивізму відповідають Джексону [32], Бйоркену і Дреллу [9, 10], а також майже всім останнім роботам з теорії поля. Ми використовуємо метричний тензор

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

де ґрецькі індекси пробігають значення 0, 1, 2, 3 або t, x, y, z. Латинські індекси — i, j і т. д. — позначають лише три просторові компоненти. В усіх випадках береться сума за двічі повтореними індексами. 4-вектори, як і звичайні числа, позначаються світлим курсивом; 3-вектори позначаються напівжирним шрифтом. Наприклад,

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -\mathbf{x});$$
$$p \cdot x = g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

Для часток з масою маємо

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2.$$

Зазначимо, що вектор координати x^μ є „природно піднятим“, тоді як оператор похідної

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \boldsymbol{\nabla}\right)$$

„природно опущений“.

Ми визначаємо абсолютно антисиметричний тензор $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$ таким чином, щоб

$$\varepsilon^{0123} = +1.$$

При цьому ви мусите бути уважними, оскільки з такого означення випливає, що $\varepsilon_{0123} = -1$ і $\varepsilon^{1230} = -1$. (Це узгоджено з позначеннями Джексона, але не Бйоркена і Дрелла.)

Квантова механіка

Ми працюватимемо з одночастковими хвильовими функціями Шродинґера для квантовомеханічних часток. Представимо оператори енерґії та імпульсу для цих хвильових функцій у такому вигляді:

$$E = i\frac{\partial}{\partial x^0}, \qquad \mathbf{p} = -i\boldsymbol{\nabla}.$$

Ці рівняння можна об’єднати наступним чином:

$$p^\mu = i\partial^\mu;$$

у ∂^μ індекс піднятий для зручності, щоб усунути знак мінус. Плоска хвиля $e^{-ik\cdot x}$ відповідає імпульсові k^μ, оскільки

$$i\partial^\mu\left(e^{-ik\cdot x}\right) = k^\mu e^{-ik\cdot x}.$$

Скорочення „е. с.“ позначає ермітове спряження. При розгляді спіну в квантовій механіці використовують сиґма-матриці Паулі:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Добуток цих матриць задовольняє тотожності

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k.$$

Зручно визначити лінійну комбінацію $\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2)$; в такому разі

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фур'є-перетворення й узагальнені функції

Ми часто вживатимемо ступінчасту функцію Гевісайда $\theta(x)$ і дельта-функцію Дірака $\delta(x)$, які визначені наступним чином:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases} \qquad \delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x).$$

n-вимірна дельта-функція, позначена як $\delta^{(n)}(\mathbf{x})$, дорівнює нулю всюди, за винятком $\mathbf{x} = 0$, і задовольняє рівнянню

$$\int d^n\mathbf{x}\, \delta^{(n)}(\mathbf{x}) = 1.$$

У перетворенні Фур'є множник 2π завжди з'являтиметься в інтеґралах по імпульсу. Наприклад, для чотирьох вимірів:

$$f(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik\cdot x}\, \widetilde{f}(k);$$

$$\widetilde{f}(k) = \int d^4x\, e^{ik\cdot x}\, f(x).$$

(У тривимірному перетворенні знак в експоненті буде відповідно $+$ і $-$.) Тильда в $\widetilde{f}(k)$ не вживатиметься в тих випадках, коли це не викликатиме запитань. Інший важливий множник 2π виникає в тотожності

$$\int d^4x\, e^{ik\cdot x} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k).$$

Електродинаміка

Ми використовуємо позначення Гевісайда–Лоренца, у яких множник 4π включено до закону Кулона і в константу тонкої структури, а не в рівняння Максвела. Тому кулонів потенціал точкового заряду Q має вигляд

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi r},$$

і константа тонкої структури дорівнює

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

Символ e залишається за зарядом електрона і є від'ємною величиною (хоча знак інколи використовується). Зазвичай ми працюємо з релятивістською формою рівнянь Максвела:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0, \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu,$$

де

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}).$$

і ми вилучили e з 4-вектора питомого струму j^μ.

Рівняння Дірака

Деякі наші позначення відрізняються від тих, що прийняті у Бйоркена і Дрелла та в іншій літературі. Ми використовуємо киральний базис для матриць Дірака і релятивістське нормування для діракових спінорів. Ці позначення запроваджуються в §§ 3.2 і 3.3.

Розділ 1

Попередній розгляд: утворення пар при анігіляції e^+e^-

Головною метою першого тому нашого курсу є розробка основного обчислювального методу квантової теорії поля — формалізму фейнманових діаґрам. Потім ми застосуємо цей формалізм для обчислень у квантовій електродинаміці, яка є квантовою теорією електронів та фотонів.

Квантова електродинаміка (КЕД), мабуть, найкраща з наявних фундаментальних теорій. Вона сформульована як набір простих рівнянь (Максвела й Дірака), вигляд яких істотним чином визначається релятивістською інваріантністю. Квантовомеханічні рішення цих рівнянь дають детальні передбачення електромаґнітних явищ у масштабах від макроскопічних відстаней аж до ділянок простору в кількасот разів менших від розміру протона.

Фейнманові діаґрами забезпечують для цієї вишуканої теорії відповідну за вишуканістю обчислювальну процедуру. Вона полягає в тому, щоб уявити процес, який може відбуватися з електронами та фотонами, зобразити відповідну йому діаґраму, а потім з її допомогою виписати в математичній формі квантовомеханічну амплітуду цього процесу.

В першому томі ми виводимо квантову електродинаміку і метод фейнманових діаґрам з основних засад квантової механіки й теорії відносності. Зрештою ми досягнемо того рівня, коли зможемо обчислити значення спостережних величин, що становлять значний інтерес при вивченні елементарних часток.[1] Та на жаль, щоб дістатися нашої мети й розробити простий обчислювальний метод, ми спершу мусимо пройти довгий шлях оволодіння формалізмом теорії. Три наступні за цим розділи майже цілком присвячені формальним питанням, і при їх вивченні перед читачем може постати питання: а до чого ми, власне, прямуємо? Ми хотіли б бодай частково відповісти заздалегідь на це питання, обговоривши в поточному розділі фізику одного елементарного процесу в КЕД — тако-

[1] *Від перекладача.* Також у цьому контексті нерідко вживається термін „частинка“, що не зовсім коректно, оскільки це слово є вже наступною після слова „частка“ зменшувальною формою від „частина“ і йому властиве виразне емоційне забарвлення.

го простого, що більшість його властивостей випливають безпосередньо з фізичної інтуїції. Певна річ, такий інтуїтивний, приземлений підхід має багато вад. У Розділі 5 ми повернемося до цього процесу, застосувавши всю силу методу фейнманових діаґрам. При послідовному розгляді питання ми побачимо, як крок за кроком зникають усі наші попередні труднощі.

§ 1.1. Найпростіша ситуація

Оскільки більшість експериментів у фізиці часток включають розсіяння, найчастіше у квантовій теорії поля обчислюють саме переріз розсіяння. Ми хочемо отримати переріз найпростішого з усіх процесів КЕД — анігіляції електрона зі своєю античасткою, позитроном, і утворення пари більш важких лептонів (таких, як мюони). Існування античасток є, власне, одним із передбачень квантової теорії поля, і ми обговоримо це в Розділах 2 і 3. Проте зараз вважатимемо їхнє існування як даність.

Дослід з вимірювання ймовірності такої анігіляції полягає в обстрілі пучка електронів пучком позитронів. Вимірюваною величиною є переріз реакції $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, як функція енерґії центру мас і відносного кута θ між вхідними електронами і вихідними мюонами. Процес зображено на Рис. 1.1. Для простоти працюватимемо в системі центру мас (ЦМ), у якій

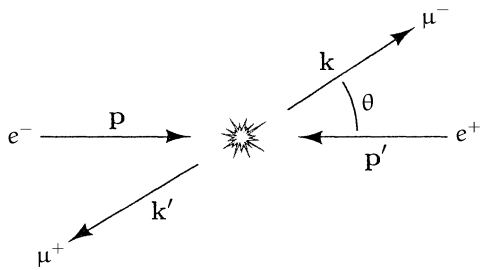


Рис. 1.1. Реакція анігіляції $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, показана в системі центру мас.

імпульси часток задовольняють умовам $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ і $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$. Також припустимо, що енерґія E набагато більша як за масу електрона, так і за масу мюона, тож $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = E = E_{\text{цм}}/2$. (Ми вживаємо напівжирний шрифт для позначення 3-векторів і звичайний курсив — для 4-векторів.)

Позаяк і електрон, і позитрон мають спін 1/2, ми мусимо задати їхню спінову орієнтацію. Найзручніше вибрати вісь, що визначає квантування спіну частки, за напрямом її руху; тоді спін кожної частки буде поляризо-

ваний або паралельно, або антипаралельно до цієї осі. На практиці пучки електронів і позитронів часто неполяризовані, а мюонні детектори не реєструють поляризацію мюонів. Тому ми маємо усереднити переріз за спіновими орієнтаціями електронів та позитронів і підсумувати його за спіновими орієнтаціями мюонів.

Для будь-якої заданої спінової орієнтації всіх часток прийнято записувати диференційний переріз процесу з утворенням μ^+ в елементі тілесного кута $d\Omega$, як

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\text{цм}}^2}|\mathcal{M}|^2 . \tag{1.1}$$

Множник $E_{\text{цм}}^{-2}$ забезпечує правильну розмірність перерізу, оскільки в обраній системі одиниць (енерґія)$^{-2}$ $\sim$ (довжина)^2. Отже, величина $\mathcal{M}$ безрозмірна; вона є квантовомеханічною амплітудою нашого процесу (аналоґічно до амплітуди f у нерелятивістській квантовій механіці), і зараз ми маємо зайнятися питанням, як обчислити цю амплітуду з фундаментальних засад теорії. Інші множники в рівнянні є винятково результатом домовленості. Формула (1.1) є, власне, окремим випадком (справедливим для розсіяння в ЦМ з двома безмасовими частками в кінцевому стані) від загальнішої формули, яку неможливо отримати лише на підставі розмірного аналізу і яку ми виведемо в § 4.5.

Тепер настає черга поганих і гарних новин.

Погана новина полягає в тому, що навіть для найпростішого з процесів з КЕД точний вираз для $\mathcal{M}$ невідомий. Це не повинно нас дивувати, бо навіть у нерелятивістській квантовій механіці задача розсіяння рідко має точне розв'язання. Найкраще, що ми можемо зробити, це отримати формальний вираз для $\mathcal{M}$ у вигляді пертурбативного ряду за константою електромаґнітного зв'язку й обчислити кілька перших його членів.

А гарна новина — це те, що Фейнман розробив красивий спосіб упорядкувати й унаочнити пертурбативний ряд з використанням *фейнманових діаґрам*. Грубо кажучи, діаґрами зображають потоки електронів і фотонів у процесі розсіяння. У наших обчисленнях член найнижчого порядку в пертурбативному ряді можна представити єдиною діаґрамою, зображеною на Рис. 1.2. Ця діаґрама має три типи компонентів: зовнішні лінії (що представляють по дві вхідні й вихідні частки), внутрішні лінії (що представляють „віртуальні“ частки, в нашому випадку — один віртуальний фотон) і вершини. Прийнято зображати електрони суцільними прямими лініями, а фотони — хвилястими. Стрілки на суцільних лініях вказують напрям струму неґативного заряду, а не імпульсу. Кожній зовнішній лінії ми приписуємо вектор 4-імпульсу, як і показано на діаґрамі;

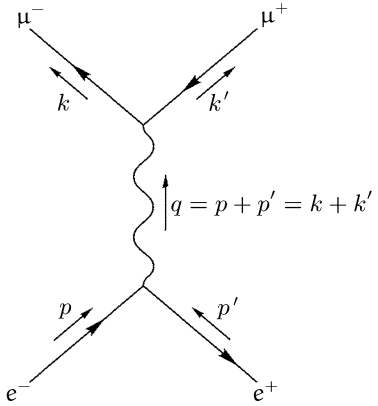


Рис. 1.2. Фейнманова діаґрама найнижчого порядку для перерізу розсіяння $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. У цьому порядку єдиним можливим проміжним станом є фотон (γ).

а імпульс q внутрішньої лінії визначається законом збереження імпульсу в кожній з вершин: $q = p + p' = k + k'$. Також ми маємо поставити у відповідність кожному зовнішньому ферміону спіновий стан („вгору“ або „вниз“).

Згідно з *правилами Фейнмана*, кожну діаґраму можна інтерпретувати як цілком певний внесок у амплітуду $\mathcal{M}$. Правила приписують усім елементам діаґрами короткі алґебраїчні множники, а їхній добуток дає значення відповідного члена пертурбативного ряду. Проте отримання придатного до використання виразу для амплітуди $\mathcal{M}$ може виявитися вельми нетривіальним завданням. У наступних розділах ми розробимо корисну технолоґію проведення таких обчислень. А зараз, оскільки ми нею ще не володіємо, скористаємося для отримання відповіді в нашій конкретній задачі деякими евристичними міркуваннями замість справжніх правил Фейнмана.

Нагадаємо, що в квантовомеханічній теорії збурень член першого порядку в амплітуді переходу можна записати у вигляді:

$$\langle \text{кінцевий стан} | H_I | \text{початковий стан} \rangle, \tag{1.2}$$

де H_I — частина гамільтоніана, що описує взаємодію. У нашому випадку, початковим є стан $|\, e^+e^- \rangle$, а кінцевим — $\langle \mu^+\mu^- |$. Проте наш гамільтоніан взаємодії пов’язує електрони з мюонами не безпосередньо, а лише через електромаґнітне поле (тобто через фотони). Тому перший член (1.2) в пертурбативному ряді дає нульовий внесок, і ми мусимо перейти до чле-

на другого порядку

$$\mathcal{M} \sim \langle \mu^+\mu^- | H_I | \gamma \rangle^\mu \langle \gamma | H_I | e^+e^- \rangle_\mu. \tag{1.3}$$

Це і є евристичний спосіб запису внеску до $\mathcal{M}$ з діаґрами на Рис. 1.2. Зовнішнім електронним лініям відповідає множник $|\, e^+e^- \rangle$, зовнішнім мюонним — $\langle \mu^+\mu^- |$. З вершинами зіставляються H_I, а з внутрішньою фотонною лінією — оператор $|\gamma\rangle\langle\gamma|$. Ми додали векторні індекси (μ), бо фотон є векторною часткою з чотирма компонентами. Тому є чотири можливі проміжні стани, по одному на кожен компонент, і відповідно до правил теорії збурень ми мусимо взяти суму по всім проміжним станам. Зауважимо, що оскільки сума в (1.3) має вигляд скалярного добутку 4-векторів, то амплітуда $\mathcal{M}$ є лоренц-інваріантним скаляром, якщо кожен множник у (1.3) є 4-вектором.

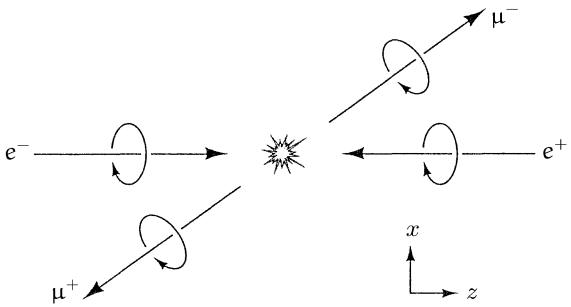


Рис. 1.3. Один з можливих наборів спінових орієнтацій. Електрон і неґативний мюон — правополяризовані, тоді як позитрон і позитивний мюон — лівополяризовані.

Спробуймо вгадати форму вектора $\langle \gamma | H_I | e^+e^- \rangle_\mu$. Позаяк H_I пов'язує електрони з фотонами через електричний заряд e, то матричний елемент має бути пропорційним до до нього. Зараз розглянемо конкретний набір початкових та кінцевих спінових орієнтацій, зображених на Рис. 1.3. Електрон і мюон мають спіни паралельні до напрямку їхнього руху; такі частки називають *правополяризованими*. Відповідно, античастки є *лівополяризованими*. Спіни електрона й позитрона складаються в одиницю моменту імпульсу в напрямку $+z$. Оскільки H_I зберігає момент імпульсу, то поляризація фотона, з яким пов'язані ці частки, має відповідати їх сумарному моментові імпульсу: $\varepsilon^\mu = (0,\ 1,\ i,\ 0)$. Отже, ми маємо

$$\langle \gamma | H_I | e^+e^- \rangle_\mu \propto e\,(0,\ 1,\ i,\ 0). \tag{1.4}$$

Таким же чином, мюонний матричний елемент повинен мати поляризацію, що відповідає одиниці моменту імпульсу вздовж напрямку руху не-

ґативно зарядженого мюона. Щоб отримати правильний вектор, повернемо (1.4) на кут θ у площині (x, z):

$$\langle\gamma|H_I|\mu^+\mu^-\rangle^\mu \propto e\,(0, \cos\theta, i, -\sin\theta). \tag{1.5}$$

Для обчислення амплітуди $\mathcal{M}$ комплексно спрягаємо цей вектор і скалярно помножуємо його на (1.4). Відтак для заданих спінових орієнтацій маємо

$$\mathcal{M}(RL \to RL) = -e^2(1 + \cos\theta). \tag{1.6}$$

Звичайно, цей метод не дозволяє нам встановити загальний множник, проте в (1.6) він, суто випадково, є правильним завдяки домовленостям, прийнятим у (1.1). Зазначимо, що при $\theta = 180°$ амплітуда стає нульовою, чого й варто було очікувати, бо стан з моментом імпульсу в напрямку $+z$ не переходить у стан з моментом імпульсу в напрямку $-z$.

Наступним розглянемо випадок, коли електрон і позитрон правополяризовані. Тепер їх повний спіновий момент імпульсу дорівнює нулю, тому належить вдатися до більш тонких арґументів. Ми можемо сподіватися отримати подовжньо поляризований фотон з коефіцієнтом Клебша–Ґордана $1/\sqrt{2}$, як це відбувається при додаванні тривимірних моментів імпульсу: $|\uparrow\downarrow\rangle = (1/\sqrt{2})(|j = 1, m = 0\rangle + |j = 0, t = 0\rangle)$. Але насправді ми додаємо моменти імпульсу в чотиривимірній ґрупі Лоренца, тож мусимо враховувати не лише спін (властивості перетворення станів при обертаннях), а й перетворення станів при бустах. Як ми покажемо в Розділі 3, коефіцієнт Клебша–Ґордана, що пов'язує 4-вектор зі станом $|e_R^+ e_R^-\rangle$ безмасових ферміонів, дорівнює нулю. (Зазначимо, що такий стан є суперпозицією скаляра й антисиметричного тензора.) Отже, амплітуда $\mathcal{M}(RR \to RL)$ дорівнює нулю, як і одинадцять інших амплітуд, у яких початковий або кінцевий стан мають нульовий повний момент імпульсу.

Решту ненульових амплітуд можна знайти таким самим чином, як і першу. В результаті маємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(RL \to LR) &= -\,e^2(1 - \cos\theta),\\
\mathcal{M}(LR \to RL) &= -\,e^2(1 - \cos\theta),\\
\mathcal{M}(RL \to LR) &= -\,e^2(1 + \cos\theta).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Підставляючи ці вирази в (1.1), усереднюючи за чотирма початковими і підсумовуючи за чотирма кінцевими спіновими орієнтаціями, знаходимо

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{цм}}}(1 + \cos^2\theta), \tag{1.8}$$

де $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$. Інтеґруючи по кутах θ і φ, отримуємо повний переріз

$$\sigma_{\text{повн}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{цм}}^2}. \tag{1.9}$$

Результати (1.8) і (1.9) узгоджуються з експериментами з точністю до 10%; а майже всі розходження виникають за рахунок наступного члена пертурбативного ряду, що відповідає діаґрамам на Рис. 1.4. Якісні хара-

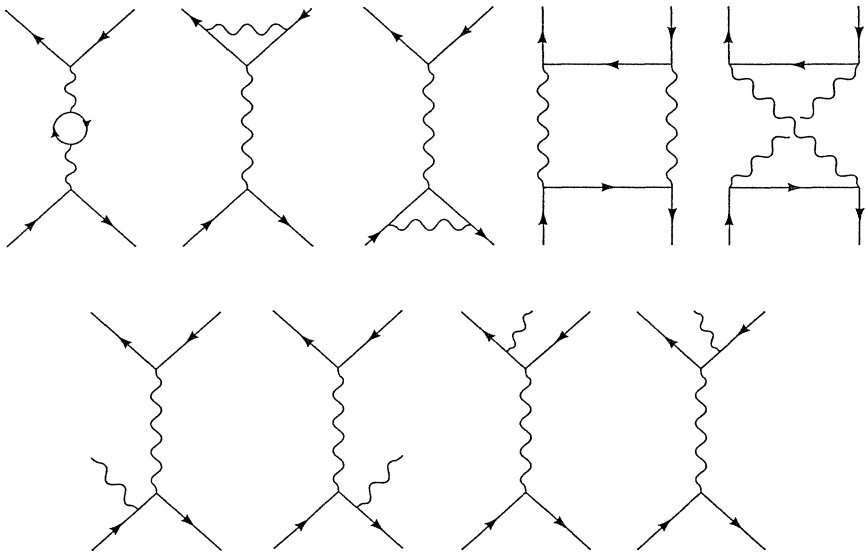


Рис. 1.4. Фейнманові діаґрами, що дають внесок α^2 в переріз розсіяння $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$.

ктеристики отриманих результатів — їх кутова залежність і різке зменшення перерізу з енерґією — беззаперечно підтверджуються дослідними даними. (Докладніше ми обговоримо ці результати в § 5.1.)

§ 1.2. Доповнення й запитання

Ми отримали кутовий розподіл у реакції $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, виходячи з міркувань збереження моменту імпульсу, майже не звертаючись до засадничих принципів квантової електродинаміки. Проте ми вдалися до суттєвих спрощень, пов'язаних з наближенням високих енерґій і вибором системи центру мас. При відмові від будь-якого з цих припущень наш розгляд втратить свою чинність. То як же треба проводити обчислення в

КЕД у загальному випадку? Для відповіді на це запитання ми маємо повернутися до правил Фейнмана.

Як було вказано вище, ці правила пропонують нам накреслити діаґраму (або діаґрами) процесу, який наразі розглядаємо, і кожному елементу поставити у відповідність певний алґебраїчний множник. На Рис. 1.5 показана діаґрама нашої реакції $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ з відповідними позначеннями.

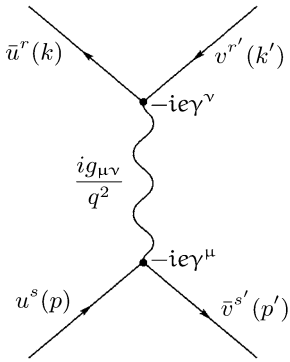


Рис. 1.5. Діаґрама з Рис. 1.2, де вказані алґебраїчні вирази, що відповідають вершинам, внутрішнім і зовнішнім лініям.

Для внутрішньої фотонної лінії ми пишемо $-ig_{\mu\nu}/q^2$, де $g_{\mu\nu}$ — звичайний метричний тензор Мінковського, а q є 4-імпульсом віртуального фотона. Цей множник відповідає оператору $|\gamma\rangle\langle\gamma|$ у нашій евристичній формулі (1.3).

Для кожної вершини записуємо $-ie\gamma^\mu$, що відповідає H_I в (1.3). Величини γ^μ є набором постійних 4×4-матриць. Саме вони здійснюють „додавання моментів імпульсу“, пов'язуючи стани двох часток зі спіном 1/2 з векторною часткою.

Зовнішні лінії представлені чотирикомпонентними стовпцями-спінорами u, v, або рядками-спінорами $\bar{u}$, $\bar{v}$. Власне кажучи, вони є хвильовими функціями початкових та кінцевих часток в імпульсному просторі і відповідають $|e^+e^-\rangle$ та $\langle\mu^+\mu^-|$ у (1.3). Індекси s, s', r і r' позначають спінові орієнтації — вгору або вниз.

Тепер можемо написати формулу для $\mathcal{M}$, зчитуючи всі елементи просто з діаґрами:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \bar{v}^{s'}(p'^\mu)u^s(p)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\bar{u}^r(k)(-ie\gamma^\nu)v^{r'}(k') = \\ &= \frac{ie^2}{q^2}\Big(\bar{v}^{s'}(p')u^s(p)\Big)\Big(\bar{u}^r(k)v^{r'}(k')\Big).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Досить повчально буде порівняти в деталях цей вираз із (1.3).

Щоб отримати переріз (1.8) з (1.10), ми могли б повернутися до наведених вище міркувань збереження моменту імпульсу, доповнених деякими конкретними відомостями про γ-матриці й діракові спінори. Такого штибу обчислення ми проведемо в § 5.2. Проте існує багато корисних прийомів, до яких можна вдатися при маніпуляції з виразами на зразок (1.10), особливо при потребі обчислити лише *неполяризований* переріз. Використовуючи цю *фейнманову технологію слідів* (назва виникла від того, що доводиться знаходити сліди від добутку γ-матриць), зовсім не обов'язково знати явний вигляд цих матриць і діракових спінорів. Обчислення стають майже бездумними, і результат (1.8) з'являється після суто алґебраїчних викладок загальним обсягом менш ніж на одну сторінку. Та оскільки правила Фейнмана і технологія слідів є таким потужними, то ми можемо відмовитись і від деяких спрощень. На завершення цього параґрафу обговоримо кілька ситуацій за яких наші обчислення можуть значно ускладнитися.

Найпростіше обмеження, від якого можна відмовитись, це безмасовість мюона. Якщо енерґія пучків не набагато більша за масу мюона, то всі наші передбачення залежатимуть від співвідношення $m_\mu/E_{\text{цм}}$ (Оскільки електрон приблизно в 200 разів легший за мюон, його можна розглядати як безмасову частку за умови, що енерґія пучка досить велика для утворення мюонів.) Застосувавши фейнманову технологію слідів, надзвичайно просто врахувати в наших обчисленнях масу мюона. Обсяг необхідних алґебраїчних викладок зросте відсотків на п'ятдесят, а співвідношення (1.1) між амплітудою та перерізом трохи зміниться, проте результат вартий додаткових зусиль. Ми проробимо ці обчислення в § 5.1.

Працювати в іншій системі відліку також не складно. Єдине, що зазнає модифікації, це зв'язок (1.1) між амплітудою й перерізом. А втім, можна просто здійснити перетворення Лоренца над формулою, отриманою в ЦМ.

Коли відомі спінові стани початкових та/або кінцевих часток і ми хочемо врахувати масу мюона, то обчислення стають громіздкішими, хоча, в принципі, залишаються нескладними. Для такого випадку легко узагальнити технологію слідів, але часто буває простіше знайти числове вираження для (1.10) безпосередньо, використовуючи явний вигляд спінорів u і v.

Далі можна обчислити переріз для різних процесів. Реакція $e^+e^- \to e^+e^-$, що називається *розсіянням Баба*, складніша, оскільки існує друга

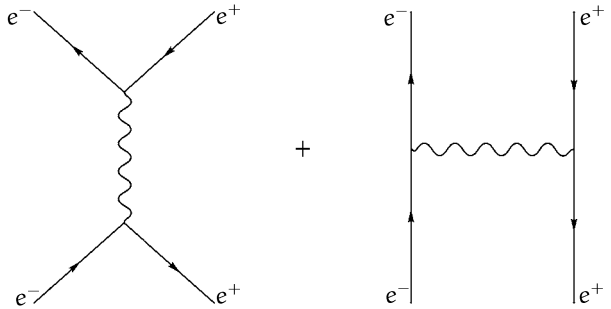


Рис. 1.6. Дві діаґрами найнижчого порядку для розсіяння Баба $e^+e^- \to e^+e^-$.

діаґрама (див. Рис. 1.6). Спочатку треба додати амплітуди з обох діаґрам, а потім піднести їхню суму до квадрату.

Інші процеси включають фотони в початковому та/або кінцевому станах. Зразковим прикладом є комптонове розсіяння; дві його діаґрами найнижчого порядку зображені на Рис. 1.7. Правила Фейнмана для зовнішніх фотонних і внутрішніх електронних ліній не складніші від тих, які ми вже розглядали. Ми детально проаналізуємо комптонове розсіяння в § 5.5.

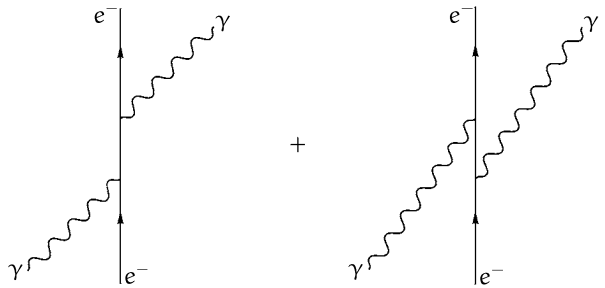


Рис. 1.7. Дві діаґрами найнижчого порядку для комптонового розсіяння.

Нарешті, можемо врахувати члени вищих порядків пертурбативного ряду. Завдяки Фейнманові, принаймні не складно накреслити відповідні діаґрами; на Рис. 1.4 зображені ті з них, що дають внесок у наступний член пертурбативного ряду для перерізу процесу $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Примітно, що алґоритм присвоєння алґебраїчних множників для окремих елементів діаґрами зберігає чинність і для внесків вищих порядків, що дозволяє обчислити їх безпосередньо, хоча це дуже марудна справа. Обчислення повного внеску всіх дев'яти діаґрам — серйозна робота на рівні наукової статті.

У нашому курсі, починаючи з Розділу 6, ми докладно аналізуватимемо

ту фізику, що випливає з вищих порядків фейнманових діаґрам, на зразок зображених на Рис. 1.4. Ми переконаємося, що останні чотири діаґрами з додатковим фотоном у кінцевому стані теж необхідно врахувати, оскільки жоден детектор неспроможний виявити присутність фотонів з гранично низькими енерґіями. А тому кінцевий стан з такими фотонами неможливо відрізнити від потрібного нам стану з однією лише парою мюонів.

Решта п'ять діаґрам на Рис. 1.4 мають проміжні стани з кількома віртуальним частками замість одного фотона. У кожній з таких діаґрам присутня принаймні одна віртуальна частка, імпульс якої не визначається законом збереження у вершинах. Оскільки теорія збурень вимагає взяти суму за всіма можливими проміжними станами, ми мусимо проінтеґрувати по всіх можливих значеннях цього імпульсу. Проте на цьому етапі виникає нове ускладнення: у перших трьох діаґрамах інтеґрали по замкнутих петлях, якщо брати їх напряму, дають нескінченність. Наприкінці першого тому ми знайдемо спосіб отримання скінченних результатів. Але питання фізичного походження цих розбіжностей так просто не розв'язуються. Це буде головною темою другого тому.

Ми обговорювали фейнманові діаґрами, як алґоритм проведення обчислень. Наступні розділи продемонструють усю силу цього інструменту. Однак, розглядаючи дедалі більше застосувань діаґрам, ми побачимо, що вони починають жити своїм власним життям. Вони вкажуть на несподівані зв'язки між різними фізичними процесами і підкажуть інтуїтивні арґументи, які згодом можна буде перевірити при обчисленнях. Маємо надію, що ця книга допоможе вам оволодіти цим методом і знайти для нього нові корисні застосування.

Розділ 2
Поле Кляйна – Ґордона

§ 2.1. Необхідність польового розгляду

Квантова теорія поля є застосуванням квантової механіки до динамічних систем *полів*, у тому ж розумінні, як власне квантова механіка розглядає квантування динамічних систем *часток*. Цей предмет конче необхідний для розуміння поточного стану фізики елементарних часток. З певними видозмінами квантовопольові методи відіграють істотну роль у найактивніших розділах атомної та ядерної фізики, а також фізики конденсованої матерії. Проте в першому томі нас передовсім цікавитимуть елементарні частки — і, відповідно, *релятивістські* поля.

Визначившись із тим, що ми прагнемо зрозуміти процеси, які відбуваються на дуже малих (квантовомеханічних) відстанях і при дуже великих (релятивістських) енерґіях, може виникнути питання, навіщо ми маємо вивчати квантування *полів*. Чому ми не можемо просто проквантувати релятивістські частки, так само як квантуємо нерелятивістські?

Відповідь можна отримати кількома шляхами. Мабуть, найкраще було б написати одночасткове релятивістське хвильове рівняння (скажімо, Кляйна – Ґордона або Дірака) і переконатися, що воно призводить до появи станів з неґативною енерґією і до інших суперечностей. Та оскільки це питання зазвичай розглядається наприкінці університетського курсу нерелятивістської квантової механіки, ми не будемо до нього повертатися. Проте й без того зрозуміло, чому не працює такий підхід. Ми не маємо права припускати, що який-небудь релятивістський процес можна пояснити в термінах одночасткового розгляду, бо співвідношення Ейнштейна $E = mc^2$ дозволяє утворення пар частка-античастка. Навіть у тому разі, коли для утворення пари бракує енерґії, багаточасткові стани виникають, наприклад, як проміжні в другому порядку теорії збурень. Ми можемо вважати, що ці стани реально існують протягом надзвичайно короткого часу, відповідно до принципу невизначеності $\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$. При переході до вищих порядків теорії збурень можливе утворення довільної кількості таких „віртуальних“ часток.

Менш очевидним чином потреба в багаточастковій теорії випливає із вимог причинності. Розгляньмо амплітуду розповсюдження вільної частки від $\mathbf{x}_0$ до $\mathbf{x}$:

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{x}_0 \rangle.$$

У нерелятивістській квантовій механіці маємо $E = \mathbf{p}^2/2m$, отже

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-i\mathbf{p}^2 t/2m} | \mathbf{x}_0 \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{x} | e^{-i\mathbf{p}^2 t/2m} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{x}_0 \rangle =$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}^2 t/2m} \cdot e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} = \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{\frac{3}{2}} e^{im(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2/2t}.$$

Цей вираз є ненульовий для всіх x і t, що вказує на можливість розповсюдження частки між будь-якими двома точками за довільно короткий проміжок часу. В релятивістській теорії це свідчило б про порушення причинності. Можна було б сподіватися, що використання релятивістського співвідношення $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$врятує ситуацію, проте це не так. За аналогією з нерелятивістським випадком, маємо

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} | \mathbf{x}_0 \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} \cdot e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} \int_0^\infty dp\, p\, \sin(p|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)\, e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}.$$

Цей інтеґрал можна вирахувати явно через функції Бесселя.[2] Ми ж обмежимося лише розглядом його асимптотичної поведінки при $x^2 \gg t^2$ (далеко за межами світлового конуса) за методом стаціонарної фази. Функція фази $px - t\sqrt{p^2+m^2}$ має стаціонарну точку при $p = imx/\sqrt{x^2-t^2}$. Ми можемо вільно замкнути контур інтеґрування у верхній півплощині таким чином, щоб він пройшов через цю точку. Підставляючи вказане значення для p, отримаємо, що з точністю до раціональної функції від x і t,

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{x^2+t^2}}.$$

Отже, поза світловим конусом амплітуда розповсюдження хоч і мала, проте ненульова, і причинність все одно порушується.

Квантова теорія поля розв'язує проблему причинності дивовижним шляхом, який ми обговоримо в § 2.4. Там побачимо, що в багаточастковій

[2] Див. Ґрадштейн і Рижик [27].

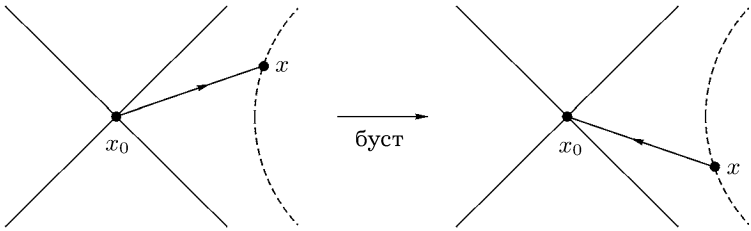


Рис. 2.1. Розповсюдження від x_0 до x в одній системі відліку має вигляд як розповсюдження від x до x_0 в іншій системі відліку.

теорії поля розповсюдження часток на простороподібні інтервали не відрізняється від розповсюдження *античастки* у протилежному напрямку (Рис. 2.1). Коли ми задаємось питанням, чи може спостереження в x_0 вплинути на спостереження в x, то виявляємо, що амплітуди розповсюдження для частки й античастки точно скорочуються, тож причинність не порушується.

Квантова теорія поля природним чином описує не лише багаточасткові стани, а й переходи між станами з різною кількістю часток. Вона розв'язує проблему причинності шляхом впровадження античасток, а потім дозволяє пояснити зв'язок між спіном і статистикою. Та найважливіше, що вона забезпечує необхідні інструменти для обчислення перерізів розсіяння, тривалості життя часток та інших спостережних величин. Експериментальне підтвердження цих розрахунків, що часто виявляються безпрецедентно точними, і є головною підставою для вивчення квантової теорії поля.

§ 2.2. Елементи класичної теорії поля

У цьому параґрафі ми робимо короткий огляд формалізму класичної теорії поля, необхідного для подальшого вивчення квантових полів.

Лаґранжова теорія поля

Фундаментальною величиною класичної механіки є дія, S, інтеґрал по часу від лаґранжіана L. В локальній теорії поля лаґранжіан можна записати як просторовий інтеґрал питомого лаґранжіана $\mathcal{L}$, що є функцією одного або кількох полів $\phi(x)$ та їхніх похідних $\partial_\mu\phi$. Таким чином, маємо

$$S = \int L\, dt = \int \mathcal{L}\, d^4x. \tag{2.1}$$

Оскільки це книга з теорії поля, далі ми називатимемо $\mathcal{L}$ просто лаґранжіаном.

Принцип найменшої дії стверджує, що коли система еволюціонує від однієї заданої конфіґурації до іншої за проміжок часу від t_1 до t_2, то її „шлях“ у конфіґураційному просторі такий, що дія S має екстремум (зазвичай мінімум). Можемо записати цю умову як

$$\begin{aligned} 0 = \delta S = \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right\} = \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) \right\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Останній доданок можна перетворити на поверхневий інтеґрал по границі чотиривимірної просторово-часової зони інтеґрування. Позаяк початкова та кінцева польові конфіґурації вважаються заданими, то $\delta\phi$ є нульовим у початковий і кінцевий моменти часу. Якщо ж ми обмежимося розглядом деформацій $\delta\phi$, що зникають на просторовій границі зони, то поверхневий інтеґрал дорівнює нулю. Виносячи множник $\delta\phi$ з перших двох доданків і враховуючи, що інтеґрал має дорівнювати нулю для будь-якого $\delta\phi$, ми доходимо висновку, що множник при $\delta\phi$ є нульовим в усіх точках. Звідси отримуємо рівняння руху Ейлера – Лаґранжа для поля:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \tag{2.3}$$

Якщо лаґранжіан включає більш ніж одне поле, то маємо по одному такому рівнянню для кожного з них.

Гамільтонова теорія поля

Лаґранжове формулювання теорії поля якнайкраще відповідає релятивістській динаміці, бо всі вирази в ньому явно лоренц-інваріантні. Проте в першому томі ми користуватимемося гамільтоновим формулюванням, оскільки воно дозволяє легко здійснити перехід до квантової механіки. Нагадаємо, що для дискретних систем кожній динамічній змінній величині q можна поставити у відповідність канонічно спряжений імпульс $p \equiv \partial L/\partial \dot{q}$ (де $\dot{q} = dq/dt$). Тоді гамільтоніан має вигляд $H \equiv \sum(p\dot{q} - L)$. Узагальнення на безперервну систему найлегше зрозуміти, уявивши, що

точки простору $\mathbf{x}$ розміщені дискретно. Ми можемо визначити

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \int \mathcal{L}\big(\phi(\mathbf{y}),\, \dot{\phi}(\mathbf{y})\big)\, d^3\mathbf{y} \sim \\ &\sim \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \sum_{\mathbf{y}} \mathcal{L}\big(\phi(\mathbf{y}),\, \dot{\phi}(\mathbf{y})\big)\, d^3\mathbf{y} = \\ &= \pi(\mathbf{x})\, d^3\mathbf{y}, \end{aligned}$$

де

$$\pi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \tag{2.4}$$

називається *питомим імпульсом*, спряженим до $\phi(\mathbf{x})$. Тоді гамільтоніан можна записати як

$$H = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - L.$$

Переходячи до континууму, маємо:

$$H = \int d^3\mathbf{x}\left(\pi(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}\right) \equiv \int \mathcal{H}\, d^3\mathbf{x}. \tag{2.5}$$

Наприкінці цього параґрафу ми знову виведемо такий самий вираз для питомого гамільтоніана $\mathcal{H}$, застосувавши інший метод.

Для простого прикладу розглянемо теорію одного поля $\phi(x)$ з лаґранжіаном

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \tfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 - \tfrac{1}{2}\,m^2\phi^2 = \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu\phi)^2 - \tfrac{1}{2}\,m^2\phi^2, \tag{2.6}$$

Поки вважатимемо ϕ дійсним полем. У § 2.3 величина m буде інтерпретована як маса, але поки розглядатимемо її просто як параметр. Застосувавши звичайну процедуру до цього лаґранжіана, маємо рівняння руху

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right)\phi = 0 \quad \text{або} \quad (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi = 0, \tag{2.7}$$

відоме як рівняння Кляйна–Ґордона. (У цьому контексті воно є *класичним* рівнянням поля, на зразок рівнянь Максвела, а не квантовомеханічним хвильовим рівнянням.) Зазначимо, що питомий канонічний імпульс, спряжений до $\phi(x)$, є $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$. Також ми можемо побудувати гамільтоніан:

$$H = \int \mathcal{H}\, d^3\mathbf{x} = \int d^3\mathbf{x}\left[\tfrac{1}{2}\,\pi^2 + \tfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + \tfrac{1}{2}\,m^2\phi^2\right]. \tag{2.8}$$

Три доданки у правій частині можна розглядати, відповідно, як енерґію „переміщення“ в часі, енерґію „зсуву“ в просторі та енерґію, пов'язану з присутністю самого поля. Докладніше ми досліджуватимемо цей гамільтоніан у §§ 2.3 і 2.4.

Теорема Нотер

А зараз обговоримо зв'язок між симетріями й законами збереження в класичній теорії поля, відображений у *теоремі Нотер*. Ця теорема розглядає безперервні перетворення полів ϕ, які в інфінітезимальній формі мають вигляд

$$\begin{aligned} \phi(x) \to \phi'(x) &= \phi(x) + \alpha\zeta(x), \\ \Delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) &= \alpha\zeta(x), \end{aligned} \tag{2.9}$$

де α — інфінітезимальний параметр і $\zeta(x)$ — деяка деформація конфіґурації поля. Ми називаємо таке перетворення симетрією, якщо воно залишає інваріантними рівняння руху. Ця умова виконується автоматично, якщо дія інваріантна відносно (2.9). У загальнішому випадку ми можемо допустити зміну величини дії на доданок у вигляді поверхневого інтеґрала, оскільки присутність такого члена не впливає на виведення рівнянь Ейлера–Лаґранжа (2.3). Тому лаґранжіан має бути інваріантним відносно (2.9) з точністю до 4-диверґенції:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}'(x) &= \mathcal{L}(x) + \alpha\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x), \\ \Delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) &= \alpha\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x), \end{aligned} \tag{2.10}$$

для деякого $\mathcal{J}^\mu$. Тепер порівняємо вираз для $\Delta\mathcal{L}$ з результатом, отриманим від варіації полів:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\Delta\phi + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\partial_\mu(\Delta\phi) = \\ &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right) + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right]\Delta\phi. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Другий доданок є нульовим відповідно до рівняння Ейлера–Лаґранжа (2.3). Підставляючи з (2.9) і (2.10) вирази для $\Delta\phi$ і $\Delta\mathcal{L}$, знаходимо:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \text{для} \quad j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\zeta(x) - \mathcal{J}^\mu(x). \tag{2.12}$$

(Якщо симетрія включає більше одного поля, то перший доданок у виразі для $j^{\mu}(x)$ слід замінити на суму таких доданків — по одному для кожного поля.) Цей результат означає, що струм $j^{\mu}(x)$ зберігається. Для кожної безперервної симетрії $\mathcal{L}$ маємо відповідний закон збереження.

Закон збереження також може бути сформульовано як твердження, що заряд

$$Q \equiv \int\limits_{\text{весь простір}} j^0 \, d^3\mathbf{x} \tag{2.13}$$

залишається незмінним у часі. Проте зауважимо, що формулювання теорії поля в термінах питомого лаґранжіана безпосередньо призводить до локальної форми закону збереження (2.12).

Найпростіший приклад такого закону збереження випливає з лаґранжіана, що має лише кінетичний член: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi)^2$. Перетворення $\phi \to \phi + \alpha$, де α є константою, залишає $\mathcal{L}$ незмінним, з чого ми робимо висновок, що струм $j^{\mu} = \partial^{\mu}\phi$ зберігається. Як менш тривіальний випадок, розглянемо лаґранжіан

$$\mathcal{L} = |\partial_{\mu}\phi|^2 - m^2|\phi|^2, \tag{2.14}$$

де ϕ тепер *комплексне* поле. Ми можемо з легкістю показати, що рівнянням руху для цього лаґранжіана знов-таки є рівняння Кляйна – Ґордона (2.7). Цей лаґранжіан інваріантний відносно перетворення $\phi \to \phi e^{i\alpha}$; для інфінітезимального перетворення отримуємо

$$\Delta\phi = \alpha\zeta = i\alpha\phi; \quad \Delta\phi^* = \alpha\zeta^* = -i\alpha\phi^* \tag{2.15}$$

(Ми розглядаємо ϕ і ϕ^* як незалежні поля. Альтернативно ми могли б працювати з дійсною та уявною складовими поля ϕ.) Тепер неважко показати, що збережений нотерів струм має вигляд

$$j^{\mu} = i\left[(\partial^{\mu}\phi^*)\phi - \phi^*(\partial^{\mu}\phi)\right]. \tag{2.16}$$

(Спільний множник обрано довільно.) Застосувавши рівняння Кляйна – Ґордона, можемо безпосередньо перевірити, що диверґенція цього струму дорівнює нулю. Згодом ми додамо до лаґранжіана член, який пов'язує ϕ з електромаґнітним полем. Тоді інтерпретуємо j^{μ} як питомий електромаґнітний струм комплексного скалярного поля, а просторовий інтеґрал від j^0 — як електричний заряд.

Теорему Нотер також можна застосувати до просторово-часових перетворень на зразок трансляцій і обертань. Альтернативно ми можемо описати інфінітезимальну трансляцію

$$x^{\mu} \to x^{\mu} - a^{\mu},$$

як перетворення поля

$$\phi(x) \to \phi(x+a) = \phi(x) + a^{\mu}\partial_{\mu}\phi(x).$$

Лаґранжіан також є скаляром, тому він має перетворюватися таким самим чином:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + a^{\mu}\partial_{\mu}\mathcal{L} = \mathcal{L} + a^{\mu}\partial_{\nu}\left(\delta^{\nu}_{\mu}\mathcal{L}\right).$$

Порівнявши цей вираз із (2.10), ми бачимо, що тепер маємо ненульовий струм $\mathcal{J}^{\nu}$.[3] Взявши його в розрахунок, можемо застосувати теорему Нотер для одержання чотирьох окремо збережених струмів:

$$T^{\nu}{}_{\mu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\phi)}\partial_{\mu}\phi - \delta^{\nu}_{\mu}\mathcal{L}, \quad \text{або} \quad T^{\nu\mu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\phi)}\partial^{\mu}\phi - g^{\nu\mu}\mathcal{L}. \tag{2.17}$$

Це є достоту *тензор енерґії-напружень*, який також називається *тензором енерґії-імпульсу* поля ϕ. Збережений заряд, пов'язаний з часовими трансляціями, є гамільтоніаном:

$$H = \int T^{00}\, d^3\mathbf{x} = \int \mathcal{H}\, d^3\mathbf{x}. \tag{2.18}$$

При обчисленні цієї величини для поля Кляйна – Ґордона, можна ще раз отримати результат (2.8). Збережені заряди, пов'язані з просторовими трансляціями, є:

$$P^{i} = \int T^{0i}\, d^3\mathbf{x} = -\int \pi\partial_{i}\phi\, d^3\mathbf{x}, \tag{2.19}$$

і ми інтерпретуємо їх як (фізичний) імпульс, що переноситься полем (не плутати з канонічним імпульсом).

§ 2.3. Поле Кляйна – Ґордона як система гармонійних осциляторів

Обговорення *квантової* теорії поля почнемо з досить формального розгляду найпростішого випадку — дійсного поля Кляйна – Ґордона. Ідея полягає в тому, щоб почати з класичної теорії скалярного поля, описаного лаґранжіаном (2.6), а потім „проквантувати" його, тобто реінтерпретувати динамічні змінні, як оператори, що задовольняють канонічним ко-

[3] А точніше, *чотири* струми (за кількістю ступенів свободи трансляцій), які разом складають тензор другого ранґу $\mathcal{J}^{\nu}{}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}\mathcal{L}$. Відповідно, і чотири збережені струми утворюють тензор. (*Прим. перекл.*)

мутаційним співвідношенням.[4] Далі ми „розв'язуємо" теорію — знаходимо власні значення та власні стани гамільтоніана, використовуючи для аналоґії гармонійний осцилятор.

Класична теорія дійсного поля Кляйна – Ґордона була стисло (але достатньо) викладена в попередньому параґрафі; відповідні вирази наведено у формулах (2.6), (2.7) і (2.8). При квантуванні теорії ми дотримуємося тієї ж процедури, що й для будь-якої іншої динамічної системи: перетворюємо ϕ та π на оператори і накладаємо на них відповідні комутаційні співвідношення. Нагадаємо, що для дискретної системи з однієї або кількох часток комутаційні співвідношення є такі:

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij};$$
$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Узагальнення для безперервної системи цілком природне — оскільки $\pi(\mathbf{x})$ є *питомим* імпульсом, то замість символу Кронекера беремо дельта-функцію Дірака:

$$\begin{aligned}[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y});\\ [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] &= [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0.\end{aligned} \tag{2.20}$$

(Наразі ми використовуємо картину Шродинґера, в якій ϕ і π не залежать від часу. В наступному параґрафі ми перейдемо до картини Гайзенберґа, і ці „рівночасові" комутаційні співвідношення збережуть свою чинність за умови, що обидва оператори розглядаються в один і той же момент часу.)

Гамільтоніан, як функція ϕ і π, також стає оператором. Нашою наступною задачею є пошук його спектру. Оскільки немає очевидного способу зробити це, спробуємо записати рівняння Кляйна – Ґордона у фур'є-просторі. Якщо ми розкладемо класичне поле Кляйна – Ґордона як

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\phi(\mathbf{p}, t)$$

(де $\phi^*(\mathbf{p}) = \phi(-\mathbf{p})$, тож $\phi(\mathbf{x})$ дійсна величина), то рівняння (2.7) набуває вигляду

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\mathbf{p}|^2 + m^2)\right]\phi(\mathbf{p}, t) = 0. \tag{2.21}$$

[4] Ця процедура називається повторним квантуванням, щоб відрізняти отримане в результаті рівняння Кляйна – Ґордона (у якому ϕ є оператором) від старого одночасткового рівняння Кляйна – Ґордона (в якому ϕ було хвильовою функцією). У нашому курсі ми ніколи не звертаємося до другої точки зору, а починаємо з класичного рівняння (в якому ϕ є класичним полем) і квантуємо його лише один раз.

Воно цілком збігається з рівнянням для простого гармонійного осцилятора з частотою

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}. \tag{2.22}$$

З курсу квантової механіки нам відомо, як знаходити спектр простого гармонійного осцилятора. Коротко нагадаємо, як це робиться. Запишемо гамільтоніан у вигляді

$$H = \tfrac{1}{2}\, p^2 + \tfrac{1}{2}\, \omega^2 q^2.$$

Щоб знайти власні значення H, запишемо q і p в термінах *сходових операторів* $\mathfrak{a}^\dagger$ та $\mathfrak{a}$ (або *операторів народження і знищення*):

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\dagger); \qquad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^\dagger). \tag{2.23}$$

Канонічні комутаційні співвідношення $[\phi,\, \pi] = i$ еквівалентні до

$$[\mathfrak{a},\, \mathfrak{a}^\dagger] = 1. \tag{2.24}$$

Тепер гамільтоніан можна переписати як

$$H = \omega\left(\mathfrak{a}^\dagger \mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}\right).$$

Стан $|0\rangle$, такий, що $\mathfrak{a}|0\rangle = 0$, є власним станом H з власним значенням $\frac{1}{2}\omega$ — енерґією нульових коливань. Крім того, комутатори

$$[H,\, \mathfrak{a}^\dagger] = \omega\mathfrak{a}^\dagger, \qquad [H,\, \mathfrak{a}] = -\omega\mathfrak{a}$$

легко дозволяють встановити, що

$$|n\rangle \equiv (\mathfrak{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

є власними станами H з власними значеннями $\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega$. Ці стани вичерпують спектр.

Ми можемо знайти спектр гамільтоніана Кляйна – Ґордона, застосувавши точно такий прийом, проте тепер кожна фур'є-мода поля має розглядатися, як незалежний осцилятор зі своїми власними $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{a}^\dagger$. За аналоґією з (2.23), пишемо

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\left(\mathfrak{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \mathfrak{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right); \tag{2.25}$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,(-i)\sqrt{\frac{\omega_\mathbf{p}}{2}}\left(a_\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_\mathbf{p}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right). \tag{2.26}$$

Зворотні вирази для $a_\mathbf{p}$ і $a_\mathbf{p}^\dagger$ через ϕ і π легко виводяться, але рідко використовуються. Для подальших обчислень корисно переписати (2.25) і (2.26) у такому вигляді:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}; \tag{2.27}$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,(-i)\sqrt{\frac{\omega_\mathbf{p}}{2}}\left(a_\mathbf{p} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \tag{2.28}$$

Комутаційне співвідношення (2.24) стає

$$[a_\mathbf{p},\, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \tag{2.29}$$

і з нього можемо переконатися, що комутатор ϕ і π дає правильний результат:

$$\begin{aligned}[\phi(\mathbf{x}),\, \pi(\mathbf{x})] = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\,\frac{(-i)}{2}\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_\mathbf{p}}}\times \\ \times\left([a_{-\mathbf{p}}^\dagger,\, a_{\mathbf{p}'}] - [a_\mathbf{p},\, a_{-\mathbf{p}'}^\dagger]\right) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}')} = \\ = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}').\end{aligned} \tag{2.30}$$

(Якщо це й подальші обчислення для вас незвичні, просимо уважно їх проробити; після короткої практики вони стають надзвичайно простими, але мають фундаментальне значення для формалізму наступних двох розділів.)

Тепер ми готові записати гамільтоніан у термінах сходових операторів. Підставляючи в (2.8) вирази для ϕ і π, отримуємо

$$\begin{aligned}H = \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\, e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}\Bigg\{-\frac{\sqrt{\omega_\mathbf{p}\omega_{\mathbf{p}'}}}{4}(a_\mathbf{p} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger)\times \\ \times(a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) + \frac{m^2 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'}{4\sqrt{\omega_\mathbf{p}\omega_{\mathbf{p}'}}}(a_\mathbf{p} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}'} + a_{-\mathbf{p}'}^\dagger)\Bigg\} = \\ = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\omega_\mathbf{p}\left(a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} + \tfrac{1}{2}[a_\mathbf{p},\, a_\mathbf{p}^\dagger]\right).\end{aligned} \tag{2.31}$$

Другий доданок пропорційний нескінченному c-числу $\delta(0)$. Це є просто сума за всіма модами з енерґією нульових коливань $\omega_{\mathbf{p}}/2$, тож її присутність цілком очікувана, хоч і викликає певну розгубленість. На щастя, цей нескінченний зсув енерґії не може бути виявлений експериментально, оскільки в усіх дослідах вимірюють лише *різницю* між наявною енерґією та енерґією основного стану H. Тому ми надалі іґноруватимемо цей нескінченний постійний член у всіх наших обчисленнях. Можливо, такий зсув енерґії основного стану здатний створити проблему на глибшому рівні теорії; ми обговоримо це питання в епілозі.

Використовуючи вираз для гамільтоніана в термінах $\mathrm{a}_{\mathbf{p}}$ і $\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}$, неважко знайти комутатори:

$$[H,\ \mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}] = \omega_{\mathbf{p}}\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}; \qquad [H,\ \mathrm{a}_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}}\mathrm{a}_{\mathbf{p}} \tag{2.32}$$

А тепер можемо виписати спектр теорії, так само як і для простого гармонійного осцилятора. Стан $|0\rangle$, такий, що $\mathrm{a}_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$ для всіх $\mathbf{p}$, є основним станом, або *вакуумом*, і його енерґія $E = 0$ після відкидання нескінченної константи у (2.31). Решту власних станів енерґії можна побудувати через дію операторів народження $\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}$ на $|0\rangle$. Стан $\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\cdots|0\rangle$ є власним станом гамільтоніана H з енерґією $\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} + \cdots$. Ці стани вичерпують спектр.

Знайшовши спектр гамільтоніана, спробуймо дати інтерпретацію його власних станів. Шляхом обчислень, цілком подібних до (2.31), ми можемо записати оператор повного імпульсу (2.19) як

$$\mathbf{P} = -\int d^3\mathbf{x}\,\pi(\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\mathrm{a}_{\mathbf{p}}. \tag{2.33}$$

Отже, оператор $\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}$ народжує стан з імпульсом $\mathbf{p}$ та енерґією $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$. Так само стан $\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\cdots|0\rangle$ має імпульс $\mathbf{p} + \mathbf{q} + \cdots$. Цілком природно називати ці збудження *частками*, оскільки вони є дискретними об'єктами з належним релятивістським співвідношенням між імпульсом та енерґією. (Під *часткою* ми не маємо на увазі щось локалізоване у просторі; $\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}$ народжує частки як власні стани імпульсу). Відтепер ми замість $\omega_{\mathbf{p}}$ писатимемо $E_{\mathbf{p}}$ (або просто E), бо насправді це є енерґія частки. Зазначимо між іншим, що енерґія завжди позитивна: $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$.

Цей формалізм також дозволяє визначити тип статистики наших часток. Розгляньмо двочастковий стан $\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|0\rangle$. Оскільки $\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}$ і $\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}$ комутують, то цей стан тотожний станові $\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\mathrm{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle$, у якому дві частки переставлені місцями. Більше того, в одній простій моді $\mathbf{p}$ може перебувати скільки завгодно часток (точно так, як простий гармонійний осцилятор може бути

збуджений до довільно високого рівня). З чого ми робимо висновок, що частки Кляйна–Ґордона підкоряються *статистиці Бозе–Ейнштейна*.

Природно вибрати нормування вакууму, як $\langle 0|0\rangle = 1$. Одночасткові стани $|\mathbf{p}\rangle \propto \mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle$ також часто виникатимуть при нашому розгляді, тому варто домовитися про їх нормування. Найпростіше нормування $\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$, що використовується в багатьох книгах, не є лоренц-інваріантним, в чому ми можемо пересвідчитися, розглядаючи дію бусту в напрямку третьої просторової осі. Такий буст дає: $p_3' = \gamma(p_3 + \beta E)$, $E' = \gamma(E + \beta p_3)$. Застосовуючи тотожність для дельта-функції

$$\delta[f(x) - f(x_0)] = \frac{1}{|f'(x_0)|}\,\delta(x - x_0), \tag{2.34}$$

можемо обчислити

$$\begin{aligned}
\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{q}')\,\frac{dp_3'}{dp_3} = \\
&= \delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{q}')\,\gamma\left(1 + \beta\frac{dE}{dp_3}\right) = \\
&= \delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{q}')\,\frac{\gamma}{E}\,(E + \beta p_3) = \\
&= \delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{q}')\,\frac{E'}{E}.
\end{aligned}$$

Проблема в тому, що об'єм не є інваріантним відносно бустів; ящик, чий об'єм у своїй системі спокою дорівнює V, у рухомій системі, завдяки лоренцовому скороченню, має об'єм V/γ. Проте з проведеного обчислення ми бачимо, що величина $E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ лоренц-інваріантна. Відтак визначаємо:

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle, \tag{2.35}$$

а отже

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{2.36}$$

(Множник 2 не є необхідним, але він зручний з огляду на присутність множника 2 в (2.25).)

У гільбертовому просторі квантових станів перетворення Лоренца Λ діє як унітарний оператор $U(\Lambda)$. Наша умова нормування (2.35) дає

$$U(\Lambda)|\mathbf{p}\rangle = |\,\Lambda\mathbf{p}\rangle. \tag{2.37}$$

Застосувавши перетворення Лоренца до оператора $\mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$, маємо

$$U(\Lambda)\,\mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\,U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}}\,\mathrm{a}^\dagger_{\Lambda\mathbf{p}}. \tag{2.38}$$

При такому нормуванні треба вживати множник $(2E_{\mathbf{p}})^{-1}$ і в деяких інших виразах. Наприклад, співвідношення повноти для одночасткових станів (1Ч) буде таким:

$$\mathcal{I}_{1\text{ч}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}\rangle \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \langle \mathbf{p}\,|, \tag{2.39}$$

де оператор у лівій частині є простою тотожністю для одночасткових станів і нульовим на решті гільбертового простору.[5] Інтеґрали такого вигляду зустрічатимуться досить часто; і справді, інтеґрал

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta(p^2 - m^2)\Big|_{p^0>0} \tag{2.40}$$

є лоренц-інваріантним інтеґралом по 3-імпульсному простору в тому сенсі, що для будь-якої лоренц-інваріантної $f(p)$ вираз $\int d^3\mathbf{p}\, f(p)/(2E_{\mathbf{p}})$ є лоренц-інваріантним. Інтеґрування проводиться по верхній гілці $p^0 > 0$ гіперболоїда $p^2 = m^2$ у 4-імпульсному просторі (Рис. 2.2).

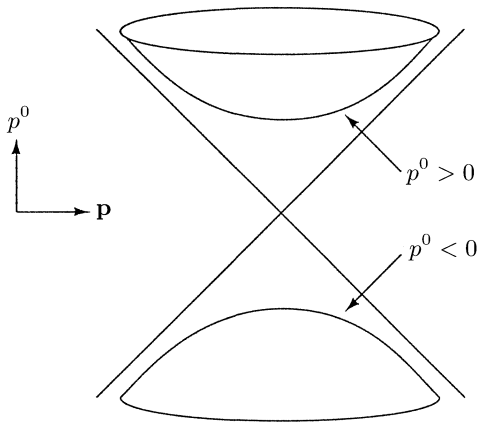


Рис. 2.2. Лоренц-інваріантний інтеґрал у 3-імпульсному просторі береться по верхній гілці гіперболоїда $p^2 = m^2$.

На завершення розглянемо інтерпретацію стану $\phi(\mathbf{x})|0\rangle$. Із виразу (2.25) ми бачимо, що

$$\phi(\mathbf{x})|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}|\mathbf{p}\rangle \tag{2.41}$$

[5] Інакше кажучи, $\mathcal{I}_{1\text{ч}}$ є ортоґональним проектором на підпростір одночасткових станів гільбертового простору квантової теорії поля — т. зв. простору Фока. (*Прим. перекл.*)

є лінійною суперпозицією одночасткових станів з визначеним імпульсом. Якби не множник $(2E_{\mathbf{p}})^{-1}$, то (2.41) цілком збігався б з відомим нерелятивістським виразом для власного стану оператора координати $|\mathbf{x}\rangle$; насправді ж додатковий множник майже постійний для малих (нерелятивістських) $\mathbf{p}$. Тому надалі ми дотримуватимемося такої ж інтерпретації і вважатимемо, що оператор $\phi(\mathbf{x})$, діючи на вакуум, *народжує частку в x*. Ця інтерпретація отримує додаткове підтвердження, коли обчислити

$$\langle 0|\phi(\mathbf{x})|\mathbf{p}\rangle = \langle 0| \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} \left(\mathrm{a}_{\mathbf{p}'} e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} + \mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}'} e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}\right) \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, \mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle = \\ = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \tag{2.42}$$

Ми можемо інтерпретувати це як координатне представлення одночасткової хвильової функції $|\mathbf{p}\rangle$, так само як у нерелятивістській квантовій механіці $\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle \propto e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ є хвильовою функцією стану $|\mathbf{p}\rangle$.

§ 2.4. Поле Кляйна – Ґордона у просторі-часі

У попередньому параґрафі ми проквантували поле Кляйна – Ґордона в картині Шродинґера і інтерпретували побудовану нами теорію в термінах релятивістських часток. У цьому параґрафі перейдемо до картини Гайзенберґа, в якій буде легше розглядати залежність величин від часу і питання причинності. Після деякої підготовки ми повернемося до питання причинного розповсюдження, порушеного в § 2.1. Також одержимо вираз для *пропаґатора Кляйна – Ґордона*, важливої складової правил Фейнмана, які буде розроблено в Розділі 4.

У картині Гайзенберґа ми робимо ϕ та π залежними від часу звичайним чином — за допомогою оператора еволюції e^{-iHt}:

$$\phi(x) = \phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\phi(\mathbf{x})e^{-iHt} \tag{2.43}$$

і так само для $\pi(x) = \pi(\mathbf{x}, t)$. Рівняння руху Гайзенберґа,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O} = [\mathcal{O}, H] \tag{2.44}$$

дозволяє знайти залежність ϕ та π від часу:

$$i\frac{\partial\phi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left[\phi(\mathbf{x},t), \int d^3\mathbf{x}'\left(\tfrac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x}',t) + \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{x}',t)\right)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2(\mathbf{x}',t)\right)\right] =$$

$$= \int d^3\mathbf{x}' \left(i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \pi(\mathbf{x}',\, t) \right) =$$

$$= i\pi(\mathbf{x}, t);$$

$$i\frac{\partial \pi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[\pi(\mathbf{x}, t), \int d^3\mathbf{x}' \left(\tfrac{1}{2}\, \pi^2(\mathbf{x}', t) + \tfrac{1}{2}\, \phi(\mathbf{x}', t)(-\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2)\phi(\mathbf{x}', t) \right) \right] =$$

$$= \int d^3\mathbf{x}' \left(i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, (-\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2)\, \phi(\mathbf{x}, t) \right) =$$

$$= -i(-\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2)\, \phi(\mathbf{x}, t).$$

Об'єднуючи обидва результати, маємо

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (\boldsymbol{\nabla}^2 - m^2)\phi, \tag{2.45}$$

що і є рівнянням Кляйна – Ґордона.

Ми можемо краще зрозуміти залежність $\phi(x)$ і $\pi(x)$ від часу, записавши їх через оператори народження і знищення. Насамперед зазначимо, що

$$H\mathfrak{a}_{\mathbf{p}} = \mathfrak{a}_{\mathbf{p}}\, (H - E_{\mathbf{p}}),$$

а отже,

$$H^n \mathfrak{a}_{\mathbf{p}} = \mathfrak{a}_{\mathbf{p}}\, (H - E_{\mathbf{p}})^n,$$

для будь-якого n. Таке ж співвідношення (із заміною „–“ на „+“) справедливе для $\mathfrak{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$. Звідси одержуємо тотожності

$$e^{iHt}\mathfrak{a}_{\mathbf{p}} e^{-iHt} = \mathfrak{a}_{\mathbf{p}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t}, \qquad e^{iHt}\mathfrak{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-iHt} = \mathfrak{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{iE_{\mathbf{p}}t} \tag{2.46}$$

які можемо використати після підстановки значення $\phi(\mathbf{x})$ з (2.25) у (2.43), щоб знайти потрібний вираз для гайзенберґового оператора $\phi(x)$. (Ми завжди будемо використовувати символи $\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}$ і $\mathfrak{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$ для позначення незалежних від часу сходових операторів у картині Шродинґера.) В результаті,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x},\, t) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(\mathfrak{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x} + \mathfrak{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ip\cdot x} \right)\Big|_{p^0 = E_{\mathbf{p}}}; \\ \pi(\mathbf{x},\, t) &= \frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},\, t). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Варто відзначити, що ми можемо виконати такі ж маніпуляції з $\mathbf{P}$ замість H, щоб виразити $\phi(\mathbf{x})$ через $\phi(0)$. За аналоґією з (2.46), можна показати:

$$e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\mathfrak{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} = \mathfrak{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \qquad e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\mathfrak{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} = \mathfrak{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{2.48}$$

а відтак,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= e^{i(Ht-\mathbf{P}\cdot\mathbf{x})}\phi(0)e^{-i(Ht-\mathbf{P}\cdot\mathbf{x})} = \\ &= e^{iP\cdot x}\phi(0)e^{iP\cdot x},\end{aligned} \tag{2.49}$$

де $P^{\mu} = (H, \mathbf{P})$. (Позначення тут дещо плутані, але стандартні. Нагадаємо, що $\mathbf{P}$ — оператор імпульсу, чиє власне значення є повним імпульсом системи. Водночас, $\mathbf{p}$ — імпульс однієї фур'є-моди поля, що його ми інтерпретуємо як імпульс частки в цій моді. Для одночасткового стану з визначеним імпульсом величина $\mathbf{p}$ є власним значенням оператора $\mathbf{P}$.)

Рівняння (2.47) явно демонструє корпускулярно-хвильовий дуалізм квантованого поля $\phi(x)$. З одного боку, $\phi(x)$ представлено оператором у гільбертовому просторі, який народжує і знищує частки, що є квантами збудження поля. З іншого боку, $\phi(x)$ записано як лінійну комбінацію рішень $e^{ip\cdot x}$ і $e^{-ip\cdot x}$ хвильового рівняння Кляйна – Ґордона. В експоненті з'являються обидва знаки для часової залежності: ми знаходимо як e^{-ip^0t}, так і e^{+ip^0t}, причому p^0 завжди позитивний. Якби це були одночасткові хвильові функції, то вони відповідали б станам з позитивною і неґативною енерґіями; далі ми називатимемо їх *позитивно-* і *неґативно-частотними* модами. Таке поєднання між сходовими операторами і хвильовими формами властиве для всіх вільних квантових полів. Позитивно-частотне рішення рівняння поля має за коефіцієнт оператор *знищення* частки з відповідною одночастковою хвильовою функцією. Неґативно-частотне рішення рівняння поля, що є ермітово спряженим до позитивно-частотного, має за коефіцієнт оператор *народження* частки з відповідною одночастковою хвильовою функцією і позитивним значенням енерґії. За такої інтерпретації, наявність у релятивістського хвильового рівняння як позитивно-, так і неґативно-частотних рішень, не суперечить вимозі, щоб розумна квантова теорія мала лише позитивні енерґетичні збудження.

Причинність

Повернімось тепер до питання причинності, порушеного на початку цього розділу. В наявному формалізмі, що спирається на картину Гайзенберґа, амплітуда розповсюдження частки від y до x є $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$. Позначимо цю величину як $D(x-y)$. Кожен оператор $\phi(x)$ є сумою операторів $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}^{\dagger}$, але у виразі для амплітуди ненульовий лише член $\langle 0|\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}\mathfrak{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|0\rangle =$

$(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$. Легко переконатися, що в нас залишається тільки

$$D(x-y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-ip\cdot(x-y)}. \tag{2.50}$$

У (2.40) ми вже довели, що інтеґрали такого вигляду лоренц-інваріантні. Тепер обчислимо цей інтеґрал для конкретних значень $x-y$.

Найперше розглянемо випадок, коли різниця $x-y$ спрямована вздовж часової осі: $x^0-y^0=t$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}=0$. (Якщо інтервал від y до x часоподібний, то завжди знайдеться система, в якій виконується ця умова.) Тоді маємо

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\infty dp\,\frac{p^2}{2\sqrt{p^2+m^2}}e^{-i\sqrt{p^2+m^2}\,t} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_m^\infty dE\,\sqrt{E^2-m^2}\,e^{-iEt} \underset{t\to\infty}{\sim} \\ &\underset{t\to\infty}{\sim} e^{-imt}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Далі розглянемо випадок, коли різниця $x-y$ чисто просторова: $x^0-y^0=0$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{r}$. Тоді амплітуда така:

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\infty dp\,\frac{p^2}{2E_{\mathbf{p}}}\frac{e^{ipr}-e^{-ipr}}{ipr} = \\ &= \frac{-i}{2(2\pi)^2 r}\int\limits_{-\infty}^\infty dp\,\frac{p\,e^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}}. \end{aligned}$$

Якщо розглядати підінтеґральний вираз як функцію комплексної змінної p, то вона має розрізи вздовж уявної осі, що починаються в точках $\pm im$ (Рис. 2.3). Для обчислення інтеґрала пересунемо контур так, щоб він огорнув розріз у верхній півплощині. Позначивши $\rho=-ip$, ми отримуємо

$$\frac{1}{4\pi^2 r}\int\limits_m^\infty d\rho\,\frac{\rho\,e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2-m^2}} \underset{t\to\infty}{\sim} e^{-mr}. \tag{2.52}$$

Отже, поза межами світлового конуса амплітуда експоненційно зменшується, проте залишається ненульовою.

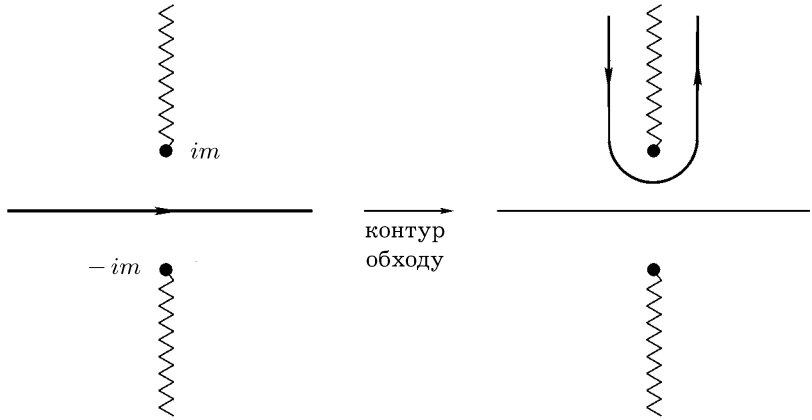


Рис. 2.3. Контур для обчислення амплітуди розповсюдження $D(x-y)$ по простороподібному інтервалу.

Утім, для справжнього розгляду причинності ми мусимо задатися питанням не про те, чи може частка розповсюджуватися на простороподібні інтервали, а про те, чи може *вимірювання* в одній точці вплинути на вимірювання в іншій, якщо ці точки відокремлені простороподібним інтервалом. Найпростіше, ми можемо спробувати виміряти поле $\phi(x)$ і для цього маємо вирахувати комутатор $[\phi(x), \phi(y)]$; якщо він нульовий, то одне вимірювання не здатне вплинути на інше. І справді, якщо цей комутатор дорівнює нулю для $(x-y)^2 < 0$, то причинність зберігається і в загальному випадку, оскільки комутатори від будь-яких функцій $\phi(x)$, включно з $\pi(x) = \partial\phi/\partial t$, також будуть нульовими. Звичайно, ми знаємо з рівняння (2.20), що цей комутатор нульовий при $x^0 = y^0$; а зараз проведемо загальніші розрахунки:

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\times \\
&\quad \times\left[\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}+a^{\dagger}_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x}\right), \left(a_{\mathbf{q}}e^{-iq\cdot x}+a^{\dagger}_{\mathbf{q}}e^{iq\cdot x}\right)\right] = \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(e^{-ip\cdot(x-y)}-e^{ip\cdot(x-y)}\right) = \\
&= D(x-y)-D(y-x).
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Якщо $(x-y)^2 < 0$, ми можемо здійснити перетворення Лоренца над другим доданком (позаяк кожен з них лоренц-інваріантний), що переводить $(x-y) \to -(x-y)$ (Рис. 2.4). Отже два члени виявляються рівними і скорочуються; причинність зберігається. Зазначимо, що для $(x-y)^2 > 0$

не існує такого безперервного перетворення Лоренца, щоб $(x - y) \to -(x - y)$. У цьому разі, згідно з (2.51), амплітуда (на щастя) ненульова і для окремого випадку $\mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$ має приблизний вигляд $(e^{-imt} - e^{imt})$. З цього ми робимо висновок, що жодне вимірювання в теорії Кляйна – Ґордона не може вплинути інше вимірювання поза межами світлового конуса.

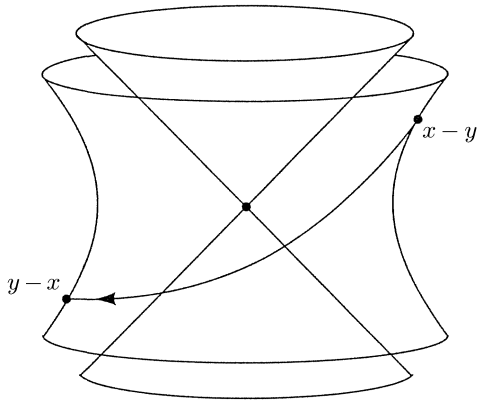


Рис. 2.4. Коли різниця $x - y$ простороподібна, існує таке безперервне перетворення Лоренца, що $(x - y) \to -(x - y)$.

Таким чином, у теорії Кляйна – Ґордона дотримується принцип причинності, як ми і стверджували наприкінці § 2.1. Проте для належного розуміння цього механізму треба включити в контекст нашого розгляду *комплексне* поле Кляйна – Ґордона, що має два різні типи збудження — для часток і античасток. Як було зазначено при обговоренні (2.15), ми можемо додати в теорію Кляйна – Ґордона збережений заряд, вважаючи поле $\phi(x)$ не дійсним, а комплексним. Після квантування комплексної скалярної теорії поля (див. Задачу 2.2) $\phi(x)$ народжуватиме позитивно заряджені і знищуватиме неґативно заряджені частки, тим часом як $\phi^\dagger(x)$ діятиме протилежним чином. Тоді комутатор $[\phi(x),\ \phi^\dagger(y)]$ матиме ненульові складові, які для збереження причинності повинні точно скорочуватися поза світловим конусом. Ці складові мають просторово-часову інтерпретацію двох доданків у (2.53), але вже з приписаними до них зарядами. Перший доданок представлятиме амплітуду розповсюдження неґативно зарядженої частки від y до x. Другий доданок представлятиме амплітуду розповсюдження позитивно зарядженої частки від x до y. Для існування цих двох процесів і точного скорочення їх амплітуд, обидві частки повинні існувати і мати однакові маси. У квантовій теорії поля причинність вимагає, щоб у кожної частки була відповідна античастка з та-

кою ж масою і протилежними квантовими числами (у даному випадку, електричним зарядом). Для дійсного поля Кляйна – Ґордона частка є своєю власною античасткою.

Пропаґатор Кляйна – Ґордона

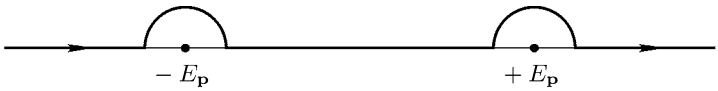
Трохи докладніше вивчимо комутатор $[\phi(x), \phi(y)]$. Оскільки він є c-числом, ми можемо записати $[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle$. Цей вираз можна переписати у вигляді чотиривимірного інтеґрала, який для $x^0 > y^0$

$$\langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)}\right) =$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)}\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{-2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)}\Big|_{p^0=-E_{\mathbf{p}}} \right) \underset{x^0>y^0}{=} \tag{2.54}$$

$$\underset{x^0>y^0}{=} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-ip\cdot(x-y)}.$$

На останньому кроці інтеґрування по p^0 виконується вздовж контуру:



Для $x^0 > y^0$ ми можемо замкнути контур знизу, охопивши обидва полюси для отримання передостаннього рядка у (2.54). Для $x^0 < y^0$ замкнемо контур згори, отримавши нуль. Таким чином, інтеґрал в останньому рядку (2.54) разом з правилом обходу полюсів є виразом для величини, яку ми позначимо

$$D_R(x-y) \equiv \theta(x^0 - y^0)\, \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle. \tag{2.55}$$

Для розуміння, що являє собою ця величина, проробимо ще одне обчислення:

$$\begin{aligned}
(\partial^2 + m^2) D_R(x-y) &= \partial^2\theta(x^0 - y^0)\, \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle + \\
&\quad + 2\partial_\mu\theta(x^0 - y^0)\, \partial^\mu \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle + \\
&\quad + \theta(x^0 - y^0)\, (\partial^2 + m^2) \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle = \\
&= -\delta(x^0 - y^0)\, \langle 0|[\pi(x), \phi(y)]|0\rangle + \\
&\quad + 2\delta(x^0 - y^0)\, \langle 0|[\pi(x), \phi(y)]|0\rangle + 0 = \\
&= -i\delta^{(4)}(x-y).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Це свідчить про те, що $D_R(x-y)$ є функцією Ґріна оператора Кляйна – Ґордона. Оскільки вона нульова при $x^0 < y^0$, то це *запізнювальна* функція Ґріна.

Якби ми ще не мали формули (2.54), то могли б вивести її за допомогою перетворення Фур'є. Записавши

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-y)} \widetilde{D}_R(p), \tag{2.57}$$

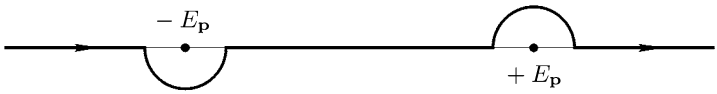
отримуємо алґебраїчний вираз для $\widetilde{D}_R(p)$:

$$(-p^2 + m^2)\widetilde{D}_R(p) = -i.$$

Звідси негайно приходимо до результату:

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{i}{p^2 - m^2}\, e^{-ip\cdot(x-y)}. \tag{2.58}$$

Інтеґрал по p^0 у (2.58) можна обчислити по чотирьох різних контурах, з-поміж яких у (2.54) був використаний лише один. У Розділі 4 ми переконаємося, що інше правило обходу полюсів



є надзвичайно корисним; воно називається *приписом Фейнмана*. Зручний спосіб запам'ятати його, це записати

$$D_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\, e^{-ip\cdot(x-y)}, \tag{2.59}$$

оскільки полюси тепер знаходяться в точках $p^0 = \pm(E_{\mathbf{p}} - i\varepsilon)$, зміщених відповідно нижче й вище дійсної осі. При $x^0 > y^0$, ми можемо взяти інтеґрал по p^0, замкнувши контур знизу, і отримаємо амплітуду розповсюдження $D(x-y)$ з (2.50). При $x^0 < y^0$ замикаємо контур згори, що дає такий самий вираз, але з переставленими x і y. Отже, маємо

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \begin{cases} D(x-y) & \text{для } x^0 > y^0 \\ D(y-x) & \text{для } x^0 < y^0 \end{cases} \\ &= \theta(x^0 - y^0)\,\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \\ &\qquad + \theta(y^0 - x^0)\,\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle \equiv \\ &\equiv \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Тут T позначає операцію *хронологічного впорядкування*, яка розташовує „пізніші“ оператори ліворуч від „раніших“. Застосовуючи до останнього рядка $(\partial^2 + m^2)$, ви можете безпосередньо перевірити, що D_F є функцією Ґріна оператора Кляйна – Ґордона.

З практичного погляду, вирази (2.59) і (2.60) є найістотнішими результатами цього розділу. Функція Ґріна $D_F(x - y)$ називається *фейнмановим пропаґатором* для частки Кляйна – Ґордона, оскільки вона, зрештою, є амплітудою розповсюдження. І справді, фейнманів пропаґатор виявляється частиною правил Фейнмана, адже саме $D_F(x-y)$ (або $D_F(p)$) ставиться у відповідність внутрішнім лініям на фейнманових діаґрамах, що зображають розповсюдження віртуальних часток.

Проте ми мусимо пройти ще довгий шлях, щоб отримати змогу проводити будь-які реальні обчислення, оскільки досі працювали лише з *вільною* теорією Кляйна – Ґордона, у якій рівняння поля є лінійні і відсутня взаємодія. Окремі частки існують у своїх ізольованих модах, не помічаючи одна одну і будь-які інші сорти часток. У такій теорії неможливе проведення жодних спостережень за допомогою розсіяння або інших процесів. Разом з тим, розроблений нами формалізм є надзвичайно важливий, бо вільна теорія формує основу для проведення пертурбативних обчислень у теорії із взаємодією.

Народження часток класичним джерелом

А втім, є один різновид взаємодії, до вивчення якого ми вже підготовлені. Розглянемо поле Кляйна – Ґордона, пов’язане із зовнішнім класичним полем-джерелом $j(x)$. Цю ситуацію описує рівняння руху

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = j(x), \tag{2.61}$$

де $j(x)$ — певна фіксована функція просторово-часових координат, відмінна від нуля лише на обмеженому часовому інтервалі. Якщо ми почнемо розгляд з вакуумного стану, то що отримаємо після того, як $j(x)$ увімкнеться, а потім знову вимкнеться?

Рівняння поля (2.61) випливає з лаґранжіана

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu\phi)^2 - \tfrac{1}{2}\,m^2\phi^2 + j(x)\phi(x). \tag{2.62}$$

Для випадку, коли $j(x)$ вмикається лише на обмежений час, найпростіше розв’язати задачу безпосередньо з польового рівняння. До увімкнення $j(x)$ поле $\phi(x)$ має вигляд

$$\phi_0(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p} e^{-ip\cdot x} + a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right).$$

Без джерела це було було б справедливо для будь-якого моменту часу. А за наявності джерела рішення рівняння руху можна побудувати з використанням функції Ґріна:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_0(x) + i\int d^4y\, D_R(x-y)\, j(y) = \\ &= \phi_0(x) + i\int d^4y \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,\theta(x^0-y^0)\times \\ &\qquad\qquad \times\left(e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)}\right) j(y).\end{aligned} \tag{2.63}$$

Якщо ми дочекаємося, поки дія $j(x)$ залишиться в минулому, то тета-функція дорівнюватиме одиниці на всій ділянці інтеґрування. Тоді $\phi(x)$ включатиме лише фур'є-компоненти $j(x)$,

$$\tilde{j}(p) = \int d^4y\, e^{ip\cdot y} j(y),$$

отримані при таких 4-імпульсах p, що $p^2 = m^2$. Природно зґрупувати позитивно-частотні члени разом з $\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}$, а неґативно-частотні — разом з $\mathfrak{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$. Це дасть нам

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left\{\left(\mathfrak{a}_{\mathbf{p}} + \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\tilde{j}(p)\right)e^{-ip\cdot x} + \text{e. c.}\right\}. \tag{2.64}$$

Тепер ми можемо вгадати (або вирахувати) форму гамільтоніана після дії $j(x)$. Для цього треба просто замінити $\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}$ на $(\mathfrak{a}_{\mathbf{p}} + i\tilde{j}(p)/\sqrt{2E_{\mathbf{p}}})$:

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{p}}\left(\mathfrak{a}^\dagger_{\mathbf{p}} - \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\tilde{j}^*(p)\right)\left(\mathfrak{a}_{\mathbf{p}} + \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\tilde{j}(p)\right).$$

Енерґія системи після вимикання джерела є

$$\langle 0|H|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\tfrac{1}{2}|\tilde{j}(p)|^2, \tag{2.65}$$

де $|0\rangle$, як і раніше, позначає основний стан вільної теорії. Ми можемо інтерпретувати ці результати в термінах часток, ототожнивши $|\tilde{j}(p)|^2/2E_{\mathbf{p}}$ з питомою ймовірністю народження частки в моді p. Тоді загальна кількість народжених часток є

$$\int dN = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}|\tilde{j}(p)|^2. \tag{2.66}$$

При народженні часток істотними є лише ті фур'є-компоненти $j(x)$, які перебувають у резонансі з хвилями Кляйна – Ґордона на „масовій поверхні" (тобто, $p^2 = m^2$).

Ми повернемося до цього питання в Задачі 4.1. А в Розділі 6 вивчимо схожу ситуацію з народженням фотонів прискореним електроном (гальмівне випромінювання).

Задачі

2.1. Класичний електромаґнетизм (без джерел) випливає з дії

$$S = \int d^4x \left(-\tfrac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right), \quad \text{де} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

(a) Отримайте рівняння Максвела як рівняння Ейлера – Лаґранжа для цієї дії, розглядаючи компоненти $A(x)$ як динамічні змінні. Запишіть рівняння в стандартному вигляді, ототожнивши $E^i = -F^{0i}$ і $\varepsilon^{ijk}B^k = -F^{ij}$.

(b) Побудуйте тензор енерґії-імпульсу для цієї теорії. Зважте, що звичайна процедура не дає в результаті симетричного тензора. Щоб виправити це, можете додати до $T^{\mu\nu}$ член у вигляді $\partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}$, де $K^{\lambda\mu\nu}$ є антисиметричним за двома першими індексами. Такий доданок автоматично має нульову диверґенцію за індексом μ. Отже,

$$\widehat{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}$$

також є тензором енерґії-імпульсу з тими ж самими ґлобально збереженими енерґією та імпульсом. Покажіть, що така побудова з

$$K^{\lambda\mu\nu} = F^{\mu\lambda}A^\nu,$$

дає симетричний тензор енерґії-імпульсу $\widehat{T}$ і призводить до стандартних формул для питомих енерґії та імпульсу електромаґнітного поля:

$$\mathcal{E} = \int d^4x\, (\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi), \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$

2.2. Комплексне скалярне поле. Розгляньте теорію комплекснозначного скалярного поля, що задовольняє рівнянню Кляйна – Ґордона. Дія в цій теорії є

$$S = \int d^4x \left(\pi^*\pi + \boldsymbol{\nabla}\phi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi + m^2\phi^*\phi\right).$$

Простіше аналізувати цю теорію, розглядаючи як основні динамічні величини $\phi(x)$ і $\phi^*(x)$, а не дійсну й уявну складові $\phi(x)$.

(a) Знайдіть спряжені імпульси до $\phi(x)$ й $\phi^*(x)$ та канонічні комутаційні співвідношення. Покажіть, що гамільтоніан є

$$H = \int d^3\mathbf{x}\left(\pi^*\pi + \boldsymbol{\nabla}\phi^* \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi + m^2\phi^*\phi\right).$$

Отримайте гайзенберґове рівняння руху для $\phi(x)$ і покажіть, що воно справді є рівнянням Кляйна–Ґордона.

(b) Діаґоналізуйте H за допомогою операторів народження і знищення. Покажіть, що теорія включає два типи часток з масою m.

(c) Перепишіть збережений заряд

$$Q = \int d^3\mathbf{x}\, \tfrac{i}{2}(\phi^*\pi^* - \phi\pi)$$

у термінах сходових операторів і вирахуйте заряд часток кожного типу.

(d) Розгляньте випадок двох комплексних полів Кляйна–Ґордона з однаковою масою. Позначте поля як $\phi_a(x)$, де $a = 1, 2$. Покажіть, що тепер мають місце чотири збережені заряди — один, отриманий як узагальнення виразу в (c), а інші три, що визначаються формулою

$$Q^i = \int d^3\mathbf{x}\, \tfrac{i}{2}\left(\phi_a^*(\sigma^i)_{ab}\pi_b^* - \pi_a^*(\sigma^i)_{ab}\phi_b^*\right),$$

де σ^i є сиґма-матриці Паулі. Покажіть, що ці три заряди мають комутаційні співвідношення операторів моменту імпульсу (ґрупа $SU(2)$). Узагальніть ці результати на випадок n однакових комплексних скалярних полів.

2.3. Обчисліть інтеґрал

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = D(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,e^{-ip\cdot(x-y)}$$

у явному вигляді через функції Бесселя для простороподібного $(x-y)$, позначивши $(x-y)^2 = -r^2$.

Розділ 3
Діракове поле

Докладно розглянувши найпростіше з релятивістських рівнянь поля, ми тепер перейдемо до другого за простотою рівняння Дірака. Можливо, ви вже знайомі з цим рівнянням у його первісному трактуванні як одночасткового квантовомеханічного хвильового рівняння.[6] У цьому розділі наша точка зору буде цілком іншою. Спершу ми отримаємо рівняння Дірака, як *класичне* релятивістське рівняння поля, особливо акцентуючи на його релятивістській інваріантності. Потім у § 3.5 проквантуємо діракове поле схожим чином з тим, що був застосований до поля Кляйна – Ґордона.

§ 3.1. Лоренц-інваріантність хвильових рівнянь

Передовсім мусимо задатися питанням, якого вже торкнулися в Розділі 2: яке значення ми вкладаємо в слова, що рівняння є „релятивістськи інваріантним“? Найприйнятніше означення таке: якщо ϕ є полем або сукупність полів, а $\mathcal{D}$ — певний диференційний оператор, то твердження, що $\mathcal{D}\phi = 0$ релятивістськи-інваріантне, означає, що в разі, коли $\phi(x)$ задовольняє цьому рівнянню, і ми здійснюємо перехід (обертання або буст) до іншої системи відліку, то перетворене поле в новій системі відліку задовольнятиме тому ж самому рівнянню. Еквівалентно, ми можемо уявити, що всі частки або поля зазнали обертання (або бусту) на однаковий кут (або швидкість); тоді рівняння $\mathcal{D}\phi = 0$ має залишатися чинним і після перетворення. Надалі ми обиратимемо цю „активну“ точку зору.

Лаґранжове формулювання теорії поля істотно полегшує розгляд лоренц-інваріантності. Рівняння руху є автоматично лоренц-інваріантним за вищевказаним означенням, якщо лаґранжіан, з якого воно випливає, є лоренцовим *скаляром*. Це є безпосереднім наслідком принципу наймен-

[6] Це питання розглянуте, наприклад, у Шіффа [49], Розділ 13; Бейма [7], Розділ 23; Сакураї [48], Розділ 3. Хоча наш виклад самодостатній, ми рекомендуємо, щоб ви також вивчили й одночасткове рівняння Дірака за однією із зазначених книжок. (Або ж за книжками Бйоркена і Дрелла [9], Розділи 1-4; Дірака [66], Розділ 11; Вакарчука [65], Розділ 10; Мессіа [68], Розділ 20, — *перекл.*)

шої дії: якщо бусти залишають лаґранжіан незмінним, то перетворений екстремум дії знову буде екстремумом.

За приклад розглянемо теорію Кляйна–Ґордона. Ми можемо записати довільне перетворення Лоренца, як

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{3.1}$$

для певної 4×4 матриці Λ. Що станеться з полем Кляйна–Ґордона $\phi(x)$ при цьому перетворенні? Розглянемо поле $\phi(x)$, як локальну міру деякої величини, розподіленої в просторі. Якщо відбувається накопичення цієї величини в $x = x_0$, то $\phi(x)$ матиме максимум у x_0. Якщо тепер ми піддамо початковий розподіл бустові, то новий розподіл матиме максимум у $x = \Lambda x_0$. Це проілюстровано на Рис. 3.1(a). Відповідне перетворення поля є

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x). \tag{3.2}$$

Тобто перетворене поле, обчислене в перетвореній через буст точці, дає таке ж значення, як і початкове поле, обчислене в цій же точці до бусту.

Ми маємо переконатися, що це перетворення залишає незмінною форму лаґранжіана Кляйна–Ґордона. Згідно з (3.2), масовий член $\frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$ просто зміщується в точку $(\Lambda^{-1}x)$. Перетворення $\partial_\mu\phi(x)$ дає

$$\partial_\mu\phi(x) \to \partial_\mu\big(\phi(\Lambda^{-1}x)\big) = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu(\partial_\nu\phi)\left(\Lambda^{-1}x\right). \tag{3.3}$$

Оскільки метричний тензор $g^{\mu\nu}$ лоренц-інваріантний, матриці Λ^{-1} задовольняють тотожності:

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu g^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}. \tag{3.4}$$

Використовуючи це співвідношення, ми можемо вивести закон перетворення кінетичного члена в лаґранжіані Кляйна–Ґордона:

$$\begin{aligned}\big(\partial_\mu\phi(x)\big)^2 &\to g^{\mu\nu}\big(\partial_\mu\phi'(x)\big)\big(\partial_\nu\phi'(x)\big) = \\ &= g^{\mu\nu}\big[(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\partial_\rho\phi\big]\big[(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu\partial_\sigma\phi\big](\Lambda^{-1}x) = \\ &= g^{\rho\sigma}\big(\partial_\rho\phi\big)(\partial_\sigma\phi)(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \big(\partial_\mu\phi\big)^2(\Lambda^{-1}x).\end{aligned}$$

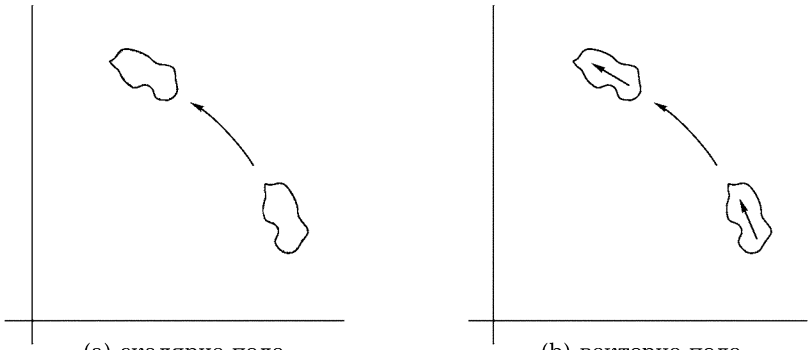
Отже, весь лаґранжіан перетворюється просто як скаляр:

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x). \tag{3.5}$$

Дія S, утворена інтеґруванням $\mathcal{L}$ по простору-часу, лоренц-інваріантна. Схожі обчислення показують, що рівняння руху також лоренц-інваріантне:

$$\begin{aligned}(\partial^2 + m^2)\phi'(x) &= \left[(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\sigma\mu}\partial_{\sigma} + m^2\right]\phi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \left(g^{\nu\sigma}\partial_{\nu}\partial_{\sigma} + m^2\right)\phi(\Lambda^{-1}x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Закон перетворення (3.2), застосований до ϕ, є найпростішим з усіх можливих законів перетворення полів. І він є єдино можливим для полів, що мають лише один компонент. Проте нам відомі приклади багато-



(a) скалярне поле (b) векторне поле

Рис. 3.1. Обертання векторного поля впливає як на розміщення ділянки його конфіґурації, так і на *орієнтацію* вектора.

компонентних полів, що перетворюються складнішим чином. Найзнайомішим нам випадком є векторне поле, наприклад, питомий 4-струм $j^{\mu}(x)$ або вектор-потенціал $A^{\mu}(x)$. У цьому разі величина, розподілена в просторі-часі, має також і орієнтацію, що змінюється при обертаннях і бустах. Як показано на Рис. 3.1(b), орієнтація має обертатися в тому ж напрямку, що й точка, в якій обчислюється поле:

$$\begin{aligned}&\text{при тривимірних обертаннях} \quad V^i(x) \to R^{ij}V^j(R^{-1}x); \\ &\text{при перетвореннях Лоренца} \quad V^{\mu}(x) \to \Lambda^{\mu}{}_{\nu}V^{\nu}(\Lambda^{-1}x).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Тензори довільного ранґу можуть бути побудовані з векторів простим додаванням індексів і відповідним збільшенням кількості множників Λ в законі перетворення. Використовуючи такі векторні й тензорні поля, ми можемо записати цілу низку лоренц-інваріантних рівнянь, наприклад,

рівняння Максвела,

$$\partial^{\mu} F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{або} \quad \partial^2 A_{\nu} - \partial_{\nu}\partial^{\mu} A_{\mu} = 0,$$

що випливають із лаґранжіана

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\tfrac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 = -\tfrac{1}{4}\left(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}\right)^2. \tag{3.7}$$

Взагалі, будь-яке рівняння, кожен член якого має однакову кількість незгорнутих лоренцових індексів, автоматично буде інваріантним відносно перетворень Лоренца.

Такий метод тензорних позначень породжує великий клас лоренц-інваріантних рівнянь, проте їх виявляється значно більше. Як нам їх знайти? Ми могли б спробувати систематично відшукати всі можливі закони перетворення для поля. Тоді було б неважко виписати інваріантні лаґранжіани. Для простоти обмежимо нашу увагу лінійними перетвореннями, і таким чином, якщо Φ_a є n-компонентним мультиплетом, закон лоренцового перетворення визначається $n \times n$ матрицею $M(\Lambda)$:

$$\Phi_a \to M_{ab}(\Lambda)\Phi_b(\Lambda^{-1}x). \tag{3.8}$$

Можна показати, що найзагальніші нелінійні перетворення виводяться цих лінійних законів, а отже, немає потреби розглядати перетворення, більш загальні, ніж (3.8). При подальшому обговоренні ми іґноруватимемо зміну арґументу поля і будемо записувати перетворення (3.8) у формі:

$$\Phi \to M(\Lambda)\Phi. \tag{3.9}$$

Який припустимий вигляд матриць $M(\Lambda)$? Основне обмеження на $M(\Lambda)$ можна знайти при розгляді двох послідовних перетворень Λ і Λ'. Їхній результат має бути новим лоренцовим перетворенням Λ''; тобто перетворення Лоренца утворюють *ґрупу*. Це дає умову узгодженості, якій змушені задовольняти матриці $M(\Lambda)$ при послідовній дії двох перетворень:

$$M(\Lambda')M(\Lambda) = M(\Lambda'') \quad \text{для} \quad \Lambda'\Lambda = \Lambda''. \tag{3.10}$$

Отже, відповідність між матрицями M і перетвореннями Λ має зберігатися при їх перемноженні. З погляду математики це означає, що матриці M мають утворювати n-вимірне *представлення* ґрупи Лоренца. Таким чином, наше завдання зводиться до пошуку скінченновимірних матричних представлень ґрупи Лоренца.

Перш ніж розглянути це питання для ґрупи Лоренца, вивчимо простішу ґрупу тривимірних обертань. Ця ґрупа має представлення будь-

якої розмірності n, відомі у квантовій механіці як матриці, що обертають n-компонентні хвильові функції часток з різними спінами. Розмірність пов'язана зі спіновим квантовим числом s формулою $n = 2s + 1$. Найважливішим нетривіальним представленням є двовимірне представлення, що відповідає спінові 1/2. Матриці цього представлення є 2×2 унітарні матриці з детермінантом 1, які можна виразити як

$$U = e^{-i\theta^i \sigma^i/2}, \tag{3.11}$$

де θ^i — три довільні параметри, а σ^i — сиґма-матриці Паулі.

Для будь-якої безперервної ґрупи, нескінченно близькі до тотожного (інфінітезимальні) перетворення визначають векторний простір, що називається *алґеброю Лі* цієї ґрупи. Базисні вектори цього векторного простору називаються *ґенераторами* алґебри Лі, або ґрупи Лі. Для ґрупи обертань ґенераторами є оператори моменту імпульсу J^i, що задовольняють комутаційним співвідношенням

$$\left[J^i, J^j\right] = i\varepsilon^{ijk} J^k \tag{3.12}$$

Оператори обертання на скінченний кут формуються експоненціюванням цих ґенераторів. У квантовій механіці оператор

$$R = \exp\left[-i\theta^i J^i\right] \tag{3.13}$$

дає обертання на кут $|\boldsymbol{\theta}|$ довкола осі $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$. Комутаційні співвідношення операторів J^i визначають закони множення цих операторів обертання. Отже, набір матриць, що задовольняють комутаційним співвідношенням (3.12), утворює шляхом експоненціювання в (3.13) представлення ґрупи обертань. У прикладі з попереднього абзацу представлення операторів моменту імпульсу

$$J^i \to \frac{\sigma^i}{2} \tag{3.14}$$

утворює представлення ґрупи обертань (3.11). Справедливе загальне твердження, що для отримання матричного представлення безперервної ґрупи належить знайти матричні представлення ґенераторів цієї ґрупи (які мають задовольняти відповідним комутаційним співвідношенням), а потім експоненціювати ці інфінітезимальні перетворення.

У випадку нашої задачі нам треба знати комутаційні співвідношення ґенераторів ґрупи лоренцових перетворень. Для ґрупи обертань можна отримати комутаційні співвідношення, записавши ґенератори як диференційні оператори; із виразу

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}) \tag{3.15}$$

прямо випливають комутаційні співвідношення (3.12) для моменту імпульсу. Використання векторного добутку в (3.15) властиво для тривимірного простору. А проте, ми також можемо записати оператори як антисиметричний тензор,

$$J^{ij} = -i(x^i\nabla^j - x^j\nabla^i),$$

де $J^3 = J^{12}$ і так далі. Узагальнення на чотиривимірні лоренцові перетворення тепер стає цілком природним:

$$J^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu). \tag{3.16}$$

Невдовзі ми побачимо, що ці шість операторів ґенерують три бусти і три просторові обертання ґрупи Лоренца.

Для визначення комутаційних правил в алґебрі Лоренца ми можемо просто вирахувати комутатори диференційних операторів (3.16). В результаті маємо

$$\left[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right] = i\left(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}\right). \tag{3.17}$$

Будь-які матриці, що представляють цю алґебру, мають задовольняти таким самим комутаційним правилам.

Аби побачити, що ми маємо в правій частині виразу, розгляньмо одне конкретне представлення (яке ми просто витягнемо, немов кролика з капелюха). Маємо 4×4-матриці

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha). \tag{3.18}$$

(Тут μ і ν нумерують кожну з шести матриць, тоді як α і β нумерують матричні компоненти.[7]) Можемо легко перевірити, що ці матриці задовольняють комутаційним співвідношенням (3.17). І справді, вони є не що інше, як матриці, що діють на звичайні лоренцові 4-вектори. Щоб побачити це, параметризуємо інфінітезимальні перетворення наступним чином:

$$V^\alpha \to \left(\delta^\alpha_\beta - \tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\right)V^\beta. \tag{3.19}$$

[7] Власне кажучи, поділ індексів у $(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta}$ на ті, що позначають різні матриці, і ті, що позначають їхні компоненти, є чисто умовним, бо насправді $\mathcal{J}$ — тензор четвертого ранґу у просторі з метрикою Мінковського. Саме остання обставина відрізняє це представлення (векторне) від описаного в наступному пункті спінорного, хоча на перший погляд і там, і там використовуються 4×4 матриці. (*Прим. перекл.*)

де V є 4-вектором, а $\omega_{\mu\nu}$ — антисиметричний тензор, що задає інфінітезимальний кут. Для прикладу розглянемо випадок $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$, а решта компонентів ω дорівнюють нулю. Тоді (3.19) має вигляд

$$V \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V, \tag{3.20}$$

що є просто інфінітезимальним обертанням у площині (x, y). Також можемо перевірити, що при значеннях $\omega_{01} = -\omega_{10} = \beta$ отримаємо

$$V \to \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V, \tag{3.21}$$

інфінітезимальний буст у напрямку осі x. Інші компоненти ω таким самим чином ґенерують решту бустів і просторових обертань.

Рівняння Дірака

Тепер, коли ми знайшли одне скінченновимірне представлення ґрупи Лоренца, наступним лоґічним кроком має стати розроблення формалізму для знаходження всіх інших представлень. Дарма, що це не надто важке завдання (Задача 3.1), навряд чи це є необхідним для нас, оскільки ми найбільше зацікавлені в тих представленнях, що відповідають спінові $1/2$.

Ми можемо знайти таке представлення, вдавшись до прийому, що належить Діракові. Припустимо, що маємо набір з чотирьох $n \times n$ матриць γ^μ, які задовольняють антикомутаційним співвідношенням

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \times \mathbf{1}_{n\times n} \qquad \text{(алґебра Дірака).} \tag{3.22}$$

Тоді можемо негайно записати n-вимірне представлення алґебри Лоренца. Воно має вигляд:

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \tag{3.23}$$

Повторно застосувавши (3.22), легко переконатися, що ці матриці задовольняють комутаційним співвідношенням (3.17).

Це обчислення можна провести у просторі будь-якої розмірності, з лоренцовою або евклідовою метрикою. Зокрема, воно має бути справедливим у тривимірному евклідовому просторі; і справді, ми можемо просто

записати

$$\gamma^j \equiv i\sigma^j \quad \text{(сиґма-матриці Паулі)},$$

$$\text{а отже,} \quad \{\gamma^i, \gamma^j\} = -2\delta^{ij}.$$

Множник i в першому рядку і знак мінус у другому є чистою умовністю.

Тоді в матрицях, що представляють алґебру Лоренца,

$$S^{ij} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\sigma^k, \tag{3.24}$$

ми впізнаємо відоме двовимірне представлення ґрупи обертань.

Тепер знайдемо матриці Дірака γ^μ для чотиривимірного простору Мінковського. Виявляється, що вони мають бути якнайменше 4×4, бо не існує четвертої 2×2 матриці, яка антикомутує з трьома сиґма-матрицями Паулі. Крім того, всі 4×4 представлення алґебри Дірака унітарно еквівалентні.[8] Отже, нам достатньо виписати лише одну явну реалізацію алґебри Дірака. Одне представлення, у вигляді 2×2 блоків, є

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Це представлення називається *вейлевим* або *киральним*. Ми переконаємося, що воно надзвичайно зручне, і використовуватимемо його протягом усієї книги. (Проте будьте пильні, бо багато підручників з теорії поля обирають інше представлення, у якому γ^0 є діаґональною. І поза тим, у книжках, де працюють з киральним представленням, часто обирають іншу домовленість про знаки.)

У нашому представленні, ґенератори бустів та просторових обертань є

$$S^{0i} = \tfrac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = -\tfrac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

і

$$S^{ij} = \tfrac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = -\tfrac{i}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\Sigma^k. \tag{3.27}$$

Чотирикомпонентне поле ψ, що перетворюється при бустах і обертаннях згідно з (3.26) і (3.27), називають *діраковим спінором*. Зазначимо, що ґенератори обертань S^{ij} є достоту тривимірною спінорною матрицею перетворень (3.24), повтореною двічі. Ґенератори бустів S^{0i} не є самоспряженими, а отже, наша реалізація бустів не є унітарною (це справедливо і

[8] Це і попереднє твердження випливають із загальної теорії представлень ґрупи Лоренца, викладеної в Задачі 3.1.

для векторного представлення (3.18).) І справді, ґрупа Лоренца „некомпактна“, а отже, не має однозначних скінченновимірних унітарних представлень. Утім, для нас це неістотно, оскільки ψ не хвильова функція, а класичне поле.

Тепер, коли ми знаємо закон перетворення для ψ, мусимо знайти відповідне рівняння поля. Одним з можливих є рівняння Кляйна–Ґордона:

$$(\partial^2 + m^2)\,\psi = 0 \tag{3.28}$$

Воно спрацьовує, бо спінорні матриці перетворення (3.26) і (3.27) діють лише у „внутрішньому“ просторі і жодним чином не впливають на диференційний оператор. Проте можна написати й жорсткіше рівняння першого порядку, що включає в себе (3.28) і водночас містить додаткову інформацію. Для цього маємо знати ще одну властивість γ-матриць. Нескладні підрахунки дозволяють перевірити, що

$$\left[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}\right] = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu,$$

або, еквівалентно,

$$(1 + \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma})\,\gamma^\mu(1 - \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}) = (1 - \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu.$$

Це рівняння є інфінітезимальною формою від

$$\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \tag{3.29}$$

де

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp\left(-\tfrac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) \tag{3.30}$$

є спінорним представленням перетворення Лоренца Λ (порівняйте з наведеним у (3.19) чисто векторним представленням). Рівняння (3.29) засвідчує, що γ-матриці інваріантні відносно одночасного перетворення за векторними і спінорними компонентами (так само, як σ^i інваріантні при просторових обертаннях). Іншими словами, ми можемо сприймати векторний індекс μ в γ^μ серйозно і брати скалярний добуток γ^μ з ∂_μ для утворення лоренц-інваріантного диференційного оператора.

Тепер ми готові записати рівняння Дірака:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0. \tag{3.31}$$

Щоб показати його лоренц-інваріантність, проведемо над його частиною перетворення Лоренца і обчислимо:

$$\begin{aligned}\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right]\,\psi(x) &\to \left[i\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m\right]\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\left[i\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m\right]\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}\left[i\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m\right]\psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}\left[i\Lambda^\mu{}_\sigma\gamma^\sigma(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m\right]\psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}\left[i\gamma^\nu\partial_\nu - m\right]\psi(\Lambda^{-1}x) = 0.\end{aligned}$$

Аби побачити, що рівняння Дірака містить у собі рівняння Кляйна–Ґордона, допишемо ліворуч від нього $(-i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$:

$$\begin{aligned}0 &= (-i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\,\psi = \\ &= (\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\,\psi = \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\{\gamma^\mu,\,\gamma^\nu\}\,\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\psi = \\ &= (\partial^2 + m^2)\,\psi.\end{aligned}$$

Для знаходження лаґранжіана теорії Дірака ми маємо вгадати, як перемножити два діракові спінори, щоб отримати лоренцовий скаляр. Найочевидніше припущення, $\psi^\dagger\psi$, не годиться. При лоренцовому бусті це дає $\psi^\dagger\Lambda^\dagger_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi$; якби матриця бусту була унітарна, ми мали б $\Lambda^\dagger_{\frac{1}{2}} = \Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}$, і все було б гаразд. Проте $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ не є унітарною, бо ґенератори (3.26) несамоспряжені.

Рішення проблеми полягає в запровадженні *діраково спряженого* спінора:

$$\bar\psi \equiv \psi^\dagger\gamma^0. \tag{3.32}$$

При інфінітезимальному перетворенні Лоренца, параметризованого через $\omega_{\mu\nu}$, маємо $\bar\psi \to \psi^\dagger\left(1 + \dfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger\right)\gamma^0$. Сума по μ і ν має шість різних ненульових доданків. У членах, що відповідають обертанню (μ та ν обидва відмінні від нуля), $(S^{\mu\nu})^\dagger = S^{\mu\nu}$, і $S^{\mu\nu}$ комутує з γ^0. У бустових членах, де μ або ν дорівнюють нулю, $(S^{\mu\nu})^\dagger = -S^{\mu\nu}$, але $S^{\mu\nu}$ антикомутує з γ^0. Перенесення γ^0 наліво усуває ермітове спряження з $S^{\mu\nu}$, що дає нам закон перетворення

$$\bar\psi \to \bar\psi\,\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}, \tag{3.33}$$

а отже, величина $\bar\psi\psi$ є лоренцовим скаляром. Схожим чином ми можемо показати, за допомогою (3.29), що $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ є лоренцовим вектором.

Тому правильний лоренц-інваріантний лаґранжіан Дірака є

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi. \tag{3.34}$$

Рівняння Ейлера – Лаґранжа для $\bar{\psi}$ (або $\psi^{\dagger}$) негайно призводить до рівняння Дірака у вигляді (3.31); а рівняння Ейлера – Лаґранжа для ψ дає таке ж рівняння в ермітово спряженій формі:

$$-i\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} - m\bar{\psi} = 0. \tag{3.35}$$

Вейлеві спінори

З блочно-діаґональної форми ґенераторів (3.26) і (3.27) очевидно, що діракове представлення ґрупи Лоренца є *привідним*.[9] Ми можемо утворити два двовимірні представлення, розглянувши кожен блок окремо і записавши

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Двокомпонентні об'єкти ψ_L та ψ_R називаються лівополяризованим і правополяризованим *вейлевими спінорами*. Ви можете легко переконатися, що закони їх перетворення при інфінітезимальних обертаннях $\boldsymbol{\theta}$ і бустах $\boldsymbol{\beta}$ є такі:

$$\begin{aligned} \psi_L &\to \left(1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\psi_L; \\ \psi_R &\to \left(1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\psi_R. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Ці закони пов'язані між собою комплексним спряженням. Застосувавши тотожність

$$\sigma^2\boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}\sigma^2, \tag{3.38}$$

неважко показати, що величина $\sigma^2\psi_L^*$ перетворюється як правополяризований спінор.

В термінах ψ_L і ψ_R рівняння Дірака має вигляд:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi = \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}) \\ i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}) & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0. \tag{3.39}$$

[9] Якби ми працювали з іншим представленням ґамма-матриць, привідність була б не така очевидна. Це, власне, і є головною причиною використання кирального представлення.

Два представлення ґрупи Лоренца ψ_L і ψ_R змішуються в рівнянні Дірака за рахунок масового члена. Але якщо встановити $m = 0$, то рівняння для ψ_L і ψ_R роз'єднуються:

$$\begin{aligned} i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \psi_L &= 0; \\ i(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \psi_R &= 0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Це так звані *рівняння Вейля*; вони особливо важливі при вивчені нейтрино та теорії слабкої взаємодії.

Є можливість трохи покращити їх запис. Введемо за означенням

$$\sigma^\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma}), \tag{3.41}$$

отже,

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

(Риска в $\bar{\sigma}$ не має жодного стосунку до риски в $\bar{\psi}$.) Тоді рівняння Дірака можна записати як

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma \cdot \partial \\ i\bar{\sigma} \cdot \partial & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \tag{3.43}$$

а рівняння Вейля:

$$i\bar{\sigma} \cdot \partial \psi_L = 0, \quad i\sigma \cdot \partial \psi_R = 0. \tag{3.44}$$

§ 3.2. Рішення рівняння Дірака для вільних часток

Щоб виразніше відчути фізику в рівнянні Дірака, розглянемо його плоскохвильове рішення. Оскільки діракове поле ψ задовольняє рівнянню Кляйна–Ґордона, ми відразу знаємо, що воно може бути записане як лінійна комбінація плоских хвиль:

$$\psi(x) = u(p)\, e^{-ip\cdot x}, \quad \text{де} \quad p^2 = m^2. \tag{3.45}$$

Тимчасово зосередимося на рішеннях з позитивною частотою, тобто $p^0 > 0$. Вектор-стовпець $u(p)$ має задовольняти додатковому обмеженню, яке можна отримати при підстановці (3.45) у рівняння Дірака:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(p) = 0. \tag{3.46}$$

Найпростіше проаналізувати це рівняння в системі спокою, де $p = p_0 = (m, \mathbf{0})$; а загальне рішення для довільного значення p можна потім отримати шляхом бусту $\Lambda_{\frac{1}{2}}$. У системі спокою рівняння (3.46) набуває вигляду

$$(m\gamma^0 - m)\, u(p_0) = m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(p_0) = 0,$$

а його рішення є

$$u(p_0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix} \tag{3.47}$$

для будь-якого числового двокомпонентного спінора ξ. Домовимося нормувати ξ так, щоб $\xi^\dagger\xi = 1$; множник $\sqrt{m}$ введено для подальшої зручності. Ми можемо інтерпретувати спінор ξ, розглядаючи ґенератор обертань (3.27): ξ перетворюється при цьому як типовий двокомпонентний спінор ґрупи обертань, а отже, він звичайним чином визначає спінову орієнтацію рішення рівняння Дірака. Наприклад, коли $\xi = \binom{1}{0}$, то спін частки спрямовано вгору вздовж третьої осі.

Зазначимо, що після застосування рівняння Дірака можна довільно обрати лише два з чотирьох компонентів $u(p)$. Це саме те, чого ми потребували, оскільки частка зі спіном $1/2$ має лише два фізичні спінові стани — вгору і вниз. (Звісно, ми трохи передчасно завели мову про *частки* та *спін*. У § 3.5, проквантувавши поле Дірака, ми *доведемо*, що спіновий момент імпульсу діракової частки є $\frac{\hbar}{2}$; а наразі лише зауважимо, що для кожного p є два можливі рішення $u(p)$.)

Тепер, коли ми маємо загальний вираз для $u(p)$ в системі спокою, можемо отримати $u(p)$ у будь-якій іншій системі шляхом бусту. Розглянемо буст уздовж третьої осі. Спершу мусимо нагадати собі, як діє буст на 4-вектор. В інфінітезимальній формі

$$\begin{pmatrix}E\\ p^3\end{pmatrix} = \left[1 + \eta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}m\\ 0\end{pmatrix},$$

де η є деякий нескінченно малий параметр. Для скінченного η маємо написати

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}E\\ p^3\end{pmatrix} &= \exp\left[1 + \eta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}m\\ 0\end{pmatrix} = \\ &= \left[\cosh\eta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \sinh\eta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}m\\ 0\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}m\cosh\eta\\ m\sinh\eta\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.48}$$

Параметр η називається *гіперболічною швидкістю*. Ця величина є адитивною при послідовних бустах.

Тепер застосуємо той самий буст до $u(p)$. Згідно з рівняннями (3.26) і (3.30), маємо

$$u(p) = \exp\left[-\frac{\eta}{2}\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0\\ 0 & -\sigma^3\end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix} =$$

$$= \left[\cosh\frac{\eta}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \sinh\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0\\ 0 & -\sigma^3\end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\eta/2}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right) + e^{-\eta/2}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right) & 0 \\ 0 & e^{\eta/2}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right) + e^{-\eta/2}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right)\end{pmatrix}\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left\{\sqrt{E+p^3}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right) + \sqrt{E-p^3}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right)\right\}\xi \\ \left\{\sqrt{E+p^3}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right) + \sqrt{E-p^3}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right)\right\}\xi \end{pmatrix}. \tag{3.49}$$

Останній рядок можна спростити й отримати

$$u(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi\end{pmatrix}, \tag{3.50}$$

де квадратний корінь від матриці слід розуміти так, що береться позитивне значення квадратного кореня від кожного її власного значення. Цей вираз для $u(p)$ не лише компактніший, а й зберігає чинність для довільного напрямку $\mathbf{p}$. Працюючи з виразами такого типу, корисно знати тотожність

$$(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma}) = p^2 = m^2. \tag{3.51}$$

Ви можете безпосередньо перевірити, що (3.50) є рішенням рівняння Дірака у формі (3.43).

На практиці зазвичай зручніше працювати з конкретними спінорами ξ. Корисним вибором були б тут власні стани σ^3. Наприклад, якщо $\xi = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ (спін угору вздовж третьої осі), ми маємо

$$u(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{E-p^3}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \\ \sqrt{E+p^3}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{великий буст}]{} \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\ \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}, \tag{3.52}$$

тоді як для $\xi = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ (спін униз уздовж третьої осі)

$$u(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{E+p^3}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \\ \sqrt{E-p^3}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{великий буст}]{} \sqrt{2E}\begin{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\\ 0\end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

При $\eta \to \infty$ стани вироджується у двокомпонентні спінори безмасової частки. (Тепер ми бачимо, для чого потрібен множник $\sqrt{m}$ у (3.47) — він зберігає скінченність спінорних виразів у безмасовій межі.)

Рішення (3.52) і (3.53) є власними станами оператора *спіральності,*

$$h \equiv \widehat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{p}_i\begin{pmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & \sigma^i\end{pmatrix}. \tag{3.54}$$

Частка з $h = +1/2$ називається *правополяризованою*, тоді як з $h = -1/2$ *лівополяризованою*. Спіральність масивної частки залежить від системи відліку, бо завжди можна перейти до такої системи, де її імпульс протилежно спрямований (але спін незмінний). Для безмасової частки, що рухається зі швидкістю світла, такий перехід виконати неможливо.

Надзвичайно проста форма $u(p)$ для безмасової частки у власному стані спіральності робить поведінку таких часток легко зрозумілою. У Розділі 1 це дозволило нам угадати вигляд перерізу розсіяння для $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ у безмасовій межі. У наступних розділах ми неодноразово вдаватимемося до бездумних обчислень, після чого будемо розглядати власні стани спіральності у високоенерґетичному наближенні, аби збагнути, що ми зробили.

Тепер ми вже готові зрозуміти походження позначень ψ_L і ψ_R для вейлевих спінорів. Рішеннями рівняння Вейля є стани з визначеною спіральністю, що відповідають ліво- та правополяризованим часткам. Лоренц-інваріантність спіральності (для безмасової частки) є очевидна в запису вейлевих спінорів, оскільки ψ_L і ψ_R існують у різних представленнях ґрупи Лоренца.

Зручно записувати умову нормування для $u(p)$ в лоренц-інваріантному вигляді. Вище ми бачили, що $\psi^\dagger\psi$ не є інваріантним. Так само,

$$u^\dagger u = \left(\xi^\dagger\sqrt{p\cdot\sigma},\ \xi^\dagger\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\right)\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi\end{pmatrix} = 2E_{\mathbf{p}}\,\xi^\dagger\xi. \tag{3.55}$$

Для отримання лоренцового скаляра визначимо

$$\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\,\gamma^0. \tag{3.56}$$

Відтак, провівши майже ідентичні обчислення, маємо

$$\bar{u}u = 2m\,\xi^\dagger\xi. \tag{3.57}$$

Це й буде нашою умовою нормування. Крім того, ми додатково вимагаємо, щоб двокомпонентний спінор ξ було нормовано звичайним чином: $\xi^\dagger\xi = 1$. Також зручно обрати базисні спінори ξ^1 та ξ^2 (на зразок $\binom{1}{0}$ і $\binom{0}{1}$) ортоґональними. Для безмасової частки рівняння (3.57) є тривіальним, тож у цьому випадку ми маємо писати умову нормування у вигляді (3.55).

Підсумуємо результати нашого розгляду. Загальне рішення рівняння Дірака можна записати як лінійну комбінацію плоских хвиль. Позитивно-частотні хвилі мають вигляд

$$\psi(x) = u(p)\,e^{-ip\cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \tag{3.58}$$

Існують два лінійно незалежні рішення для $u(p)$:

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}, \qquad s = 1, 2, \tag{3.59}$$

які ми нормуємо відповідно до

$$\bar{u}^r(p)\,u^s(p) = 2m\,\delta^{rs} \quad \text{або} \quad u^{r\dagger}(p)\,u^s(p) = 2E_{\mathbf{p}}\,\delta^{rs}. \tag{3.60}$$

Таким самим чином можемо знайти неґативно-частотні рішення:

$$\psi(x) = v(p)\,e^{ip\cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \tag{3.61}$$

(Зазначимо, що ми обрали за краще поставити знак плюс в експоненті, ніж допустити від'ємне значення p^0.) Існують два лінійно незалежні рішення для $v(p)$:

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta^s \end{pmatrix}, \qquad s = 1, 2, \tag{3.62}$$

де η^s є іншим базисом двокомпонентних спінорів. Ці рішення нормуємо згідно з

$$\bar{v}^r(p)\,v^s(p) = -2m\,\delta^{rs} \quad \text{або} \quad v^{r\dagger}(p)\,v^s(p) = +2E_{\mathbf{p}}\,\delta^{rs}. \tag{3.63}$$

Спінори u і v також взаємно ортоґональні:

$$\bar{u}^r(p)\,v^s(p) = \bar{v}^r(p)\,u^s(p) = 0. \tag{3.64}$$

Будьте пильні, оскільки $u^{r\dagger}(p)\,v^s(p) \neq 0$ і $v^{r\dagger}(p)\,u^s(p) \neq 0$. Проте зазначимо, що

$$u^{r\dagger}(\mathbf{p})\,v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(\mathbf{p})\,u^s(-\mathbf{p}) = 0, \tag{3.65}$$

де ми змінили знак 3-імпульсу в одному з множників у кожному спінорному добутку.

Спінові суми

При розрахунках фейнманових діаґрам у нас часто виникатиме потреба взяти суму за станами поляризації ферміонів. Шляхом простих обчислень можемо отримати необхідне для цього співвідношення повноти:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1,2} u^s(p)\,\bar{u}^s(p) &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix} \left(\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma},\ \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\right) = \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma} \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & m \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

У другому рядку ми використали тотожність

$$\sum_{s=1,2} \xi^s \xi^{s\dagger} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо бажану формулу:

$$\sum_s u^s(p)\, \bar{u}^s(p) = \gamma \cdot p + m. \tag{3.66}$$

Таким самим чином,

$$\sum_s v^s(p)\, \bar{v}^s(p) = \gamma \cdot p - m. \tag{3.67}$$

Комбінація $\gamma \cdot p$ зустрічається так часто, що Фейнман ввів позначення: $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$. Відтепер ми часто вживатимемо цей запис.

§ 3.3. Матриці Дірака та білінійні форми діракового поля

Ми бачили в § 3.2, що величина $\bar{\psi}\psi$ є лоренцовим скаляром. Також легко показати, що $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ є 4-вектором — ми скористалися з цього факту, коли отримували вираз для діракового лаґранжіана (3.34). А зараз розглянемо форму $\bar{\psi}\Gamma\psi$, де Γ — деяка 4×4 постійна матриця, і задамося загальнішим питанням: чи можемо ми розкласти цей вираз на доданки, що мають певні трансформаційні властивості щодо ґрупи Лоренца? Відповідь буде ствердною, якщо запишемо матрицю Γ через шістнадцять базисних 4×4 матриць, визначених як антисиметричні комбінації γ-матриць:

1	1 матриця
γ^μ	4 матриці
$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \equiv \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} \equiv -i\sigma^{\mu\nu}$	6 матриць
$\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}$	4 матриці
$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^{\sigma]}$	1 матриця
	16 загалом

Трансформаційні властивості цих матриць досить легко встановити. Наприклад,

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\,\gamma^{\mu\nu}\psi &\to \left(\bar{\psi}\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\right)\left(\tfrac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right)\left(\bar{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}\right) = \\
&= \tfrac{1}{2}\,\psi\left(\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\gamma^\nu\Lambda_{\frac{1}{2}} - \Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\gamma^\nu\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}\right)\psi = \\
&= \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\,\bar{\psi}\,\gamma^{\alpha\beta}\,\psi.
\end{aligned}$$

Кожен набір матриць перетворюється як антисиметричний тензор послідовно зростаючого ранґу.

Останні два набори матриць можна спростити, запровадивши додаткову ґамма-матрицю

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\tfrac{i}{4!}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma. \tag{3.68}$$

Тоді $\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = -i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5$ і $\gamma^{\mu\nu\rho} = i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\gamma^5$. Матриця γ^5 має наступні властивості, що їх можна перевірити, скориставшись тотожністю (3.68) і антикомутаційними співвідношеннями (3.22):

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5; \tag{3.69}$$

$$(\gamma^5)^2 = 1; \tag{3.70}$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \tag{3.71}$$

З останньої властивості випливає, що $\left[\gamma^5, S^{\mu\nu}\right] = 0$. Отже, представлення Дірака має бути привідним, бо власні вектори матриці γ^5 з різними власними значеннями перетворюються без змішування (цей критерій привідності відомий як лема Шура). У нашому базисі,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

у блочно-діаґональній формі. Тобто, діраковий спінор, що має лише ліво- (право-) поляризований компонент, є власним станом γ^5 з власним значенням -1 $(+1)$. І справді, ці спінори перетворюються без змішування, як ми явно показали в § 3.2.

А тепер перепишемо нашу таблицю 4×4 матриць, запровадивши стандартну термінолоґію:

1	скаляр	1
γ^μ	вектор	4
$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	тензор	6
$\gamma^\mu\gamma^5$	псевдовектор	4
γ^5	псевдоскаляр	1
		16

Терміни *псевдовектор* і *псевдоскаляр* позначають величини, що поводяться відповідно як вектори та скаляри при безперервних перетвореннях Лоренца, але змінюють знак при дискретних перетвореннях парності (це ми розглянемо в § 3.6).

За допомогою векторних і псевдовекторних матриць можемо утворити два струми з білінійних форм діракового поля:

$$j^{\mu}(x) = \bar{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\psi(x); \qquad j^{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi(x). \tag{3.73}$$

Обчислимо диверґенції цих струмів, виходячи з того, що ψ задовольняє рівнянню Дірака:

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = \partial_{\mu}\bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\psi + \bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = (im\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(-im\psi) = 0. \tag{3.74}$$

Отже, j^{μ} завжди зберігається, якщо $\psi(x)$ є рішенням рівняння Дірака. Коли ми поєднуємо діракове поле з електромаґнітним, j^{μ} стає питомим електричним струмом. Таким самим чином можна обчислити

$$\partial_{\mu} j^{\mu 5} = 2\,im\,\bar{\psi}\,\gamma^{5}\psi. \tag{3.75}$$

При $m = 0$ цей струм (його часто називають *аксіальним векторним струмом*) також зберігається. В цьому разі корисно утворити лінійні комбінації

$$j_L^{\mu} = \bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi, \qquad j_R^{\mu} = \bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi. \tag{3.76}$$

Коли $m = 0$, це є питомі електричні струми ліво- та правополяризованих часток відповідно, і вони зберігаються окремо.

Два струми j^{μ} та $j^{\mu 5}$ є нотеровими струмами, що відповідають двом перетворенням

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x), \qquad \psi(x) \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x).$$

Перше з них є симетрією діракового лаґранжіана (3.34). Друге називається *киральним перетворенням* і є симетрією диференційного (кінетичного) члена в $\mathcal{L}$ — але не масового члена; отже, теорема Нотер підтверджує, що аксіальний векторний струм зберігається лише при $m = 0$.

Добуток діракових білінійних форм задовольняють співвідношенням, відомим як *тотожності Фірца*. Ми обговоримо лише найпростішу з них, яку кілька разів будемо застосовувати в нашому курсі. Цю тотожність найлегше записати в термінах двокомпонентних вейлевих спінорів, запроваджених у (3.36).

Основа співвідношення — тотожність для 2×2 матриць σ^{μ}, визначених у (3.41):

$$(\sigma^{\mu})_{\alpha\beta}(\sigma^{\mu})_{\gamma\delta} = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}. \tag{3.77}$$

Для розуміння цього співвідношення треба зазначити, що індекси α, γ перетворюються за лоренцовим представленням ψ_L, тоді як β, δ перетворюються за окремим представленням ψ_R, а вся величина має бути лоренц-інваріантною. Альтернативно, можна в явному вигляді перевірити всі 16 компонентів рівняння (3.77).

Обкладаючи тотожність (3.77) з обох боків правополяризованими частинами (тобто нижніми половинами) діракових спінорів u_1, u_2, u_3, u_4, маємо

$$\begin{aligned}\left(\bar{u}_{1R}\sigma^{\mu}u_{2R}\right)\left(\bar{u}_{3R}\sigma_{\mu}u_{4R}\right) &= 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1R\alpha}\bar{u}_{3R\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}u_{2R\beta}u_{4R\delta} = \\ &= -\left(\bar{u}_{1R}\sigma^{\mu}u_{4R}\right)\left(\bar{u}_{3R}\sigma_{\mu}u_{2R}\right)\end{aligned} \tag{3.78}$$

Це нетривіальне співвідношення стверджує, що добуток білінійних форм у (3.78) є антисиметричним при перестановках індексів 2 і 4, а також 1 і 3. Тотожність (3.77) справедлива і для $\bar{\sigma}^{\mu}$, тому ми знаходимо

$$\left(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^{\mu}u_{2L}\right)\left(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_{\mu}u_{4L}\right) = -\left(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^{\mu}u_{3L}\right)\left(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_{\mu}u_{2L}\right). \tag{3.79}$$

Іноді корисно об'єднати тотожність Фірца (3.78) зі співвідношенням між σ^{μ} та $\bar{\sigma}^{\mu}$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\gamma} = \left(\bar{\sigma}^{\mu}\right)_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}. \tag{3.80}$$

Останній вираз також перевіряється в явному вигляді. Застосувавши (3.80), (3.79) і співвідношення

$$\bar{\sigma}^{\mu}\sigma_{\mu} = 4, \tag{3.81}$$

можемо, наприклад, спростити жахливі добутки білінійних форм на зразок

$$\begin{aligned}&(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\lambda}u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_{\mu}\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\lambda}u_{4L}) = \\ &\qquad = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}(\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\lambda}u_{2L})_{\beta}(\sigma_{\nu}\bar{\sigma}_{\lambda}u_{4L})_{\delta} = \\ &\qquad = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}u_{2L\beta}(\sigma^{\lambda}\bar{\sigma}^{\nu}\sigma_{\nu}\bar{\sigma}_{\lambda}u_{4L})_{\delta} = \\ &\qquad = 2\cdot(4)^2\cdot\varepsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}u_{2L\beta}u_{4L\delta} = \\ &\qquad = 16(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^{\mu}u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_{\mu}u_{4L}).\end{aligned} \tag{3.82}$$

Існують також тотожності Фірца для перестановок 4-компонентних діракових спінорів і 4×4 матриць Дірака. Проте для їх отримання краще скористатися систематичнішим підходом. У Задачі 3.6 представлено загальний метод і деякі приклади його застосування.

§ 3.4. Квантування діракового поля

Тепер ми вже готові до побудови квантової теорії вільного діракового поля. З лаґранжіана

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi = \bar{\psi}\,(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi \tag{3.83}$$

бачимо, що канонічний імпульс, спряжений до ψ, є $i\psi^{\dagger}$, а отже, гамільтоніан

$$H = \int d^3\mathbf{x}\,\bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m)\,\psi = \int d^3\mathbf{x}\,\psi^{\dagger}\big(-i\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m\gamma^0\big)\,\psi. \tag{3.84}$$

Якщо ми визначимо $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\beta = \gamma^0$, то величину в дужках можемо інтерпретувати як гамільтоніан Дірака в одночастковій квантовій механіці:

$$h_D = -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m\beta. \tag{3.85}$$

Як не треба квантувати діракове поле: урок зі спіну й статистики

Щоб проквантувати діракове поле за аналоґією з полем Кляйна–Ґордона, ми мусили б накласти канонічні комутаційні співвідношення

$$[\psi_a(\mathbf{x}),\, \psi_b^{\dagger}(\mathbf{y})] = \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\delta_{ab} \qquad \text{(однаковий час)}, \tag{3.86}$$

де a і b позначають компоненти спінора ψ. Це вже доволі дивно, бо якби $\psi(x)$ було дійсним, то ліва сторона рівняння змінювала б знак при заміні $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}$, тоді як права сторона симетрична щодо такої перестановки. Але оскільки спінор $\psi(x)$ комплексний, ми поки не маємо суперечностей. Насправді ж ми скоро переконаємося, що комутаційні співвідношення, накладені нами на діракове поле, породжують і значно серйозніші проблеми. Проте буде повчально подивитись, як далеко ми зможемо зайти — це дозволить нам краще зрозуміти зв'язок між спіном і статистикою. Отож продовжимо; але пам'ятайте, що наступні кілька сторінок зрештою заведуть нас у безвихідь.

Наша перша задача — знайти представлення комутаційних співвідношень у термінах операторів народження та знищення, яке діаґоналізує H. З вигляду гамільтоніана (3.84) ясно, що буде корисно розкласти $\psi(x)$ за базисом власних функцій h_D. Ми вже знаємо ці власні функції з обчислень у § 3.3. Там ми виявили, що

$$\big[i\gamma^0\partial_0 + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} - m\big]\,u^s(p)\,e^{-ip\cdot x} = 0,$$

тож $u^s(\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ є власними функціями h_D з власними значеннями $E_\mathbf{p}$. Так само $v^s(\mathbf{p})\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ (або, еквівалентно, $v^s(-\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$) є власними функціями h_D з власними значеннями $-E_\mathbf{p}$. Вони утворюють повний набір власних функцій, бо для будь-якого $\mathbf{p}$ існують два спінори u і два спінори v, що дають нам чотири власні вектори 4×4 матриці h_D.

Розклавши ψ за цим базисом, отримуємо

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \sum_{s=1,2} \left[\mathrm{a}^s_\mathbf{p} u^s(\mathbf{p}) + \mathrm{b}^s_{-\mathbf{p}} v^s(-\mathbf{p})\right], \tag{3.87}$$

де $\mathrm{a}^s_\mathbf{p}$ і $\mathrm{b}^s_\mathbf{p}$ є операторними коефіцієнтами. (Поки ми працюємо в картині Шродинґера, де ψ не залежить від часу.) Постулюємо комутаційні співвідношення

$$[\mathrm{a}^r_\mathbf{p},\, \mathrm{a}^{s\dagger}_\mathbf{q}] = [\mathrm{b}^r_\mathbf{p},\, \mathrm{b}^{s\dagger}_\mathbf{q}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta^{rs}. \tag{3.88}$$

Тоді легко перевірити справедливість (3.86) для ψ і $\psi^\dagger$:

$$\begin{aligned}
[\psi(\mathbf{x}),\, \psi^\dagger(\mathbf{y})] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}\cdot 2E_\mathbf{q}}}\, e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \times \\
&\quad \times \sum_{r,s} \left([\mathrm{a}^r_\mathbf{p},\, \mathrm{a}^{s\dagger}_\mathbf{q}]\, u^r(\mathbf{p})\, \bar{u}^r(\mathbf{q}) + [\mathrm{b}^r_{-\mathbf{p}},\, \mathrm{b}^{s\dagger}_{-\mathbf{q}}]\, v^r(-\mathbf{p})\, \bar{v}^r(-\mathbf{q})\right) = \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2E_\mathbf{p}}\, e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \times \\
&\quad \times \left[(\gamma^0 E_\mathbf{p} - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m) + (\gamma^0 E_\mathbf{p} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} - m)\right]\gamma^0 = \\
&= \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \times \mathbf{1}_{4\times 4}.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

На другому кроці ми використали співвідношення повноти (3.66) і (3.67) для спінових сум.

Тепер ми готові записати H у термінах a і b. Після ще одного короткого обчислення (використавши співвідношення ортоґональності (3.60), (3.63) і (3.65)) знаходимо

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s \left(E_\mathbf{p}\, \mathrm{a}^{s\dagger}_\mathbf{p} \mathrm{a}^s_\mathbf{p} - E_\mathbf{p}\, \mathrm{b}^{s\dagger}_\mathbf{p} \mathrm{b}^s_\mathbf{p}\right). \tag{3.90}$$

У другому члені закралась якась жахлива помилка: породжуючи дедалі більше часток через $\mathrm{b}^\dagger$ ми можемо зменшувати енерґію до нескінченності. (Заміна $\mathrm{b} \leftrightarrow \mathrm{b}^\dagger$ не допомогла б, оскільки це зруйнувало б комутаційні співвідношення (3.89).)

Здається, ми наразилися на досить серйозну проблему, проте спробуймо піти ще далі й дослідити причинність у цій теорії. Для цього належить обчислити $[\psi(x), \psi^\dagger(x)]$ (або, що зручніше, $[\psi(x), \bar\psi(x)]$) у різні моменти часу і сподіватися отримати нуль поза межами світлового конуса. Найперше маємо перейти до картини Гайзенберґа і відновити залежність від часу ψ та $\bar\psi$. Скориставшись співвідношенням

$$e^{iHt}\mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}}e^{-iHt} = \mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}}e^{-iE_{\mathbf{p}}t}, \qquad e^{iHt}\mathfrak{b}^s_{\mathbf{p}}e^{-iHt} = \mathfrak{b}^s_{\mathbf{p}}e^{+iE_{\mathbf{p}}t}, \tag{3.91}$$

негайно отримуємо

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\left(\mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}}u^s(p)\,e^{-ip\cdot x} + \mathfrak{b}^s_{\mathbf{p}}v^s(p)\,e^{ip\cdot x}\right);\\
\bar\psi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\left(\mathfrak{a}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\bar u^s(p)\,e^{ip\cdot x} + \mathfrak{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\bar v^s(p)\,e^{-ip\cdot x}\right).
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Тепер ми можемо обчислити загальний комутатор:

$$\begin{aligned}
[\psi_a(x), \bar\psi_b(x)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\times\\
&\quad\times\sum_s\left(u^s_a(p)\bar u^s_b(p)\,e^{-ip\cdot(x-y)} + v^s_a(p)\bar v^s_b(p)\,e^{ip\cdot(x-y)}\right) =\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\times\\
&\quad\times\left((\not p + m)_{ab}\,e^{-ip\cdot(x-y)} + (\not p - m)_{ab}\,e^{ip\cdot(x-y)}\right) =\\
&= (i\not\partial_x + m)_{ab}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left(e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)}\right) =\\
&= (i\not\partial_x + m)_{ab}[\phi(x), \phi(y)].
\end{aligned}$$

Оскільки $[\phi(x), \phi(y)]$ (комутатор дійсного поля Кляйна–Ґордона) поза світловим конусом дорівнює нулю, ця величина також нульова.

Проте таке розв'язання проблеми причинності видається підозрілим. Нехай $|0\rangle$ є станом що знищується всіма $\mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}}$ і $\mathfrak{b}^s_{\mathbf{p}}$, тобто: $\mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}}|0\rangle = \mathfrak{b}^s_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$. Тоді

$$\begin{aligned}
[\psi_a(x), \bar\psi_b(y)] &= \langle 0|[\psi_a(x), \bar\psi_b(y)]|0\rangle =\\
&= \langle 0|\psi_a(x)\,\bar\psi_b(y)|0\rangle - \langle 0|\bar\psi_b(y)\,\psi_a(x)|0\rangle,
\end{aligned}$$

так само, як для поля Кляйна–Ґордона. Але там ми мали внески від двох частин комутатора: поза світловим конусом розповсюдження частки від

x до y скорочувалося розповсюдженням античастки від x до y. А тут обидва внески дає перша частина комутатора $\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$, тоді як друга тотожно нульова. Взаємно скорочуються частки з позитивною та неґативною енерґією, причому обидві розповсюджуються від x до y.

Це спостереження фактично вказує нам шлях до розв'язання проблеми неґативної енерґії. Одне з наших припущень, зроблених при квантуванні теорії Дірака, має бути хибним. Тому забудьмо постульовані нами комутаційні співвідношення (3.86) та (3.88) і погляньмо, яким чином можна забезпечити розповсюдження часток з позитивною енерґією в обох напрямках. Також ми маємо відмовитися від нашого означення вакууму $|0\rangle$ як стану, що знищується всіма $\mathrm{a}_{\mathbf{p}}$ і $\mathrm{b}_{\mathbf{p}}$. Проте збережемо вирази (3.92) для $\psi(x)$ та $\bar{\psi}(x)$, як операторів Гайзенберґа, оскільки $\psi(x)$ та $\bar{\psi}(x)$, як рішення рівняння Дірака, мають розкладатися за такими полоско-хвильовими рішеннями.

Передовсім розглянемо амплітуду $\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$, яка має представляти частку з позитивною енерґією, що розповсюджується від x до y. У цьому випадку ми б хотіли, щоб стан $\bar{\psi}(y)|0\rangle$ (у картині Гайзенберґа) був лінійною комбінацією станів лише з позитивною або лише з неґативною енерґією (оскільки гайзенберґів стан $\Psi_H = e^{+iHt}\Psi_S$). Отже, ненульовий внесок у $\bar{\psi}(y)|0\rangle$ можуть робити лише члени з $\mathrm{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$, а це означає, що $\mathrm{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ мають знищувати вакуум. Відповідно, $\langle 0|\psi(x)$ може містити лише позитивно-частотні компоненти. Звідси маємо

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \langle 0| \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_r \mathrm{a}_{\mathbf{p}}^r u^r(p)\, e^{-ip\cdot x} \times \\ \times \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\sum_r \mathrm{a}_{\mathbf{q}}^{r\dagger}\bar{u}^r(q)\, e^{iq\cdot y}|0\rangle.\end{aligned} \tag{3.93}$$

Ми можемо дещо сказати про матричні елементи $\langle 0|\mathrm{a}_{\mathbf{p}}^r \mathrm{a}_{\mathbf{q}}^{s\dagger}|0\rangle$, навіть не знаючи, як переставляються $\mathrm{a}_{\mathbf{p}}^r$ і $\mathrm{a}_{\mathbf{q}}^{s\dagger}$, а лише на підставі трансляційної та обертальної інваріантності. Якщо основний стан $|0\rangle$ інваріантний до трансляцій, то $|0\rangle = e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}|0\rangle$. Крім того, оскільки $\mathrm{a}_{\mathbf{q}}^{s\dagger}$ породжує імпульс $\mathbf{q}$, можна скористатися рівняннями (2.48):

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathrm{a}_{\mathbf{p}}^r \mathrm{a}_{\mathbf{q}}^{s\dagger}|0\rangle &= \langle 0|\mathrm{a}_{\mathbf{p}}^r \mathrm{a}_{\mathbf{q}}^{s\dagger} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}|0\rangle = \\ &= e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\langle 0|e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\mathrm{a}_{\mathbf{p}}^r \mathrm{a}_{\mathbf{q}}^{s\dagger}|0\rangle = \\ &= e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\langle 0|\, \mathrm{a}_{\mathbf{p}}^r \mathrm{a}_{\mathbf{q}}^{s\dagger}|0\rangle.\end{aligned}$$

А отже, $\langle 0|\, \mathrm{a}_{\mathbf{p}}^r \mathrm{a}_{\mathbf{q}}^{s\dagger}|0\rangle$ не дорівнює нулю, лише тоді, коли $\mathbf{p} = \mathbf{q}$. Так само можна показати, що з обертальної інваріантності $|0\rangle$ випливає $r = s$. (Це має

бути зрозуміло інтуїтивно і може бути перевірено після вивчення оператора моменту імпульсу далі в цьому параґрафі.) З цих міркувань робимо висновок, що матричний елемент можна записати у вигляді

$$\langle 0|\mathfrak{a}^r_{\mathbf{p}}\mathfrak{a}^{s\dagger}_{\mathbf{q}}|0\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,\delta^{rs}\cdot A(\mathbf{p}),$$

де $A(\mathbf{p})$ поки не визначено. Зауважимо, що за умови позитивності норми стану (а це одна з обов'язкових властивостей будь-якого гільбертового простору) $A(\mathbf{p})$ має бути більшою від нуля. Тепер ми можемо повернутися до (3.93) і записати

$$\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\sum_s u^s(p)\,\bar{u}^s(p)\,A(\mathbf{p})\,e^{ip\cdot(x-y)} =$$
$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\sum_s (\not{p}+m)\,A(\mathbf{p})\,e^{ip\cdot(x-y)}.$$

Цей вираз інваріантний лише тоді, коли $A(\mathbf{p})$ є лоренцовим скаляром, тобто $A(\mathbf{p}) = A(p^2)$. А позаяк $p^2 = m^2$, то $A(\mathbf{p})$ має бути константою. У кінцевому підсумку одержимо

$$\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle = (i\not{\partial}+m)_{ab}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\;e^{-ip\cdot(x-y)}\cdot A. \tag{3.94}$$

Так само в амплітуді $\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle$ ми хочемо мати лише внески позитивно-частотних членів з $\bar{\psi}(y)$ і неґативно-частотних з $\psi(x)$. Отже, $\mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}}$ усе ще знищує вакуум, а от $\mathfrak{b}^s_{\mathbf{p}}$ уже ні. Виходячи з арґументів, ідентичних вищенаведеним, маємо

$$\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle = -(i\not{\partial}+m)_{ab}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\;e^{ip\cdot(x-y)}\cdot B, \tag{3.95}$$

де B є іншою позитивною константою. Знак мінус тут важливий — він походить зі співвідношення повноти (3.67) для $\sum v\bar{v}$ та знаку при x в експоненті. А це означає, що ми не зможемо отримати $\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle = 0$ поза світловим конусом, бо два члени (3.94) та (3.95) скоротилися б лише за умови $A = -B$, але це неможливо, оскільки і A, і B мають бути позитивними.

Тепер розв'язання проблеми майже в наших руках. Встановивши $A = B = 1$, легко отримати (поза межами світлового конуса):

$$\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle = -\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle.$$

Отже, спінорні поля, розділені простороподібним інтервалом, *антикомутують* між собою. Цього достатньо для збереження причинності, оскільки всі прийнятні спостережні величини (на зразок енерґії, заряду і числа часток) побудовані з *парної* комбінації спінорних полів, а для будь-яких спостережних такого типу $\mathcal{O}_1$ і $\mathcal{O}_2$ ми все ще маємо $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$ при $(x-y)^2 < 0$.

Примітно, що постулюванням *анти*комутаційних співвідношень для діракового поля ми водночас розв'язуємо проблему неґативної енерґії. Рівночасові антикомутаційні співвідношення матимуть вигляд

$$\begin{gathered}\{\psi_a(\mathbf{x}),\, \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\delta_{ab};\\ \{\psi_a(\mathbf{x}),\, \psi_b(\mathbf{y})\} = \{\psi_a^\dagger(\mathbf{x}),\, \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = 0.\end{gathered} \tag{3.96}$$

Ми можемо розкласти $\psi(\mathbf{x})$ за $\mathfrak{a}_\mathbf{p}^s$ і $\mathfrak{b}_\mathbf{p}^s$, як і раніше (рівняння (3.87)). Оператори народження і знищення мають задовольняти умовам

$$\{\mathfrak{a}_\mathbf{p}^r,\, \mathfrak{a}_\mathbf{q}^{s\dagger}\} = \{\mathfrak{b}_\mathbf{p}^r,\, \mathfrak{b}_\mathbf{q}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,\delta^{rs} \tag{3.97}$$

(решта антикомутаторів дорівнюють нулю), щоб виконувались співвідношення (3.96). Наступне обчислення дає гамільтоніан

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s \left(E_\mathbf{p}\mathfrak{a}_\mathbf{p}^{s\dagger}\mathfrak{a}_\mathbf{p}^s - E_\mathbf{p}\mathfrak{b}_\mathbf{p}^{s\dagger}\mathfrak{b}_\mathbf{p}^s\right),$$

такий самий, як і раніше; $\mathfrak{b}_\mathbf{p}^{s\dagger}$ все ще народжують стани з неґативною енерґією. Проте співвідношення $\{\mathfrak{b}_\mathbf{p}^r,\, \mathfrak{b}_\mathbf{q}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,\delta^{rs}$ є симетричним щодо $\mathfrak{b}_\mathbf{p}^s$ і $\mathfrak{b}_\mathbf{p}^{s\dagger}$. Тому просто перевизначимо:

$$\widetilde{\mathfrak{b}}_\mathbf{p}^s \equiv \mathfrak{b}_\mathbf{p}^{s\dagger}; \qquad \widetilde{\mathfrak{b}}_\mathbf{p}^{s\dagger} \equiv \mathfrak{b}_\mathbf{p}^s. \tag{3.98}$$

Зрозуміло, що нові оператори задовольняють таким самим антикомутаційним співвідношенням, але тепер другий член у гамільтоніані є

$$-E_\mathbf{p}\mathfrak{b}_\mathbf{p}^{s\dagger}\mathfrak{b}_\mathbf{p}^s = +E_\mathbf{p}\widetilde{\mathfrak{b}}_\mathbf{p}^{s\dagger}\widetilde{\mathfrak{b}}_\mathbf{p}^s - (\text{const}).$$

Якщо вибрати $|0\rangle$ як стан, що знищується операторами $\mathfrak{a}_\mathbf{p}^s$ і $\widetilde{\mathfrak{b}}_\mathbf{p}^s$, то всі збудження $|0\rangle$ мають позитивну енерґію.

Що ж сталося? Для кращого розуміння цього прийому, відмовимось наразі від теорії поля й розглянемо теорію лише з однією парою операторів $\mathfrak{b}$ і $\mathfrak{b}^\dagger$, для яких виконується $\{\mathfrak{b},\, \mathfrak{b}^\dagger\} = 1$ і $\{\mathfrak{b},\, \mathfrak{b}\} = \{\mathfrak{b}^\dagger,\, \mathfrak{b}^\dagger\} = 0$. Оберемо стан $|0\rangle$ такий, що $\mathfrak{b}|0\rangle = 0$. Тоді $\mathfrak{b}^\dagger|0\rangle$ є новим станом; позначимо

його $|1\rangle$. Цей стан задовольняє умовам $\mathrm{b}|1\rangle = |0\rangle$ і $\mathrm{b}^\dagger|1\rangle = 0$. Отже, b і $\mathrm{b}^\dagger$ діють у гільбертовому просторі з двох станів $|0\rangle$ і $|1\rangle$. Ми могли б сказати, що $|0\rangle$ є „порожнім“ станом, а $\mathrm{b}^\dagger$ „заповнює“ його. Але рівнозначно ми могли б назвати $|1\rangle$ порожнім станом і сказати, що $\mathrm{b} = \widetilde{\mathrm{b}}^\dagger$ заповнює його. Ці два представлення абсолютно еквівалентні, поки не визначена певна спостережна величина, що дозволить нам фізично розрізняти ці стани. У нашому випадку коректним є такий вибір, коли стан з нижчою енерґією порожній. І задля уникнення плутанини доцільно позначити ермітовим спряженням той оператор, що породжує позитивну енерґію. Саме так ми і вчинили.

Зазначимо між іншим, що оскільки $(\widetilde{\mathrm{b}}^\dagger)^2 = 0$, то стан не можна заповнити двічі. Загальніше, з антикомутаційних співвідношень випливає, що будь-який багаточастковий стан є антисиметричним відносно переставлення двох часток: $\mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{q}}|0\rangle = -\mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{q}}\mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle$. Таким чином, ми робимо висновок, що сходовим операторам, які задовольняють *антикомутаційним* співвідношенням, відповідають частки, що підкоряються статистиці *Фермі–Дірака*.

Щойно ми показали, що для забезпечення присутності у вакуумі збуджень лише з позитивною енерґією ми мусимо проквантувати діракове поле з антикомутаційними співвідношеннями; за цих умов частки, пов’язані з діраковим полем, задовольняють статистиці Фермі–Дірака. Цей висновок є окремим випадком більш загального результату, вперше отриманого Паулі:[10] з вимог лоренц-інваріантності, позитивної енерґії, позитивної норми та причинності випливає, що частки з цілим спіном підкоряються статистиці Бозе–Ейнштейна, тоді як частки з напівцілим спіном задовольняють статистиці Фермі–Дірака.

Квантоване діракове поле

А зараз систематично підсумуємо результати квантування теорії Дірака. Передовсім очистимо наші позначення — відтепер ми писатимемо $\widetilde{\mathrm{b}}$ (оператор, що знижує енерґію стану) просто як $\mathrm{b}_{\mathbf{p}}$, а $\widetilde{\mathrm{b}}^\dagger$ як $\mathrm{b}^\dagger_{\mathbf{p}}$. Усі вирази, що їх ми потребуватимемо в подальшій роботі, виписані нижче; а все, наведене в попередньому пункті, що їм суперечить, треба забути. Спершу напишемо польові оператори

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s \left(\mathrm{a}^s_{\mathbf{p}} u^s(p)\, e^{-ip\cdot x} + \mathrm{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v^s(p)\, e^{ip\cdot x}\right); \tag{3.99}$$

[10] W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940), репринт у [51]. Строгий розгляд наведено у Стрітера і Вайтмана [64].

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_s \left(\mathrm{b}^s_\mathbf{p} \bar{v}^s(p)\, e^{-ip\cdot x} + \mathrm{a}^{s\dagger}_\mathbf{p} \bar{u}^s(p)\, e^{ip\cdot x} \right). \tag{3.100}$$

Оператори народження та знищення підпорядковуються антикомутаційним правилам

$$\{\mathrm{a}^r_\mathbf{p},\, \mathrm{a}^{s\dagger}_\mathbf{p}\} = \{\mathrm{b}^r_\mathbf{p},\, \mathrm{b}^{s\dagger}_\mathbf{p}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \delta^{rs}, \tag{3.101}$$

а решта антикомутаторів дорівнюють нулю. Рівночасові антикомутаційні співвідношення для ψ і $\psi^\dagger$ є такі

$$\begin{aligned} &\{\psi_a(\mathbf{x}),\, \psi^\dagger_b(\mathbf{y})\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \delta_{ab}; \\ &\{\psi_a(\mathbf{x}),\, \psi_b(\mathbf{y})\} = \{\psi^\dagger_a(\mathbf{x}),\, \psi^\dagger_b(\mathbf{y})\} = 0. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Вакуум $|0\rangle$ визначається як стан, що для нього

$$\mathrm{a}^s_\mathbf{p}|0\rangle = \mathrm{b}^s_\mathbf{p}|0\rangle = 0. \tag{3.103}$$

Гамільтоніан можна записати, як

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s E_\mathbf{p} \left(\mathrm{a}^{s\dagger}_\mathbf{p} \mathrm{a}^s_\mathbf{p} + \mathrm{b}^{s\dagger}_\mathbf{p} \mathrm{b}^s_\mathbf{p} \right), \tag{3.104}$$

де ми відкинули нескінченний постійний доданок, що виникає від антикомутування $\mathrm{b}^s_\mathbf{p}$ і $\mathrm{b}^{s\dagger}_\mathbf{p}$. Звідси бачимо, що вакуум є станом з найнижчою енерґією, як ми й хотіли. Оператор імпульсу є

$$\mathbf{P} = \int d^3\mathbf{x}\, \psi^\dagger(-i\boldsymbol{\nabla})\, \psi = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s \mathbf{p} \left(\mathrm{a}^{s\dagger}_\mathbf{p} \mathrm{a}^s_\mathbf{p} + \mathrm{b}^{s\dagger}_\mathbf{p} \mathrm{b}^s_\mathbf{p} \right). \tag{3.105}$$

Отже, обидва оператори $\mathrm{a}^{s\dagger}_\mathbf{p}$ і $\mathrm{b}^{s\dagger}_\mathbf{p}$ народжують частки з енерґією $+E_\mathbf{p}$ та імпульсом $\mathbf{p}$. Позначимо частки, народжені $\mathrm{a}^{s\dagger}_\mathbf{p}$, як *ферміони*, а народжені $\mathrm{b}^{s\dagger}_\mathbf{p}$, як *антиферміони*. Одночасткові стани

$$|\mathbf{p},\, s\rangle \equiv \sqrt{2E_\mathbf{p}}\, \mathrm{a}^{s\dagger}_\mathbf{p}|0\rangle \tag{3.106}$$

визначимо так, щоб їхній скалярний добуток

$$\langle \mathbf{p},\, r|\mathbf{q},\, s\rangle = 2E_\mathbf{p}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\, \delta^{rs} \tag{3.107}$$

був лоренц-інваріантним. Звідси випливає, що оператор $U(\Lambda)$, який здійснює перетворення Лоренца на станах гільбертового простору, є унітарним, хоча бусти $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ неунітарні.

Не завадить провести перевірку на відповідність і переконатися, що $U(\Lambda)$ реалізує правильне перетворення $\psi(x)$. Тож порахуємо:

$$U\psi(x)U^{-1} = U\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\times \\ \times\sum_s (\mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}} u^s(p)\,e^{-ip\cdot x} + \mathfrak{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v^s(p)\,e^{-ip\cdot x})U^{-1}. \tag{3.108}$$

Зосередимось на першому члені; другий обчислюється цілком аналоґічно. З рівняння (3.106) випливає, що $\mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}}$ перетворюється відповідно до

$$U(\Lambda)\mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}}U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}}\,\mathfrak{a}^s_{\Lambda\mathbf{p}}, \tag{3.109}$$

за умови, що вісь квантування спіну паралельна до напрямку бусту або осі обертання. Щоб скористатися цим співвідношенням для обчислення (3.108), перепишемо інтеґрал, як

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,\mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\cdot\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}}.$$

Другий множник перетворюється під дією U звичайним чином, а перший є лоренц-інваріантним інтеґралом. Таким чином, якщо ми застосуємо (3.109) і зробимо підстановку $\widetilde{p} = \Lambda p$, то (3.108) набуває вигляду

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = \int \frac{d^3\widetilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\widetilde{\mathbf{p}}}}\sum_s u^s(\Lambda^{-1}\widetilde{p})\sqrt{2E_{\widetilde{\mathbf{p}}}}\,\mathfrak{a}^s_{\widetilde{\mathbf{p}}}\,e^{-i\widetilde{p}\cdot\Lambda x} + \cdots.$$

Але $u^s(\Lambda^{-1}\widetilde{p}) = \Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}u^s(\widetilde{p})$, тому насправді ми маємо

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = \int \frac{d^3\widetilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\widetilde{\mathbf{p}}}}\sum_s \Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\,u^s(\widetilde{p})\,\mathfrak{a}^s_{\widetilde{\mathbf{p}}}\,e^{-i\widetilde{p}\cdot\Lambda x} + \cdots = \\ = \Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\,\psi(\Lambda x). \tag{3.110}$$

Цей результат стверджує, що перетворене поле народжує і знищує частки в точці Λx, як і належить. Проте зазначимо, що це перетворення здійснюється в іншому напрямку порівняно з (3.2), де перетворене поле ϕ було обчислено в $\Lambda^{-1}x$. Різниця в тому, що в § 3.1 ми розглядали перетворення попередньо існуючого розподілу поля, що вимірювалося функцією

$\phi(x)$. А тут ми перетворюємо *дію* поля $\psi(x)$ при народженні або знищенні часток. Ці два способи реалізації перетворення Лоренца працюють у протилежних напрямках. Зауважимо, однак, що матриці, які діють на ψ, і перетворення координати x мають правильну відносну орієнтацію, узгоджену з (3.8).

Далі розглянемо спін діракової частки. Ми припускали, що діракові ферміони мають спін $1/2$; тепер можемо вивести це з нашого формалізму. Як ми вже показали, частки, народжені операторами $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ і $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$, мають два „спінові“ стани: $s = 1, 2$. Проте ми ще не довели, що цей „спін“ має бодай якийсь стосунок до моменту імпульсу. Для цього мусимо отримати вираз для оператора моменту імпульсу.

Нагадаємо, що ми знайшли оператор лінійного імпульсу в § 2.2, розглядаючи збережену величину, пов'язану з трансляційною інваріантністю. Оператор моменту імпульсу можемо знайти схожим чином, як наслідок обертальної інваріантності. При обертанні (або будь-якому іншому перетворенні Лоренца) діракове поле ψ перетворюється (за нашим початковим означенням), як

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x).$$

Для застосування теореми Нотер маємо обчислити зміну поля у фіксованій точці, тобто

$$\delta\psi = \psi'(x) - \psi(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) - \psi(x).$$

Розглянемо для визначеності інфінітезимальне обертання координат на кут θ довкола осі z. Параметризація цього перетворення наведена відразу після рівняння (3.19): $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$. Підставивши ці параметри в (3.30), знаходимо

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 1 - \frac{i}{2}\,\theta\,\Sigma^3$$

Тепер можемо обчислити

$$\begin{aligned}\delta\psi(x) &= \left(1 - \frac{i}{2}\,\theta\,\Sigma^3\right)\psi(t,\, x + \theta y,\, y - \theta x,\, z) - \psi(x) = \\ &= -\theta\left(x\partial_y - x\partial_x + \frac{i}{2}\,\Sigma^3\right)\psi(x) \equiv \theta\zeta.\end{aligned}$$

Часовий компонент збереженого нотерового струму має вигляд[11]

$$j^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)}\,\zeta = -i\bar{\psi}\gamma^0\Big(x\partial_y - x\partial_x + \tfrac{i}{2}\,\Sigma^3\Big)\,\psi.$$

Подібні вирази мають місце для обертань довкола осей x і y, тож оператор моменту імпульсу є

$$\mathbf{J} = \int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\big(\mathbf{x}\times(-i\boldsymbol{\nabla}) + \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\Sigma}\big)\,\psi. \tag{3.111}$$

Для нерелятивістських ферміонів перший доданок у (3.111) дає орбітальний момент імпульсу. Отже, другий доданок відповідає спіновому моменту імпульсу. На жаль, поділ у (3.111) на спінову й орбітальну частини не такий явний у релятивістському випадку, тому досить складно написати загальний вираз для цієї величини через сходові оператори.

А проте, для доведення факту, що діракова частка має спін 1/2, досить розглянути частки у стані спокою. В цьому разі орбітальний доданок у (3.111) не дає внеску, і ми можемо легко отримати спіновий член у термінах сходових операторів. Найпростіше взяти вираз (3.99) для ψ і записати його в картині Шродинґера ($\psi(\mathbf{x}) = \psi(0, \mathbf{x})$):

$$J_z^{\text{спін}} = \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}\cdot 2E_{\mathbf{p}'}}}\,e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}\,e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\times$$
$$\times\sum_{r,r'}\Big(\mathrm{a}^{r'\dagger}_{\mathbf{p}'}u^{r'\dagger}(\mathbf{p}') + \mathrm{b}^{r'}_{-\mathbf{p}'}v^{r'\dagger}(-\mathbf{p}')\Big)\,\frac{\Sigma^3}{2}\Big(\mathrm{a}^{r}_{\mathbf{p}}u^{r}(\mathbf{p}) + \mathrm{b}^{r\dagger}_{-\mathbf{p}}v^{r}(-\mathbf{p})\Big).$$

Ми хотіли б застосувати цей оператор до одночасткового стану з нульовим імпульсом $\mathrm{a}_0^{s\dagger}|0\rangle$. Найлегше це зробити, вдавшись до наступного прийому. $\mathbf{J}$ має нульове значення на вакуумі (за відсутності часток момент імпульсу є нуль), тому $J_z\mathrm{a}_0^{s\dagger}|0\rangle = \big[J_z,\ \mathrm{a}_0^{s\dagger}\big]|0\rangle$. А оскільки для частки в стані спокою орбітальний член у J_z не дає внеску, то цей вираз можна переписати як $J_z^{\text{спін}}\mathrm{a}_0^{s\dagger}|0\rangle = \big[J_z^{\text{спін}},\ \mathrm{a}_0^{s\dagger}\big]|0\rangle$. Єдиний ненульовий доданок в останній величині має структуру $[\mathrm{a}^{r\dagger}_{\mathbf{p}}\mathrm{a}^{r'}_{\mathbf{p}}, \mathrm{a}_0^{s\dagger}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})\mathrm{a}^{r}_0\delta^{r's}$; інші

[11] Як у випадку з трансляціями (див. стор. 29), ми маємо не один, а кілька окремо збережених струмів. Цього разу вже шість — для трьох просторових обертань та трьох бустів, і в результаті утворюється тензор третього ранґу, антисиметричний за другим і третім індексами. Для побудови оператора моменту імпульсу беруться компоненти 012, 023 та 031 цього тензора. (*Прим. перекл.*)

три члени або обертаються на нуль, або знищують вакуум. Отож, знаходимо

$$J_z^{\text{спін}} \mathrm{a}_0^{s\dagger}|0\rangle = \frac{1}{2m}\sum_r \left(u^{s\dagger}(0)\frac{\Sigma^3}{2}u^r(0)\right)\mathrm{a}_0^{r\dagger}|0\rangle = \sum_r \left(\xi^{s\dagger}\frac{\sigma^3}{2}\xi^r\right)\mathrm{a}_0^{r\dagger}|0\rangle,$$

де ми використали явну форму (3.47) для $u(0)$, щоб отримати останній вираз. Суму за індексом r найлегше взяти, обравши спінори ξ^r як власні стани σ^3. Тоді знаходимо, що для $\xi^s = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ одночастковий стан є власним станом $J_z^{\text{спін}}$ з власним значенням $+1/2$, а для $\xi^s = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ він є власним станом $J_z^{\text{спін}}$ з власним значенням $-1/2$. Це саме той результат, якого ми й очікували для електронів.

Аналоґічно визначається спін антиферміона з нульовим імпульсом. Але в цьому разі, оскільки порядок членів з b і $\mathrm{b}^\dagger$ у $J_z^{\text{спін}}$ є зворотній, ми отримуємо додатковий знак мінус при обчисленні $[\mathrm{b}_{\mathbf{p}}\mathrm{b}_{\mathbf{p}}^\dagger,\ \mathrm{b}_{\mathbf{0}}^\dagger] = [-\mathrm{b}_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{b}_{\mathbf{p}},\ \mathrm{b}_{\mathbf{0}}^\dagger]$. Тож для позитронів зв'язок між спінорами η^s та спіновим моментом імпульсу протилежний: $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ відповідає спіну $-1/2$, тоді як $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ відповідає спіну $+1/2$. Це обернення знаку узгоджується з передбаченням діракової теорії дірок. З цього погляду позитрон є відсутнім електроном з неґативною енерґією. Якщо зниклий електрон мав позитивне значення $J_z^{\text{спін}}$, то його відсутність має неґативне значення $J_z^{\text{спін}}$.

У підсумку, момент імпульсу ферміонів у стані спокою дається виразом

$$J_z^{\text{спін}}\mathrm{a}_{\mathbf{0}}^{s\dagger}|0\rangle = \pm\tfrac{1}{2}\mathrm{a}_{\mathbf{0}}^{s\dagger}|0\rangle, \qquad J_z^{\text{спін}}\mathrm{b}_{\mathbf{0}}^{s\dagger}|0\rangle = \mp\tfrac{1}{2}\mathrm{b}_{\mathbf{0}}^{s\dagger}|0\rangle \tag{3.112}$$

де верхній знак призначений для $\xi^s, \eta^s = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, а нижній — для $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

В теорії Дірака є ще одна вельми важлива збережена величина. У § 3.4 ми бачили, що струм $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ зберігається. Заряд, асоційований з цим струмом, є

$$Q = \int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger(x)\,\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sum_s\left(\mathrm{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\mathrm{a}_{\mathbf{p}}^s + \mathrm{b}_{-\mathbf{p}}^s\mathrm{b}_{-\mathbf{p}}^{s\dagger}\right),$$

або, якщо ми проіґноруємо ще одну нескінченну константу,

$$Q = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sum_s\left(\mathrm{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\mathrm{a}_{\mathbf{p}}^s - \mathrm{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\mathrm{b}_{\mathbf{p}}^s\right). \tag{3.113}$$

Отже, $\mathrm{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ народжують ферміони із зарядом $+1$, тоді як $\mathrm{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ народжують антиферміони із зарядом -1. Коли ми поєднаємо діракове поле з електромаґнітним, то побачимо, що Q є не що інше, як електричний заряд

(з точністю до постійного множника, що залежить від типу частки, яку ми хочемо описати; наприклад, для електронів електричний заряд є eQ).

У квантовій електродинаміці ми використовуватимемо спінорне поле ψ для опису електронів та позитронів. Частки, народжені $\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$, є електронами; вони мають енерґію $E_{\mathbf{p}}$, імпульс $\mathbf{p}$, спін $1/2$ з поляризацією, що відповідає ξ^s, і заряд $+1$ (в одиницях e). Частки, народжені $\mathfrak{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$, є позитронами; вони мають енерґію $E_{\mathbf{p}}$, імпульс $\mathbf{p}$, спін $1/2$ з поляризацією, протилежною до ξ^s, і заряд -1. Стан $\psi_a(x)|0\rangle$ містить позитрон у положенні x, чия поляризація відповідає обраному компонентові спінора. Так само, $\bar{\psi}_a(x)|0\rangle$ є станом одного електрона в положенні x.

Пропаґатор Дірака

Обчислення амплітуди розповсюдження для діракового поля тепер стає простою вправою:

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\sum_s u_a^s(p)\,\bar{u}_b^s(p)\,e^{-ip\cdot(x-y)} = \\ &= \left(i\partial\!\!\!/_x + m\right)_{ab}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,e^{-ip\cdot(x-y)},\end{aligned} \tag{3.114}$$

$$\begin{aligned}\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\sum_s v_a^s(p)\,\bar{v}_b^s(p)\,e^{-ip\cdot(y-x)} = \\ &= -\left(i\partial\!\!\!/_x + m\right)_{ab}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,e^{-ip\cdot(y-x)}.\end{aligned} \tag{3.115}$$

Так само, як ми це робили для рівняння Кляйна–Ґордона, можемо побудувати для рівняння Дірака функцію Ґріна, що задовольнятиме різним граничним умовам. Наприклад, запізніла функція Ґріна є

$$S_R^{ab}(x-y) \equiv \theta(x^0-y^0)\langle 0|\left\{\psi_a(x),\,\bar{\psi}_b(y)\right\}|0\rangle. \tag{3.116}$$

Легко перевірити, що

$$S_R(x-y) = \left(i\partial\!\!\!/_x + m\right)D_R(x-y), \tag{3.117}$$

оскільки у правій частині член, що містить $\partial_0\theta(x^0-y^0)$, обертається на нуль. Використавши (3.117) і той факт, що $\partial\!\!\!/\partial\!\!\!/ = \partial^2$, ми бачимо, що S_R є функцією Ґріна оператора Дірака:

$$\left(i\partial\!\!\!/_x - m\right)S_R(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y)\cdot\mathbf{1}_{4\times 4}. \tag{3.118}$$

Функцію Ґріна оператора Дірака також можна отримати з перетворення Фур'є. Розклавши $S_R(x-y)$ в інтеґрал Фур'є і подіявши з обох сторін оператором $(i\partial\!\!\!/_z - m)$, знаходимо

$$i\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,(p\!\!\!/ - m)\,e^{-ip\cdot(x-y)}\,\tilde{S}_R(p), \tag{3.119}$$

а, отже,

$$\tilde{S}_R(p) = \frac{i}{p\!\!\!/ - m} = \frac{i(p\!\!\!/ + m)}{p^2 - m^2}. \tag{3.120}$$

Для отримання запізнілої функції Ґріна ми маємо обчислити інтеґрал по p^0 у (3.120) вздовж контуру, зображеного на стор 42. Для $x^0 > y^0$ замикаємо контур знизу, охопивши обидва полюси, і в результаті отримуємо суму (3.115) та (3.114). Для $x^0 < y^0$ замикаємо контур згори і отримуємо нуль.

Функція Ґріна з граничними умовами Фейнмана визначається контуром, зображеним на сторінці 43:

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i(p\!\!\!/ + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\,e^{-ip\cdot(x-y)} = \\ &= \begin{cases} +\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle & \text{для} \quad x^0 > y^0 \text{ (контур згори)} \\ -\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle & \text{для} \quad x^0 < y^0 \text{ (контур знизу)} \end{cases} \equiv \\ &\equiv \langle 0|T\,\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle, \end{aligned} \tag{3.121}$$

де ми визначили хронологічний добуток спінорних полів з додатковою зміною знаку при перестановці операторів. Цей знак мінус надзвичайно важливий у квантовій теорії поля ферміонів; ми знову зустрінемося з цим у § 4.7.

Як і в теорії Кляйна – Ґордона, вираз (3.121) для фейнманового пропаґатора є найкориснішим результатом цього розділу. Коли ми проводимо пертурбативні обчислення за фейнмановими діаґрамами, то ставимо у відповідність множник $\tilde{S}_F(p)$ кожній внутрішній ферміонній лінії.

§ 3.5. Дискретні симетрії в теорії Дірака

В останньому параґрафі ми розглянули реалізацію безперервних перетворень Лоренца на гільбертовому просторі в теорії Дірака і виявили, що для кожного перетворення Λ існує унітарний оператор $U(\Lambda)$, який здійснює коректне перетворення полів:

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\,\psi(\Lambda x). \tag{3.122}$$

У цьому параґрафі ми розглянемо аналоґічні оператори, що реалізують різні дискретні симетрії діракового поля.[12]

На додаток до безперервних перетворень Лоренца існують дві інші просторово-часові операції, що є потенційними симетріями лаґранжіана: *парність* та *інверсія часу*. Парність, що позначається як P, переводить $(t, \mathbf{x}) \to (t, -\mathbf{x})$, обертаючи напрям у просторі. Інверсія часу, що позначається як T, переводить $(t, \mathbf{x}) \to (-t, \mathbf{x})$, переставляючи минулий і майбутній світлові конуси. Жодна з цих операцій не може бути отримана через безперервні перетворення Лоренца. Проте обидві зберігають інтервал Мінковського $x^2 = t^2 - x^2$. За стандартною термінолоґією, безперервні перетворення Лоренца відносяться до власної ортохронної ґрупи Лоренца, що позначається як $\mathbf{L}_+^\uparrow$. Повна ґрупа Лоренца поділяється на чотири незв'язні компоненти:

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{L}_+^\uparrow & \overset{P}{\leftrightarrow} & \mathbf{L}_-^\uparrow = P\,\mathbf{L}_+^\uparrow & & \text{„ортохронна“} \\
T\updownarrow & & \updownarrow T & & \\
\mathbf{L}_+^\downarrow = T\,\mathbf{L}_+^\uparrow & \underset{P}{\leftrightarrow} & \mathbf{L}_-^\downarrow = PT\,\mathbf{L}_+^\uparrow & & \text{„неортохронна“} \\
\text{„власна“} & & \text{„невласна“} & &
\end{array}
$$

Разом з розглядом P і T, буде зручно розглянути і третю (не просторово-часову) дискретну операцію — *зарядове спряження*, що позначається як C. Ця операція переставляє частки та античастки.

Кожна релятивістська теорія поля має бути інваріантною щодо $\mathbf{L}_+^\uparrow$, проте не конче обов'язково — щодо P, T або C. Який статус цих операцій у реальному світі? З дослідів відомо, що три сили Природи — ґравітаційна, електромаґнітна та сильна взаємодії — є симетричними відносно P, C і T. Слабка взаємодія порушує симетрії C і P окремо, але зберігає CP і T. Проте деякі рідкісні процеси (всі, що досі спостерігалися, включають нейтральні K-мезони) порушують також CP і T. Всі спостереження свідчать, що комбінація CPT є точною симетрією Природи.

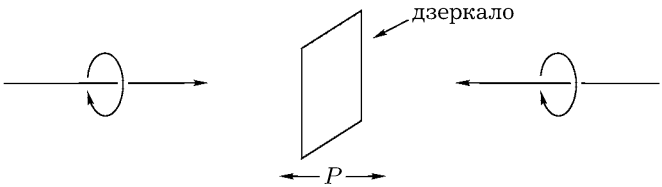
Загальноприйняту наразі теоретичну модель слабкої взаємодії, калібрувальну теорію Ґлешоу – Вайнберґа – Салама, викладено в Розділі 20 (Том III). У цій теорії C і P порушуються найжорсткішим чином. Власне, є досить несподіваним (хоча не випадковим) той факт, що C і P виявляються цілком придатними симетріями у переважній більшості процесів, які легко спостерігаються на практиці. З іншого боку, досі невідома

[12] При викладі цієї теми автори з педаґоґічних міркувань вдалися до істотних спрощень. Ґрунтовний, достатньо строгий (але цілком фізичний) розгляд дискретних симетрій у квантовій теорії поля можна знайти у Вайнберґа [61]. (*Прим. перекл.*)

насправді красива теорія, що порушує CP-інваріантність. У наявній теорії, де мають місце три (або більше) ґенерації ферміонів, присутній параметр, що в разі його відмінності від нуля призводить до порушення CP-інваріантності. Проте числове значення цього параметру зрозуміле не більше за величину маси електрона; фізичне походження порушення CP залишається загадковим. Далі ми обговоримо це питання в § 20.3.

Парність

Після цього вступу розглянемо дію P, T і C на діракові частки та поля. Спочатку займемося парністю. Оператор P змінює напрям імпульсу частки без зміни її спіну:



Математично це означає, що операцію P має реалізувати унітарний оператор (правильніше позначати його $U(P)$, але ми писатимемо просто P), який, наприклад, перетворює стан $\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle$ на $\mathfrak{a}_{-\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle$. Іншими словами, ми хочемо, щоб

$$P\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}P = \eta_a \mathfrak{a}_{-\mathbf{p}}^{s\dagger} \quad \text{і} \quad P\mathfrak{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}P = \eta_b \mathfrak{b}_{-\mathbf{p}}^{s\dagger}, \tag{3.123}$$

де η_a і η_b — можливі фази. Вони обмежені умовою, що подвійне застосування оператора парності має повертати спостережні величини до їх первісних значень. Оскільки спостережні величини побудовані з парної кількості ферміонних операторів, то ця умова вимагає, щоб η_a^2, $\eta_b^2 = \pm 1$.

Так само, як безперервне перетворення Лоренца реалізоване постійною 4×4 матрицею $\Lambda_{\frac{1}{2}}$, перетворення парності також має бути представленим постійною 4×4 матрицею. Щоб знайти цю матрицю й визначити η_a та η_b, обчислимо дію P на $\psi(x)$. Застосувавши (3.123), отримуємо

$$\begin{aligned} P\psi(x)P = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\times \\ \times \sum_s \left(\eta_a \mathfrak{a}_{-\mathbf{p}}^s u^s(p)\, e^{-ip\cdot x} + \eta_b^* \mathfrak{b}_{-\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p)\, e^{ip\cdot x}\right). \end{aligned} \tag{3.124}$$

Тепер замінимо p на $\widetilde{p} = (p^0, -\mathbf{p})$. Зазначимо, що $p\cdot x = \widetilde{p}\cdot(t, -\mathbf{x})$. А також,

$\widetilde{p}\cdot\sigma = p\cdot\bar{\sigma}$ і $\widetilde{p}\cdot\bar{\sigma} = p\cdot\sigma$. Це дозволяє записати

$$u(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{\widetilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,\xi\\ \sqrt{\widetilde{p}\cdot\sigma}\,\xi\end{pmatrix} = \gamma^0 u(\widetilde{p});$$
$$v(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta\\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{\widetilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,\eta\\ -\sqrt{\widetilde{p}\cdot\sigma}\,\eta\end{pmatrix} = -\gamma^0 v(\widetilde{p}).$$

Тоді (3.124) стає

$$P\psi(x)P = \int \frac{d^3\widetilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\widetilde{\mathbf{p}}}}}\times$$
$$\times\sum_s\left(\eta_a \mathrm{a}^s_{\widetilde{\mathbf{p}}} u^s(\widetilde{p})\, e^{-i\widetilde{p}\cdot(t,-\mathbf{x})} + \eta_b^* \mathrm{b}^{s\dagger}_{\widetilde{\mathbf{p}}} v^s(\widetilde{p})\, e^{i\widetilde{p}\cdot(t,-\mathbf{x})}\right).$$

Цей вираз має дорівнювати певній постійній матриці, помноженій на $\psi(t,-\mathbf{x})$, і це справді так, якщо ми встановимо $\eta_b^* = -\eta_a$. Звідси випливає

$$\eta_a\eta_b = -\eta_a\eta_a^* = -1. \tag{3.125}$$

Отже, ми отримуємо перетворення парності $\psi(x)$ в остаточній формі:

$$P\psi(t,\mathbf{x})P = \eta_a\gamma^0\psi(t,-\mathbf{x}). \tag{3.126}$$

Буде важливо знати (наприклад, для написання лаґранжіанів), як перетворюються під дією парності різні білінійні форми діракового поля. Нагадаємо, що є п'ять таких білінійних форм:

$$\bar{\psi}\psi,\quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\quad i\bar{\psi}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\psi,\quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi,\quad \imath\bar{\psi}\gamma^5\psi. \tag{3.127}$$

Множник i в деяких із них присутній для забезпечення самоспряженості, що ви можете легко перевірити. (Будь-який новий член у лаґранжіані мусить бути дійсним.) Передовсім обчислимо:

$$P\bar{\psi}(t,\mathbf{x}) = P\psi^\dagger(t,\mathbf{x})P\gamma^0 = (P\psi(t,\mathbf{x})P)^\dagger\gamma^0 = \eta_a^*\bar{\psi}(t,-\mathbf{x})\gamma^0. \tag{3.128}$$

Тоді скалярна білінійна форма перетворюється, як

$$\begin{aligned}P\bar{\psi}(t,\mathbf{x})\psi(t,\mathbf{x})P &= |\eta_a|^2\bar{\psi}(t,-\mathbf{x})\gamma^0\gamma^0\psi(t,-\mathbf{x}) =\\ &= +\bar{\psi}(t,-\mathbf{x})\psi(t,-\mathbf{x}),\end{aligned} \tag{3.129}$$

а для векторної маємо

$$P\bar{\psi}(t,\,\mathbf{x})\gamma^{\mu}\psi(t,\,\mathbf{x})P = \bar{\psi}(t,\,-\mathbf{x})\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}\psi(t,\,-\mathbf{x}) = \\ = \begin{cases} +\bar{\psi}(t,\,-\mathbf{x})\gamma^{\mu}\psi(t,\,-\mathbf{x}) & \text{для } \mu = 0, \\ -\bar{\psi}(t,\,-\mathbf{x})\gamma^{\mu}\psi(t,\,-\mathbf{x}) & \text{для } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{3.130}$$

Зауважимо, що цей вектор набуває того ж знаку мінус при просторових компонентах, що й вектор x^{μ}. Так само перетворення псевдоскаляра та псевдовектора є

$$Pi\bar{\psi}(t,\,\mathbf{x})\gamma^{5}\psi(t,\,\mathbf{x})P = i\bar{\psi}(t,\,-\mathbf{x})\gamma^{0}\gamma^{5}\gamma^{0}\psi(t,\,-\mathbf{x}) = \\ = -i\bar{\psi}(t,\,-\mathbf{x})\gamma^{5}\psi(t,\,-\mathbf{x}), \tag{3.131}$$

$$P\bar{\psi}(t,\,\mathbf{x})\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi(t,\,\mathbf{x})P = \bar{\psi}(t,\,-\mathbf{x})\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\gamma^{0}\psi(t,\,-\mathbf{x}) = \\ = \begin{cases} -\bar{\psi}(t,\,-\mathbf{x})\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi(t,\,-\mathbf{x}) & \text{для } \mu = 0, \\ +\bar{\psi}(t,\,-\mathbf{x})\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi(t,\,-\mathbf{x}) & \text{для } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{3.132}$$

Як ми й попереджали в § 3.4, префікс „псевдо“ означає додатковий знак мінус при перетворенні парності. (Властивості перетворення $i\bar{\psi}[\gamma^{\mu},\,\gamma^{\nu}]\,\psi = 2\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ залишено для Задачі 3.7.) Зазначимо, що трансформаційні властивості ферміонних білінійних форм не залежать від η_a, тому, не втрачаючи загальності, можна було від самого початку встановити $\eta_a = -\eta_b = 1$.

А проте, відносний знак мінус у (3.125) при перетвореннях парності ферміона й антиферміона має важливі наслідки. Розглянемо ферміон-антиферміонний стан $\mathrm{a}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\mathrm{b}^{s'\dagger}_{\mathbf{q}}|0\rangle$. Застосувавши P, знаходимо $P(\mathrm{a}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\mathrm{b}^{s'\dagger}_{\mathbf{q}}|0\rangle) = -(\mathrm{a}^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\mathrm{b}^{s'\dagger}_{-\mathbf{q}}|0\rangle)$. Отже, стан, що містить ферміон-антиферміонну пару, отримує додатковий множник (-1) при перетворенні парності. Ця інформація найбільш корисна для розгляду зв’язаних станів, у яких імпульси ферміона та антиферміона інтеґровані зі шродинґеровою хвильовою функцією й утворюють локалізовану в просторі систему. Ми докладно вивчимо такі стани в § 5.3, а тут лише зазначимо, що для просторової хвильової функції, симетричної щодо $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$, стан є *непарним*, тоді як для антисиметричної щодо $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ функції стан є *парним*. До прикладу, зв’язаний стан з $L = 0$ має неґативну парність; стан з $J = 0$ перетворюється, як псевдоскаляр, тим часом як три стани з $J = 1$ перетворюються, як просторові компоненти вектора. Ці властивості виявляють себе в правилах відбору для розпадів позитронію та системи кварк-антикварк (Задача 3.8).

Інверсія часу

Звернемось тепер до реалізації інверсії часу. Ми воліли б отримати T у формі унітарного оператора, що переводить $\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}$ у $\mathfrak{a}_{-\mathbf{p}}$ (і так само для $\mathfrak{b}_{\mathbf{p}}$), а $\psi(t, \mathbf{x})$ у $\psi(-t, \mathbf{x})$ (з деяким постійним матричним множником). Утім, забезпечити такі властивості надзвичайно важко, бо вище ми вже бачили, що перетворення $\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}$ на $\mathfrak{a}_{-\mathbf{p}}$, рівнозначно перетворенню $(t, \mathbf{x})$ на $(t, -\mathbf{x})$ у виразі для розкладеного за сходовими операторами ψ. Складність стане ще очевиднішою, коли ми висунемо вимогу, щоб операція інверсії часу була симетрією для вільної теорії Дірака, $[T, H] = 0$. У цьому разі,

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{iHt}\psi(\mathbf{x})e^{-iHt} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T\psi(t, \mathbf{x})T = e^{iHt}(T\psi(\mathbf{x})T)e^{-iHt} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T\psi(t, \mathbf{x})T|0\rangle = e^{iHt}(T\psi(\mathbf{x})T)|0\rangle,$$

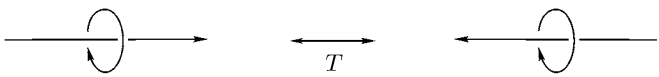
за умови, що $H|0\rangle = 0$. Тут права частина є сумою лише неґативно-частотних членів. Та якщо T обертає часову залежність поля $\psi(t, \mathbf{x})$, тоді ліва частина дорівнює (з точністю до постійної матриці) $\psi(-t, \mathbf{x})|0\rangle = e^{-iHt}\psi(\mathbf{x})|0\rangle$, що є сумою позитивно-частотних членів. Отже, ми довели, що T не може бути реалізовано як лінійний унітарний оператор.

Що ж ми можемо зробити? Вихід полягає в тому, щоб зберегти умову унітарності $T^\dagger = T^{-1}$, але при цьому встановити, що T діє і на c-числа, і на оператори наступним чином:

$$T(c\text{-число}) = (c\text{-число})^* T. \tag{3.133}$$

Тоді навіть при $[T, H] = 0$, залежність від часу всіх експоненційних множників обертається: $Te^{+iHt} = e^{-iHt}T$. Оскільки вся часова еволюція у квантовій механіці здійснюється через такі експоненційні множники, це на практиці змінює знак t. Зауважимо, що операція комплексного спряження нелінійна, а T є *антилінійним* або *антиунітарним* оператором.

На додачу до зміни напрямку імпульсу частки, T також має перевертати її спін:



Щоб виразити це в явному вигляді, ми повинні знайти математичну операцію, що перевертає спінор ξ.

Вище ми позначали спіновий стан ферміона індексом $s = 1, 2$. Далі в цьому параґрафі пов'язуватимемо s з фізичною проекцією спіну ферміона вздовж певної осі. Якщо ця вісь має полярні координати θ, φ, то

двокомпонентні спінори зі спіном угору і вниз уздовж цієї осі є

$$\xi(\uparrow) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad \xi(\downarrow) = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi}\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Нехай $\xi^s = (\xi(\uparrow), \xi(\downarrow))$ для $s = 1, 2$. Визначимо також

$$\xi^{-s} = -i\sigma^2(\xi^s)^*. \tag{3.134}$$

Ця величина є перевернутим спінором; з явних формул маємо

$$\xi^{-s} = (\xi(\downarrow), -\xi(\uparrow)). \tag{3.135}$$

Такий вираз для перевертання спіну в найзагальнішому випадку випливає з тотожності $\boldsymbol{\sigma}\sigma^2 = \sigma^2(-\boldsymbol{\sigma}^*)$. Це рівняння означає, що для спінора ξ та осі $\mathbf{n}$, які задовольняють умові $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\xi = +\xi$, справедливе співвідношення

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})(-i\sigma^2\xi^*) = -i\sigma^2(-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^*\xi^* = i\sigma^2(\xi^*) = -(-i\sigma^2\xi^*).$$

Зауважимо, що таке означення для перевертання спіну призводить до того, що в результаті двох послідовних операцій ми отримаємо початковий спіновий стан, помножений на (-1).

А зараз зіставимо різні спінові стани ферміонів з цими спінорами. Оператор $\mathrm{a}^s_{\mathbf{p}}$ знищує електрон, чий спінор $u^s(p)$ містить ξ^s. Оператор $\mathrm{b}^s_{\mathbf{p}}$ знищує позитрон, чий спінор $v^s(p)$ містить $\eta^s = \xi^{-s}$:

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^{-s} \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^{-s} \end{pmatrix}. \tag{3.136}$$

Як і в (3.135), визначимо

$$\mathrm{a}^{-s}_{\mathbf{p}} = (\mathrm{a}^2_{\mathbf{p}}, -\mathrm{a}^1_{\mathbf{p}}), \qquad \mathrm{b}^{-s}_{\mathbf{p}} = (\mathrm{b}^2_{\mathbf{p}}, -\mathrm{b}^1_{\mathbf{p}}). \tag{3.137}$$

Тепер ми можемо отримати співвідношення між діраковими спінорами u і v та їх часовою інверсією. Визначимо $\widetilde{p} = (p^0, -\mathbf{p})$. Цей вектор задовольняє тотожності $\sqrt{\widetilde{p}\cdot\sigma}\sigma^2 = \sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*}$; для доведення треба розкласти квадратний корінь як у (3.49). При певному виборі спіну та імпульсу, пов'язаних з діраковим спінором $u^s(p)$, нехай $u^{-s}(\widetilde{p})$ позначає спінор зі зміненим напрямком імпульсу й перевернутим спіном. Між цими величинами існує співвідношення

$$u^{-s}(\widetilde{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\widetilde{p}\cdot\sigma}\,(-i\sigma^2\xi^{s*}) \\ \sqrt{\widetilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,(-i\sigma^2\xi^{s*}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*}\,\xi^{s*} \\ -i\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^*}\,\xi^{s*} \end{pmatrix} =$$

$$= -i\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}\left[u^s(p)\right]^* = \gamma^1\gamma^3\left[u^s(p)\right]^*.$$

Так само для $v^s(p)$ маємо

$$v^{-s}(\widetilde{p}) = \gamma^1\gamma^3\left[v^s(p)\right]^* .$$

Скориставшись рівнянням (3.137), визначимо перетворення ферміонних операторів при інверсії часу, як

$$T\mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}}T = \mathfrak{a}^{-s}_{-\mathbf{p}}, \qquad T\mathfrak{b}^s_{\mathbf{p}}T = \mathfrak{b}^{-s}_{-\mathbf{p}}. \tag{3.138}$$

Додаткова спільна фаза ніяк не вплине на наш подальший розгляд і для простоти вилучена. Співвідношення (3.138) дають можливість обчислити дію T на ферміонне поле $\psi(x)$:

$$\begin{aligned}
T\psi(t,\,\mathbf{x})T &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\times \\
&\quad\times\sum_s T\left(\mathfrak{a}^s_{\mathbf{p}}u^s(p)e^{-ip\cdot x} + \mathfrak{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^s(p)e^{ip\cdot x}\right)T = \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\times \\
&\quad\times\sum_s\left(\mathfrak{a}^{-s}_{-\mathbf{p}}\left[u^s(p)\right]^* e^{ip\cdot x} + \mathfrak{b}^{-s\dagger}_{-\mathbf{p}}\left[v^s(p)\right]^* e^{-ip\cdot x}\right) = \\
&= \int \frac{d^3\widetilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\widetilde{\mathbf{p}}}}}(\gamma^1\gamma^3)\times \\
&\quad\times\sum_s\left(\mathfrak{a}^{-s}_{\widetilde{\mathbf{p}}}u^{-s}(\widetilde{p})e^{i\widetilde{p}\cdot(t,\,-\mathbf{x})} + \mathfrak{b}^{-s\dagger}_{\widetilde{\mathbf{p}}}v^{-s}(\widetilde{p})e^{-i\widetilde{p}\cdot(t,\,-\mathbf{x})}\right) = \\
&= \gamma^1\gamma^3\,\psi(-t,\,\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{3.139}$$

На останньому кроці ми використали $\widetilde{p}\cdot(t,\,-\mathbf{x}) = -\widetilde{p}\cdot(-t,\,\mathbf{x})$.

Далі ми можемо перевірити дію T на різні білінійні форми. Передовсім нам знадобиться

$$\begin{aligned}
T\bar{\psi}(t,\,\mathbf{x})T &= (T\psi(t,\,\mathbf{x})T)^\dagger(\gamma^0)^* = \psi^\dagger(-t,\,\mathbf{x})\left(\gamma^1\gamma^3\right)^\dagger\gamma^0 = \\
&= \bar{\psi}(-t,\,\mathbf{x})\left(-\gamma^1\gamma^3\right).
\end{aligned} \tag{3.140}$$

Тоді перетворення білінійної скалярної форми має вигляд

$$\begin{aligned}
T\bar{\psi}(t,\,\mathbf{x})\psi(t,\,\mathbf{x})T &= \bar{\psi}(-t,\,\mathbf{x})\left(-\gamma^1\gamma^3\right)\left(\gamma^1\gamma^3\right)\psi(-t,\,\mathbf{x}) = \\
&= +\bar{\psi}(-t,\,\mathbf{x})\psi(-t,\,\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{3.141}$$

Псевдоскаляр набуває додаткового знаку мінус при проходженні T через i:

$$Ti\bar{\psi}(t,\,\mathbf{x})\gamma^5\psi(t,\,\mathbf{x})T = -i\bar{\psi}(-t,\,\mathbf{x})\left(-\gamma^1\gamma^3\right)\gamma^5\left(\gamma^1\gamma^3\right)\psi(-t,\,\mathbf{x}) = \\ = -i\bar{\psi}(-t,\,\mathbf{x})\gamma^5\psi(-t,\,\mathbf{x}).$$

Для вектора ми маємо провести окремі обчислення для кожного значення індексу $\mu = 0, 1, 2, 3$. Після деяких викладок ви отримаєте

$$\begin{aligned} T\bar{\psi}(t,\,\mathbf{x})\gamma^\mu\psi(t,\,\mathbf{x})T &= \\ &= \bar{\psi}(-t,\,\mathbf{x})\left(-\gamma^1\gamma^3\right)\left(\gamma^\mu\right)^*\left(\gamma^1\gamma^3\right)\psi(-t,\,\mathbf{x}) = \\ &= \begin{cases} +\bar{\psi}(-t,\,\mathbf{x})\gamma^\mu\psi(-t,\,\mathbf{x}) & \text{для } \mu = 0; \\ -\bar{\psi}(-t,\,\mathbf{x})\gamma^\mu\psi(-t,\,\mathbf{x}) & \text{для } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.142}$$

Це саме те перетворення, яке нам потрібне для векторів на зразок питомого струму. Ви можете переконатися, що псевдовектор перетворюється при інверсії часу таким самим чином.

Зарядове спряження

Останньою з трьох дискретних симетрій є симетрія C між частками та античастками. Не виникає жодних проблем з реалізацією C як унітарного лінійного оператора. Зарядове спряження зазвичай визначають як перехід від ферміона з певною спіновою орієнтацією до антиферміона з такою самою спіновою орієнтацією. Тож зручним вибором для перетворення ферміонних операторів знищення є

$$C\mathrm{a}^s_{\mathbf{p}}C = \mathrm{b}^s_{\mathbf{p}}; \qquad C\mathrm{b}^s_{\mathbf{p}}C = \mathrm{a}^s_{\mathbf{p}}. \tag{3.143}$$

І знову, для простоти ми іґноруємо можливі додаткові фази.

Далі ми хочемо отримати дію C на $\psi(x)$. Насамперед нам знадобиться співвідношення між $v^s(p)$ та $u^s(p)$. Використовуючи (3.136),

$$\begin{aligned} \left(v^s(p)\right)^* &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,(-i\sigma^2\xi^{s*}) \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,(-i\sigma^2\xi^{s*}) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^*}\,\xi^{s*} \\ i\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*}\,\xi^{s*} \end{pmatrix}^* = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$u^s(p) = -i\gamma^2\left(v^s(p)\right)^*, \qquad v^s(p) = -i\gamma^2\left(u^s(p)\right)^*. \tag{3.144}$$

Якщо підставимо (3.144) у вираз для оператора ферміонного поля, а потім перетворимо цей оператор за допомогою C, то знайдемо

$$\begin{aligned} C\psi(x)C = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \times \\ \times \sum_s \left(-i\gamma^2 \mathrm{b}^s_{\mathbf{p}} v^s(p)^* e^{-ip\cdot x} - i\gamma^2 \mathrm{a}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} u^s(p)^* e^{ip\cdot x}\right) = \\ = -i\gamma^2\bar{\psi}(x) = -i\gamma^2\left(\psi^\dagger\right)^T = -i\left(\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2\right)^T. \end{aligned} \tag{3.145}$$

Зазначимо, що C є лінійним унітарним оператором, попри те, що що він переводить $\psi \to \psi^*$.

І знов-таки, ми хотіли б знати, як C діє на білінійні форми. Спочатку нам треба отримати

$$C\bar{\psi}C = C\psi^\dagger C\gamma^0 = \left(-i\gamma^2\psi\right)^T\gamma^0 = \left(-i\gamma^0\gamma^2\psi\right)^T. \tag{3.146}$$

Вивести перетворення для білінійних форм дещо складніше, тому варто явно виписати спінорні індекси. Для скаляра,

$$\begin{aligned} C\bar{\psi}\psi C = \left(-i\gamma^0\gamma^2\psi\right)^T\left(-i\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2\right)^T = -\gamma^0_{ab}\gamma^2_{bc}\psi_c\bar{\psi}_d\gamma^0_{de}\gamma^2_{ea} = \\ = +\bar{\psi}_d\gamma^0_{dc}\gamma^2_{ca}\gamma^0_{ab}\gamma^2_{bc}\psi_c = -\bar{\psi}\gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^2\psi = \\ = +\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \tag{3.147}$$

(Знак мінус на третьому кроці випливає з антикомутативності ферміонів.) Для псевдоскаляра не набагато складніше:

$$Ci\bar{\psi}\gamma^5\psi C = i\left(-i\gamma^0\gamma^2\psi\right)^T\gamma^5\left(-i\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2\right)^T = i\bar{\psi}\gamma^5\psi. \tag{3.148}$$

Для вектора і псевдовектора маємо проводити обчислення окремо для кожного їх компонента. Врахувавши, що γ^0 і γ^2 є симетричними матрицями, тоді як γ^1 і γ^3 — антисиметричними, знаходимо

$$C\bar{\psi}\gamma^\mu\psi C = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi; \tag{3.149}$$

$$C\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi C = +\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi. \tag{3.150}$$

Хоча оператор C переводить ψ у $\bar{\psi}$ і навпаки, він насправді не змінює порядку операторів народження і знищення. Отже, якщо з $\bar{\psi}\gamma^0\psi$ вже вирахувано нескінченну константу, згадану перед рівнянням (3.113), то вона не з'являється знову внаслідок зарядового спряження.

Підсумок по C, P і T

Трансформаційні властивості різних білінійних форм під дією C, P, і T зведено в підсумковій таблиці. Тут ми використали скорочення $(-1)^\mu \equiv 1$ для $\mu = 0$ і $(-1)^\mu \equiv 1$ для $\mu = 1, 2, 3$

	$\bar\psi\psi$	$i\bar\psi\gamma^5\psi$	$\bar\psi\gamma^\mu\psi$	$\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$	∂_μ
P	$+1$	-1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$	$(-1)^\mu$
T	$+1$	-1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$	$-(-1)^\mu$
C	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$
CPT	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1

Ми включили сюди трансформаційні властивості тензорної білінійної форми (див. Задачу 3.7), а також оператора похідної.

Зазначимо, що вільний діраків лаґранжіан $\mathcal{L}_0 = \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ є інваріантним відносно кожного з перетворень C, P і T окремо. Можна побудувати загальніші квантові системи, що порушують будь-яку з цих симетрій, додаючи до $\mathcal{L}_0$ певне збурення $\delta\mathcal{L}$. Проте $\delta\mathcal{L}$ мусить бути лоренцовим скаляром, і останній рядок таблиці вказує, що всі комбінації $\bar\psi$ та ψ, які є лоренцовими скалярами, інваріантні відносно комбінованої симетрії CPT. Насправді справедливе найзагальніше твердження, що неможливо побудувати лоренц-інваріантну квантову теорію поля із самоспряженим гамільтоніаном, у якій порушено CPT симетрію.[13]

Задачі

3.1. Ґрупа Лоренца. Нагадаємо комутаційні співвідношення (3.17) для ґрупи Лоренца:

$$\left[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right] = i\left(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}\right).$$

(a) Визначимо ґенератори обертань і бустів як

$$L^i = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}J^{jk} \qquad K^i = J^{0i},$$

[13] Ця теорема, як і теорема про спін і статистику, строго доведена в [64].

де $i, j, k = 1, 2, 3$. Тоді інфінітезимальне перетворення Лоренца можна записати, як

$$\Phi \to (1 - \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L} - i\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})\,\Phi.$$

Випишіть комутаційні співвідношення цих векторних операторів у явному вигляді. (Наприклад, $\left[L^i, L^j\right] = i\varepsilon^{ijk}L^k$.) Покажіть, що комбіновані оператори

$$\mathbf{J}_+ = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{L} + i\mathbf{K}) \quad \text{і} \quad \mathbf{J}_- = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{L} - i\mathbf{K})$$

комутують між собою і кожен з них задовольняє комутаційним співвідношенням для моменту імпульсу.

(b) Скінченновимірні представлення ґрупи обертань точно відповідають припустимим значенням моменту імпульсу — цілим та напівцілим числам. З результату пункту (a) випливає, що всі скінченновимірні представлення ґрупи Лоренца відповідають парам цілих або напівцілих чисел (j_+, j_-), пов'язаних з парами представлень ґрупи обертань. Скориставшись з того, що $J = \sigma/2$ у представленні моменту імпульсу зі спіном 1/2, випишіть у явному вигляді закони перетворення для двокомпонентних об'єктів, які перетворюються за представленнями ґрупи Лоренца, що відповідають парам $(\frac{1}{2}, 0)$ і $(0, \frac{1}{2})$. Покажіть, що це є достоту перетворення ψ_L і ψ_R, отримані у (3.37).

(c) Тотожність $\sigma^T = -\sigma^2\sigma\sigma^2$ дозволяє записати перетворення ψ_L в унітарно еквівалентному вигляді

$$\psi' \to \psi'\left(1 + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right),$$

де $\psi' = \psi_L^T\sigma^2$. Застосувавши це правило, ми можемо представити об'єкт, що перетворюється як $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, у формі 2×2 матриці, яка підпорядковується законові перетворення для ψ_R ліворуч і водночас — законові перетворення для транспонованого ψ_L праворуч. Параметризуємо цю матрицю таким чином:

$$\begin{pmatrix} V^0 + iV^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - iV^3 \end{pmatrix}.$$

Покажіть, що об'єкт V^μ перетворюється як 4-вектор.

3.2. Отримайте *тотожність Ґордона*

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(p).$$

де $q = (p' - p)$. Ми будемо використовувати цю формулу в Розділі 6.

3.3. Спінорні добутки. (Ця задача, разом з Задачами 5.3 і 5.6, впроваджує ефективний обчислювальний метод для процесів з безмасовими частками.) Нехай k_0^μ, k_1^μ — фіксовані 4-вектори, що задовольняють умовам $k_0^2 = 0$, $k_1^2 = -1$, $k_0 \cdot k_1 = 0$. Визначимо базисні спінори наступним чином. Нехай u_{L0} — лівополяризований спінор для ферміона з імпульсом k_0. Нехай $u_{R0} = \not{k}_1 u_{L0}$. Тоді для будь-якого p, що є світлоподібним ($p^2 = 0$), визначимо

$$u_L(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{R0} \quad \text{і} \quad u_R(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{L0}.$$

Ці умови визначають фази спінорів однозначно (за винятком випадку, коли p паралельний k_0).

(a) Покажіть, що $\not{k}_0 u_{R0} = 0$. Покажіть, що для будь-якого світлоподібного p виконується $\not{p} u_L(p) = \not{p} u_R(p) = 0$.

(b) Для випадку $k_0 = (E, 0, 0, -E)$, $k_1 = (0, 1, 0, 0)$, випишіть у явному вигляді u_{L0}, u_{R0}, $u_L(p)$ і $u_R(p)$.

(c) Визначимо *спінорні добутки* $\mathrm{s}(p_1, p_2)$ і $\mathrm{t}(p_1, p_2)$ для світлоподібних p_1, p_2 як

$$\mathrm{s}(p_1, p_2) = \bar{u}_R(p_1) u_L(p_2), \qquad \mathrm{t}(p_1, p_2) = \bar{u}_L(p_1) u_R(p_2).$$

Використавши явний вигляд u_λ, заданий у (b), обчисліть явно спінорні добутки і покажіть, що $\mathrm{t}(p_1, p_2) = \mathrm{s}(p_2, p_1)^*$ і $\mathrm{s}(p_1, p_2) = -\mathrm{s}(p_2, p_1)$. Крім того, покажіть, що

$$\left|\mathrm{s}(p_1, p_2)\right|^2 = 2p_1 \cdot p_2.$$

Отже, спінорні добутки дорівнюють квадратним кореням від скалярних добутків 4-векторів.

3.4. Майоранові ферміони. Виходячи з (3.40), можна записати релятивістське рівняння для безмасового 2-компонентного ферміонного поля, що перетворюється як два верхні компонента діракового спінора (ψ_L). Позначимо таке 2-компонентне поле $\chi_a(x)$, $a = 1, 2$.

(a) Покажіть, що є можливість записати рівняння для $\chi_a(x)$, як для масивного поля, наступним чином:

$$i\bar{\sigma} \cdot \partial\chi - im\sigma^2\chi^* = 0.$$

Тобто покажіть, по-перше, що це рівняння є релятивістськи інваріантним і, по-друге, що з нього випливає рівняння Кляйна–Ґордона $(\partial^2 + m^2)\chi = 0$. Цей вигляд масового члена для ферміона називається майорановим масовим членом.

(b) Чи випливає рівняння Майорани з лаґранжіана? Масовий член, здавалося б, виникає при варіюванні виразу $(\sigma^2)_{ab}\xi_a^*\chi_b$. Та оскільки σ^2 є антисиметричною матрицею, цей вираз обернувся б на нуль, якби $\chi(x)$ було звичайним c-числовим полем. Ми знаємо, що при квантуванні $\chi(x)$ стане антикомутованим квантовим полем. Отже, є сенс розвинути його класичну теорію, розглядаючи $\chi(x)$ як класичне антикомутоване поле, тобто як таке, що набуває значень у *ґрасманових числах*, що задовольняють умові

$$\alpha\beta = -\beta\alpha \quad \text{для будь-яких } \alpha,\ \beta.$$

Зазначимо, що з цих співвідношень випливає $\alpha^2 = 0$. Ґрасманове поле $\xi(x)$ можна розкласти за базисом функцій, як

$$\xi(x) = \sum_n \alpha_n \phi_n(x),$$

де $\phi_n(x)$ — ортоґональні c-числові функції, а α_n — набір незалежних ґрасманових чисел. Визначимо комплексне спряження добутку ґрасманових чисел як таке, що обертає їхній порядок:

$$(\alpha\beta)^* \equiv \beta^*\alpha^* = -\alpha^*\beta^*.$$

Це правило копіює ермітове спряження квантових полів. Покажіть, що класична дія

$$S = \int d^4x \left[\chi^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi + \tfrac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*)\right],$$

(де $\chi^\dagger = (\chi^*)^T$) є дійсною ($S^* = S$), і варіювання S за величинами χ та χ^* призводить до рівняння Майорани.

(c) Запишемо 4-компонентне діракове поле, як

$$\psi(x) = \begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix},$$

і нагадаємо, що нижній компонент ψ перетворюється за представленням, унітарно еквівалентним комплексно-спряженому представленню ψ_R. Таким чином, ми можемо переписати 4-компонентне діракове поле в термінах двох 2-компонентних спінорів:

$$\psi_L(x) = \chi_1(x), \qquad \psi_R(x) = i\sigma^2\chi_2^*(x).$$

Перепишіть лаґранжіан Дірака у термінах χ_1 та χ_2 і зверніть увагу на форму масового члена.

(d) Покажіть, що дія пункту (c) має ґлобальну симетрію. Обчисліть диверґенцію струмів

$$J^\mu = \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi, \qquad J^\mu = \chi_1^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_1 - \chi_2^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_2,$$

для теорій пунктів (b) та (c) відповідно і зіставте результати із симетріями цих теорій. Побудуйте теорію з N вільних масивних 2-компонентних ферміонних полів з $O(N)$ симетрією (тобто з обертальною симетрією в n-вимірному просторі).

(e) Проквантуйте теорію Майорани пунктів (a) та (b). Тобто, переведіть $\chi(x)$ у квантове поле, що задовольняє канонічному антикомутаційному співвідношенню

$$\{\chi_a(\mathbf{x}),\, \chi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \delta_{ab},$$

побудуйте самоспряжений гамільтоніан і знайдіть представлення канонічних комутаційних співвідношень, які діаґоналізують гамільтоніан у термінах операторів народження та знищення. (Вказівка: порівняйте поле $\chi(x)$ з двома верхніми компонентами квантованого діракового поля.)

3.5. Суперсиметрія. Можна написати теорії поля з безперервними симетріями, що поєднують ферміони та бозони; такі перетворення називають *суперсиметріями*.

(a) Найпростішим прикладом суперсиметричної теорії поля є теорія вільного комплексного бозонного поля й вільного вейлевого ферміонного поля з лаґранжіаном

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i \bar{\sigma} \cdot \partial \chi + F^* F.$$

Тут F є додатковим комплексним скалярним полем з рівнянням руху $F = 0$. Покажіть, що цей лаґранжіан є інваріантним (з точністю до повної диверґенції) відносно інфінітезимальних перетворень

$$\begin{aligned} \delta\phi &= -i\varepsilon^T \sigma^2 \chi, \\ \delta\chi &= \varepsilon F + \sigma \cdot \partial\phi \sigma^2 \varepsilon^*, \\ \delta F &= -i\varepsilon^\dagger \bar{\sigma} \cdot \partial\chi, \end{aligned}$$

де параметр ε_a є 2-компонентним ґрасмановим спінором.

(b) Покажіть, що член

$$\Delta\mathcal{L} = \left[m\phi F + \tfrac{1}{2}\, im\chi^T\sigma^2\chi\right] + (\text{к. с.})$$

є також лівоінваріантним відносно перетворення, заданого в пункті (a). Усуньте F з повного лаґранжіана $L + \Delta L$, розв'язуючи його рівняння руху, і покажіть, що бозонне та ферміонне поля ϕ і χ мають однакові маси.

(c) Можна записати супесиметричні нелінійні рівняння поля, додавши до лаґранжіана члени третього та вищих порядків. Покажіть, що наступна, досить загальна теорія поля з (ϕ_i, χ_i), $i = 1, \ldots, n$, є суперсиметричною:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi_i^*\partial^\mu\phi_i + \chi_i^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi_i + F_i^*F_i + \left(F_i\frac{\partial W[\phi]}{\partial\phi_i} + \frac{i}{2}\,\frac{\partial^2 W[\phi]}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\,\chi_i^T\sigma^2\chi_j + \text{к. с.}\right)$$

де $W[\phi]$ є довільною функцією поля ϕ_i, яка називається *суперпотенціалом*. Для простого випадку $n = 1$ і $W = g\phi^3/3$ напишіть рівняння руху для ϕ та χ (після усунення F).

3.6. Перетворення Фірца. Нехай u_i, $i = 1, \ldots, 4$ є чотири 4-компонентні діракові спінори. У тексті ми довели перестановочні формули Фірца (3.78) і (3.79). Перша з них може бути записана в 4-компонентних позначеннях, як

$$\bar{u}_1\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u_2\bar{u}_3\gamma_\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u_4 = -\bar{u}_1\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u_4\bar{u}_3\gamma_\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u_2.$$

Насправді є подібні перестановочні формули для всіх добутків

$$\left(\bar{u}_1\Gamma^A u_2\right)\left(\bar{u}_3\Gamma^B u_4\right),$$

де Γ^A, Γ^B — будь-яка з 16 комбінацій матриць Дірака, наведених у § 3.4.

(a) Для початку нормуємо 16 матриць Γ^A за умовою

$$\mathrm{Tr}\left[\Gamma^A\,\Gamma^B\right] = 4\,\delta^{AB}.$$

Це дає $\Gamma^A = \{1, \gamma^0, i\gamma_j, \ldots\}$. Випишіть усі 16 елементів цього набору.

(b) Запишіть головну тотожність Фірца, як рівняння

$$\left(\bar{u}_1\Gamma^A u_2\right)\left(\bar{u}_3\Gamma^A u_4\right) = \sum_{C,D} C^{AB}{}_{CD}\left(\bar{u}_1\Gamma^C u_4\right)\left(\bar{u}_3\Gamma^D u_2\right)$$

з невідомими коефіцієнтами $C^{AB}{}_{CD}$. Використавши повноту набору матриць Γ^A, покажіть, що

$$C^{AB}{}_{CD} = \frac{1}{16}\,\mathrm{Tr}\left[\Gamma^C\Gamma^A\Gamma^D\Gamma^B\right].$$

(c) Отримайте у явному вигляді закони перетворення Фірца для добутків $(\bar{u}_1 u_2)(\bar{u}_3 u_4)$ і $(\bar{u}_1\gamma^\mu u_2)(\bar{u}_3\gamma_\mu u_4)$.

3.7. Ця задача стосується дискретних симетрій P, C, і T.

(a) Отримайте трансформаційні властивості при перетвореннях P, C, і T антисиметричної тензорної ферміонної білінійної форми $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$, де $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Це довершує таблицю трансформаційних властивостей білінійних форм, наведену наприкінці розділу.

(b) Нехай $\phi(x)$ — комплексне поле Кляйна–Ґордона, на зразок розглянутого в Задачі 2.2. Знайдіть унітарні оператори P, C та антиунітарний оператор T (всі визначені через їхню дію на оператори знищення $a_{\mathbf{p}}$ і $b_{\mathbf{p}}$ для часток та античасток Кляйна–Ґордона), які дають наступні перетворення для поля Кляйна–Ґордона:

$$P\phi(t, \mathbf{x})P = \phi(t, -\mathbf{x});$$
$$T\phi(t, \mathbf{x})T = \phi(-t, \mathbf{x});$$
$$C\phi(t, \mathbf{x})C = \phi^*(t, \mathbf{x}).$$

Знайдіть трансформаційні властивості компонентів струму

$$J^\mu = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)$$

при перетвореннях P, C, і T.

(c) Покажіть, що будь-який самоспряжений лоренц-скалярний локальний оператор, утворений з $\psi(x)$, $\phi(x)$ і спряжених до них полів, має $PCT = +1$.

3.8. Зв'язані стани. Дві частки зі спіном 1/2 можуть об'єднатися у стан з повним спіном 0 або 1. Хвильові функції цих станів будуть відповідно непарними або парними при перестановці їхніх спінів.

(a) Використайте цю інформацію для обчислення значень P- і C-парності для всіх електрон-позитронних зв'язаних станів з S, P або D хвильовими функціями.

(b) Оскільки електрон-фотонна взаємодія задана гамільтоніаном

$$\Delta H = \int d^3\mathbf{x}\, eA_\mu j^\mu,$$

де j^μ — електричний струм, то електродинаміка інваріантна відносно P і C, якщо компоненти векторного потенціалу мають такі ж значення P- і C-парності, як і відповідні компоненти j^μ. Покажіть, що звідси випливає такий дивовижний факт: основний стан позитронію зі спіном 0 може розпастися на два фотони, але основний стан зі спіном 1 мусить розпадатися на три фотони. Знайдіть правила відбору для анігіляції вищих станів позитронію і для однофотонних переходів між рівнями позитронію.

Розділ 4
Поля із взаємодією і фейнманові діаґрами

§ 4.1. Теорія збурень — філософія і приклади

Ми детально розглянули квантування двох вільних теорій поля, які приблизно описують більшість відомих у природі часток. Проте досі стани вільних часток були вільними станами гамільтоніана; ми не розглядали ні взаємодію, ні розсіяння. Щоб отримати точнішу картину реального світу, ми мусимо включити до гамільтоніана (або лаґранжіана) нові, нелінійні члени, які поєднають між собою різні фур'є моди (і відповідні їм частки). Для збереження причинності будемо вимагати, щоб нові члени містили добутки полів у одній точці простору-часу: так, $\left[\phi(x)\right]^4$ годиться, а $\phi(x)\phi(y)$ — ні. Отже, члени, що описують взаємодію, матимуть вигляд

$$H_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x}\,\mathcal{H}_{\text{int}}\big[\phi(x)\big] = -\int d^3\mathbf{x}\,\mathcal{L}_{\text{int}}\big[\phi(x)\big].$$

Наразі обмежимося теоріями, у яких $\mathcal{H}_{\text{int}}$ $(= -\mathcal{L}_{\text{int}})$ є функцією лише полів, а не їхніх похідних.

У цьому розділі ми розглянемо три важливі приклади теорій поля із взаємодією. Першою є теорія „фі-чотири“:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu\phi)^2 - \tfrac{1}{2}\,m^2\phi^2 - \tfrac{\lambda}{4!}\,\phi^4, \tag{4.1}$$

де λ — безрозмірна *константа зв'язку*. (Взаємодія ϕ^3 була б трохи простіша, проте в цьому разі енерґія не була б позитивно-визначена, аж поки не додано вищий парний степень від ϕ.) Хоча ми вивчаємо цю теорію із суто педаґоґічною метою (оскільки вона є найпростішою квантовою теорією із взаємодією), моделі реального світу таки містять ϕ^4-взаємодію; найважливішим прикладом у фізиці часток є самодія гіґсового поля в стандартній електрослабкій теорії. А в другому томі ми побачимо, що теорія ϕ^4 також постає у статистичній механіці.

Рівняння руху для теорії ϕ^4,

$$(\partial^2 + m^2)\,\phi = -\tfrac{\lambda}{3!}\,\phi^3, \tag{4.2}$$

неможливо розв'язати через фур'є-аналіз, як вільне рівняння Кляйна–Ґордона. У квантовій теорії ми накладаємо рівночасове комутаційне співвідношення

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

яке не залежить від $\mathcal{L}_{\text{int}}$. (Зазначимо, втім, що якби $\mathcal{L}_{\text{int}}$ містив $\partial_\mu\phi$, то означення $\pi(\mathbf{x})$ зазнало б змін.) Досить простою вправою буде виписати гамільтоніан цієї теорії і знайти гайзенберґове рівняння руху для оператора $\phi(x)$; результат збігається з класичним рівнянням руху (4.2), як це було і з вільною теорією.

Нашим другим прикладом теорії поля із взаємодією буде квантова електродинаміка:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{КЕД}} &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{int}} = \\ &= \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\end{aligned} \tag{4.3}$$

де A_μ є електромаґнітним векторним потенціалом, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензором електромаґнітного поля, а $e = -|e|$ — електричним зарядом. (Щоб описати ферміон із зарядом Q, треба замінити e на Q. Якщо ми хочемо розглянути кілька типів заряджених часток, то просто продублюємо $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$ і $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}$ для кожного різновиду.) Гідною подиву є та обставина, що цей простий лаґранжіан описує майже всі явища, які ми спостерігаємо від макроскопічних масштабів до відстаней 10^{-13} см. Насправді ж лаґранжіан у КЕД можна записати ще простіше:

$$\mathcal{L}_{\text{КЕД}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2, \tag{4.4}$$

де D_μ є *калібрувально-коваріантна похідна*,

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x). \tag{4.5}$$

Найістотнішою властивістю лаґранжіана КЕД є його інваріантність відносно калібрувального перетворення

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x), \qquad A_\mu \to A_\mu - \tfrac{1}{e}\,\partial_\mu\alpha(x), \tag{4.6}$$

що реалізується на діраковому полі як *локальне* фазове обертання. Така інваріантність має фундаментальне ґеометричне значення, що виправдовує запровадження *коваріантної похідної*. Проте для наших цілей досить того, що (4.6) є симетрією теорії.

Рівняння Ейлера–Лаґранжа для $\psi(x)$,

$$(i\not{D} - m)\psi(x) = 0, \tag{4.7}$$

є рівнянням Дірака, поєднаним з електромаґнітним полем за рецептом *мінімального зв'язку*, $\partial \to D$. Рівняння Ейлера–Лаґранжа для поля A_ν має вигляд

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\ \bar{\psi}\gamma^\nu\psi = e\, j^\nu. \tag{4.8}$$

Це неоднорідні рівняння Максвела з питомим струмом $j^\nu = \bar{\psi}\gamma^\nu\psi$, отриманим зі збереженого діракового векторного струму (3.73). Як і в теорії ϕ^4, рівняння руху також можна записати як гайзенберґові рівняння для операторів $\psi(x)$ і $A_\mu(x)$. Це легко перевірити для $\psi(x)$; проте ми досі не обговорили квантування електромаґнітного поля.

Насправді в нашому курсі ми взагалі не розглядатимемо канонічне квантування електромаґнітного поля. Це вельми заплутана тема, здебільшого через калібрувальну інваріантність. Зазначимо, що оскільки $\dot{A}^0$ не виникає в лаґранжіані (4.3), то імпульс, спряжений до A^0, тотожно дорівнює нулю. А це суперечить канонічному комутаційному співвідношенню $[A^0(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Можливе рішення проблеми полягає в тому, щоб квантувати поле в кулоновому калібруванні, коли $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$ і компонент A^0 є зв'язаною, а не динамічною, змінною; але в цьому разі доводиться жертвувати явною лоренц-інваріантністю. Альтернативно, можна квантувати поле в лоренцовому калібруванні $\partial_\mu A^\mu = 0$, модифікувавши лаґранжіан таким чином, щоб у ньому з'явився член з $\dot{A}^0$. Це дає комутаційні співвідношення $[A^\mu(\mathbf{x}), A^\nu(\mathbf{y})] = -ig^{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, загалом такі самі, як для чотирьох полів Кляйна–Ґордона. Проте додатковий знак мінус у $[A^0, \dot{A}^0]$ призводить до іншої (втім, подоланої) проблеми: стани, народжені $a^{0\dagger}_{\mathbf{p}}$, мають неґативну норму.[14]

Фейнманові правила для обчислення амплітуд процесів, де присутні фотони, найлегше отримати через формулювання теорії поля у термінах функціонального інтеґрування, яке розглядається в Розділі 9 (Том II). А в третьому томі ми побачимо, що цей метод має додаткову перевагу простого узагальнення на випадок неабелевих калібрувальних полів. У цьому розділі ми просто спробуємо вгадати фейнманові правила для фотонів. Це буде зовсім нескладно після того, як отримаємо відповідні правила для аналоґічної, але простішої *теорії Юкави*:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Klein-Gordon}} - g\ \bar{\psi}\psi\phi. \tag{4.9}$$

Це буде нашим третім прикладом. Теорія Юкави схожа на КЕД, проте в ній замість векторного фотона присутня скалярна частка ϕ. Член із взаємодією має безрозмірну константу зв'язку g, аналоґічну електричному

[14] Легко знайти чудовий виклад обох процедур квантування. Так, для кулонового калібрування див. Бйоркен, Дрелл [10], Розділ 14; для лоренцового — Мендл і Шоу [39], Розділ 5.

заряду e. Початково Юкава запропонував цю теорію, щоб описати взаємодію нуклонів (ψ) та піонів (ϕ). У сучасній теорії часток стандартна модель містить член взаємодії Юкави, що пов'язує скалярне поле Гіґса з кварками та лептонами; більшість вільних параметрів у стандартній моделі є юкавськими константами зв'язку.

Виписавши три засадничі взаємодії, зробимо паузу, щоб обговорити, які інші взаємодії можна знайти в природі. На перший погляд, перелік буде нескінченним; навіть для скалярної теорії ми могли б записати взаємодії у вигляді ϕ^n для будь-якого n. Проте примітно, що одна проста й переконлива аксіома усуває майже всі можливі варіанти, крім кількох. Ця аксіома полягає в тому, що теорія мусить бути *перенормованою*, і обґрунтовується наступними міркуваннями. Члени вищого порядку в теорії збурень, як зазначалося в Розділі 1, містять інтеґрали по 4-імпульсах проміжних („віртуальних") часток. Ці інтеґрали часто формально розбігаються, тому в загальному випадку необхідно застосувати певну процедуру обрізання; найпростіший спосіб такої процедури полягає в обмеженні інтеґрування великим, але скінченним імпульсом Λ. Наприкінці обчислень здійснюється перехід до межі $\Lambda \to \infty$ у сподіванні, що фізичні величини виявляться незалежними від Λ. Якщо це справді так, то теорія називається *перенормованою*. Однак припустімо, що теорія містить взаємодії з константами зв'язку, що мають розмірність маси у певному *від'ємному* степені. Тоді для отримання безрозмірної амплітуди розсіяння ця константа зв'язку має бути помножена на величину позитивної масової розмірності, яка виявляється нічим іншим як параметром обрізання Λ. Такий член розбігається при $\Lambda \to \infty$, тож теорія не є перенормованою.

Детально ми розглянемо це питання в Розділі 10. А поки лише відзначимо, що будь-яка теорія з константою зв'язку неґативної масової розмірності не є перенормованою. Простий розмірний аналіз дозволяє нам легко відкинути майже всіх кандидатів на взаємодію. Оскільки дія $S = \int \mathcal{L}\, d^4x$ безрозмірна, то лаґранжіан $\mathcal{L}$ повинен мати розмірність [маса]^4 (або просто розмірність 4). З вигляду кінетичних членів різних вільних лаґранжіанів ми визначаємо, що скалярне та векторне поля ϕ і A^μ мають розмірність 1, тоді як розмірність спінорного поля ψ є $3/2$. Тепер ми можемо систематизувати всі можливі перенормовані взаємодії.

Для теорій, що включають лише скаляри, припустимими членами із взаємодією є

$$\mu\phi^3 \quad \text{і} \quad \lambda\phi^4.$$

Константа зв'язку μ має розмірність 1, тоді як λ безрозмірна. Члени ви-

гляду ϕ^n для $n > 4$ не годяться, бо їхні константи зв'язку мали б розмірність $4 - n$. Певна річ, значно цікавіші теорії можна отримати шляхом включення кількох дійсних або комплексних скалярних полів (див. Задачу 4.3).

Далі ми можемо додати спінорні поля. Спінорна самодія неприпустима, оскільки ψ^3 (окрім порушення лоренцової інваріантності) має розмірність $9/2$. Отже, можлива лише взаємодія Юкави зі скалярними полями:

$$g\bar{\psi}\psi\phi,$$

хоча схожі взаємодії можна побудувати також і з вейлевих та майоранових спінорів.

При додаванні векторних полів стають можливими багато нових типів взаємодії. Найбільш знайомою є векторно-спінорна взаємодія в КЕД:

$$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.$$

І знов-таки, нескладно побудувати схожі члени з вейлевими та майорановими спінорами. Менш важливою є *скалярна КЕД* з лаґранжіаном

$$\mathcal{L} = |D_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2, \quad \text{що містить} \quad eA^\mu\phi\partial_\mu\phi^*, \quad e^2|\phi|^2A^2.$$

Це наш перший приклад взаємодії з похідними; квантування такої теорії буде набагато простішим у формалізмі функціональних інтеґралів, тому ми відкладемо її розгляд до Розділу 9. Інші можливі лоренц-інваріантні члени мають вигляд

$$A^2(\partial_\mu A^\mu) \quad \text{і} \quad A^4.$$

Хоча це далеко не очевидно, такі члени призводять до суперечностей, за винятком лише тих випадків, коли їхні константи зв'язку точно підібрані відповідно до спеціального типу симетрії, яка має включати кілька векторних полів. Ця симетрія лежить в основі *неабелевих калібрувальних теорій*, що будуть головним предметом розгляду в третьому томі. Масовий член $\frac{1}{2}m^2A^2$ для векторних полів також породжує суперечності, якщо лише він не додається до КЕД; у кожнім разі, він порушує (абелеву або неабелеву) калібрувальну інваріантність.

Це вичерпує перелік можливих лаґранжіанів, що включають скалярні, спінорні й векторні частки. Цікаво відзначити, що прийняті зараз моделі елементарних часток охоплюють *усі* перелічені вище типи взаємодії. Три з них, що будуть вивчені в цьому розділі, покривають майже половину всіх можливостей; решту ми розглянемо далі в нашому курсі.

Припущення, що реалістичні теорії мають бути перенормованими, є надзвичайно зручним, оскільки неперенормована теорія мала б мізерну передбачувану силу. Проте можна задатися питанням, *чому* природа така люб'язна, що використовує лише перенормовані взаємодії. Слід було б очікувати, що істинна теорія природи є квантовою теорією значно загальнішого типу. Проте можна довести, що незалежно від складності фундаментальної теорії при дуже високих енерґіях, її низькоенерґетичне наближення, яке ми спостерігаємо в експериментах, має бути перенормованою квантовою теорією поля. Ми покажемо це в § 12.1.

На більш практичному рівні попередній аналіз засвідчує значну різницю в методолоґії між нерелятивістською квантовою механікою та релятивістською квантовою теорією поля. Оскільки потенціал $V(r)$ у рівнянні Шродинґера цілком довільний, нерелятивістська квантова механіка не встановлює обмежень на вигляд взаємодії в реальному світі. Але щойно ми бачили, як квантова теорія поля висуває дуже жорсткі вимоги до природи (або навпаки). Фактично, з нашого обговорення випливає, що єдина задача, яка залишилась у фізиці часток, полягає в складанні переліку елементарних часток, вимірюванні їхніх мас та констант зв'язку. Можливо, така точка зору грішить надмірною самовпевненістю, але сам факт її існування, вочевидь, означає, що фізики знаходяться на правильному шляху до побудови фундаментальної теорії.

Маючи набір часток та їхніх взаємодій, ми ще повинні отримати з теорії результати, які можна порівняти з експериментом. Як нам провести аналіз квантової механіки поля із взаємодією? Було б добре, якби ми могли знайти явні рішення принаймні для кількох прикладів (тобто обчислити точні власні значення і власні вектори, як це робили для вільних теорій), щоб отримати уявлення про властивості теорій із взаємодією. На жаль, це простіше сказати, ніж зробити. Нам невідомі точно вирішувані (інтеґровані) теорії поля із взаємодією в просторі-часі з розмірністю понад два, і навіть інтеґровані моделі зі спеціальними симетріями надзвичайно складні. Вивчення таких теорій було б цікавим, проте навряд чи варте зусиль на цьому етапі. Натомість ми повернемося до простішого і придатного до застосування в загальному випадку підходу — а саме, розглядатимемо гамільтоніан взаємодії H_{int} як збурення й обчислюватимемо його вплив за теорією збурень у припущенні, що константа зв'язку досить мала для отримання розумного наближення до точної відповіді. І справді, пертурбативний ряд матиме дуже просту структуру, а *фейнманові діаґрами* дозволять наочно представити ефекти від взаємодії у довільно високому порядку наближення.

Таке спрощення пертурбативного ряду в релятивістській теорії поля було визначним досягненням Томонаґи, Швінґера і Фейнмана.[15] Для отримання цього спрощення кожен з них незалежно знайшов спосіб переформулювання квантової механіки з усуненням особливої ролі часу, а відтак застосував нову точку зору, щоб представити кожен член пертурбативного ряду як просторово-часовий процес. У Розділі 9 (Том II) ми розвинемо квантову теорію поля з просторово-часової точки зору за методом *функціонального інтеґрування* Фейнмана. А в поточному розділі підемо простішим шляхом, уперше розробленим Дайсоном, щоб отримати просторово-часову картину теорії збурень за допомогою звичайної техніки квантової механіки.

§ 4.2. Пертурбативний ряд для кореляційних функцій

Почнемо вивчення теорії збурень для полів із взаємодією, націлившись на формалізм, який дозволить нам унаочнити пертурбативні ряди як просторово-часовий процес. Не потребуючи перегляду всієї квантової механіки, ми, проте, переформулюємо залежну від часу теорію збурень у зручній для нашої мети формі. Ясно, що в кінцевому підсумку ми хочемо обчислити перерізи розсіяння та ширини розпаду. Але наразі поставимо менш амбіційну задачу і спробуємо обчислити найпростішу (але й абстрактнішу) величину — *двоточкову кореляційну функцію* або *двоточкову функцію Ґріна*

$$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle \tag{4.10}$$

в теорії ϕ^4. Ми ввели позначення $|\Omega\rangle$ для основного стану теорії із взаємодією, яке в загальному випадку відрізняється від основного стану вільної теорії $|0\rangle$. Символ хронологічного впорядкування T запроваджено для подальшої зручності. Кореляційну функцію можна фізично інтерпретувати як амплітуду розповсюдження частки або збудження поля між y та x. У вільній теорії це є просто пропаґатор Фейнмана:

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle_{\text{free}} = D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{ie^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+i\varepsilon} \tag{4.11}$$

Ми хотіли б знати, як змінюється цей вираз для теорії із взаємодією. Проаналізувавши двоточкову кореляційну функцію, ми легко узагальнимо результати на кореляційні функції вищого порядку, які міститимуть

[15] Історичну довідку про внесок Томонаґи, Швінґера, Фейнмана і Дайсона див. у [50].

більше двох польових операторів. У §§ 4.3 і 4.4 ми продовжимо аналіз кореляційних функцій і для їх обчислення за теорією збурень розробимо формалізм фейнманових діаґрам. Далі, в §§ 4.5 і 4.6, ми навчимося з допомогою тієї ж техніки обчислювати перерізи розсіяння і ширини розпаду.

Беручись до задачі, запишемо гамільтоніан теорії ϕ^4, як

$$H = H_0 + H_{\text{int}} = H_{\text{Klein-Gordon}} + \int d^3\mathbf{x}\, \frac{\lambda}{4!}\, \phi^4(\mathbf{x}). \tag{4.12}$$

Ми хочемо отримати вираз для двоточкової кореляційної функції (4.10) у вигляді ряду за степенями λ. Гамільтоніан взаємодії H_{int} зустрічається у (4.10) двічі: по-перше, в означенні гайзенберґового поля

$$\phi(x) = e^{iHt}\phi(\mathbf{x})e^{-iHt}; \tag{4.13}$$

по-друге, в означенні основного стану $|\Omega\rangle$. Ми маємо виразити $\phi(x)$ і $|\Omega\rangle$ через величини, якими вміємо маніпулювати, а саме — через оператори вільного поля та вакуум у вільній теорії $|0\rangle$.

Простіше почати з $\phi(x)$. У кожен фіксований момент часу t_0 ми можемо, як звичайно, розкласти ϕ за сходовими операторами:

$$\phi(t_0, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(\mathrm{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right).$$

Тоді, щоб отримати $\phi(t, \mathbf{x})$ для $t \neq t_0$, просто переходимо до картини Гайзенберґа:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)}\phi(t_0, \mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)}$$

Для $\lambda = 0$ гамільтоніан H збігається з H_0, і тоді маємо

$$\phi(t, \mathbf{x})\big|_{\lambda=0} = e^{iH_0(t-t_0)}\phi(t_0, \mathbf{x})e^{-iH_0(t-t_0)} \equiv \phi_I(t, \mathbf{x}). \tag{4.14}$$

Якщо λ є малою величиною, то цей вираз усе ще даватиме найважливішу частину часової залежності $\phi(x)$, тому зручно приписати їй окрему назву: поле в *картині взаємодії* $\phi_I(t, \mathbf{x})$. Оскільки ми можемо діаґоналізувати H_0, то легко виписати ϕ_I явно:

$$\phi_I(t_0, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(\mathrm{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x} + \mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ip\cdot x}\right)\Big|_{x^0=t-t_0}. \tag{4.15}$$

Це знайомий нам вираз для вільного поля з Розділу 2.

Тепер задача полягає в тому, щоб виразити повне гайзенберґове поле ϕ через ϕ_I. Формально це є

$$\begin{aligned}\phi(t, \mathbf{x}) &= e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}\phi_I(t_0, \mathbf{x})e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \equiv \\ &\equiv U^\dagger(t, t_0)\phi_I(t_0, \mathbf{x})U(t, t_0),\end{aligned} \tag{4.16}$$

де ми визначили унітарний оператор

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}, \tag{4.17}$$

відомий, як пропаґатор у картині взаємодії або оператор часової еволюції. Ми хотіли б виразити $U(t, t_0)$ цілком через поле ϕ_I, для якого існує явний запис у термінах сходових операторів. Для цього відзначимо, що $U(t, t_0)$ є єдиним рішенням звичайного диференційного рівняння (рівняння Шродинґера) з початковою умовою $U(t_0, t_0) = 1$:

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)}(H - H_0)e^{-iH(t-t_0)} = \\ &= e^{iH_0(t-t_0)}(H_{\text{int}})e^{-iH(t-t_0)} = \\ &= e^{iH_0(t-t_0)}(H_{\text{int}})e^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} = \\ &= H_I(t)U(t, t_0),\end{aligned} \tag{4.18}$$

де

$$\begin{aligned}H_I(t) &= e^{iH_0(t-t_0)}(H_{\text{int}})e^{-iH_0(t-t_0)} = \\ &= \int d^3\mathbf{x}\,\frac{\lambda}{4!}\phi_I^4(t, \mathbf{x})\end{aligned} \tag{4.19}$$

є гамільтоніаном взаємодії, записаним у картині взаємодії. Рішення цього диференційного рівняння для $U(t, t_0)$ повинно мати вигляд $U \sim \exp(-iH_I t)$; це було б потрібною нам формулою для U через ϕ_I. Діючи ретельніше, покажемо, що це рішення є степеневим рядом за λ:

$$\begin{aligned}U(t, t_0) = 1 &+ (-i)\int_{t_0}^{t} dt_1\, H_I(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, H_I(t_1)H_I(t_2) + \\ &+ (-i)^3\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3\, H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3) + \cdots.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Щоб пересвідчитись у цьому, просто візьмемо похідну за часом і побачимо, що кожен член ряду дає попередній член, помножений на $-iH_I(t)$. Початкова умова $U(t, t_0) = 1$ для $t = t_0$, безперечно, дотримана.

Зазначимо, що множники H_I в (4.20) розташовані у *хронологічному порядку* — пізніший завжди знаходиться лівіше. Це дозволяє істотно спростити вираз, скориставшись символом хронологічного впорядкування T. Наприклад, член H_I^2 можна записати

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, H_I(t_1)H_I(t_2) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\, T\big\{H_I(t_1)H_I(t_2)\big\}. \tag{4.21}$$

Подвійний інтеґрал у правій частині враховує все двічі, оскільки в t_1t_2-площині підінтеґральний вираз $T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\}$ симетричний відносно прямої $t_1 = t_2$ (див. Рис. 4.1).

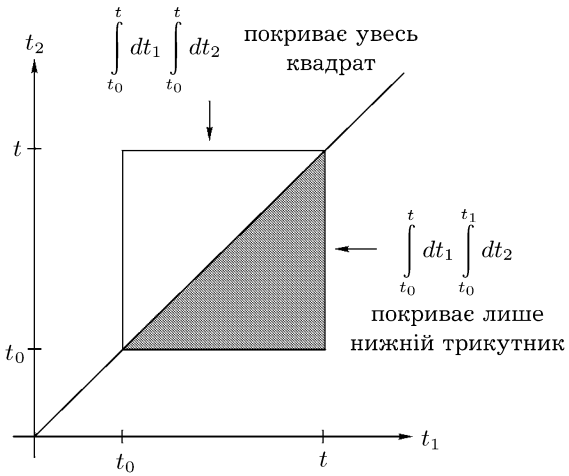


Рис. 4.1. Ґеометрична інтерпретація формули (4.21).

Аналоґічна тотожність справедлива і для членів вищих порядків:

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H_I(t_1)\cdots H_I(t_n) = \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots dt_n\, T\big\{H_I(t_1)\cdots H_I(t_n)\big\}.$$

Хоча цей випадок дещо складніше зобразити наочно, але неважко переконатися, що рівність правильна. З її допомогою можемо записати

$U(t,\, t_0)$ в надзвичайно компактній формі:

$$U(t,\, t_0) = 1 + (-i)\int\limits_{t_0}^{t} dt_1\, H_I(t_1) + \\ + \frac{(-i)^2}{2!}\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 dt_2\, T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} + \cdots \equiv \\ \equiv T\left\{\exp\left[-i\int\limits_{t_0}^{t} dt'\, H_I(t')\right]\right\}, \tag{4.22}$$

де хронологічно впорядкована експонента визначається як ряд Тейлора, кожен член якого є хронологічно впорядкованим. В реальних обчисленнях ми зберігаємо лише кілька перших членів цього ряду; хронологічно впорядкована експонента є просто компактним записом, що дозволяє легко запам'ятати потрібний вираз.

Тепер ми здобули контроль над $\phi(t,\, \mathbf{x})$ — записали його, як і вимагалося, цілком через ϕ_I. Перш ніж перейти до розгляду $|\Omega\rangle$, зручно буде узагальнити означення U, дозволивши його другому арґументові також бути довільною змінною, а не лише „часом відліку“ t_0. Таке означення цілком очевидне:

$$U(t,\, t') \equiv T\left\{\exp\left[-i\int\limits_{t'}^{t} dt''\, H_I(t'')\right]\right\} \quad (t \geq t'). \tag{4.23}$$

Звідси випливає кілька важливих властивостей оператора $U(t,\, t')$. Передовсім, він задовольняє тому ж самому диференційному рівнянню (4.18):

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,\, t') = H_I(t)U(t,\, t'), \tag{4.24}$$

але тепер з початковою умовою $U = 1$ для $t = t'$. З цього рівняння маємо

$$U(t,\, t') = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t')}e^{-iH_0(t'-t_0)}, \tag{4.25}$$

і це доводить, що U є унітарним. Нарешті, для $U(t,\, t')$ виконуються такі тотожності (при $t_1 \geq t_2 \geq t_3$):

$$U(t_1,\, t_2)U(t_2,\, t_3) = U(t_1,\, t_3); \quad U(t_1,\, t_3)\big[U(t_2,\, t_3)\big]^{\dagger} = U(t_1,\, t_2). \tag{4.26}$$

Тепер ми можемо перейти до розгляду $|\Omega\rangle$. Оскільки $|\Omega\rangle$ є основним станом H, його можна виокремити за допомогою наступної процедури. Уявімо, що початковим станом є $|0\rangle$, основний стан H_0, і система еволюціонує під дією H:

$$e^{-iH\tau}|0\rangle = \sum_n e^{-iE_n\tau}|n\rangle\langle n|0\rangle,$$

де E_n є власними значеннями H. Мусимо припустити, що $|\Omega\rangle$ перекривається з $|0\rangle$, тобто $\langle\Omega|0\rangle \neq 0$ (якщо це не так, то H_I в жодному сенсі не можна вважати малим збуренням). Тоді вищевказаний ряд містить $|\Omega\rangle$, і ми можемо записати

$$e^{iH\tau}|0\rangle = e^{-iE_0\tau}|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n\neq 0} e^{-iE_n\tau}|n\rangle\langle n|0\rangle,$$

де $E_0 \equiv \langle\Omega|H|\Omega\rangle$. (Нульова енерґія визначається як $H_0|0\rangle = 0$.) Оскільки $E_n > E_0$ для всіх $n \neq 0$, ми можемо позбутися всіх членів з $n \neq 0$, наближаючи τ до ∞ у напрямку, трохи відхиленому від дійсної осі: $\tau \to \infty(1-i\varepsilon)$. Тоді експоненційний множник $e^{-iE_n\tau}$ найповільніше спадає для $n = 0$:

$$|\Omega\rangle = \lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)} \left(e^{-iE_n\tau}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} e^{-iH\tau}|0\rangle. \tag{4.27}$$

Оскільки тепер τ дуже велике, ми можемо змістити його на малу константу:

$$\begin{aligned}|\Omega\rangle &= \lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)} \left(e^{-iE_n(\tau+t_0)}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} e^{-iH(\tau+t_0)}|0\rangle = \\ &= \lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)} \left(e^{-iE_n(t_0-(-\tau))}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} e^{-iH(t_0-(-\tau))}e^{-iH(-\tau-t_0)}|0\rangle = \\ &= \lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)} \left(e^{-iE_n(t_0-(-\tau))}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} U(t_0, -\tau)|0\rangle.\end{aligned} \tag{4.28}$$

У другому рядку ми використали $H_0|0\rangle = 0$. Якщо відкинути c-числовий множник попереду, цей вираз вказує, що ми можемо отримати $|\Omega\rangle$ через дію оператора еволюції U на стан $|0\rangle$ від часу $-\tau$ до часу t_0. Так само ми можемо виразити $\langle\Omega|$ як

$$\langle\Omega| = \lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)} \langle 0|U(\tau, t_0)\left(e^{-iE_n(t_0-(-\tau))}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1}. \tag{4.29}$$

Зберемо разом усі частини двоточкової кореляційної функції. Тимча-

сово припустимо, що $x^0 > y^0 > t_0$. Тоді

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)}&\left(e^{-iE_0(\tau-t_0)}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1}\langle 0|U(\tau,\,t_0)\times\\ &\times\left[U(x^0,\,t_0)\right]^{\dagger}\phi_I(x)U(x^0,\,t_0)\times\\ &\times\left[U(y^0,\,t_0)\right]^{\dagger}\phi_I(y)U(y^0,\,t_0)\times\\ &\times U(t_0,\,-T)|0\rangle\left(e^{-iE_n(t_0-(-\tau))}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} =\\ = \lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)}&\left(\left|\langle 0|\Omega\rangle\right|^2 e^{-iE_0(2\tau)}\right)^{-1}\times\\ &\times\langle 0|U(\tau,\,x^0)\phi_I(x)U(x^0,y^0)\phi_I(y)U(y^0,-\tau)|0\rangle\end{aligned} \tag{4.30}$$

Це мало б простіший вигляд, якби не громіздкий множник попереду. Щоб позбутись його, розділимо вираз на одиницю, представлену у формі

$$1 = \langle\Omega|\Omega\rangle = \left(|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-iE_0(2\tau)}\right)^{-1}\langle 0|U(\tau,\,t_0)U(t_0,\,-\tau)|0\rangle.$$

Тоді наша формула (все ще для $x^0 > y^0$) набуває вигляду

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)}\frac{\langle 0|U(\tau,\,x^0)\phi_I(x)U(x^0,\,y^0)\phi_I(y)U(y^0,\,-\tau)|0\rangle}{\langle 0|U(\tau,\,-\tau)|0\rangle}.$$

Тепер звернемо увагу, що всі поля в обох частинах виразу хронологічно впорядковані. Це також справедливо і для випадку $y^0 > x^0$. Таким чином, маємо остаточний вираз, дійсний для будь-яких x^0 і y^0:

$$\begin{aligned}&\left\langle\Omega\right|T\left\{\phi(x)\phi(y)\right\}\left|\Omega\right\rangle =\\ &= \lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)}\frac{\langle 0|\,T\left\{\phi_I(x)\phi_I(y)\exp\left[-i\int\limits_{-\tau}^{\tau}dt\,H_I(t)\right]\right\}|0\rangle}{\langle 0|\,T\left\{\exp\left[-i\int\limits_{-\tau}^{\tau}dt\,H_I(t)\right]\right\}|0\rangle}\end{aligned} \tag{4.31}$$

Перевага розгляду хронологічних добутків очевидна — це дозволяє вставити будь-що під знак T-оператора. Схожа формула справедлива і для вищих кореляційних функцій від довільного числа полів; для кожного додаткового множника ϕ у лівій частині треба вставити додатковий множник ϕ_I у праву частину. Наразі отриманий вираз ще точний. Але тепер він ідеально підходить для виконання пертурбативних обчислень — слід лише зберегти потрібну кількість членів у ряді Тейлора для експоненти.

§ 4.3. Теорема Віка

Ми звели проблему обчислення кореляційних функцій до обчислення виразів вигляду

$$\langle 0|\, T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)\}|0\rangle,$$

тобто вакуумних середніх від хронологічно впорядкованих добутків скінченної (але довільної) кількості вільних польових операторів. При $n = 2$ цей вираз є просто фейнмановим пропаґатором. Для великих n цю величину можна обчислити напряму, розклавши ϕ_I через сходові оператори. Проте в цьому та наступному параґрафах ми знайдемо спосіб гранично спростити такі обчислення.

Знову розглянемо випадок двох полів, $\langle 0|\, T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\}|0\rangle$. Ми вже знаємо, як обчислити цю величину, проте зараз воліли б переписати вираз у формі, зручній як для розрахунків, так і для узагальнення на випадок більше ніж двох полів. Щоб зробити це, розкладемо поле $\phi_I(x)$ на позитивно- та неґативно-частотні частини:

$$\phi_I(x) = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x), \tag{4.32}$$

де

$$\phi_I^+(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\,a_\mathbf{p} e^{-ip\cdot x};$$
$$\phi_I^-(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\,a_\mathbf{p}^\dagger e^{+ip\cdot x}.$$

Таку декомпозицію можна зробити для будь-якого вільного поля. Вона корисна, оскільки

$$\phi_I^+(x)|0\rangle = 0 \quad \text{і} \quad \langle 0|\phi_I^-(x) = 0.$$

Для прикладу розглянемо випадок $x^0 > y^0$. Хронологічний добуток двох полів має вигляд

$$\begin{aligned} T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\} \underset{x^0>y^0}{=} {} & \phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^+(x)\phi_I^-(y) + \\ & + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y) = \\ = {} & \phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \\ & + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y) + [\phi_I^+(x),\, \phi_I^-(y)]. \end{aligned} \tag{4.33}$$

У кожному члені, за винятком комутатора, всі $\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}$ знаходяться праворуч від усіх $\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$. Такі доданки (як, приміром, $(\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\mathfrak{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger}\mathfrak{a}_{\mathbf{k}}\mathfrak{a}_{\mathbf{l}})$) називають *нормально впорядкованими*, і вони мають нульове вакуумне середнє. Також визначимо символ нормального впорядкування $N()$, що розміщує в нормальному порядку всі оператори, на які він діє. Наприклад,

$$N\left(\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}\mathfrak{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\mathfrak{a}_{\mathbf{q}}\right) \equiv \mathfrak{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}\mathfrak{a}_{\mathbf{q}} \tag{4.34}$$

Порядок $\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}$ і $\mathfrak{a}_{\mathbf{q}}$ у правій частині не має значення, оскільки вони комутують.[16]

Якщо натомість ми розглянемо випадок $y^0 > x^0$, то отримаємо ті ж самі чотири нормально впорядковані члени, як і в (4.33), але тепер останній комутатор буде $[\phi_I^+(y),\ \phi_I^-(x)]$. Тому визначимо ще одну величину, *згортку* двох полів, наступним чином:

$$\overbracket{\phi(x)\phi(y)} \equiv \begin{cases} [\phi^+(x),\ \phi^-(y)] & \text{для } x^0 > y^0; \\ [\phi^+(y),\ \phi^-(x)] & \text{для } y^0 > x^0. \end{cases} \tag{4.35}$$

Ця величина є достоту фейнмановим пропаґатором:

$$\overbracket{\phi(x)\phi(y)} = D_F(x-y). \tag{4.36}$$

З цього моменту ми для зручності часто вилучатимемо нижній індекс I; згортки завжди міститимуть поля в картині взаємодії.

Тепер співвідношення між хронологічним та нормальним упорядкуванням записується дуже просто (принаймні для двох полів):

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = N\{\phi(x)\phi(y) + \overbracket{\phi(x)\phi(y)}\}. \tag{4.37}$$

Запровадивши нові позначення, ми легко отримаємо узагальнення для довільного числа полів:

$$\begin{aligned} &T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_m)\} = \\ &\qquad = N\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_m) + \text{усі можливі згортки}\}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Ця тотожність відома як *теорема Віка*, і зараз ми її доведемо. При $m = 2$ ця теорема еквівалентна рівності (4.37). Фраза *всі можливі згортки* озна-

[16] У літературі також часто зустрічається позначення $:\phi_1\phi_2:$ замість $N(\phi_1\phi_2)$.

чає, що кожній з можливих попарних згорток m полів відповідає один доданок. Отже, при $m = 4$ (записуючи для простоти $\phi(x_a)$ як ϕ_a) маємо

$$\begin{aligned} T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = N\{&\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \overbracket{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 + \overbracket{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \\ &+ \overbracket{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \phi_1\overbracket{\phi_2\phi_3}\phi_4 + \phi_1\overbracket{\phi_2\phi_3\phi_4} + \phi_1\phi_2\overbracket{\phi_3\phi_4} + \\ &+ \overbracket{\phi_1\phi_2}\overbracket{\phi_3\phi_4} + \overbracket{\phi_1\overbracket{\phi_2\phi_3}\phi_4} + \overbracket{\phi_1\overbracket{\phi_2\phi_3}\phi_4}\}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Коли згортка поєднує два оператори, що не є сусідніми, ми все одно визначаємо її як D_F. Наприклад,

$$N\{\overbracket{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4\} \quad \text{означає} \quad D_F(x_1 - x_3) \cdot N\{\phi_2\phi_4\}$$

У вакуумному середньому (4.39) будь-який член з незгорненими операторами дає нуль (оскільки $\langle 0|\, N\,(\text{будь-який оператор})|0\rangle = 0$). Виживають лише три повністю згорнені доданки у третьому рядку, і всі вони є c-числами, тож

$$\begin{aligned} \langle 0|\, T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) &+ \\ + D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4) &+ \\ + D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3)&. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Тепер доведемо теорему Віка, і зробимо це за індукцією від числа полів m. Випадок $m = 2$ ми вже розглянули. Припустімо, що теорема є вірною для $m - 1$ полів, і доведемо її справедливість для m полів. Без втрати загальності обмежимося випадком $x_1^0 \geq x_2^0 \geq \cdots x_m^0$; якщо це не так, ми можемо просто перепозначити точки, що жодним чином не вплине на обидві частини (4.38). Тоді, застосувавши теорему Віка до $\phi_2 \cdots \phi_m$, одержимо

$$\begin{aligned} T\{\phi_1 \cdots \phi_m\} &= \phi_1 \cdots \phi_m = \\ &= \phi_1 N\{\phi_2 \cdots \phi_m + \text{усі згортки без } \phi_1\} + \\ &= (\phi_1^+ + \phi_1^-) N\{\phi_2 \cdots \phi_m + \text{усі згортки без } \phi_1\} \end{aligned} \tag{4.41}$$

Ми хочемо перемістити ϕ_1^+ і ϕ_1^- до $N\{\}$. Для члена ϕ_1^- це не викликає труднощів, оскільки він, перебуваючи ліворуч, уже є нормально впорядкованим. А от член з ϕ_1^+ ще належить привести до нормальної форми, переставляючи його правіше від решти операторів ϕ. Розглянемо, для при-

кладу, доданок без згорток

$$\phi_1^+ N\{\phi_2 \cdots \phi_m\} = N\{\phi_2 \cdots \phi_m\}\phi_1^+ + \left[\phi_1^+ N\{\phi_2 \cdots \phi_m\}\right] =$$

$$= N\{\phi_1^+\phi_2 \cdots \phi_m\} + N\{[\phi_1^+, \phi_2^-]\phi_3 \cdots \phi_m +$$

$$+ \phi_2[\phi_1^+, \phi_3^-]\phi_4 \cdots \phi_m + \cdots\} =$$

$$= N\{\phi_1^+\phi_2 \cdots \phi_m + \overbracket{\phi_1\phi_2}\phi_3 \cdots \phi_m +$$

$$+ \overbracket{\phi_1\phi_2\phi_3} \cdots \phi_m + \cdots\}.$$

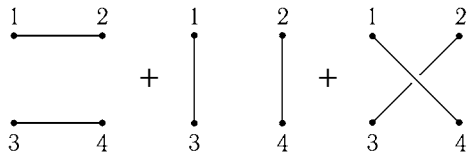
Перший член у передостанньому рядку разом з аналоґічним членом, що містить ϕ_1^-, утворюють $N\{\phi_1\phi_2 \cdots \phi_m\}$, тож ми маємо перший доданок у правій частині теореми Віка, а також усі можливі доданки з одиночною згорткою поля ϕ_1 з іншим полем. Так само доданок у (4.41), що має одну згортку, дає всі можливі члени, що містять як цю згортку, так і згортку поля ϕ_1 з одним з решти полів. Проробивши це з усіма доданками в (4.41), ми зрештою отримаємо всі можливі згортки всіх полів, включно з ϕ_1. Отже, крок індукції завершено і теорему Віка доведено.

§ 4.4. Фейнманові діаґрами

Теорема Віка дозволяє нам перетворити вираз типу

$$\langle 0|\, T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n)\}|0\rangle$$

на суму добутків фейнманових пропаґаторів. Тепер ми готові розробити діаґрамну інтерпретацію таких виразів. Передовсім розглянемо випадок чотирьох полів у різних просторово-часових точках, для якого ми отримали рівняння (4.40). Зобразимо кожну з точок $x_1, \ldots, x_4$ у вигляді крапки, а кожен множник $D_F(x-y)$ як лінію, що поєднує x та y. Тоді (4.40) можна представити, як суму трьох діаґрам (що називаються *фейнмановими діаґрамами*):

$\langle 0|\, T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle =$ 

(4.42)

Хоча ця величина не є точно вимірюваною, діаґрами дозволяють дати наступну інтерпретацію: частки народжуються у двох точках простору-часу, розповсюджуються в інші точки і там знищуються. Це може відбутися у три різні способи, що відповідають трьом різним можливостям поєднання точок у пари, як показано на трьох діаґрамах. Повна амплітуда процесу є сумою трьох діаґрам.

Ситуація стає набагато цікавішою, коли вираз містить більше одного поля в одній і тій самій просторово-часовій точці. Тому повернімося до обчислення двоточкової функції $\langle\Omega|\, T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle$ з формули (4.31). Ми іґноруватимемо знаменник до кінця цього параґрафу. Чисельник з розкладеною в степневий ряд експонентою є

$$\langle 0|\, T\Big\{\phi(x)\phi(y) + \phi(x)\phi(y)\Big[-i\int dt\, H_I(t)\Big] + \cdots\Big\}|0\rangle. \tag{4.43}$$

Перший член дає результат вільної теорії $\langle 0|\, T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle = D_F(x-y)$. Другий член у теорії ϕ^4 має вигляд

$$\begin{aligned}\langle 0|\, T\Big\{\phi(x)\phi(y)\,(-i)\int dt\int d^3\mathbf{z}\,\frac{\lambda}{4!}\phi^4\Big\}|0\rangle &= \\ = \langle 0|\, T\Big\{\phi(x)\phi(y)\Big(\frac{-i\lambda}{4!}\Big)\int d^4z\,\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\Big\}|0\rangle.\end{aligned}$$

Тепер застосуємо теорему Віка. Ми отримали по одному доданку для кожного способу попарної згортки шести операторів ϕ один з одним. Є п'ятнадцять способів зробити це, проте (на щастя) лише два з них справді різні. Якщо ми згорнули $\phi(x)$ з $\phi(y)$, то є три способи згорнути чотири $\phi(z)$ один з одним, і всі вони дають однакові вирази. Інша можливість полягає в тому, щоб згорнути $\phi(x)$ з одним із $\phi(z)$ (чотири варіанти), $\phi(y)$ з одним із інших $\phi(z)$ (три варіанти) і решту два $\phi(z)$ між собою (один варіант). Є дванадцять способів зробити це, і всі призводять до однакових виразів. У підсумку маємо

$$\begin{aligned}\langle 0|\, T\Big\{\phi(x)\phi(y)\,(-i)\int dt\int d^3\mathbf{z}\,\frac{\lambda}{4!}\phi^4\Big\}|0\rangle &= \\ = 3\cdot\Big(\frac{-i\lambda}{4!}\Big)D_F(x-y)\int d^4z\,D_F(z-z)D_F(z-z) &+ \\ + 12\cdot\Big(\frac{-i\lambda}{4!}\Big)\int d^4z\,D_F(y-z)D_F(x-z)D_F(z-z).&\end{aligned} \tag{4.44}$$

Ми краще зрозуміємо цей вираз, якщо представимо кожен його член як фейнманову діаґраму. Знову зобразимо кожну його згортку D_F у ви-

гляді лінії і кожну просторово-часову точку як крапку. Проте наразі мусимо відрізняти „зовнішні“ точки x та y від „внутрішньої“ z; кожна внутрішня точка асоційована з множником $(-i\lambda)\int d^4z$. Про постійні множники ми подбаємо трохи згодом. Скориставшись з цих правил, бачимо, що наведений вище вираз (4.44) дорівнює сумі двох діаґрам:

Ми позначаємо лінії на цих діаґрамах, як *пропаґатори*, бо вони представляють амплітуди розповсюдження (анґл. *propagation*) D_F. Внутрішні точки, де зустрічаються лінії, називаються *вершинами*. Оскільки $D_F(x-y)$ є амплітудами розповсюдження між x та y для вільної частки Кляйна–Ґордона, то діаґрами фактично інтерпретують аналітичну формулу, як процес народження, розповсюдження і знищення часток у просторі-часі.

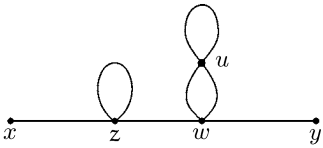
Тепер поглянемо на складнішу згортку від члена λ^3 у ряді кореляційної функції:

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)\,\tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{-i\lambda}{4!}\right)^3\int d^4z\,\phi\phi\phi\phi\int d^4w\,\phi\phi\phi\phi\int d^4u\,\phi\phi\phi\phi|0\rangle =$$
$$= \frac{1}{3!}\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^3\int d^4z\,d^4w\,d^4u\,D_F(x-z)D_F(z-z)\times \tag{4.45}$$
$$\times D_F(z-w)D_F(w-y)D_F(w-u)D_F(u-u).$$

Кількість „різних“ згорток, які дають однаковий вираз, є значною:

$$\underbrace{3!}_{\substack{\text{перестановка}\\ \text{вершин}}}\times\underbrace{4\cdot 3}_{\substack{\text{розташування}\\ \text{згорток}\\ \text{у } z \text{ вершині}}}\times\underbrace{4\cdot 3\cdot 2}_{\substack{\text{розташування}\\ \text{згорток}\\ \text{у } w \text{ вершині}}}\times\underbrace{4\cdot 3}_{\substack{\text{розташування}\\ \text{згорток}\\ \text{в } u \text{ вершині}}}\times\underbrace{1/2}_{\substack{\text{перестановка}\\ w-u\\ \text{згорток}}}$$

Добуток цих комбінаторних множників дає 10 368, близько $1/13$ від загальної кількості 135 135 можливих повних згорток 14 операторів. Структуру цієї конкретної згортки можна представити наступною „кактусною“ діаґрамою:

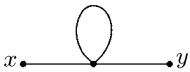


З очевидних причин прийнято вважати, що одна ця діаґрама представляє суму всіх 10 368 однакових членів.

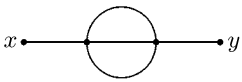
На практиці спочатку завжди зображають діаґраму, використовуючи її, як мнемонічний метод запису аналітичного виразу. Але тоді виникає питання: яка є повна константа? Звичайно, ми могли б обчислити її, як це робили вище, — поставити у відповідність кожній вершині множник $\int d^4z\,(-i\lambda/4!\,)$, взяти $1/n!$ з ряду Тейлора, а потім провести комбінаторний аналіз, виписавши добутки полів, як у (4.45), і порахувавши всі варіанти. Проте $1/n!$ з ряду Тейлора майже завжди скорочує $n!$ від перестановок вершин, отож ми можемо забути про обидва ці множники. Крім того, типова вершина має чотири лінії, що приходять з чотирьох різних місць, і таким чином різні розташування цих згорток у фффф дають множник 4! (як показано вище, у w-вершині), що скорочує знаменник у $(-i\lambda/4!\,)$. Тому прийнято зіставляти з кожною вершиною вираз $\int d^4z\,(-i\lambda)$. (Це й пояснює присутність 4! при коефіцієнті зв'язку для взаємодії ϕ^4.)

Для вищенаведеної діаґрами ця схема дає константу, завелику через множник $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, який називається *фактором симетрії* діаґрами. Два множники 2 походять від ліній, що починаються й закінчуються в тій самій вершині, бо діаґрама симетрична відносно перестановки двох кінців таких ліній. Останній множник 2 виникає від поєднання w з u двома пропаґаторами, оскільки діаґрама симетрична при взаємній перестановці цих двох ліній. Третій можливий тип симетрії випливає з еквівалентності двох вершин. Щоб отримати правильний повний множник, ми ділимо на фактор симетрії діаґрами, який у загальному випадку дорівнює числу способів перестановок компонентів, що не змінюють діаґраму.

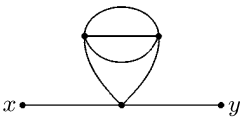
Більшості з вас ніколи не доведеться обчислювати діаґрами з фактором симетрії більшим за 2, тому немає потреби занадто перейматися цими технічними деталями. Проте наведемо кілька прикладів, щоб продемонструвати застосування цих правил:



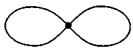
$S = 2$



$S = 3! = 6$



$S = 3! \cdot 2 = 12$



$S = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

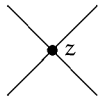
При наявності сумнівів ви завжди можете визначити фактор симетрії, підрахувавши еквівалентні згортки, як це робилося вище.

Тепер ми готові підсумувати наші правила для отримання чисельника виразу (4.31):

$$\langle 0|\, T\Big\{\phi_I(x)\phi_I(y)\Big[-i\int dt\, H_I(t)\Big]\Big\}|0\rangle = \begin{pmatrix}\text{сума всіх можливих діаґрам}\\ \text{з двома зовнішніми точками}\end{pmatrix},$$

де кожна діаґрама побудована з пропаґаторів, вершин і зовнішніх точок. Правила для зіставлення аналітичних виразів з відповідними частинами діаґрам називаються *правилами Фейнмана*. В теорії ϕ^4 ці правила такі:

1. Для кожного пропаґатора,

$= D_F(x-y)$;
2. Для кожної вершини, 

$= (-i\lambda)\int d^4z$;
3. Для кожної зовнішньої точки,

$= 1$;
4. Розділити на фактор симетрії.

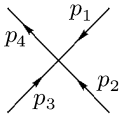
Один із способів інтерпретації цих правил полягає в тому, щоб вважати вершинний фактор $(-i\lambda)$ амплітудою утворення та/або поглинання часток у вершині. Інтеґрал $\int d^4z$ дає суму за всіма точками, де може відбуватися процес. Це є вираженням квантовомеханічного *принципу суперпозиції*: якщо процес може проходити кількома альтернативними шляхами, то слід *додати* їхні амплітуди. Для обчислення кожної окремої амплітуди, згідно з правилами Фейнмана, треба *перемножити* амплітуди (пропаґатори та вершинні фактори) для кожної незалежної частини процесу.

Оскільки ці правила написані в термінах просторово-часових точок x, y і т. д., їх іноді називають *правилами Фейнмана в координатному просторі*. Для більшості обчислень простіше сформулювати ці правила в імпульсному представленні, застосувавши перетворення Фур'є до кожного пропаґатора:

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}\,e^{-ip\cdot(x-y)}. \tag{4.46}$$

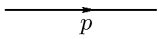
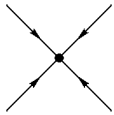
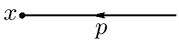
Зобразимо це на діаґрамі, поставивши у відповідність 4-імпульс p кожному пропаґатору і вказавши напрямок стрілкою. (Оскільки $D_F(x-y) = D_F(y-x)$, то напрямок імпульсу p довільний.) Тоді, якщо чотири лінії зу-

стрічаються у вершині, то z-залежні множники діаґрами є



$$\leftrightarrow \quad \int d^4z\, e^{-ip_1\cdot z} e^{-ip_2\cdot z} e^{-ip_3\cdot z} e^{+ip_4\cdot z} = \\ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 - p_4). \tag{4.47}$$

Інакше кажучи, імпульс зберігається в кожній вершині. Дельта-функції у вершинах тепер можна використати для взяття деяких інтеґралів по імпульсах у пропаґаторах. Відтак ми маємо *правила Фейнмана в імпульсному просторі*:

1. Для кожного пропаґатора,  $= \dfrac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$;
2. Для кожної вершини,  $= -i\lambda$;
3. Для кожної зовнішньої точки,  $= e^{-ip\cdot x}$;
4. Вимагати збереження імпульсу в кожній вершині;
5. Інтеґрувати по кожному невизначеному імпульсу: $\displaystyle\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$;
6. Розділити на фактор симетрії.

Ми знову можемо інтерпретувати кожен множник, як амплітуду тієї чи іншої частини процесу, а інтеґрування випливає з принципу суперпозиції. Експоненційний множник для зовнішньої точки є достоту амплітудою того, що частка в цій точці має заданий імпульс, або, залежно від напрямку стрілки, що частку з певним імпульсом буде виявлено в цій точці.

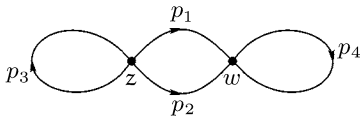
Це майже завершує наш розгляд обчислення кореляційних функцій, проте залишається ще кілька нез'ясованих моментів. Насамперед, що сталося з великим відрізком часу τ, що був узятий у вигляді $\infty(1 - i\varepsilon)$? У поточному параґрафі ми цілком знехтували ним, починаючи з рівняння (4.43). Нагоду повернутися до цього питання дає вираз (4.47), де замість простого інтеґрування по d^4z ми б отримали

$$\lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)} \int_{-\tau}^{\tau} dz^0 \int d^3\mathbf{z}\, e^{-ip_1\cdot z} e^{-ip_2\cdot z} e^{-ip_3\cdot z} e^{+ip_4\cdot z}.$$

Експонента розбігається при $z^0 \to \infty$ або $z^0 \to -\infty$, за винятком випадку, коли її арґумент є суто уявною величиною. Щоб досягти цього, можна

взяти кожен компонент p^0 з малою уявною частиною: $p^0 \propto (1+i\varepsilon)$. Але ж саме так ми вчинили при визначенні граничних умов Фейнмана для обчислення D_F. Ми інтеґруємо по контуру, який трохи зсунутий від дійсної осі таким чином, що $p^0 \propto (1+i\varepsilon)$:

При переході до межі $\tau \to \infty$ у попередньому виразі явна залежність від τ, здавалося б, зникає. Проте розгляньмо діаґраму



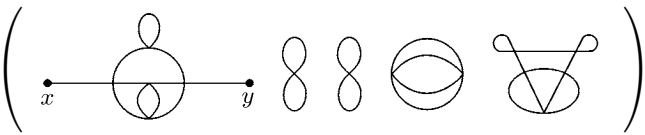
(4.48)

Дельта-функція в лівій вершині має вигляд $(2\pi)^4\delta(p_1+p_2)$, тож збереження імпульсу в правій вершині автоматично виконується, і ми отримуємо $(2\pi)^4\delta(0)$. Походження цього незграбного множника легко зрозуміти, повернувшись до координатного простору. Він є просто інтеґралом від константи по d^4w:

$$\int d^4w\,(\text{const}) \propto (2\tau)\cdot(\text{об'єм простору}). \tag{4.49}$$

це означає, що просторово-часовий процес (4.48) може відбутися у будь-якому місці простору і в будь-який момент часу з проміжку $[-\tau,\ \tau]$. Кожна *незв'язна* частина діаґрами, тобто така, що не поєднана із зовнішньою точкою, матиме один множник $(2\pi)^4\delta(0) = 2\tau\cdot V$.

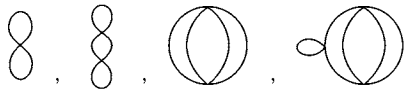
Внески в кореляційну функцію від таких діаґрам можна краще зрозуміти за допомогою дуже красивої тотожності, *експоненціювання незв'язних діаґрам*. Воно працює наступним чином. Типова діаґрама має вигляд



(4.50)

і складається з частини, що зв'язана з x і y, а також кількох незв'язних частин. (Оскільки кожна вершина має парне число вхідних ліній, то точки x

та y мають бути поєднані між собою.) Позначимо різні можливі незв'язні частини, як V_i.

$V_i \in \{$  $\}$ (4.51)

Елементи V_i внутрішньо поєднані, але відокремлені від зовнішніх точок. Припустимо, що діаґрама на зразок (4.50) має n_i частин вигляду V_i для кожного i, крім тієї частини, що поєднує x та y. (У будь-якій діаґрамі лише скінченна кількість n_i відрізнятиметься від нуля.) Якщо ми через V_i позначимо також *внесок* частини V_i, то внесок цілої діаґрами є

$$\begin{pmatrix}\text{внесок}\\ \text{зв'язної частини}\end{pmatrix} \times \prod_i \frac{1}{n_i!}(V_i)^{n_i}.$$

Множник $1/n_i!$ є фактором симетрії, що походить від перестановок n_i копій V_i. А сума всіх діаґрам, які представляють чисельник нашої формули для двоточкової кореляційної функції, є

$$\sum_{\substack{\text{всі можливі}\\ \text{зв'язні частини}}} \sum_{\text{всі }\{n_i\}} \begin{pmatrix}\text{внесок}\\ \text{зв'язної частини}\end{pmatrix} \times \left(\prod_i \frac{1}{n_i!}(V_i)^{n_i}\right),$$

де „всі $\{n_i\}$" означає „всі упорядковані набори $\{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ невід'ємних цілих чисел". Сума зв'язних частин виноситься за дужки і дає

$$= \left(\sum \text{зв'язні}\right) \times \sum_{\text{всі }\{n_i\}} \left(\prod_i \frac{1}{n_i!}(V_i)^{n_i}\right),$$

де ($\sum$ зв'язні) є скороченим позначенням для суми внесків усіх зв'язних частин. Неважко переконатися, що решту цього виразу можна розкласти на множники (спробуйте проробити у зворотному порядку):

$$= \left(\sum \text{зв'язні}\right) \times \left(\sum_{n_1} \frac{1}{n_1!} V_1^{n_1}\right)\left(\sum_{n_2} \frac{1}{n_2!} V_2^{n_2}\right)\left(\sum_{n_3} \frac{1}{n_3!} V_3^{n_3}\right) \cdots =$$

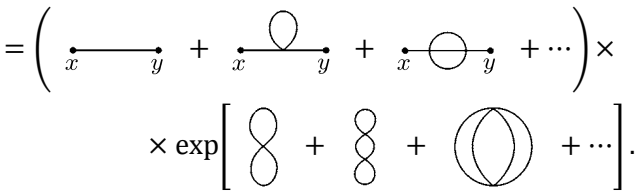
$$= \left(\sum \text{зв'язні}\right) \times \prod_i \left(\sum_{n_1} \frac{1}{n_1!} V_1^{n_1}\right) =$$

$$= \left(\sum \text{зв'язні}\right) \times \prod_i \exp(V_i) =$$

$$= \left(\sum \text{зв'язні}\right) \times \exp\left(\sum_i V_i\right). \tag{4.52}$$

Щойно ми показали, що сума *всіх* діаґрам дорівнює сумі всіх *зв'язних* діаґрам, помноженій на експоненту від суми всіх *незв'язних* діаґрам. (Ми мали б говорити „частини“ замість „діаґрами“ праворуч від знаку рівності, проте надалі часто називатимемо окрему частину теж діаґрамою.) Ґрафічно тотожність має вигляд

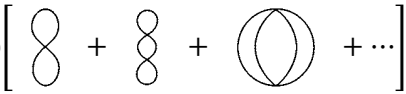
$$\lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)} \langle 0|\, T\Big\{\phi_I(x)\phi_I(y)\exp\Big[-i\int_{-\tau}^{\tau} dt\, H_I(t)\Big]\Big\}|0\rangle =$$



(4.53)

Тепер розглянемо *знаменник* формули (4.31) для двоточкової функції. Вдавшись до тих самих арґументів, що й вище, отримаємо

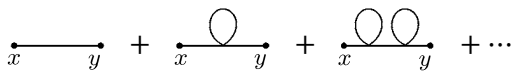
$$\langle 0|T\Big\{\exp\Big[-i\int_{-\tau}^{\tau} dt\, H_I(t)\Big]\Big\}|0\rangle = \exp\Big[$$



$$\Big].$$

Ця експонента скорочується з експонентою від незв'язних діаґрам у чисельнику. Остаточно спрощена формула набуває вигляду

$$\langle\Omega|\, T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \begin{pmatrix}\text{сума всіх зв'язних діаґрам}\\ \text{з двома зовнішніми точками}\end{pmatrix} =$$



(4.54)

Ми пройшли досить довгий шлях від початкового виразу (4.31).

Позбувшись незв'язних діаґрам у формулі для кореляційної функції, ми можемо на хвилю зробити паузу, щоб озирнутися назад і дати цим діаґрамам фізичну інтерпретацію. Погляньмо знову на формулу (4.30), яку

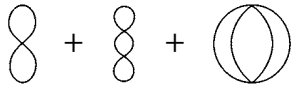
можна переписати, як

$$\lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)} \langle 0|\, T\Big\{\phi_I(x)\phi_I(y)\exp\Big[-i\int_{-\tau}^{\tau} dt\, H_I(t)\Big]\Big\}|0\rangle =$$
$$= \langle\Omega|\, T\big\{\phi(x)\phi(y)\big\}|\Omega\rangle \cdot \lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)} \Big(|\langle 0|0\rangle|^2 e^{-iE_0(2\tau)}\Big).$$

Розглядаючи з обох сторін рівності лише залежні від τ частини, маємо

$$\exp\Big[\sum_i V_i\Big] \propto \exp\Big[-iE_0(2\tau)\Big] \tag{4.55}$$

Оскільки кожна незв'язна діаґрама містить множник $(2\pi)^4\delta(0) = 2\tau \cdot$ (об'єм), це дає нам формулу для питомої енерґії вакууму (відносно нульового значення енерґії, визначеного умовою $H_0|0\rangle = 0$):

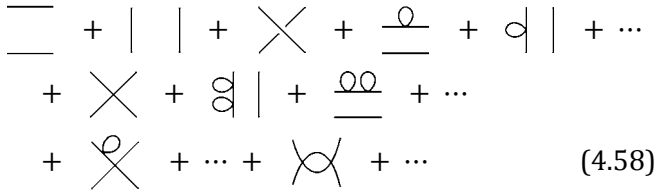
$$\frac{E_0}{(\text{об'єм})} = i\Bigg[$$  $$\Bigg]\Big/\big[(2\pi)^4\delta(0)\big]. \tag{4.56}$$

Маємо відзначити, що права частина рівності не залежить від τ і об'єму; зокрема, ми доходимо обнадійливого висновку, що E_0 пропорційна об'єму простору. У Розділі 11 (Том II) ми виявимо, що ця формула справді корисна.

Це завершує наш аналіз двоточкової кореляційної функції. Узагальнення на вищі кореляційні функції очевидне:

$$\langle\Omega|\, T\big\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\big\}|\Omega\rangle = \begin{pmatrix}\text{сума всіх зв'язних діаґрам}\\ \text{з } n \text{ зовнішніми точками}\end{pmatrix}. \tag{4.57}$$

Незв'язні діаґрами експоненціюються, факторизуються і скорочуються за схожою процедурою. Проте наразі можлива плутанина в термінолоґії. Під „незв'язними" ми розуміємо діаґрами, *відокремлені від усіх зовнішніх точок* — точно ті ж самі діаґрами, що і в (4.51). (Вони іноді називаються „вакуумними бульбашками" або „переходами вакуум-вакуум".) У вищих кореляційних функціях діаґрами можуть бути незв'язними також і в іншому розумінні. Розглянемо, до прикладу, чотириточкову функцію

$$\langle\Omega|\, T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|\Omega\rangle =$$  (4.58)

У багатьох цих діаґрамах зовнішні точки не поєднані *з усіма іншими*. Такі діаґрами не експоненціюються і не факторизуються; вони дають внесок до амплітуди так само, як цілком зв'язні діаґрами (у яких від кожної точки можна дійти до будь-якої іншої уздовж ліній).

Зауважимо, що в теорії ϕ^4 всі кореляційні функції від непарного числа полів дають нуль, а отже, неможливо накреслити припустиму діаґраму з непарною кількістю зовнішніх точок. У цьому можна переконатися звернувшись до теореми Віка: гамільтоніан взаємодії H_I містить парне число полів, тому всі члени пертурбативного ряду непарної кореляційної функції матимуть непарне число полів. Проте неможливо повністю згорнути непарне число полів у пари — а ненульове вакуумне середнє дають лише повністю згорнуті члени.

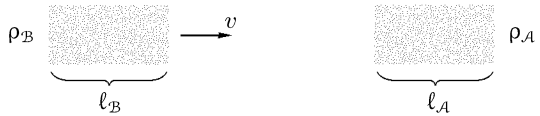
§ 4.5. Переріз розсіяння і S-матриця

Тепер ми маємо надзвичайно красиву формулу (4.57) для обчислення винятково абстрактної величини — n-точкової кореляційної функції. Нашою наступною задачею є знаходження в рівній мірі красивого способу обчислення величин, які піддаються безпосередньому вимірюванню: це перерізи розсіяння та ширини розпаду. У цьому параґрафі, після короткого огляду цих величин, ми зіставимо їх (не вдаючись у зайві формальності, але на достатньому рівні строгості) з примітивнішою величиною — S-матрицею. А в наступному параґрафі навчимося обчислювати елементи S-матриці з використанням фейнманових діаґрам.

Переріз розсіяння

Експерименти, що вивчають поведінку елементарних часток, особливо в релятивістському режимі, є експериментами з розсіяння. У дослідах зіштовхують два пучки часток з чітко визначеними імпульсами і спостерігають за результатом. Імовірність отримання будь-якого окремого кінцевого стану можна виразити через *переріз розсіяння* — величину, яка є власною характеристикою зіштовхнутих часток, а отже, дозволяє порівняти два різні експерименти з пучками різних розмірів та інтенсивностей.

Переріз розсіяння визначається наступним чином. Розглянемо мішень у спокої, що складається з часток типу $\mathcal{A}$ з густиною $\rho_{\mathcal{A}}$ (число часток на одиницю об'єму). Спрямуємо на цю мішень пучок часток $\mathcal{B}$ з густиною $\rho_{\mathcal{B}}$ і швидкістю v.



Нехай $\ell_{\mathcal{A}}$ і $\ell_{\mathcal{B}}$ — довжини пучків часток. Тоді ми сподіваємося, що повне число подій розсіяння (або подій розсіяння будь-якого вказаного типу) має бути пропорційним $\rho_{\mathcal{A}}$, $\rho_{\mathcal{B}}$, $\ell_{\mathcal{A}}$, $\ell_{\mathcal{B}}$ і площі A перетину обох пучків. *Переріз розсіяння*, позначений як σ, дорівнює загальному числу подій (того або іншого типу), розділеному на добуток усіх цих величин:

$$\sigma \equiv \frac{\text{Число подій розсіяння}}{\rho_{\mathcal{A}}\rho_{\mathcal{B}}\ell_{\mathcal{A}}\ell_{\mathcal{B}}A} \tag{4.59}$$

Це означення є симетричним відносно $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$, тому ми могли б розглядати частки $\mathcal{B}$ у стані спокою, або взагалі працювати в довільній системі відліку.

Переріз розсіяння має розмірність площі. Насправді це є ефективна площа ділянки одного пучка, потрапляючи до якої, частки іншого пучка зазнають розсіяння у вказаний кінцевий стан.

В реальних пучках $\rho_{\mathcal{A}}$ і $\rho_{\mathcal{B}}$ не є константами; густина часток у центрі пучка зазвичай більша, ніж скраю. Проте ми будемо припускати, що як радіус взаємодії часток, так і ширина окремих хвильових пакетів часток малі порівняно з діаметром пучка. Тож у подальшому вважатимемо $\rho_{\mathcal{A}}$ і $\rho_{\mathcal{B}}$ сталими, хоча не будемо забувати про те, що для обчислення ймовірності подій у реальному прискорювачі треба проінтеґрувати по площі пучка:

$$\text{Число подій} = \sigma\ell_{\mathcal{A}}\ell_{\mathcal{B}}\int d^2\mathbf{x}\,\rho_{\mathcal{A}}(x)\rho_{\mathcal{B}}(x). \tag{4.60}$$

Якщо $\rho_{\mathcal{A}}$ і $\rho_{\mathcal{B}}$ незмінні, або якщо ми застосовуємо цю формулу для обчислення ефективної площі A пучків, то маємо просто

$$\text{Число подій} = \frac{\sigma N_{\mathcal{A}}N_{\mathcal{B}}}{A}, \tag{4.61}$$

де $N_{\mathcal{A}}$ і $N_{\mathcal{B}}$ є загальною кількістю часток $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$.

Перерізи багатьох різних процесів можуть бути отримані з одного експерименту розсіяння. Наприклад, у зіткненнях e^+e^- можна виміряти перерізи утворення $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$, $\mu^+\mu^-\gamma$, $\mu^+\mu^-\gamma\gamma$ і т. д., а також незчисленних процесів народження адронів, не кажучи вже про звичайне e^+e^- розсіяння. Як правило, ми хочемо знати не тільки те, які частки присутні в кінцевому стані, а й їхні імпульси. У цьому разі наше означення (4.59) для

перерізу σ ще справедливе, проте при встановленні точних значень імпульсів σ перетворюється на нескінченно малу величину. Вихід у тому, щоб визначити *диференційний переріз розсіяння* $d\sigma/(d^3\mathbf{p}_1 \cdots d^3\mathbf{p}_n)$. Це величина, яка при інтеґруванні по довільному малому об'єму $d^3\mathbf{p}_1 \cdots d^3\mathbf{p}_n$ дає переріз розсіяння в цей об'єм імпульсів кінцевого стану. Значення цих імпульсів не є незалежними; чотири компонента завжди будуть пов'язані умовою збереження 4-імпульсу. У найпростішому випадку, коли коли в кінцевому стані присутні тільки дві частки, ця умова залишає тільки два незалежні компоненти імпульсу, за які звичайно обирають кути θ та φ імпульсу однієї з часток. Інтеґрування $d\sigma/(d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2)$ по чотирьох обмежених законом збереження компонентах імпульсу дає звичайний диференційний переріз $d\sigma/d\Sigma$.

Простішою вимірюваною величиною є *ширина розпаду* Γ нестабільної частки $\mathcal{A}$ (початково нерухомої) у певний кінцевий стан (з двох або більше часток). Ця величина визначається, як

$$\Gamma \equiv \frac{\text{Число розпадів за одиницю часу}}{\text{Число наявних часток типу } \mathcal{A}}. \tag{4.62}$$

Тоді час життя τ є оберненим до суми її ширини розпаду в усі можливі кінцеві стани. (Час напіврозпаду частки є $\tau \cdot \log 2$.)

У нерелятивістській квантовій механіці нестабільний атомний стан виявляє себе в експериментах з розсіяння як *резонанс*. Поблизу резонансної енерґії E_0 амплітуда розсіяння дається формулою Брейта – Віґнера:

$$f(E) \propto \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}. \tag{4.63}$$

А отже, переріз розсіяння має пік вигляду

$$\sigma \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}.$$

Ширина піку резонансу дорівнює ширині розпаду нестабільного стану (звідси, власне, й виникла назва для Γ).

Формула Брейта – Віґнера (4.63) справедлива також і в релятивістській квантовій механіці. Зокрема, вона дає амплітуду розсіяння для процесів, у яких нестабільні частки утворюють комбіновану частку, що потім розпадається. Нестабільна частка, інтерпретована як збурений стан вакууму, є прямим аналоґом нестабільного нерелятивістського атомного стану. Якщо задати 4-імпульс нестабільної частки p масою m, ми можемо отримати релятивістськи-інваріантне узагальнення виразу (4.63):

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + im\Gamma} \approx \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}\left[p^0 - E_{\mathbf{p}} + i(m/E_{\mathbf{p}})\Gamma/2\right]}. \tag{4.64}$$

Швидкість розпаду нестабільної частки у довільній системі відліку є $(m/E_{\mathbf{p}})\Gamma$, що узгоджується з релятивістським подовженням часу. Хоча обидва вирази у (4.64) однакові поблизу резонансу, ліва частина рівняння, яка є явно лоренц-інваріантною, значно зручніша.

S-матриця

Як нам тепер обчислити переріз розсіяння? Ми маємо утворити хвильові пакети, що представляють частки в початковому стані, подіяти на цей початковий стан упродовж тривалого часу оператором еволюції $\exp(-iHt)$ для теорії поля із взаємодією, а потім накласти отриманий у підсумку кінцевий стан на хвильові пакети, що описують очікуваний набір розбіжних часток у кінцевому стані. Це дає амплітуду утворення такого кінцевого стану, яка має просте співвідношення з перерізом розсіяння. Ми виявимо, що в межі, коли хвильові пакети дуже вузькі в імпульсному просторі, амплітуда залежить лише від імпульсу хвильових пакетів, а не від їх конкретної форми.[17]

Хвильовий пакет, що представляє певний очікуваний стан $|\phi\rangle$, можна записати, як

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \phi(\mathbf{k})|\mathbf{k}\rangle, \tag{4.65}$$

де $\phi(\mathbf{k})$ є перетворенням Фур'є просторової хвильової функції, а $|\mathbf{k}\rangle$ — одночастковим станом з імпульсом k в теорії із взаємодією. У вільній теорії ми мали б $|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}\, a^\dagger_{\mathbf{k}}$. Множник $\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$ змінює наше релятивістське нормування $|\mathbf{k}\rangle$ на звичайне, у якому сума всіх імовірностей дає 1:

$$\langle\phi|\phi\rangle = 1, \quad \text{якщо} \quad \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} |\phi(\mathbf{k})|^2 = 1. \tag{4.66}$$

Імовірність, яку ми хочемо обчислити,

$$\mathcal{P} = \Big|\langle \underbrace{\phi_1\phi_2\cdots}_{\text{майбутнє}} | \underbrace{\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}}_{\text{минуле}}\rangle\Big|^2, \tag{4.67}$$

де $|\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}\rangle$ є станом двох хвильових пакетів, утворених у далекому минулому, а $\langle\phi_1\phi_2\cdots|$ — станом кількох хвильових пакетів (по одному для

[17] Більша частина цього параґрафу базована на викладі нерелятивістської теорії розсіяння, наведеного в книзі Тейлора [56], у Розділах 2, 3 і 17. Ми зосереджуємося на додаткових ускладненнях у релятивістській теорії, оминаючи увагою багато спільних для обох випадків моментів, які детально розглянуті Тейлором.

кожної кінцевої частки) у далекому майбутньому. Хвильові пакети локалізовані у просторі, тому кожен з них може бути утворений незалежно від інших. Такі стани називаються *in*- і *out*-станами. Зауважимо, що ми працюємо в картині Гайзенберґа — стани не залежать від часу, проте назви, які ми їм даємо, обумовлені власними значеннями (або середніми значеннями) залежних від часу операторів. Таким чином, стани з різними назвами, утворені в різний час, мають нетривіальний перетин (взаємну проекцію), що визначається часовою залежністю операторів.

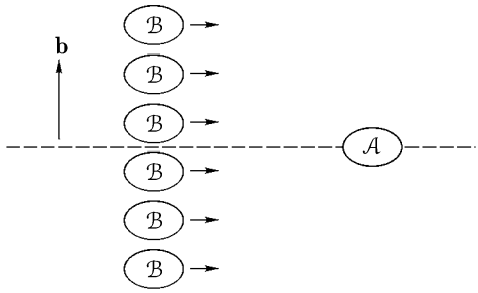


Рис. 4.2. Початкові хвильові пакети однорідно розподілені за прицільним параметром **b**.

Якщо ми приготуємо $|\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}\rangle$ у віддаленому минулому, а потім перейдемо до межі, у якій хвильові пакети $\phi_i(\mathbf{k}_i)$ будуть зосереджені поблизу вказаних імпульсів $\mathbf{p}_i$, то це визначить *in*-стан $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\text{in}}$ із вказаними початковими імпульсами. Зручно розглядати $|\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}\rangle$, як лінійну суперпозицію таких станів. Проте важливо врахувати поперечний зсув хвильового пакета $\phi_{\mathcal{B}}$ відносно $\phi_{\mathcal{A}}$ в координатному просторі (Рис. 4.2). Хоча це можна неявно врахувати у вигляді пакета $\phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}})$, ми натомість домовимося, що наші базові хвильові функції в імпульсному просторі є колінеарними (тобто мають прицільний параметр $\mathbf{b} = 0$), і запишемо $\phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}})$ з явним множником $\exp(-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}_{\mathcal{B}})$, який враховує просторову трансляцію. А оскільки хвильові пакети $\phi_{\mathcal{A}}$ і $\phi_{\mathcal{B}}$ утворені незалежно в різних ділянках простору, то ми можемо записати початковий стан, як

$$|\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}\rangle_{\text{in}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} \frac{\phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_{\mathcal{A}})\phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}})e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}_{\mathcal{B}}}}{\sqrt{(2E_{\mathcal{A}})(2E_{\mathcal{B}})}}|\mathbf{k}_{\mathcal{A}}\mathbf{k}_{\mathcal{B}}\rangle_{\text{in}}. \qquad (4.68)$$

Ми могли б розкласти $\langle\phi_1\phi_2\cdots|$ за так само визначеними *out*-станами із

вказаними імпульсами в асимптотичному майбутньому:[18]

$$_{\text{out}}\langle \phi_1 \phi_2 \cdots | = \left(\prod_f \int \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{\phi_f(\mathbf{p}_f)}{\sqrt{2E_f}} \right) {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots |.$$

Проте набагато простіше використати *out*-стани із вказаними імпульсами, як кінцеві стани в амплітуді ймовірності (4.67) і помножити їх на різні нормувальні множники після піднесення амплітуди до квадрату. Це фізично обґрунтовано доти, доки детектори часток кінцевого стану здебільшого вимірюють імпульс — тобто визначають координати з точністю не більше дебройлевої довжини хвилі.

Тепер ми можемо зіставити ймовірність розсіяння в реальному експерименті з набором ідеалізованих амплітуд переходу між асимптотично визначеними *in*- і *out*-станами із вказаними імпульсами:

$$_{\text{out}}\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}}. \tag{4.69}$$

Щоб обчислити перетин *in*- і *out*-станів, зазначимо, що домовленості для визначення двох наборів станів пов'язані трансляцією в часі:

$$\begin{aligned} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}} &= \lim_{\tau\to\infty} \langle \underbrace{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots}_{\tau} | \underbrace{\mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}}}_{-\tau} \rangle = \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | e^{-iH(2\tau)} | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle. \end{aligned} \tag{4.70}$$

В останньому рядку стани визначені в будь-який спільний для обох момент часу. Отже, *in*- і *out*-стани пов'язані межею послідовності унітарних операторів. Цей граничний унітарний оператор називається S-*матрицею*:

$$_{\text{out}}\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}} \equiv \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \, \mathrm{S} \, | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle. \tag{4.71}$$

S-матриця має наступну структуру. Якщо частки взагалі не взаємодіють, то S є просто одиничним оператором. Навіть у теорії із взаємодією частки мають деяку ймовірність пропустити одна одну. Для виокремлення нетривіальної частини S-матриці, тобто такої, що зумовлена взаємодією, визначимо T-*матрицю* таким чином:

$$\mathrm{S} = \mathbf{1} + i\mathrm{T}. \tag{4.72}$$

[18]Тут і нижче знак добутку застосовується (символічно) до інтеґрала так само, як і до решти множників у дужках; інтеґрали також застосовуються до множників поза дужками.

Далі зазначимо, що елементи S мають відображати збереження 4-імпульсу. Отже, S або T завжди містять множник $\delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f)$. Виокремлюючи його, ми визначаємо *інваріантний матричний елемент* $\mathcal{M}$:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \, i\mathrm{T} \, | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\Big(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f\Big) \cdot i\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{B}} \to p_f). \quad (4.73)$$

Ми записали цей вираз через 4-імпульси p і k, але, певна річ, усі 4-імпульси перебувають на масовій поверхні: $p^0 = E_{\mathbf{p}}$, $k^0 = E_{\mathbf{k}}$. (Зауважимо, що наш розгляд стосується випадку, коли в початковому стані є лише дві частки. Для процесів 3 → *багато* або *багато* → *багато* можна побудувати схожі схеми, проте в цьому курсі ми не торкатимемося таких складних експериментів.)

Матричний елемент $\mathcal{M}$ аналоґічний амплітуді розсіяння f в одночастковій квантовій механіці. Він корисний, оскільки дозволяє відокремити ту фізику, що обумовлена конкретною формою гамільтоніана взаємодії („динаміку“), від непов’язаної з особливостями взаємодії фізичної картини („кінематики“). У наступному параґрафі ми обговоримо, як обчислити матричний елемент $\mathcal{M}$, скориставшись фейнмановими діаґрамами. Та передовсім треба зрозуміти, як отримати переріз розсіяння σ, маючи $\mathcal{M}$.

Для цього виведемо через $\mathcal{M}$ імовірність переходу початкового стану $|\phi_{\mathcal{A}} \phi_{\mathcal{B}}\rangle$ у кінцевий стан з n часток, чиї імпульси знаходяться в малій ділянці $d^3\mathbf{p}_1 \cdots d^3\mathbf{p}_n$. У нашому нормуванні ця ймовірність

$$\mathcal{P}(\mathcal{AB} \to 1, 2, \ldots, n) = \left(\prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | \phi_{\mathcal{A}} \phi_{\mathcal{B}} \rangle|^2. \quad (4.74)$$

Для одиночної частки-мішені $\mathcal{A}$, на яку налітають багато часток $\mathcal{B}$ з різними прицільними параметрами $\mathbf{b}$, число подій розсіяння дається виразом

$$N = \sum_{\substack{\text{всі падаючі} \\ \text{частки } i}} \mathcal{P}_i = \int d^2\mathbf{b} \, n_{\mathcal{B}} \mathcal{P}(\mathbf{b}),$$

де $n_{\mathcal{B}}$ є густиною часток $\mathcal{B}$ (їхньою кількістю на одиницю площі). Оскільки ми припускаємо, що ця густина незмінна по всьому радіусу взаємодії, то $n_{\mathcal{B}}$ можна винести за межі інтеґрала. Тоді переріз розсіяння

$$\sigma = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} N_{\mathcal{A}}} = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} \cdot 1} = \int d^2\mathbf{b} \, \mathcal{P}(\mathbf{b}). \quad (4.75)$$

Отримання простого виразу для σ через $\mathcal{M}$ наразі стає справою прямих обчислення. Поєднавши (4.75), (4.74), (4.68) і записавши $d\sigma$ замість

σ (оскільки це є інфінітезимальна величина), маємо

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\times$$
$$\times \int d^2\mathbf{b}\left(\prod_{i=\mathcal{A},\mathcal{B}}\int \frac{d^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3}\,\frac{\phi(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_i}}\int \frac{d^3\bar{\mathbf{k}}_i}{(2\pi)^3}\,\frac{\phi(\bar{\mathbf{k}}_i)}{\sqrt{2\bar{E}_i}}\right)\times \tag{4.76}$$
$$\times\, e^{i\mathbf{b}\cdot(\bar{\mathbf{k}}_\mathcal{B}-\mathbf{k}_\mathcal{B})}\left({}_{\text{out}}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\mathbf{k}_i\}\rangle_{\text{in}}\right)\left({}_{\text{out}}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\bar{\mathbf{k}}_i\}\rangle_{\text{in}}\right)^*,$$

де ми використали $\bar{\mathbf{k}}_\mathcal{A}$ і $\bar{\mathbf{k}}_\mathcal{B}$ як допоміжні змінні інтеґрування у другій частині піднесеної до квадрату амплітуди. Інтеґрал по $d^2\mathbf{b}$ зводиться до множення на $(2\pi)^2\delta^{(2)}(\mathbf{k}_\mathcal{B}^\perp - \bar{\mathbf{k}}_\mathcal{B}^\perp)$. Ми матимемо більше дельта-функцій, записавши останні два множники у (4.76) через $\mathcal{M}$. Оскільки нас не цікавить тривіальний випадок розсіяння вперед, коли ніякої взаємодії не відбувається, ми можемо відкинути **1** у (4.72) і записати ці множники як

$$\left({}_{\text{out}}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\mathbf{k}_i\}\rangle_{\text{in}}\right) = i\mathcal{M}\big(\{k_i\}\to\{p_f\}\big)\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}\big(\sum k_i - \sum p_f\big);$$
$$\left({}_{\text{out}}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\bar{\mathbf{k}}_i\}\rangle_{\text{in}}\right)^* = -i\mathcal{M}^*\big(\{\bar{k}_i\}\to\{p_f\}\big)\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}\big(\sum \bar{k}_i - \sum p_f\big)$$

Другу з цих дельта-функцій можна використати разом з $\delta^{(2)}(\mathbf{k}_\mathcal{B}^\perp - \bar{\mathbf{k}}_\mathcal{B}^\perp)$ для проведення всіх шести інтеґрування по $\bar{\mathbf{k}}$ в (4.76). З цих шести інтеґралів лише два — по $\bar{k}^z_\mathcal{A}$ і $\bar{k}^z_\mathcal{B}$ — вимагають певних зусиль:

$$\int d\bar{k}^z_\mathcal{A}\, d\bar{k}^z_\mathcal{B}\,\delta\big(\bar{k}^z_\mathcal{A}+\bar{k}^z_\mathcal{B}-\sum p^z_f\big)\delta\big(\bar{E}_\mathcal{A}+\bar{E}_\mathcal{B}-\sum E_f\big) =$$
$$= \int d\bar{k}^z_\mathcal{A}\delta\Big(\sqrt{\bar{k}_\mathcal{A}{}^2+m^2_\mathcal{A}}+\sqrt{\bar{k}^2_\mathcal{B}+m^2_\mathcal{B}}-\sum E_f\Big)\Big|_{\bar{k}^z_\mathcal{B}=\sum p_f-\bar{k}^z_\mathcal{A}} = \tag{4.77}$$
$$= \frac{1}{\left|\dfrac{\bar{k}^z_\mathcal{A}}{\bar{E}_\mathcal{A}}-\dfrac{\bar{k}^z_\mathcal{B}}{\bar{E}_\mathcal{B}}\right|} \equiv \frac{1}{|v_\mathcal{A}-v_\mathcal{B}|}.$$

В останньому рядку на $\bar{k}$ та $\bar{E}$ накладено умови: $\bar{k}^z_\mathcal{A}+\bar{k}^z_\mathcal{B} = \sum p_f$ і $\bar{E}_\mathcal{A}+\bar{E}_\mathcal{B} = \sum E_f$ (на додаток до умов $\bar{k}^\perp_\mathcal{A} = k^\perp_\mathcal{A}$ і $\bar{k}^\perp_\mathcal{B} = k^\perp_\mathcal{B}$, що виникають в інших чотирьох інтеґралах). Різниця $|v_\mathcal{A}-v_\mathcal{B}|$ є відносною швидкістю пучків у лабораторній системі відліку.

Нагадаємо, що початкові хвильові пакети локалізовані в імпульсному просторі поблизу $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ і $\mathbf{p}_\mathcal{B}$. Це означає, що ми можемо обчислити всі множники, які є гладкими функціями від $\mathbf{k}_\mathcal{A}$ і $\mathbf{k}_\mathcal{B}$, у точках $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ та $\mathbf{p}_\mathcal{B}$ і винести

їх за межі інтеґралів. Ці множники включають $E_{\mathcal{A}}$, $E_{\mathcal{B}}$, $|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|$ і $\mathcal{M}$ — усе, за винятком залишеної під інтеґралом дельта-функції. Проробивши це, отримаємо вираз

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\frac{\left|\mathcal{M}\left(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \to \{p_f\}\right)\right|^2}{2E_{\mathcal{A}} \cdot 2E_{\mathcal{B}}\,|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|}\int \frac{d^3\mathbf{k}_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\mathbf{k}_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3}\times$$
$$\times\left|\phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_{\mathcal{A}})\right|^2\left|\phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}})\right|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f\right). \tag{4.78}$$

Для подальшого спрощення цієї формули маємо трохи більше дізнатися про властивості реальних детекторів часток. Як ми вже відзначали, реальні детектори зорієнтовані передовсім на власні стани імпульсу. Проте ці детектори мають обмежену роздільну здатність, і зазвичай вимірювання імпульсів кінцевих станів не є настільки точним, щоб розрізнити малі відхилення, що спричинені розбіжністю імпульсів початкових хвильових пакетів $\phi_{\mathcal{A}}$, $\phi_{\mathcal{B}}$. У цьому випадку можна з прийнятним наближенням замінити вектор імпульсу $k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}}$ в дельта-функції його найімовірнішою величиною $p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}}$. З таким наближенням ми можемо взяти інтеґрали по $k_{\mathcal{A}}$ і $k_{\mathcal{B}}$, використавши умову нормування (4.66). Це дає остаточну форму співвідношення між елементами S-матриці та перерізом розсіяння:

$$d\sigma = \frac{1}{2E_{\mathcal{A}} \cdot 2E_{\mathcal{B}}\,|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|}\left(\prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\times$$
$$\times\left|\mathcal{M}\left(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \to \{p_f\}\right)\right|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f\right). \tag{4.79}$$

Отриманий вираз не залежить від форми хвильових пакетів.

Інтеґрал по імпульсах кінцевих станів у (4.79) має структуру:

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(P - \sum p_f\right), \tag{4.80}$$

з повним початковим 4-імпульсом P. Цей інтеґрал є явно лоренц-інваріантним, бо складається з інваріантних інтеґралів по 3-імпульсах, пов'язаних однією дельта-функцією від 4-імпульсів. Цей інтеґрал відомий як *релятивістськи-інваріантний n-частковий фазовий об'єм*. Серед інших складових у (4.79) матричний елемент $\mathcal{M}$ також є лоренц-інваріантним. Отже, трансформаційні властивості (4.79) цілком визначаються множником

$$\frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|v_{\mathcal{A}} - v\mathcal{B}|} = \frac{1}{|E_{\mathcal{B}}p^z_{\mathcal{A}} - E_{\mathcal{A}}p^z_{\mathcal{B}}|} = \frac{1}{|\varepsilon_{\mu x y \nu}p^{\mu}_{\mathcal{A}}p^{\nu}_{\mathcal{B}}|}.$$

Цей вираз не є лоренц-інваріантним, проте він інваріантний відносно бустів у напрямку осі z і має всі властивості перетворення площі перерізу.

В окремому випадку двох часток у кінцевому стані можна спростити загальну формулу (4.79), обчисливши частину інтеґралів по фазовому об'єму в системі ЦМ. Позначимо імпульси двох кінцевих часток, як p_1 і p_2. Спочатку проінтеґруємо по всіх компонентах $\mathbf{p}_2$ три дельта-функції, які вимагають збереження 3-імпульсу. В результаті маємо $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$, а відтак інтеґрал по двочастковому фазовому простору перетворюється на

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{dp_1\, p_1^2\, d\Omega}{(2\pi)^3\, 2E_1 \cdot 2E_2}(2\pi)\delta(E_{\text{цм}} - E_1 - E_2), \tag{4.81}$$

де $E_1 = \sqrt{p_1^2 + m_1^2}$, $E_2 = \sqrt{p_1^2 + m_2^2}$, а $E_{\text{цм}}$ є повна початкова енерґія. Інтеґрування останньої дельта-функції дає

$$\begin{aligned}\int d\Pi_2 &= \int d\Omega\, \frac{p_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2}\left(\frac{p_1}{E_1} + \frac{p_1}{E_2}\right)^{-1} = \\ &= \int d\Omega\, \frac{1}{16\pi^2}\frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{цм}}}.\end{aligned} \tag{4.82}$$

Для реакцій, симетричних відносно осі зіткнення, двочастковий фазовий об'єм можна записати як інтеґрал по полярному куту в системі ЦМ:

$$\int d\Pi_2 = \int d(\cos\theta)\, \frac{1}{16\pi^2}\frac{2|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{цм}}}. \tag{4.83}$$

Останній множник прагне до 1 при великих енерґіях.

Застосувавши це спрощення до (4.79), ми знаходимо наступний вигляд перерізу розсіяння для двох часток у кінцевому стані:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{цм}} &= \frac{1}{2E_{\mathcal{A}} \cdot 2E_{\mathcal{B}}\, |v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} \times \\ &\times \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 \cdot 4E_{\text{цм}}}\left|\mathcal{M}(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \to p_1, p_2)\right|^2.\end{aligned} \tag{4.84}$$

В окремому випадку, коли всі чотири частки мають однакові маси (включно з межею $m \to 0$), останній вираз зводиться до формули, наведеної в Розділі 1:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{цм}} = \frac{\left|\mathcal{M}\right|^2}{64\pi^2 E_{\text{цм}}^2} \qquad \text{всі чотири маси однакові.} \tag{4.85}$$

На завершення цього параґрафу виведемо формулу для диференційної ширини розпаду $d\Gamma$ через $\mathcal{M}$. Правильний вираз є лише незначною видозміною (4.79), і його досить легко вгадати — треба просто прибрати з (4.79) множники, які втрачають сенс, коли початковий стан складається з однієї частки. Визначення Г стосується частки, що зазнає розпаду в стані спокою, тому нормувальний множник $(2E_{\mathcal{A}})^{-1}$ перетворюється на $(2m_{\mathcal{A}})^{-1}$. (У будь-якій іншій системі відліку цей множник дав би звичайне уповільнення часу.) Отже, формула для ширини розпаду є

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\left(\prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\times \\ \times\left|\mathcal{M}\left(m_{\mathcal{A}} \to \{p_f\}\right)\right|^2 (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} - \sum p_f\right). \tag{4.86}$$

На жаль, значення цієї формули не дуже ясне. Оскільки нестабільну частку не можна відправити в нескінченно віддалене минуле, наше визначення (4.73) для $\mathcal{M}(m_{\mathcal{A}} \to \{p_f\})$ через елементи S-матриці втрачає сенс. А проте, формула (4.86) є справедливою, якщо матриця $\mathcal{M}$ обчислена за правилами Фейнмана для елементів S-матриці, які ми наведемо в наступному параґрафі. Ми відкладаємо подальше обговорення цих питань і доведення (4.86) до § 7.3. Доти задовольнимося інтуїтивним уявленням про $\mathcal{M}$, як амплітуду переходу.

Рівняння (4.79) і (4.86) є цілком загальними, незалежно від того, чи містить кінцевий стан тотожні частки. (Обчислення $\mathcal{M}$ за наявності тотожних часток, певна річ, відрізнятиметься, але це вже інше питання.) При інтеґруванні будь-якого з цих двох рівнянь для отримання *повного* перерізу розсіяння або ширини розпаду треба бути уважним, щоб уникнути повторного врахування того ж самого кінцевого стану. Якщо ми маємо n тотожних часток у кінцевому стані, то мусимо або обмежитися інтеґруванням по нееквівалентних конфіґураціях, або ж розділити на $n!$ після інтеґрування по всіх можливих наборах імпульсів.

§ 4.6. Обчислення елементів S-матриці з фейнманових діаґрам

Тепер, коли ми маємо формули для перерізу розсіяння і ширини розпаду в термінах інваріантних матричних елементів $\mathcal{M}$, єдине, що нам залишається, це знайти спосіб обчислення $\mathcal{M}$ для різних процесів у різних теоріях поля із взаємодією. У цьому параґрафі ми випишемо (і спробуємо обґрунтувати) формулу для $\mathcal{M}$ через фейнманові діаґрами. Ми відкладемо

її строге доведення до § 7.2, оскільки воно доволі технічне і стане значно легшим для розуміння після того, як ми побачимо цю формулу в дії.

Нагадаємо, що за означенням з рівняння (4.71) S-матриця є оператором часової еволюції $\exp(-iHt)$ у межі дуже великих значень t:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \, S \, | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle = \lim_{\tau \to \infty} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | e^{-iH(2\tau)} | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle. \tag{4.87}$$

Для обчислення цієї величини ми хотіли б замінити зовнішні стани плоских хвиль у (4.87), які є власними станами H, їхніми відповідниками в незбуреній теорії, які є власними станами H_0. Ми з успіхом зробили таку заміну для вакуумного стану $|\Omega\rangle$ в рівнянні (4.27):

$$|\Omega\rangle = \lim_{\tau \to \infty(1-i\varepsilon)} \left(e^{-iE_0 \tau} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} e^{-iH\tau} |0\rangle.$$

Наразі ми хотіли б знайти співвідношення вигляду

$$|\mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle \propto \lim_{\tau \to \infty(1-i\varepsilon)} e^{-iH\tau} |\mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_0, \tag{4.88}$$

де вилучено невідомі фазові множники та коефіцієнти перекриття, на зразок тих, що присутні в (4.27). Знайти таке співвідношення непросто. У (4.27) ми використали той факт, що вакуум є станом з абсолютно найнижчою енерґією. Тут у нашому розпорядженні є лише набагато слабше твердження, що зовнішні стани з чітко розділеними початковими та кінцевими частками мають найнижчу енерґію серед станів з наперед заданими ненульовими значеннями імпульсів. Ця проблема є досить глибокою, і вона пов'язана з однією з найфундаментальніших труднощів теорії поля, породженою тією обставиною, що взаємодія впливає не лише на розсіяння різних часток, але й на форму самих одночасткових станів.

Якби формула (4.88) тим або іншим чином була отримана, ми могли б застосувати її, щоб переписати праву частину (4.87), як

$$\begin{aligned} &\lim_{\tau \to \infty(1-i\varepsilon)} {}_0\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | e^{iH(2\tau)} | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_0 \propto \\ &\quad \propto \lim_{\tau \to \infty(1-i\varepsilon)} {}_0\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | \, T\left(\exp\left[-i \int_{-\tau}^{\tau} dt \, H_I(t) \right] \right) | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_0. \end{aligned} \tag{4.89}$$

При обчисленні вакуумних середніх громіздкі пропорційні множники між вільним вакуумом та вакуумом із взаємодією скорочувалися в остаточному виразі (4.31). Наразі ці множники такі жахливі, що ми навіть не намагаємося виписати їх; сподіваємось лише, що таке ж драматичне скорочення матиме місце й тут. І справді, це скорочення відбувається, хоча

при нашому підході отримати його дуже непросто. З точністю до невеликої модифікації (для наших цілей неістотної) формулу для нетривіальної частини S-матриці можна спростити до такого вигляду:

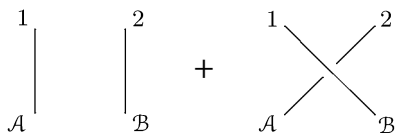
$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n |\, iT\, | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle = \\ &= \lim_{\tau\to\infty(1-i\varepsilon)} {}_0\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n |\, T\Big\{ \exp\Big[-i \int\limits_{-\tau}^{\tau} dt\, H_I(t) \Big]\Big\} | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_0 \Big|_{\substack{\text{зв'язна,}\\ \text{ампутована}}}\end{aligned} \tag{4.90}$$

Терміни „зв'язна“ й „ампутована“ стосуються обмежень на клас можливих фейнманових діаґрам і будуть визначені трохи згодом. Ми доведемо рівняння (4.90) у § 7.2. А в решті поточного параґрафу пояснимо цю формулу і наведемо обґрунтування нових обмежень, що їх ми додали.

Насамперед маємо навчитися представляти матричний елемент у (4.90) як суму фейнманових діаґрам. Обчислимо явно кілька перших членів у ϕ^4-теорії для двох часток у кінцевому стані. Перший член є

$$\begin{aligned}{}_0\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_0 &= \sqrt{2E_1 \cdot 2E_2 \cdot 2E_{\mathcal{A}} \cdot 2E_{\mathcal{B}}}\, \langle 0 | a_1 a_2 a^\dagger_{\mathcal{A}} a^\dagger_{\mathcal{B}} | 0 \rangle = \\ &= 2E_{\mathcal{A}} \cdot 2E_{\mathcal{B}} (2\pi)^6 \big[\delta(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_1)\delta(\mathbf{p}_{\mathcal{B}} - \mathbf{p}_2) + \\ &\qquad + \delta(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_2)\delta(\mathbf{p}_{\mathcal{B}} - \mathbf{p}_1) \big].\end{aligned} \tag{4.91}$$

Наявність дельта-функції робить кінцевий стан тотожнім початковому, тому цей член є частиною „$\mathbf{1}$“ у $S = \mathbf{1} + i\mathrm{T}$ і не дає внеску в матричний елемент розсіяння $\mathcal{M}$. Ми можемо представити це, як діаґрами



Наступний член у $\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 |\, S\, | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle$, із застосуванням теореми Віка, набуває вигляду

$$\begin{aligned}&{}_0\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 |\, T\Big(-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x\, \phi_I^4(x) \Big) | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_0 = \\ &\quad = {}_0\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 |\, N\Big(-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x\, \phi_I^4(x) + \text{згортки} \Big) | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_0.\end{aligned} \tag{4.92}$$

Оскільки зовнішні стани не є $|0\rangle$, то не повністю згорнуті доданки не конче нульові; ми можемо використати оператор знищення з $\phi_I(x)$, щоб

анігілювати частку початкового стану, або оператор народження — щоб утворити частку кінцевого стану. Наприклад,

$$\begin{aligned}\phi_I^+|\mathbf{p}\rangle_0 &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\,\mathfrak{a}_{\mathbf{k}}e^{-ik\cdot x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathfrak{a}_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\,e^{-ik\cdot x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})|0\rangle = \\ &= e^{-ip\cdot x}|0\rangle.\end{aligned} \tag{4.93}$$

Незгорнутий ϕ_I під знаком N-добутку (4.92) має два доданки — ϕ_I^+ крайній праворуч і ϕ_I^- крайній ліворуч. Ми отримуємо один внесок в елемент S-матриці для кожного способу комутування $\mathfrak{a}$, що міститься в ϕ_I^+, з $\mathfrak{a}^\dagger$ початкового стану і один внесок для кожного способу комутування $\mathfrak{a}^\dagger$, що міститься в ϕ_I^-, з $\mathfrak{a}$ кінцевого стану. Тоді природно буде визначити згортки польових операторів із зовнішніми станами наступним чином:

$$\overbracket{\phi_I(x)|\mathbf{p}\rangle}e^{-ip\cdot x}; \quad \overbracket{\langle\mathbf{p}|\phi_I}(x) = e^{ip\cdot x}. \tag{4.94}$$

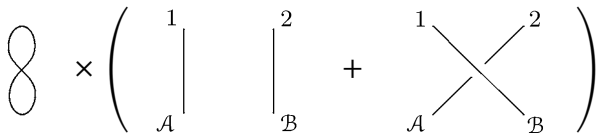
Для обчислення елемента S-матриці типу (4.92) просто запишемо всі можливі повні згортки операторів ϕ_I із зовнішніми імпульсними станами.

Аби переконатися, що цей припис є правильним, прискіпливо обчислимо величину (4.92). N-добуток містить члени такого вигляду:

$$\phi\phi\phi\phi; \quad \overbracket{\phi\phi}\phi\phi \quad ; \overbracket{\phi\phi}\overbracket{\phi\phi}. \tag{4.95}$$

Останній доданок, у якому оператори ϕ цілком згорнуті одні з одними, дорівнює вакуумній бульбашковій діаґрамі, помноженій на обчислену вище величину (4.91):

$$-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\,{}_0\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|\overbracket{\phi\phi}\overbracket{\phi\phi}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle =$$

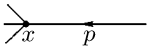


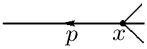
(4.96)

Це є ще одним внеском у тривіальну частину S-матриці, тому ми його іґноруємо.

Далі розглянемо другий член з (4.95), у якому два чотирьох операторів ϕ згорнуті. Нормально впорядкований добуток решти двох полів має

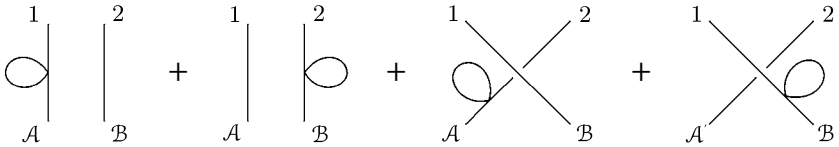
вигляд $(a^\dagger a^\dagger + 2a^\dagger a + aa)$. Шляхом комутування цих операторів з a та $a^\dagger$ початкового та кінцевого станів ми знаходимо, що може вціліти лише член з однаковою кількістю a і $a^\dagger$. Мовою згорток це означає, що один з ϕ має бути згорнутим з початковим станом $|\mathbf{p}\rangle$, а інший — з кінцевим станом $\langle\mathbf{p}|$. Незгорнуті $|\mathbf{p}\rangle$ і $\langle\mathbf{p}|$ дають дельта-функцію, як і в (4.91). Для діаґрамного представлення цих величин ми додаємо до наших правил Фейнмана *зовнішні лінії*:

$\overbracket{\phi_I(x)|\mathbf{p}\rangle} =$ 

$\overbracket{|\mathbf{p}\rangle\phi_I(x)} =$ 

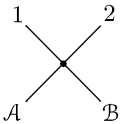
(4.97)

Фейнманові діаґрами для елементів S-матриці завжди міститимуть зовнішні лінії, на відміну від зовнішніх точок у діаґрамах для кореляційних функцій. Таким чином, другий член з (4.95) дає чотири діаґрами:



Інтеґрали $\int d^4x$ призводять до появи в кожній вершині дельта-функцій, що встановлюють збереження імпульсів (включно із зовнішніми імпульсами), а отже, ці діаґрами знов-таки описують тривіальні процеси, в яких початкові та кінцеві стани тотожні. Це ілюструє загальний принцип: внесок у T-матрицю дають лише *повністю зв'язні* діаґрами, у яких зовнішні лінії поєднані між собою.

Нарешті розглянемо член з (4.95), у якому жоден з операторів ϕ не згорнутий з іншим. Наш припис вимагає, щоб ми згорнули два оператори ϕ з $|\mathbf{p}_\mathcal{A}\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle$, а решту два — з $\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|$. Існує 4! способи зробити це. Звідси маємо діаґраму



$$= (4!)\cdot\Big(-i\frac{\lambda}{4!}\Big)\int d^4x\, e^{-i(p_\mathcal{A}+p_\mathcal{B}-p_1-p_2)\cdot x} = \tag{4.98}$$
$$= -i\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\mathcal{A}+p_\mathcal{B}-p_1-p_2).$$

Це точно збігається з виразом $i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\mathcal{A}+p_\mathcal{B}-p_1-p_2)$, де $\mathcal{M} = -\lambda$.

Перш ніж продовжити наше обговорення фейнманових діаґрам для елементів S-матриці, варто зупинитися й застосувати цей результат до перерізу розсіяння. Для зіткнення часток у системі ЦМ ми можемо просто

підставити $|\mathcal{M}|^2 = \lambda^2$ у (4.85), і тоді отримаємо

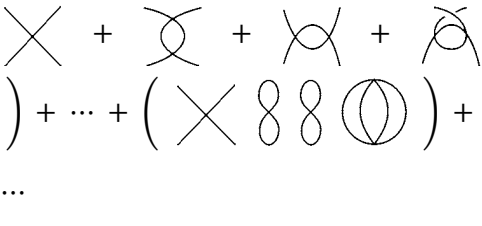
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{цм}} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\text{цм}}^2}. \tag{4.99}$$

Щойно ми обчислили наш перший переріз розсіяння у квантовій теорії поля. Це досить слабкий результат, взагалі позбавлений кутової залежності. (Ситуація буде виправлена, коли в наступному параґрафі ми розглянемо ферміони.) Проінтеґрувавши по $d\Omega$ і розділивши на 2, оскільки присутні дві тотожні частки у кінцевому стані, знаходимо повний переріз:

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\text{цм}}^2}. \tag{4.100}$$

На практиці, мабуть, можна було б використати цей результат для вимірювання λ.

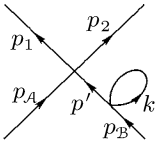
Повертаючись до основної теми нашого обговорення, розглянемо деякі внески в T-матрицю вищого порядку для процесу $\mathcal{A}, \mathcal{B} \to 1, 2$. Якщо тимчасово знехтувати приписом про зв'язні й ампутовані діаґрами, то

$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \, iT \, | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle \stackrel{?}{=}$  (4.101)

плюс діаґрами, у яких не всі чотири лінії поєднані між собою. Ми вже бачили, що цей останній клас діаґрам не дає внеску в T-матрицю. Перша діаґрама, показана в (4.101), дає внесок у T найнижчого порядку, який ми обчислили вище. Наступні три діаґрами дають очікувані поправки до цієї амплітуди з урахуванням народження і знищення додаткових „віртуальних“ часток.

Діаґрами у другому рядку (4.101) містять незв'язні „вакуумні бульбашки“. Вдавшись до тих самих арґументів, що й наприкінці § 4.4, можна експоненціювати незв'язні частини в загальний фазовий множник, що визначає зсув енерґії вакуумного стану за наявності взаємодії. Тому такі частини діаґрам є неістотними для S-матриці. Тепер ми бачимо, що лише повністю зв'язні діаґрами дають суттєві внески в елементи S-матриці.

Остання діаґрама значно проблемніша; обчислимо її. Після інтеґрування по координатах двох вершин маємо

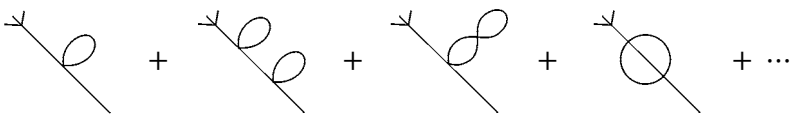


$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{p'^2-m^2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{k^2-m^2}\times\\
&\times(-i\lambda)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}}+p'-p_1-p_2)\,\times\\
&\times(-i\lambda)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{B}}-p').
\end{aligned}
\tag{4.102}
$$

Ми можемо проінтеґрувати по p', використавши другу дельта-функцію. Це потребує від нас обчислення величини

$$
\left.\frac{1}{p'^2-m^2}\right|_{p'=p_{\mathcal{B}}} = \frac{1}{p_{\mathcal{B}}^2-m^2} = \frac{1}{0}.
$$

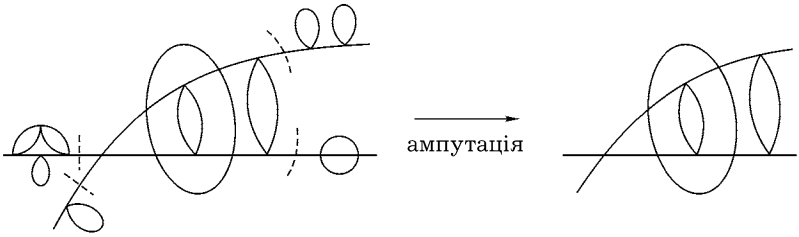
Ми отримали нескінченність, оскільки $p_{\mathcal{B}}$ є імпульсом зовнішньої частки і відповідає співвідношенню $p_{\mathcal{B}}^2 = m^2$. Це створює труднощі. Зрозуміло, що наша формула для S має сенс лише за умови виключення діаґрам з петлями на зовнішніх лініях. На щастя, це фізично виправдано — нарівні з тим, як вакуумні бульбашкові діаґрами описують еволюцію $|0\rangle$ в $|\Omega\rangle$, поправки до зовнішніх ліній



описують еволюцію $|\mathbf{p}\rangle_0$ у $|\mathbf{p}\rangle$, який є одночастковим станом у теорії із взаємодією. Оскільки ці поправки не мають жодного стосунку до процесу розсіяння, їх треба виключити з обчислення S-матриці.

Для діаґрами загального вигляду із зовнішніми лініями визначимо *ампутацію* наступним чином. Починаючи з кінця кожної зовнішньої лінії, знайдемо останню точку, де діаґрама може бути розрізана по одному пропаґатору так, щоб ця операція відокремила лінію від решти діаґрами.

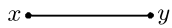
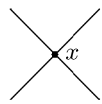
Там і розріжемо. Наприклад,



Підсумуємо наш припис для обчислення амплітуд розсіяння. Формулу для елементів S-матриці (4.90) можна переписати, як

$$i\mathcal{M} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}\Big(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} - \sum \mathbf{p}_f\Big) = \\ = \begin{pmatrix} \text{сума всіх зв'язних ампутованих діаґрам} \\ \text{з вхідними } p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \text{ й вихідними } p_f \end{pmatrix}. \tag{4.103}$$

Терміном „зв'язна“ ми тепер позначаємо повністю зв'язну діаґраму, тобто таку, що не має вакуумних бульбашок, а всі її зовнішні лінії поєднані між собою. Правила Фейнмана для амплітуд розсіяння в теорії ϕ^4 у координатному просторі є такі:

1. Для кожного пропаґатора,  $= D_F(x-y)$;
2. Для кожної вершини,  $= (-i\lambda)\int d^4x$;
3. Для кожної зовнішньої лінії, $= e^{-ip\cdot x}$;
4. Розділити на фактор симетрії.

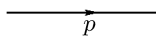
Зазначимо, що множником для вхідної лінії є якраз амплітуда знаходження частки у вершині, з якою ця лінія з'єднана, тобто це є хвильова функція частки. Так само, множник для вихідної лінії є амплітуда того, що частка, народжена у вершині, має певний кінцевий імпульс.

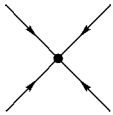
Як і з правилами Фейнмана для кореляційних функцій, зазвичай простіше запровадити імпульсне представлення пропаґаторів, потім узяти вершинні інтеґрали для отримання дельта-функцій, що забезпечують збереження імпульсу, після чого використати ці дельта-функції для обчислення якомога більшого числа інтеґралів по імпульсах. Проте в амплітуді розсіяння завжди буде присутня спільна дельта-функція від суми

всіх імпульсів, яку можна використати для скорочення дельта-функції, що стоїть у лівій частині (4.103). Тоді ми отримаємо

$$i\mathcal{M} = \text{сума всіх зв'язних ампутованих діаґрам}, \tag{4.104}$$

де діаґрами обчислюються за наступними правилами:

1. Для кожного пропаґатора, 

$= \dfrac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$;
2. Для кожної вершини,  $= -i\lambda$;
3. Для кожної зовнішньої лінії, $= 1$;
4. Вимагати збереження імпульсу в кожній вершині;
5. Інтеґрувати по кожному невизначеному імпульсу: $\displaystyle\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$;
6. Розділити на фактор симетрії.

Це наш остаточний варіант правил Фейнмана для теорії ϕ^4.

Насправді формула (4.103) ще не зовсім точна. Їй необхідна додаткова модифікація з урахуванням пропорційних множників, які були вилучені з (4.89). Утім, ця модифікація стосується лише діаґрам, що містять петлі, тому ми відкладаємо обговорення до Розділів 6 і 7, де спершу обчислимо такі діаґрами. У § 7.2 ми доведемо справедливість виправленої формули (4.103), зіставляючи елементи S-матриці з кореляційними функціями, для яких практично вже отримали формулу в термінах фейнманових діаґрам.

§ 4.7. Фейнманові правила для ферміонів

Досі в цьому розділі, задля уникнення зайвих ускладнень, ми розглядали лише теорію ϕ^4. Тепер ми готові узагальнити результати на теорії з ферміонами.

Наше рішення для кореляційних функцій з § 4.2 узагальнюється без проблем. Лоренц-інваріантність вимагає, щоб гамільтоніан взаємодії H_I був добутком парного числа спінорних полів, тож не виникає жодних складнощів при визначенні хронологічно впорядкованої експоненти від H_I.

Проте, для застосування теореми Віка треба поширити означення хронологічного та нормального впорядкування на ферміони. Наприкінці

§ 3.5 ми бачили, що оператор хронологічного впорядкування T, який діє на два спінорні поля, зручніше визначити з додатковим знаком мінус:

$$T\big(\psi(x)\bar{\psi}(y)\big) \equiv \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y) & \text{для } x^0 > y^0; \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x) & \text{для } x^0 < y^0. \end{cases} \tag{4.105}$$

За цим означенням, пропаґатор Фейнмана для діракового поля є

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ip\cdot(x-y)} = \\ &= \langle 0|\, T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle. \end{aligned} \tag{4.106}$$

Для добутку понад двох спінорних полів ми узагальнюємо це означення природним чином: хронологічне упорядкування дає один знак мінус для кожної з операторних перестановок, необхідних для того, щоб розташувати поля у хронологічному порядку. Наприклад,

$$T\big(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4\big) = (-1)^3\psi_3\psi_1\psi_4\psi_2, \quad \text{якщо } x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0.$$

Визначення нормально впорядкованого добутку спінорних полів є аналоґічним: треба поставити додатковий знак мінус для кожної перестановки ферміонів. Антикомутаційні співвідношення дозволяють записати нормально впорядкований добуток кількома способами, проте, з урахуванням наших домовленостей, вони цілком еквівалентні:

$$N\big(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{r}}^{\dagger}\big) = (-1)^2 a_{\mathbf{r}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} = (-1)^3 a_{\mathbf{r}}^{\dagger}a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}.$$

Використавши ці означення, неважко узагальнити теорему Віка. Розглянемо спочатку випадок двох діракових полів, скажімо, $T[\psi(x)\bar{\psi}(y)]$. За аналоґією з (4.37), визначимо їх згортку, як

$$T\big[\psi(x)\bar{\psi}(y)\big] = N\big[\psi(x)\bar{\psi}(y)\big] + \overbracket{\psi(x)\bar{\psi}}(y). \tag{4.107}$$

Очевидно, що для діракового поля,

$$\overbracket{\psi(x)\bar{\psi}}(y) \equiv \left\{ \begin{matrix} \{\psi^+(x),\, \psi^-\} & x^0 > y^0 \\ -\{\psi^+(x),\, \psi^-\} & x^0 < y^0 \end{matrix} \right\} = S_F(x-y); \tag{4.108}$$

$$\overbracket{\psi(x)\psi}(y) = \overbracket{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}}(y) = 0. \tag{4.109}$$

Визначимо згортку під символом нормального впорядкування таким чином, щоб вони містили знаки мінус для оператора перестановок:

$$N\big(\overbrace{\psi_1\psi_2\bar{\psi}_3}\bar{\psi}_4\big) = -\overbrace{\psi_1\bar{\psi}_3}\, N\big(\psi_2\bar{\psi}_4\big) = -S_F(x_1 - x_3)N\big(\psi_2\bar{\psi}_4\big). \qquad (4.110)$$

За таких означень теорема Віка має попередній вигляд:

$$T\big[\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3\cdots\big] = N\big[\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3\cdots + \text{ усі можливі згортки}\big]. \qquad (4.111)$$

Доведення суттєво не відрізняється від бозонного випадку, оскільки всі додаткові знаки мінус враховуються вищенаведеними означеннями.

Теорія Юкави

Тепер було б неважко виписати правила Фейнмана для ферміонних кореляційних функцій, але натомість ми відразу перейдемо до обговорення процесів розсіяння. Почнемо з аналізу теорії Юкави:

$$H = H_{\text{Dirac}} + H_{\text{Klein-Gordon}} + \int d^3\mathbf{x}\,(g\,\bar{\psi}\psi\phi). \qquad (4.112)$$

Це є спрощена модель квантової електродинаміки. У поточному параґрафі ми ретельно виведемо правила обчислення в теорії Юкави, щоб надалі їх можна було без значних ускладнень застосувати до КЕД.

Для конкретності, розглянемо реакцію двочасткового розсіяння:

$$\text{ферміон } (p) + \text{ферміон } (k) \to \text{ферміон } (p') + \text{ферміон } (k').$$

Основний внесок дає H_I^2 член у S-матриці:

$${}_0\langle\mathbf{p}',\mathbf{k}'|\,T\left(\frac{1}{2!}(-ig)\int d^4x\,\bar{\psi}_I\psi_i\phi_I\,(-ig)\int d^4y\,\bar{\psi}_I\psi_i\phi_I\right)|\mathbf{p},\mathbf{k}\rangle_0 \qquad (4.113)$$

Для обчислення цього виразу використаємо теорему Віка, щоб звести T-добуток до N-добутку згорток, а потім подіяти незгорнутими полями на початкові та кінцеві стани часток. Представимо цей останній процес, як згортку

$$\begin{aligned}\overbrace{\psi_I(x)|\mathbf{p},s\rangle} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}\sum_{s'} \mathrm{a}^{s'}_{\mathbf{p}'}u^{s'}(p')\,e^{-ip'\cdot x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}\,\mathrm{a}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle = \\ &= e^{-ip\cdot x}u^s(p)|0\rangle.\end{aligned} \qquad (4.114)$$

Подібні вирази мають місце для згортки $\bar{\psi}_I$ з ферміоном кінцевого стану, а також для згорток ψ_I і $\bar{\psi}_I$ з антиферміонними станами. Зазначимо, що ψ_I можна згорнути з ферміоном праворуч або з антиферміоном ліворуч; зворотне справедливо для $\bar{\psi}_I$.

Ми можемо записати типовий матричний елемент (4.113), як згортку

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | \tfrac{1}{2!}(-ig) \int d^4x\, \bar{\psi}\psi\phi\, (-ig) \int d^4y\, \bar{\psi}\psi\phi | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle. \tag{4.115}$$

З точністю до можливого знаку мінус, значення цієї величини є

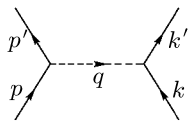
$$(-ig)^2 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} (2\pi)^4 \delta(p' - p - q) \times \\ \times (2\pi)^4 \delta(k' - k + q) \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k).$$

(Ми опустили множник 1/2!, бо є другий, ідентичний член, що походить від перестановки x та y у (4.115).) Використавши будь-яку дельта-функцію для інтеґрування, знаходимо, що цей вираз має вигляд $i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta(\Sigma p)$, де

$$i\mathcal{M} = \frac{-ig^2}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k). \tag{4.116}$$

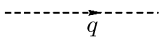
Записуючи таким чином, маємо пам'ятати, що на імпульси накладено умову $p - p' = q = k' - k$.

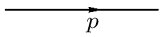
Замість починати від (4.115), ми могли б зобразити фейнманову діаґраму

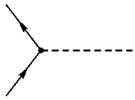


Ми позначаємо скалярні частки пунктирними лініями, а ферміонні — суцільними. Елемент S-матриці можна було б отримати безпосередньо з наступних правил Фейнмана в імпульсному просторі.

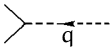
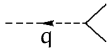
1. Пропаґатори:

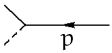
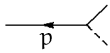
$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)} =$$  $$= \frac{i}{q^2 - m_\phi^2 + i\varepsilon}$$

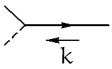
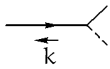
$$\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)} =$$  $$= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

2. Вершини:  $= -ig$

3. Згортки із зовнішніми кінцями:

$$\overbrace{\phi|\mathbf{q}\rangle} =$$  $= 1$ $\qquad$ $\overbrace{\langle\mathbf{q}|\phi} =$  $= 1$

$$\overbrace{\psi\,\underbrace{|\mathbf{p},s\rangle}_{\text{ферміон}}} =$$  $= u^s(p)$ $\qquad$ $\overbrace{\underbrace{\langle\mathbf{p},s|}_{\text{ферміон}}\,\bar{\psi}} =$  $= \bar{u}^s(p)$

$$\overbrace{\bar{\psi}\,\underbrace{|\mathbf{p},s\rangle}_{\text{антиферміон}}} =$$  $= \bar{v}^s(k)$ $\qquad$ $\overbrace{\underbrace{\langle\mathbf{p},s|}_{\text{антиферміон}}\,\psi} =$  $= v^s(k)$

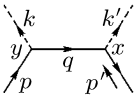
4. Вимагати збереження імпульсу в кожній вершині.
5. Інтеґрувати по кожному невизначеному імпульсу.
6. Отримати повний знак діаґрами.

Маємо кілька коментарів щодо цих правил.

По-перше, зазначимо, що множник $1/n!$ у ряді Тейлора для хронологічно впорядкованої експоненти завжди скорочується з $n!$ способами перестановок вершин, що дають однакові згортки. Діаґрами в теорії Юкави ніколи не мають факторів симетрії, оскільки три поля ($\bar{\psi}\psi\phi$) в H_I не можна підставити одне замість іншого при згортках.

По-друге, напрямок імпульсу на ферміонних лініях завжди є істотним. На зовнішніх лініях, як для бозонів, напрямок імпульсу завжди є вхідним для початкових станів і вихідним для кінцевих. Це безпосередньо випливає з рядів для ψ і $\bar{\psi}$, де оператори знищення $a_{\mathbf{p}}$ і $b_{\mathbf{p}}$ мають множники $e^{-ip\cdot x}$, а оператори народження $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ і $b_{\mathbf{p}}^\dagger$ — множники $e^{+ip\cdot x}$. На внутрішніх ферміонних лініях (пропаґаторах) імпульс має вказувати напрямок струму числа часток (для електронів це є напрямком струму неґативного заряду). Цю вимогу найлегше побачити, виходячи із засадничих принципів.

Розглянемо анігіляцію ферміона й антиферміона у два бозони:



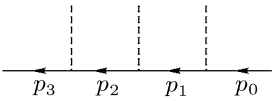
$$= \langle \mathbf{k},\mathbf{k}'| \int d^4x\, \phi\bar{\psi}\psi \int d^4y\, \phi\bar{\psi}\psi\, |\mathbf{p},\mathbf{p}'\rangle \sim$$

$$\sim \int d^4x \int d^4y\, \bar{v}(p')e^{-ip'\cdot x} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, \frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2}\, e^{-iq\cdot(x-y)}\, u(p)e^{-ip\cdot y}.$$

Інтеґрали по x та y дають дельта-функції, які змушують q текти від y до x. На внутрішніх бозонних лініях напрямок імпульсів є неістотним і може бути обраним як завгодно, оскільки $D_F(x-y) = D_F(y-x)$.

Домовлено зображати стрілки на ферміонних лініях таким чином, щоб вони представляли напрям струму числа часток. Тоді імпульс ферміонного пропаґатора спрямовано за цією стрілкою. Проте для зовнішніх античасток імпульс спрямовано проти стрілки; на це явно вказує зображена поруч із лінією друга стрілка.

По-третє, зазначимо, що в наших прикладах діракові індекси згортаються один з одним уздовж ферміонних ліній. Так само це відбувається і в складніших діаґрамах:



$$\sim \bar{u}(p_3)\cdot \frac{i(\not{p}_2+m)}{p_2^2-m^2}\cdot \frac{i(\not{p}_1+m)}{p_1^2-m^2}\cdot u(p_0). \qquad (4.117)$$

Насамкінець зупинимось на ферміонних знаках мінус. Повернімося до прикладу ферміон-ферміонного розсіяння і приймемо такі домовленості про знаки для початкових та кінцевих станів:

$$|\mathbf{p},\mathbf{k}\rangle \sim \mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle, \quad \langle \mathbf{p}',\mathbf{k}'| \sim \langle 0|\mathrm{a}_{\mathbf{p}'}\mathrm{a}_{\mathbf{k}'}, \qquad (4.118)$$

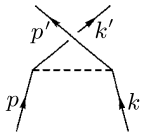
отже, $(|p,k\rangle)^\dagger = \langle p,k|$. Тоді згортку

$$\langle \mathbf{p}',\mathbf{k}'|(\bar{\psi}\psi)_x\,(\bar{\psi}\psi)_y|\mathbf{p},\mathbf{k}\rangle \sim \langle 0|\mathrm{a}_{\mathbf{k}'}\mathrm{a}_{\mathbf{p}'}\bar{\psi}_x\psi_x\bar{\psi}_y\psi_y\mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle.$$

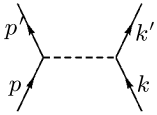
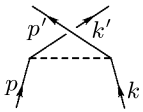
можна отримати, пересунувши $\bar{\psi}_y$ на дві позиції вліво, що дасть множник $(-1)^2 = +1$. Проте зазначимо, що при згортці

$$\langle \mathbf{p}',\mathbf{k}'|(\bar{\psi}\psi)_x\,(\bar{\psi}\psi)_y|\mathbf{p},\mathbf{k}\rangle \sim \langle 0|\mathrm{a}_{\mathbf{k}'}\mathrm{a}_{\mathbf{p}'}\bar{\psi}_x\psi_x\bar{\psi}_y\psi_y\mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle.$$

достатньо пересунути $\bar{\psi}_y$ на одну позицію вліво, що дасть множник -1. Ця згортка відповідає діаґрамі



Тож у нижчому порядку повний внесок в елемент S-матриці для цього процесу є

$$i\mathcal{M} =$$  $+$  $=$

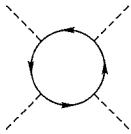
$$= (-ig^2)\Bigg(\bar{u}(p')u(p)\,\frac{1}{(p'-p)^2-m_\phi^2}\,\bar{u}(k')u(k) - \\ - \bar{u}(p')u(k)\,\frac{1}{(p'-k)^2-m_\phi^2}\,\bar{u}(k')u(p)\Bigg). \tag{4.119}$$

Різниця у знак мінус між цими діаґрамами є відображенням статистики Фермі. Перетворення цього виразу на переріз розсіяння потребувало б певних додаткових зусиль; ми відкладемо ці обчислення до Розділу 5, де вже зможемо розглянути процеси КЕД замість менш цікавої теорії Юкави.

У складних діаґрамах нерідко можна спростити процес визначення знаків мінус з огляду на те, що добуток $(\bar{\psi}\psi)$ або будь-які інші ферміонні пари *комутують* з будь-яким оператором. Отже,

$$\cdots(\bar{\psi}\psi)_x(\bar{\psi}\psi)_y(\bar{\psi}\psi)_z(\bar{\psi}\psi)_w\cdots = \cdots(\bar{\psi}\psi)_x(\bar{\psi}\psi)_z(\bar{\psi}\psi)_y(\bar{\psi}\psi)_w\cdots = \\ = \cdots S_F(x-z)S_F(z-y)S_F(y-w)\cdots$$

Проте зазначимо, що в замкнутій петлі з n ферміонних пропаґаторів маємо



$$= \bar{\psi}\psi\,\bar{\psi}\psi\,\bar{\psi}\psi\,\bar{\psi}\psi = \\ = (-1)\,\bar{\psi}\,\bar{\psi}\psi\,\bar{\psi}\psi\,\bar{\psi}\psi\,\bar{\psi}\psi\,\bar{\psi} = \\ = (-1)\ \mathrm{Tr}\left[S_F\,S_F\,S_F\,S_F\right]. \tag{4.120}$$

Замкнуті ферміонні петлі завжди дають додатковий множник -1, а також *слід* від добутку діракових матриць.

Потенціал Юкави

Тепер ми маємо всі формальні правила, необхідні для обчислення амплітуд розсіяння в теорії Юкави. Перш ніж узятися до вивчення КЕД, коротко звернемося від абстракцій до конкретної фізики й розглянемо одне просте застосування цих правил для розсіяння *нетотожних* ферміонів у нерелятивістській межі. Порівнявши амплітуду цього процесу з формулою для борнового наближення в нерелятивістській квантовій механіці, можна визначити потенціал $V(r)$, утворюваний взаємодією Юкави.

Якщо дві взаємодіючі частки нетотожні, то внесок дає лише перша діаґрама в (4.119). Для обчислення амплітуди в нерелятивістській межі, зберігаємо лише члени найнижчого порядку за 3-імпульсами. Таким чином, з точністю до $\mathcal{O}(\mathbf{p}^2, \mathbf{p}'^2, \ldots)$,

$$\begin{aligned} p &= (m, \mathbf{p}), \qquad & k &= (m, \mathbf{k}), \\ p' &= (m, \mathbf{p}'), \qquad & k' &= (m, \mathbf{k}'). \end{aligned} \tag{4.121}$$

Використавши ці вирази, маємо

$$(p' - p)^2 = -|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 + \mathcal{O}(\mathbf{p}^4),$$
$$u^s(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad \text{и т.д.,}$$

де ξ^s є двокомпонентним постійним спінором з нормуванням $\xi^{s'\dagger}\xi^s = \delta^{ss'}$. Тоді спінорні добутки у (4.119) будуть такі:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{s'}(p')u^s(p) &= 2m\,\xi^{s'\dagger}\xi^s = 2m\,\delta^{s's}; \\ \bar{u}^{r'}(k')u^r(k) &= 2m\,\xi^{r'\dagger}\xi^r = 2m\,\delta^{r'r}. \end{aligned} \tag{4.122}$$

Отже, наш перший фізичний висновок є таким, що спін кожної частки в цьому нерелятивістському процесі розсіяння зберігається окремо — це приємний результат.

Збираючи разом усі частини амплітуди розсіяння (4.119), отримуємо

$$i\mathcal{M} = \frac{ig^2}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 + \mu_\phi^2}\, 2m\,\delta^{s's}\delta^{r'r}. \tag{4.123}$$

Цей вираз треба порівняти з борновим наближенням для амплітуди розсіяння в нерелятивістській квантовій механіці, записаній у термінах потенціалу $V(\mathbf{x})$:

$$\langle p' |\, iT\, | p\rangle = -i\widetilde{V}(\mathbf{q})\,(2\pi)\,\delta(E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}}), \quad (\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}). \tag{4.124}$$

Тож очевидно, що для взаємодії Юкави

$$\widetilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{-g^2}{\mathbf{q}^2 + \mu_\phi^2}. \tag{4.125}$$

(Множники $2m$ у (4.123) виникають з релятивістських умов нормування і мають бути вилучені при порівнянні з (4.124), де передбачено стандартне нерелятивістське нормування станів. Додатковий множник $\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$ зникає при інтеґруванні по імпульсу мішені.)

Обернення фур'є-перетворення для отримання $V(x)$ проводиться звичайним чином:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{\mathbf{q}^2 + \mu_\phi^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \\ &= \frac{-g^2}{4\pi^2} \int\limits_0^\infty dq\, q^2 \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \frac{1}{q^2 + m_\phi^2} = \\ &= \frac{-g^2}{4\pi^2 ir} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq\, \frac{qe^{iqr}}{q^2 + m_\phi^2}. \end{aligned} \tag{4.126}$$

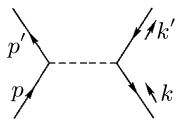
Контур у цьому інтеґралі можна замкнути у верхній півплощині. При цьому береться лишок у простому полюсі в точці $q = +im_\phi$. Таким чином, ми отримуємо

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-m_\phi r}, \tag{4.127}$$

що є *притягувальним* „потенціалом Юкави" з радіусом взаємодії $1/m_\phi = \hbar/m_\phi c$, який дорівнює комптоновій довжині хвилі бозона обміну. Юкава взяв цей потенціал за основу в теорії ядерних сил і пішов зворотним шляхом: почав за радіусу сил (приблизно 1 фм) й отримав масу розшукуваного бозона, який назвав піоном (приблизно 200 МеВ).

Що ми одержимо при розсіянні частки на античастках? Для процесу

$$\mathrm{f}_1(p)\bar{\mathrm{f}}_2(k) \to \mathrm{f}_1(p')\bar{\mathrm{f}}_2(k')$$



треба обчислити (в нерелятивістському наближені)

$$\bar{v}^s(k) v^{s'}(k') \approx (\xi^{s'\dagger}, -\xi^{s\dagger}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s'} \\ -\xi^{s'} \end{pmatrix} = -2m\, \delta^{ss'}. \tag{4.128}$$

Маємо також розібратися з ферміонним знаком мінус. Застосувавши тотожності $|\mathbf{p}, \mathbf{k}\rangle = a^\dagger_{\mathbf{p}} b^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle$ і $\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}'| = \langle 0| b_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'}$, можемо записати згорнений матричний елемент, як

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}'| \bar{\psi}\psi\, \bar{\psi}\psi |\mathbf{p}, \mathbf{k}\rangle = \langle 0| b_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'}\, \bar{\psi}\psi\, \bar{\psi}\psi\, a^\dagger_{\mathbf{p}} b^\dagger_{\mathbf{k}} |0\rangle.$$

Для проведення згортки слід зробити три перестановки операторів, що в підсумку дає множник -1. Унаслідок чого в (4.128) зникає додатковий знак мінус, тому потенціал Юкави між ферміоном і антиферміоном також є притягувальним і рівним за силою потенціалу між двома ферміонами.

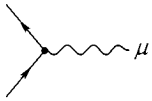
Залишилося розглянути випадок розсіяння двох антиферміонів. Не дивно, що потенціал знову буде притягувальним: додатковий знак мінус з'являється в результаті заміни $\bar{u}u$ на $\bar{v}v$, а кількість перестановок, необхідних для проведення згортки, є парною. Звідси маємо висновок, що потенціал Юкави *універсально притягувальний*, незалежно від того, чи є він потенціалом взаємодії пари ферміонів, пари антиферміонів або пари ферміон-антиферміон.

§ 4.8. Фейнманові правила для квантової електродинаміки

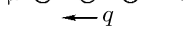
Наразі ми готові перейти від теорії Юкави до квантової електродинаміки. Для цього замінимо скалярну частку ф на векторну частку A_μ, а гамільтоніан взаємодії Юкави на

$$H_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x}\, e\, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \tag{4.129}$$

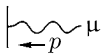
Як зміняться фейнманові правила? Відповідь легко вгадати, хоча й важко довести. На додаток до правил для ферміонів з попереднього параґрафу маємо

Нова вершина : 

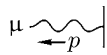
$= -ie\,\gamma^\mu;$

Фотонний пропаґатор : 

$= \dfrac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon};$

Зовнішні фотонні лінії : $A_\mu|\mathbf{p}\rangle =$ 

$= \varepsilon_\mu(p);$

$\langle \mathbf{p}| A_\mu =$ 

$= \varepsilon^*_\mu(p).$

Фотони зазвичай зображають хвилястими лініями. Символ $\varepsilon_\mu(p)$ задає *вектор поляризації* фотона в початковому або кінцевому стані.

Для виправдання цих правил нагадаємо, що в лоренцовому калібруванні (яке ми вибрали, щоб зберегти явну релятивістську інваріантність) рівняння поля для A_μ має вигляд

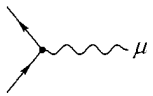
$$\partial^2 A_\mu = 0. \tag{4.130}$$

А отже, для кожного компонента A справедливе рівняння Кляйна–Ґордона (з $m = 0$). Рішеннями цього рівняння в імпульсному представленні будуть функції $\varepsilon_\mu(p)e^{-ip\cdot x}$, де $p^2 = 0$, а $\varepsilon_\mu(p)$ є довільним 4-вектором. Інтерпретація ε, як вектора поляризації поля має бути знайома з класичного електромаґнетизму. Розклавши квантоване електромаґнітне поле за набором класичних рішень хвильового рівняння, як це ми зробили для поля Кляйна–Ґордона, отримаємо

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_{r=0}^{3} \left(\mathrm{a}_\mathbf{p}^r \varepsilon_\mu^r(p)\, e^{-ip\cdot x} + \mathrm{a}_\mathbf{p}^{r\dagger} \varepsilon_\mu^{r*}(p)\, e^{ip\cdot x} \right), \tag{4.131}$$

де $r = 0, 1, 2, 3$ позначає базис векторів поляризації. Множники зовнішніх ліній у наведених вище фейнманових правилах негайно випливають з цього виразу достоту так, як ми отримали u і v в якості множників зовнішніх ліній для діракових часток. Єдиний нюанс полягає в тому, що треба обмежити початкові та кінцеві фотонні стани поперечно поляризованими. Вектори поляризації цих станів завжди мають вигляд $\varepsilon^\mu = (0, \boldsymbol{\varepsilon})$, де $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$. Для $\mathbf{p}$, спрямованого вздовж осі z, право- та лівополяризовані вектори є $\varepsilon^\mu = (0,\ 1,\ \pm i,\ 0)/\sqrt{2}$.

Вигляд вершинного множника в КЕД теж можна легко пояснити, розглянувши гамільтоніан взаємодії (4.129). Зазначимо, що γ-матриці в амплітудах КЕД завжди знаходяться між спінорами або іншими γ-матрицями з діраковими індексами, згорненими вздовж ферміонної лінії. Візьмемо також до уваги, що цей вид взаємодії стосується електрона (і його античастки — позитрона). Взагалі, для діракової частки з електричним зарядом $Q|e|$,



$$= -iQ|e|\gamma^\mu.$$

До прикладу, електрон має заряд $Q = -1$, верхній кварк — заряд $Q_u = +2/3$ і нижній кварк — $Q_d = -1/3$.

Не існує простого способу отримати формулу для пропаґатора фотона, тому поки обмежимося правдоподібними міркуваннями. Оскільки

електромаґнітне поле в лоренцовому калібруванні задовольняє безмасовому рівнянню Кляйна – Ґордона, то немає нічого дивного в тому, що пропаґатор фотона майже ідентичний пропаґатору безмасової частки Кляйна – Ґордона. Проте множник $-g_{\mu\nu}$ потребує пояснень. Лоренц-інваріантність вимагає, щоб пропаґатор фотона мав бути ізотропним тензором другого ранґу, який може згортатися на кожному кінці з вершинними матрицями γ^μ і γ^ν. Найпростіший кандидат — це $g^{\mu\nu}$. Для розуміння повного знаку пропаґатора, обчислимо його фур'є-перетворення:

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}\,e^{-iq\cdot(x-y)} = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{|\mathbf{q}|}\,e^{-iq\cdot(x-y)\cdot(-g_{\mu\nu})}. \tag{4.132}$$

Вірогідно цей вираз дорівнює $\langle 0|\,T[A_\mu(x),\,A_\nu(y)]\,|0\rangle$. Встановимо $\mu = \nu$ й візьмемо межу $x^0 \to y^0$ з позитивного напрямку. Тоді ця величина стає нормою стану $A_\mu(x)|0\rangle$, яка мусить бути позитивною. Ми бачимо, що наш вибір знаку в пропаґаторі вказує на те, що три стани, породжені A_i з $i = 1, 2, 3$ справді мають позитивну норму. Ці стани охоплюють усі реальні (не віртуальні) фотони, чия поляризація завжди простороподібна. На жаль, оскільки $g_{\mu\nu}$ не є позитивно визначеним, то стани, народжені полем A_0, неминуче мають неґативну норму. Потенційно це серйозна проблема для будь-якої теорії з векторними частками. Як ми покажемо в § 5.5, для квантової електродинаміки стани з неґативною нормою, породжені полем A_0, ніколи не виникають у фізичних процесах. У § 9.4 (Том II) буде наведено строге виведення виразу для фотонного пропаґатора.

Кулонів потенціал

Для демонстрації простого застосування фейнманових правил, а також для кращого розуміння знаку пропаґатора, повторимо обчислення для нерелятивістського розсіяння, що його ми провели в попередньому параґрафі, але цього разу в КЕД. Головний внесок в амплітуду є

$$i\mathcal{M} = $$ $$= (-ie)^2\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p'-p)^2}\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k). \tag{4.133}$$

У нерелятивістській межі

$$\bar{u}(p')\gamma^0 u(p) = u^\dagger(p')u(p) \approx +2m\,\xi'^\dagger\xi.$$

Можна легко переконатися, що інші внески $\bar{u}(p')\gamma^i u(p)$ зникають за умови $p = p' = 0$. Отже, ними можна знехтувати порівняно з $\bar{u}(p')\gamma^0 u(p)$ в

нерелятивістському випадку. Таким чином,

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} &\approx \frac{+ie^2}{-|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2}\,(2m\,\xi'\dagger\xi)_p(2m\,\xi'\dagger\xi)_k\cdot g_{00} = \\
&= \frac{-ie^2}{|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2}\,(2m\,\xi'^{\dagger}\xi)_p(2m\,\xi'^{\dagger}\xi)_k.
\end{aligned}
\tag{4.134}
$$

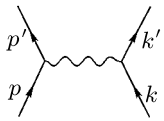
При порівнянні з теорією Юкави (4.123), бачимо, що присутній додатковий множник -1; тобто, потенціал є *відштовхувальним* потенціалом Юкави з $\mu_\phi = 0$. Звідси маємо відштовхувальний кулонів потенціал

$$
V(r) = \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{\alpha}{r}, \tag{4.135}
$$

де $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ — константа тонкої структури. Для розсіяння частка-античастка передовсім зазначимо, що

$$
\bar{v}(k)\gamma^0 v(k') = v^{\dagger}(k)v(k') \approx +2m\,\xi^{\dagger}\xi'.
$$

Наявність матриці γ^0 усуває знак мінус, який ми маємо в теорії Юкави. Отже, нерелятивістська амплітуда розсіяння:

$i\mathcal{M} =$ 

$$
= (-1)\cdot\frac{-ie^2}{|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2}\,(+2m\,\xi'\dagger\xi)_p(+2m\,\xi^{\dagger}\xi')_k, \tag{4.136}
$$

де множник -1 є тим самим ферміонним знаком мінус, що його ми мали в теорії Юкави. Це *притягувальний* потенціал. Відповідно, для антиферміон-антиферміонного розсіяння потенціал виявляється відштовхувальним. Таким чином, ми переконалися, що у квантовій теорії поля при обміні векторною часткою однакові заряди відштовхуються, тоді як протилежні притягуються. Зауважмо, що відштовхування у ферміон-ферміонному розсіянні виникло винятково через додатковий множник $-g_{00} = -1$ у пропаґаторі векторного бозона. Тензорний бозон, наприклад, ґравітон, мав би пропаґатор

$\mu\,\nu$ $\rho\,\sigma$
$$
= \frac{1}{2}\Big((-g_{\mu\rho})(-g_{\nu\sigma}) + (-g_{\mu\sigma})(-g_{\nu\rho})\Big)\left(\frac{i}{q^2+i\varepsilon}\right).
$$

який у нерелятивістських випадках давав би множник $(-g_{00})^2 = +1$, що призводить до універсального притягувального потенціалу. Це свідчить, що квантова теорія поля справді відтворює очевидні властивості електричних і ґравітаційних сил:

Частки обміну	ff і $\bar{f}\bar{f}$	$\bar{f}f$
скаляр (Юкава)	притягання	притягання
вектор (електрика)	відштовхування	притягання
тензор (ґравітація)	притягання	притягання

Задачі

4.1. Повернімося до проблеми народження часток Кляйна – Ґордона класичним джерелом. Нагадаємо, що згідно з Розділом 2 цей процес можна описати гамільтоніаном

$$H = H_0 + \int d^3\mathbf{x}\,(-j(t,\,\mathbf{x})\phi(x))\,,$$

де H_0 є вільний гамільтоніан Кляйна – Ґордона, $\phi(x)$ є поле Кляйна – Ґордона, а $j(x)$ — c-числова скалярна функція. Ми встановили, що в разі, якщо система до включення джерела перебувала у вакуумному стані, то середнє число часток, народжених джерелом, є

$$\langle N\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,\left|\tilde{j}(p)\right|^2.$$

У цій задачі ми перевіримо наведене твердження і отримаємо детальнішу інформацію, використовуючи розкладення в пертурбативний ряд за інтенсивністю джерела.

(a) Покажіть, що ймовірність того, що джерело не народжує *жодної* частки, є

$$P(0) = \left|\langle 0|\,T\left\{\exp\left[-\,i\int d^4x\,j(x)\phi_I(x)\right]\right\}|0\rangle\right|^2.$$

(b) Обчисліть член порядку j^2 у $P(0)$ і покажіть, що $P(0) = 1-\lambda + \mathcal{O}(j^4)$, де λ дорівнює виразу, заданому вище для $\langle N\rangle$.

(c) Зобразіть член, отриманий у пункті (b), у вигляді фейнманової діаґрами. Тепер представте весь пертурбативний ряд для $P(0)$ за допомогою діаґрам. Покажіть, що цей ряд утворює експоненту, тому може бути точно підсумований: $P(0) = \exp(-\lambda)$.

(d) Обчисліть імовірність того, що джерело народжує одну частку з імпульсом k. Проведіть це обчислення спершу з точністю $\mathcal{O}(j)$, а потім для всіх порядків, застосувавши прийом з пункту (c) для отримання суми рядів.

(e) Покажіть, що ймовірність народження n часток є

$$P(n) = \frac{1}{n!}\lambda^n \exp(-\lambda).$$

Це є *розподіл Пуассона*.

(f) Доведіть такі факти для розподілу Пуассона:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1; \qquad \langle N\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) = \lambda.$$

Перша тотожність вказує, що $P(n)$ є правильно нормовані ймовірності, тим часом як друге підтверджує наш висновок для $\langle N\rangle$. Обчисліть середнє квадратичне відхилення $\left\langle (1-\langle N\rangle)^2\right\rangle$.

4.2. Розпад скалярної частки. Розглянемо лаґранжіан з двома дійсними скалярними полями Φ та ϕ:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{1}{2}M^2\Phi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \mu\Phi\phi\phi.$$

Останній член є взаємодією, що дозволяє частці Φ розпадатися на дві частки ϕ за умови, що $M > 2m$. Припускаючи, що цю умову виконано, обчисліть час життя частки Φ в найнижчому порядку за μ.

4.3. Лінійна сиґма-модель. Взаємодію піонів при низькій енерґії можна описати феноменолоґічною моделлю, що називається *лінійною сиґма-моделлю*. Власне, ця модель складається з N дійсних скалярних полів, пов'язаних ϕ^4-взаємодією, симетричною відносно обертань N полів. Детальніше, нехай $\Phi^i(x) = 1, \dots, N$ є набором N полів з гамільтоніаном

$$H = \int d^3\mathbf{x}\left(\frac{1}{2}(\Pi^i)^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\Phi^i)^2 + V(\Phi^2)\right),$$

де $(\Phi^i)^2 = \boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Phi}$ і

$$V(\Phi^2) = \frac{1}{2}m^2(\Phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}\left((\Phi^i)^2\right)^2$$

є функцією, симетричною відносно обертань поля $\boldsymbol{\Phi}$. Для (класичних) конфіґурацій поля Φ^i, постійних у просторі та часі, лише цей вираз дає внесок у гамільтоніан H; отже, V є потенційною енерґією поля.

(Який стосунок має цей гамільтоніан до сильної взаємодії? Існує два типи легких кварків $\mathfrak{u}$ і $\mathfrak{d}$. Ці кварки ідентичні відносно сильної взаємодії, проте мають різні маси. Якщо кварки безмасові, то гамільтоніан сильної

взаємодії інваріантний відносно унітарних перетворень 2-компонентного об'єкта (u, d):

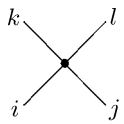
$$\begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{d} \end{pmatrix} \to \exp(i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2)\begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{d} \end{pmatrix}.$$

Це перетворення називається *ізоспіновим обертанням*. Крім того, якщо сильна взаємодія описується векторним „ґлюонним" полем (що є справедливим для КХД), гамільтоніан сильної взаємодії інваріантний відносно ізоспінових обертань, здійснюваних окремо для лівих і правих компонентів кваркових полів. Таким чином, повна симетрія в КХД з двома безмасовими кварками є $SU(2)\times SU(2)$. Відомо, що $SO(4)$, ґрупа обертань 4-вимірного простору, є ізоморфною ґрупі $SU(2)\times SU(2)$, тож для $N = 4$ лінійна сиґма-модель має ту ж ґрупу симетрії, що й сильна взаємодія.)

(a) Проаналізуйте лінійну сиґма-модель для $m^2 > 0$, зважаючи на те, що для $\lambda = 0$ наведений вище гамільтоніан є точною сумою гамільтоніанів N незалежних полів Кляйна–Ґордона. Тоді можна обчислити амплітуди розсіяння, як пертурбативний ряд за параметром λ. Покажіть, що пропаґатор дорівнює

$$\overbracket{\Phi^i(x)\,\Phi^j}(y) = \delta^{ij}\,D_F(x-y),$$

де D_F — стандартний пропаґатор Кляйна–Ґордона для маси m, і що є одна вершина, задана відповідно до правила:



$$= -2i\lambda(\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{il}\delta^{jk} + \delta^{ik}\delta^{jl}).$$

(це означає, що вершина між двома Φ^1 і двома Φ^2 має значення $-2i\lambda$; а між чотирма Φ^1 вершина має значення $-6i\lambda$.) Обчисліть у головному порядку за λ диференційний переріз $d\sigma/d\Omega$, у системі ЦМ для процесів розсіяння

$$\Phi^1\Phi^2 \to \Phi^1\Phi^2, \qquad \Phi^1\Phi^1 \to \Phi^2\Phi^2 \quad \text{і} \quad \Phi^1\Phi^1 \to \Phi^1\Phi^1$$

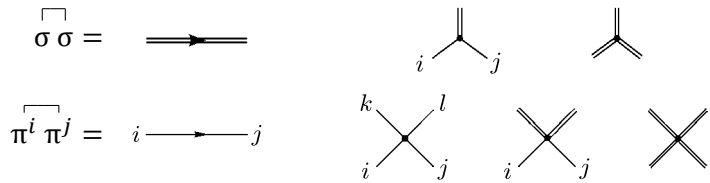
як функції енерґії центру мас.

(b) Тепер розглянемо випадок $m^2 < 0$: $m^2 = -\mu^2$. У цьому разі V має локальний максимум, а не мінімум. Оскільки V є потенційною енерґією, то основний стан теорії перебуває не поблизу $\Phi^i = 0$, а отримується при зсуві Φ^i у напрямку до мінімуму V. Внаслідок обертальної інваріантності можна припустити, що цей зсув відбуватиметься

в напрямку N-го компонента. Тоді запишемо

$$\Phi^i(x) = \pi^i(x), \quad i = 1, \dots, N-1,$$
$$\Phi^N(x) = v + \sigma(x),$$

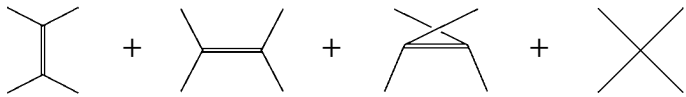
де v — константа, обрана з умови мінімізації V (тут π^i позначає піонне поле; не плутати з канонічним імпульсом). Покажіть, що в цих нових координатах (при підстановці замість v відповідного виразу через параметри λ та μ) отримуємо теорію з масивним полем σ і $N-1$ *безмасовими* піонними полями, що взаємодіють через складові в потенційній енерґії третього й четвертого степеня, які стають малими при $\lambda \to 0$. Створіть фейнманові правила, вказавши такі значення для пропаґаторів і вершин:



(c) Обчисліть амплітуду розсіяння для процесу

$$\pi^i(p_1)\pi^j(p_2) \to \pi^k(p_3)\pi^l(p_4)$$

у головному порядку за λ. Тут дають внесок чотири діаґрами



Покажіть, що на межі ($\mathbf{p}_i = 0$) сума цих діаґрам дає *нуль*. (Підказка: можливо, буде простіше спершу розглянути окремий процес $\pi^1\pi^1 \to \pi^2\pi^2$, для якого лише перша та четверта діаґрами ненульові, а потім переходити до загального випадку.) Покажіть, що для $N = 2$ (один сорт піонів) член порядку $\mathcal{O}(p^2)$ також скорочується.

(d) Додамо до V член, що порушує симетрію:

$$\Delta V = -a\Phi^N,$$

де a — (мала) константа. (В КХД такий член виникає, якщо u і d мають однакову ненульову масу.) Знайдіть нове значення v, що мінімізує V, і опишіть теорію поблизу цієї точки. Покажіть, що піон набуває маси порядку $m_\pi^2 \sim a$ і що піонна амплітуда розсіяння при пороговій енерґії тепер не зникає і також пропорційна a.

4.4. Резерфордове розсіяння. Переріз розсіяння електрона кулоновим полем ядра можна обчислити в найнижчому порядку без квантування електромаґнітного поля. Натомість розглядатимемо це поле, як класичний потенціал $A_\mu(x)$. Гамільтоніан взаємодії є

$$H_I = \int d^3\mathbf{x}\, e\, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\, A_\mu,$$

де $\psi(x)$ — звичайне квантоване діракове поле.

(a) Покажіть, що елемент T-матриці для електронного розсіяння на локалізованому класичному потенціалі в найнижчому порядку є

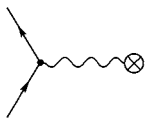
$$\langle p'|\, iT\, |p\rangle = -ie\, \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \cdot \widetilde{A}_\mu(p' - p),$$

де $\widetilde{A}_m u(q)$ — чотиривимірне фур'є-перетворення потенціалу $A_\mu(x)$.

(b) Якщо $A_\mu(x)$ не залежить від часу, то його фур'є-перетворення містить дельта-функцію від енерґії. Тоді природно визначити

$$\langle p'|\, iT\, |p\rangle \equiv i\mathcal{M} \cdot (2\pi)\delta(E_f - E_i),$$

де E_i і E_f є початковою та кінцевою енерґіями частки, і прийняти нове фейнманове правило для обчислення $\mathcal{M}$:



$$= -ie\, \gamma^\mu \widetilde{A}_\mu(\mathbf{q}),$$

де $\widetilde{A}_\mu(\mathbf{q})$ є тривимірне фур'є-перетворення $A_\mu(x)$. При такому означенні $\mathcal{M}$ покажіть, що переріз розсіяння на постійному в часі й локалізованому потенціалі є

$$d\sigma = \frac{1}{v_i}\frac{1}{2E_i}\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\left|\mathcal{M}(p_i \to p_f)\right|^2 (2\pi)\delta(E_f - E_i),$$

де v_i — початкова швидкість частки. Ця формула є природною модифікацією формули (4.79). Проінтеґруйте по $p_f|$, щоб знайти простий вираз для $d\sigma/d\Omega$.

(c) Розгляньте окремий випадок розсіяння електрона кулоновим потенціалом ($A^0 = Ze/4\pi r$). У нерелятивістському наближенні отримайте формулу Резерфорда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 Z^2}{4m^2 v^2 \sin^4(\theta/2)}.$$

(Якщо скористатися деякими обчислювальними прийомами з § 5.1, не виникає труднощів при розрахунку будь-яких перерізів розсіяння в релятивістському випадку; див. Задачу 5.1.)

Розділ 5

Елементарні процеси квантової електродинаміки

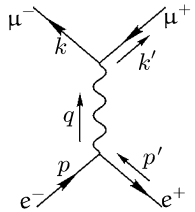
Врешті-решт, після трьох великих розділів, присвячених формалізму, ми готові здійснити низку справжніх релятивістських обчислень і розпочати вивчення передбачень КЕД. Спершу повернемося до до вже розглянутого в Розділі 1 процесу анігіляції електрон-позитронних пар у пари більш важких ферміонів. Цей засадничий процес ми детально розберемо в трьох наступних параґрафах. Відтак, у §§ 5.4 і 5.5 проведемо ще кілька простих розрахунків КЕД. Задачі наприкінці розділу стосуються деяких інших процесів, які описує квантова електродинаміка. Повніший виклад КЕД можна знайти в книгах [33] і [8].

§ 5.1. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$: вступ

Реакція $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ є найпростішою з усіх реакцій у КЕД і водночас однією з найважливіших у фізиці високих енерґій. Вона є фундаментальною для розуміння всіх реакцій, що відбуваються на e^+e^- колайдерах. Насправді саме цей процес використовується для калібрування колайдерів. Пов'язаний з ним процес $e^+e^- \to q\bar{q}$ (утворення пари кварк-антикварк) виявляється надзвичайно корисним при вивченні властивостей елементарних часток.

У цьому параґрафі ми обчислимо *неполяризований* переріз для $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ у найнижчому порядку теорії збурень. У Розділі 1, вдавшись до елементарних міркувань, ми вгадали відповідь (1.8) для граничного випадку, коли всі ферміони є безмасовими. Тепер можемо послабити цю умову і врахувати при обчисленнях масу мюона. Врахування маси електрона не набагато важче, але позбавлене сенсу, оскільки співвідношення $m_e/m_\mu \approx 1/200$ значно менше, ніж похибка, що її вносять члени вищого порядку пертурбативного ряду. Застосувавши фейнманові правила з

§ 4.8 можна зобразити діаґраму й виписати вираз для амплітуди процесу:



$$= \bar{v}^{s'}(p')\big(-ie\gamma^\mu\big)u^s(p)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\bar{u}^r(k)\big(-ie\gamma^\nu\big)v^{r'}(k').$$

Трохи переробивши цей вираз і вилучивши спінові індекси, одержимо

$$i\mathcal{M}(e^-(p)e^+(p') \to \mu^-(k)\mu^+(k')) = \frac{ie^2}{q^2}\big(\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\big)\big(\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')\big). \quad (5.1)$$

Цей результат для $\mathcal{M}$ має простий вигляд, але ще не надто ясний і зрозумілий.

Для обчислення диференційного перерізу мусимо отримати вираз для $|\mathcal{M}|^2$, а отже, слід знайти комплексно-спряжену величину до $\mathcal{M}$. Комплексне спряження добутку біспінорів на зразок $\bar{v}\gamma^\mu u$ можна провести так:

$$\big(\bar{v}\gamma^\mu u\big)^* = \bar{u}^\dagger\big(\gamma^\mu\big)^\dagger\big(\gamma^0\big)^\dagger v = \bar{u}^\dagger\big(\gamma^\mu\big)^\dagger\gamma^0 v = \bar{u}^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v.$$

(Ще одне свідчення зручності використання діракового спряження.) Отже, квадрат матричного елемента:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4}\big(\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu v(p')\big)\big(\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')\bar{v}(k')\gamma_\nu u(k)\big). \quad (5.2)$$

Ми досі вільні у виборі конкретних спінорів $u^s(p)$, $\bar{v}^s(p)$ і т. д., що відповідають будь-якому бажаному спіновому стану ферміонів. Проте в реальних експериментах важко (хоча, в принципі, можливо) контролювати спінові стани. Для цього треба підготувати початковий стан з поляризованих часток і/або аналізувати кінцевий стан, використовуючи залежне від спіну багаторазове розсіяння. У більшості дослідів електронні та позитронні пучки не поляризовані, тому вимірюваний переріз є *середнім* за спінами електрона та позитрона s і s'. Мюонні детектори зазвичай неспроможні визначити поляризацію, тому вимірюваний переріз є *сумою* за спінами мюонів r і r'.

Якщо таким чином позбутися інформації про спіни, вираз для $|\mathcal{M}|^2$ стає істотно простішим. Ми хочемо обчислити

$$\tfrac{1}{2}\sum_s \tfrac{1}{2}\sum_{s'}\sum_r\sum_{r'}\big|\mathcal{M}(s,s' \to r,r')\big|^2.$$

Сума за спінами проводиться із застосуванням співвідношень повноти (§ 3.3):

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m; \quad \sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \not{p} - m. \tag{5.3}$$

Виписавши явно спінові індекси в першому множнику (5.2), щоб вільно переставити v до $\bar{v}$, маємо

$$\sum_{s,s'} \bar{v}_a^{s'}(p')\gamma^\mu_{ab}u_b^s(p)\bar{u}_c^s(p)\gamma^\nu_{cd}u_d^{s'}(p') = (\not{p}' - m)_{da}\gamma^\mu_{ab}(\not{p} + m)_{bc}\gamma^\nu_{cd} =$$
$$= \mathrm{Tr}\left[(\not{p}' - m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu\right].$$

Аналоґічно вчинивши з другим множником, ми дійдемо до бажаного нами спрощення:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4}\,\mathrm{Tr}\left[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu(\not{p} + m_e)\gamma^\nu\right] \times \\ \times \mathrm{Tr}\left[(\not{k}' - m_\mu)\gamma_\mu(\not{k} + m_\mu)\gamma_\nu\right].\end{aligned} \tag{5.4}$$

Спінори u і v зникли, залишивши нас із чітким та зрозумілим виразом, записаним через γ-матриці. Така процедура має загальний характер: будь-яка амплітуда КЕД, що містить зовнішні ферміони, після піднесення до квадрату й підсумовування або усереднення за спінами набуває вигляду сліду від добутку діракових матриць.

Технолоґія слідів

Цей останній крок навряд чи призвів би до суттєвого покращення ситуації, якби нам довелося брати сліди матриць безпосередньо. Проте Фейнман виявив, що можна значно спростити роботу, скориставшись алґебраїчними властивостями γ-матриць. Оскільки обчислення таких слідів є важливою частиною практичних розрахунків у КЕД, то ми зробимо відступ, щоб ґрунтовно розібратися з цим питанням.

Отже, ми хочемо обчислити слід від добутку n ґамма-матриць, де $n = 0, 1, 2, \ldots$. (Для нашої мети потрібно $n = 2, 3, 4$.) Випадок $n = 0$ надзвичайно простий: $\mathrm{Tr}\,\mathbf{1} = 4$. Взяти слід від однієї γ-матриці також легко. З явного вигляду матриць у киральному представленні маємо

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Буде корисно одержати цей результат абстрактнішим шляхом, який можна узагальнити для будь-якої непарної кількості γ-матриць:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\gamma^\mu &= \operatorname{Tr}\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu && \text{(оскільки } (\gamma^5)^2 = 1\text{)}\\
&= -\operatorname{Tr}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5 && \text{(оскільки } \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0\text{)}\\
&= -\operatorname{Tr}\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu && \text{(використана циклічна властивість сліду)}\\
&= -\operatorname{Tr}\gamma^\mu.
\end{aligned}$$

Оскільки слід від γ^μ дорівнює самому собі зі знаком мінус, то він є нульовим. Для n γ-матриць ми отримаємо n мінусів на другому кроці (коли переставляємо другу матрицю γ^5 направо), тому слід дорівнює нулю, якщо n є непарним.

Щоб узяти слід від добутку двох γ-матриць, знову скористаємося його антикомутаційними та циклічними властивостями:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\gamma^\mu\gamma^\nu &= \operatorname{Tr}\left(2g^{\mu\nu}\cdot\mathbf{1} - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) && \text{(антикомутація)}\\
&= 8g^{\mu\nu} - \operatorname{Tr}\gamma^\mu\gamma^\nu && \text{(циклічна перестановка).}
\end{aligned}$$

Звідси $\operatorname{Tr}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}$. Таким самим чином можна взяти слід від будь-якої парної кількості γ-матриць: треба переставити першу γ-матрицю через решту направо, застосувавши співвідношення антикомутації, після чого, скориставшись циклічною властивістю, повернути її наліво. Так, для сліду чотирьох γ-матриць маємо

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) &= \operatorname{Tr}\left(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) =\\
&= \operatorname{Tr}\left(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma + \gamma^\nu\gamma^\rho 2g^{\mu\sigma} - \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\right).
\end{aligned}$$

Застосувавши циклічність до останнього доданка і перемістивши його в ліву частину рівняння, ми знайдемо

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) &= g^{\mu\nu}\operatorname{Tr}\gamma^\rho\gamma^\sigma - g^{\mu\rho}\operatorname{Tr}\gamma^\nu\gamma^\sigma + g^{\mu\sigma}\operatorname{Tr}\gamma^\nu\gamma^\rho =\\
&= 4\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right).
\end{aligned}$$

Цим способом завжди можна звести слід від n γ-матриць до суми слідів від $(n-2)$ γ-матриць. Неважко вивести вираз для $n = 6$, проте він містить п'ятнадцять членів (кількість способів ґрупування шести індексів на пари, щоб отримати доданки $g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}$). На щастя, ніде в нашому курсі це не знадобиться. (А проте, якщо у вас виникне потреба обчислювати складні сліди, можливо, буде корисно навчитися працювати з однією з комп'ютерних проґрам, що вміють маніпулювати діраковими матрицями.)

Починаючи з § 5.2, нам часто доведеться брати сліди, що містять матрицю γ^5. Оскільки $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, то слід від добутку γ^5 на будь-яку непарну кількість інших γ-матриць дорівнює нулю. Також легко показати, що слід від самої γ^5 є нульовим:

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^5 = \mathrm{Tr}\left(\gamma^0\gamma^0\gamma^5\right) = -\,\mathrm{Tr}\left(\gamma^0\gamma^5\gamma^0\right) = -\,\mathrm{Tr}\left(\gamma^0\gamma^0\gamma^5\right) = -\,\mathrm{Tr}\,\gamma^5.$$

Такий прийом спрацьовує і для $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5)$, якщо вставити два множники γ^α з індексом α, що відрізняється від μ та ν. Перший ненульовий слід з γ^5 дає добуток, який містить чотири інші γ-матриці з *різними* значеннями індексів, а в іншому раз, коли (μνρσ) не є перестановкою від (0123), $\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5 = 0$. З правил антикомутації також випливає, що перестановка будь-яких двох індексів призводить просто до зміни знаку сліду, тож $\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5$ є пропорційним $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Константа пропорційності дорівнює $-4i$, що легко перевірити підстановкою $(\mu\nu\rho\sigma) = (0123)$.

Отже, для зручності зведемо всі наші результати для слідів:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(\mathbf{1}\right) &= 4,\\
\mathrm{Tr}\left(\text{непарна кількість } \gamma\right) &= 0,\\
\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) &= 4g^{\mu\nu},\\
\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) &= 4\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right),\\
\mathrm{Tr}\left(\gamma^5\right) &= 0,\\
\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\right) &= 0,\\
\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5\right) &= -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Вирази, одержані із застосуванням останньої формули, можна істотно спростити за допомогою наступних тотожностей:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -24,\\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} &= -6\delta^\mu{}_\nu,\\
\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2\left(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho\right).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Їх легко вивести, вдавшись до міркувань симетрії і зробивши явне обчислення в окремому випадку для визначення спільної константи. Ще одна корисна тотожність дозволяє обернути порядок γ-матриць під знаком сліду:

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\cdots\right) = \mathrm{Tr}\left(\cdots\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu\right). \tag{5.7}$$

Для доведення цього співвідношення розглянемо матрицю $C \equiv \gamma^0\gamma^2$ (оператор зарядового спряження). Вона задовольняє умовам $C^2 = 1$ і

$C\gamma^\mu C = -\left(\gamma^\mu\right)^T$. Таким чином, якщо ми маємо n γ-матриць під знаком сліду, то

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots\right) &= \mathrm{Tr}\left(C\gamma^\mu CC\gamma^\nu C\ \cdots\right) = \\ &= (-1)^n\,\mathrm{Tr}\left[\left(\gamma^\mu\right)^T\left(\gamma^\nu\right)^T\cdots\right] = \\ &= \mathrm{Tr}\left(\cdots\gamma^\nu\gamma^\mu\right).\end{aligned}$$

оскільки слід є нульовим у разі непарного n. Легко показати, що тотожність (5.7) також справедлива, якщо слід містить одну або більше матриць γ^5.

Коли під слідом знаходиться скалярний добуток двох γ-матриць, їх можна легко виключити ще до обчислення самого сліду. Наприклад,

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\{\gamma^\mu,\,\gamma^\nu\} = g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4. \tag{5.8}$$

Наступні *тотожності згортання*, які легко доводяться за допомогою співвідношень антикомутації, можна застосовувати, коли між скалярним добутком двох γ-матриць знаходяться інші діракові матриці:

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu,\\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho},\\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Відзначимо зворотний порядок індексів у останній тотожності.

Неполяризований переріз

А зараз повернімося до виразу для квадрату матричного елемента (5.4). Перший слід, „електрон-позитронний“, є

$$\mathrm{Tr}\left[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu(\not{p} + m_e)\gamma^\nu\right] = 4\left[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu}(p\cdot p' + m_e^2)\right].$$

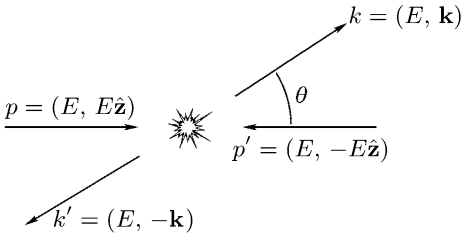
Члени першого порядку за m обертаються на нуль, бо містять непарну кількість γ-матриць. Це справедливо і для „мюонного“ сліду:

$$\mathrm{Tr}\left[(\not{k} + m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}' - m_\mu)\gamma_\nu\right] = 4\left[k_\mu k_\nu' + k_\nu k_\mu' - g^{\mu\nu}(k\cdot k' + m_\mu^2)\right].$$

Відтак встановимо $m_e = 0$, про що ми вже домовлялися на початку цього параґрафу. Перемноживши ці два вирази і зґрупувавши всі члени, маємо простий результат:

$$\tfrac{1}{4}\sum_{\text{спіни}}|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4}\left[(p\cdot k)(p'\cdot k') + (p\cdot k')(p'\cdot k) + m_\mu^2(p\cdot p')\right]. \tag{5.10}$$

Для отримання більш явної формули слід обрати спеціальну систему відліку і записати вектори p, p', k, k', q у термінах основних кінематичних змінних — енерґій та кутів розсіяння — у цій системі. На практиці вибір системи відліку диктують умови експерименту, але ми, як правило, обиратимемо найзручнішу для нас систему центру мас й обчислюватимемо в ній перерізи розсіяння. У цій системі початкові та кінцеві 4-імпульси для реакції $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ можна записати наступним чином:



$$|\mathbf{k}| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$$

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{z}} = |\mathbf{k}| \cos\theta$$

Для обчислення квадрату матричного елемента нам знадобляться такі співвідношення:

$$q^2 = (p + p')^2 = 4E^2; \qquad p \cdot p' = 2E^2;$$
$$p \cdot k = p' \cdot k' = E^2 - E|\mathbf{k}|\cos\theta; \qquad p \cdot k' = p' \cdot k = E^2 + E|\mathbf{k}|\cos\theta.$$

Тепер ми можемо переписати (5.10) у термінах E та θ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{16E^4}\Big[E^2(E - |\mathbf{k}|\cos\theta)^2 + \\ &\quad + E^2(E + |\mathbf{k}|\cos\theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2\Big] = \\ &= e^4\left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right]. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Нам залишається підставити цей вираз у формулу для перерізу, отриману в § 4.5. Оскільки в кінцевому стані ми маємо лише дві частки і працюємо в системі ЦМ, то можемо використати спрощену формулу (4.84). У нашій задачі $|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}| = 2$ і $E_{\mathcal{A}} = E_{\mathcal{B}} = E_{\text{цм}}/2$, отже

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2E_{\text{цм}}^2}\frac{|\mathbf{k}|}{16\pi^2 E_{\text{цм}}} \cdot \frac{1}{4}\sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \\ &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{цм}}^2}\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}\left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Інтеґруючи по $d\Omega$ знаходимо повний переріз:

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{цм}}^2}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}}\left(1+\frac{m_\mu^2}{E^2}\right). \tag{5.13}$$

У межі високих енерґій, коли $E \gg m_\mu$, ці формули дають результат, який ми одержали в Розділі 1:

$$\begin{gathered}\frac{d\sigma}{d\Omega} \xrightarrow[E\gg m_\mu]{} \frac{\alpha^2}{4E_{\text{цм}}^2}\left(1+\cos^2\theta\right);\\ \sigma_{\text{total}} \xrightarrow[E\gg m_\mu]{} \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{цм}}^2}\left(1-\frac{3}{8}\left(\frac{m_\mu}{E}\right)-\cdots\right).\end{gathered} \tag{5.14}$$

Відзначимо, що ці вирази мають правильну розмірність перерізу. В наближенні високих енерґій $E_{\text{цм}}$ залишається єдиним розмірним параметром у задачі, тому аналіз розмірності вимагає, щоб $\sigma_{\text{total}} \propto E_{\text{цм}}^{-2}$. Оскільки ми від самого початку знали, що $\sigma_{\text{total}} \propto \alpha^2$, то вся наша робота зводилася до визначення множника $4\pi/3$.

Залежність повного перерізу від енерґії за формулою (5.13) біля порогу реакції показано на Рис. 5.1. Певна річ, переріз стає нульовим при

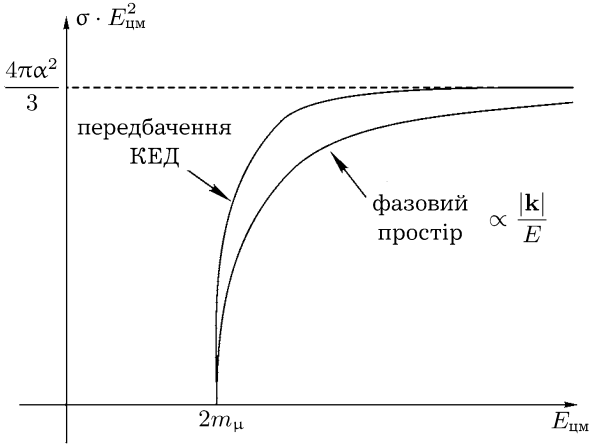


Рис. 5.1. Залежність від енерґії повного перерізу розсіяння для $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ порівняно з енерґетичною залежністю „фазового простору“.

$E_{\text{цм}} < 2m_\mu$. Цікаво порівняти наявну криву з тією, яку можна отримати з припущення, що квадрат матричного елемента не залежить від енерґії, а

вся така залежність виникає з фазового об'єму $|\mathbf{k}|/E$. Для перевірки квантової електродинаміки експеримент має бути здатним визначати відхилення від наївних „фазово-просторових" розрахунків. Результати дослідів з народження пар μ і τ лептонів підтверджують, що ці частки поводяться відповідно до передбачень КЕД. На Рис. 5.2 формула (5.13) порівнюється з експериментальними даними біля порогу народження $\tau^+\tau^-$.

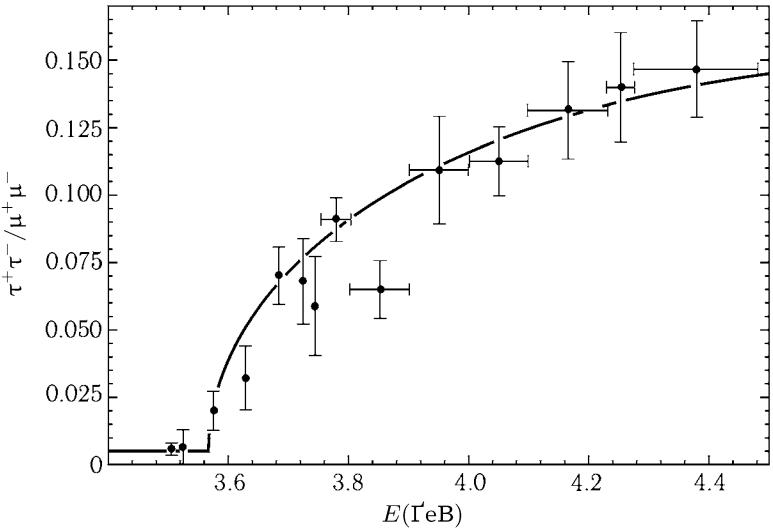


Рис. 5.2. Співвідношення $\sigma(e^+e^- \to \tau^+\tau^-)/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$ біля порогу народження пар $\tau^+\tau^-$ за даними колаборації DELCO (W. Bacino, et. al., *Phys. Rev. Lett.* 41, 13 (1978)). Враховано лише τ-розпади, тому загальний масштаб малий. Крива узгоджується з теоретичною формулою (5.13) з невеликою поправкою на наявність незалежного від енерґії фону. Обробка результатів дає $m_\tau = 1782^{+2}_{-7}$ МеВ.

Перед подальшим обговоренням наших результатів зробимо паузу і повторимо всі етапи їх одержання. Цей метод безпосереднім чином поширюється на обчислення неполяризованих перерізів для інших процесів КЕД. Загальна процедура є такою:

1. Зображаємо діаґрами потрібного процесу.

2. Застосовуємо фейнманові правила, щоб написати вираз для амплітуди $\mathcal{M}$.

3. Підносимо його до квадрату й усереднюємо або підсумовуємо за спіновими станами, використовуючи співвідношення повноти

(5.3). (Для процесів за участю фотонів існують аналоґічні співвідношення повноти, які ми виведемо в § 5.5.)

4. Обчислюємо сліди на підставі теорем (5.5), зґруповуємо члени і максимально спрощуємо результат.

5. Переходимо до спеціальної системи відліку і зображаємо картину кінематичних змінних у цій системі. Виписуємо всі вектори 4-імпульсів через зручний набір змінних на зразок E та θ.

6. Підставляємо остаточний вираз для квадрату матричного елемента у формулу для перерізу (4.79) й інтеґруємо по тих змінних у фазовому просторі, які не вимірюються в експерименті, для отримання диференційного перерізу в належному вигляді. (У нашому випадку інтеґрування проводилося по імпульсах $\mathbf{k}'$ і $|\mathbf{k}|$ при виведенні формули (4.84).)

Хоча інші обчислення (а надто ж ті, що містять петельні діаґрами) часто потребують додаткових прийомів, мало які розрахунки в КЕД обходяться без наведених тут основних процедур.

Народження пар кварк-антикварк

Асимптотична залежність від енерґії формули для перерізу процесу $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ встановлює масштаб для всіх перерізів e^+e^--анігіляції. Особливо важливим прикладом є переріз для

$$e^+e^- \to \text{адрони},$$

тобто повний переріз утворення довільної кількості часток, що беруть участь у сильній взаємодії.

За сучасними уявленнями про сильну взаємодію, що випливають з теорії, яка називається квантовою хромодинамікою (КХД), всі адрони складаються з діракових ферміонів, *кварків*. Кварки поділяються на різні типи, названі *ароматами*, також кожен з них має певну масу та електричний заряд. Крім того, у кожного кварка є ще одне квантове число, *колір*, яке може набувати одного з трьох значень. Як ми побачимо в Розділі 17, колір у КХД відіграє таку ж роль, що й електричний заряд у КЕД.

Відповідно до КЕД, найпростішим e^+e^--процесом, що призводить до народження адронів, є

$$e^+e^- \to q\bar{q},$$

анігіляція електрона та позитрона через віртуальний фотон з утворення пари кварк-антикварк. Після свого народження ці кварки сильно взаємодіють між собою, утворюючи нові кваркові пари, які зрештою об'єднуються в певну кількість мезонів та баріонів.

Щоб перенести результати з утворення мюонів на процес за участю кварків, ми маємо вдатися до таких модифікацій:

1. Замінити електричний заряд мюона e на електричний заряд кварка $Q|e|$;

2. Врахувати кожен кварк тричі — по одному разу на кожен колір;

3. Включити ефекти сильної взаємодії для народженої пари кварк-антикварк.

З першими двома змінами впоратися досить легко. Для врахування першого пункту треба просто знати маси та заряди кожного кваркового аромату. Для u-, c-, і t-кварків маємо $Q = {}^2/_3$, а для d-, s-, і b-кварків — $Q = -{}^1/_3$. Формули для перерізу пропорційні квадрату заряду частки в кінцевому стані, тому ми можемо просто вставити множник Q^2 у будь-яку з цих формул і отримаємо переріз для народження кожного різновиду кварків. Врахування кольору необхідно з тієї причини, що в експериментах вимірюється лише повний переріз народження кварків усіх трьох кольорів. (Адрони, що фіксуються детекторами, безбарвні.) В кожному разі, цей підрахунок простий: досить помножити відповідь на 3.

А проте, якщо ви бодай трохи знаєте про сильну взаємодію, то можете подумати, що все це лише невдалий жарт. Зрозуміло, що здійснити третю модифікацію надзвичайно важко, і вона радикальним чином змінить розрахунки КЕД! Та хоч як це не дивно, але в наближенні високих енерґій впливом сильної взаємодії на процес народження кварків можна цілком знехтувати. Як ми з'ясуємо в третьому томі, єдиним ефектом від сильної взаємодії в цьому наближенні є *одягання* кварків у кінцевому стані з утворенням адронних пучків. Таке спрощення пояснюється явищем, яке називається *асимптотичною свободою*; воно відіграє провідну роль у визнанні квантової хромодинаміки правильною теорією сильної взаємодії.

Отже, в межі високих енерґій ми очікуємо, що переріз реакції $e^+e^- \to q\bar{q}$ наближатиметься до $3 \cdot Q^2 \cdot 4\pi\alpha^2/3E_{\text{цм}}$. Для таких процесів прийнято використовувати

$$1 \text{ одиниця } R \equiv \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{цм}}^2} = \frac{86,8 \text{ нбарн}}{(E_{\text{цм}} \text{ у ГеВ})^2}. \tag{5.15}$$

Тобто, величина перерізу в одиницях R визначається його співвідношенням до асимптотичного значення перерізу $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, одержаного за формулою (5.14). В експериментах найпростіше виміряти повну ймовірність народження всіх можливих типів адронів. У високоенерґетичному наближенні ми очікуємо, що

$$\sigma(e^+e^- \to \text{адрони}) \xrightarrow[E_{\text{цм}}\to\infty]{} 3 \cdot \left(\sum_i Q_i^2\right) R, \tag{5.16}$$

де сума береться за всіма типами (ароматами) кварків, чиї маси менші від $E_{\text{цм}}/2$. Коли значення $E_{\text{цм}}/2$ наближається до маси одного з кварків, сильна взаємодія призводить до істотних відхилень від цієї формули. Найвиразніше цей ефект виявляється в утворенні *зв'язаних станів* при значенні енерґії трохи меншій, ніж $E_{\text{цм}} = 2m_{\text{q}}$, що призводить до виникнення дуже гострих піків у величині перерізу.

Експериментальні результати для перерізу e^+e^--анігіляції з народженням адронів при енерґіях від 2, 5 до 40 ҐеВ показані на Рис. 5.3. Дані утворюють три чіткі зони: зону низьких енерґій, де народжуються пари u-, d-, і s-кварків; зону за порогом народження пар c-кварків; зону за порогом народження пар b-кварків. Результати, одержані з формули (5.16), зображено суцільною лінією; вони добре узгоджуються в кожній зоні з дослідними даними, поки енерґія далека від порогів, де високоенерґетичне наближення стає непридатним. Пунктирною лінією показано теоретичні розрахунки з поправками вищих порядків квантової хромодинаміки, які ми розглянемо в § 17.2 (Том III). Пояснення величини перерізу e^+e^--анігіляції є визначним успіхом КХД. Зокрема, експериментальне підтвердження множника 3 у (5.16) вважається одним з доказів існування кваркового кольору.

Залежність диференційного перерізу анігіляції від кута також спостерігалася експериментально[19]. При високих енерґіях народжені адрони утворюють *струмені*, тобто скупчення кількох адронів, що рухаються приблизно в одному напрямку. У більшості випадків присутні два струмені з протилежними імпульсами, і їхній розподіл справді має кутову залежність $(1 + \cos^2\theta)$.

[19] Ґрунтовний огляд утворення адронів у високоенерґетичних процесах e^+e^--анігіляції можна знайти в P. Duinker, *Rev. Mod. Phys.* 54, 325 (1982).

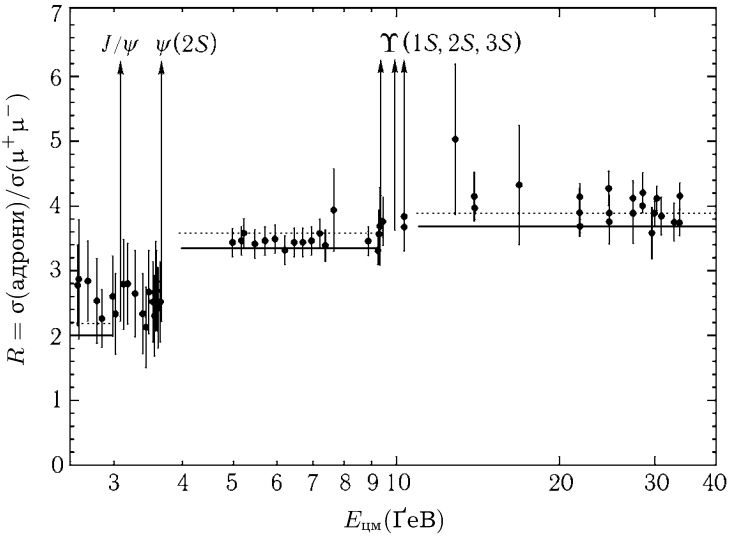


Рис. 5.3. Експериментальні результати для перерізу реакції $e^+e^- \to$ адрони на підставі даних, узагальнених у M. Swartz, *Phys. Rev.* D53, 5268. У статті присутні вичерпні посилання на різні експерименти. Вимірювання порівнюються з розрахунками квантової хромодинаміки (див. у тексті). Суцільна лінія відображає прості обчислення за формулою (5.16).

§ 5.2. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$: спіральна структура

Неполяризований переріз реакції загалом нескладно обчислити (і виміряти), проте його важко інтерпретувати. Що означає кутова залежність $(1 + \cos^2\theta)$? Ми знайдемо відповідь на це питання, обчисливши переріз процесу $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ окремо для кожного набору спінових орієнтацій.

Насамперед слід обрати базис поляризованих станів. Для отримання простої відповіді в наближенні високих енерґій найкращим варіантом буде квантувати кожний спін за напрямком руху частки, тобто використовувати стани з визначеною спіральністю. Згадаймо, що в межі нульових мас діракові частки з правою та лівою спіральністю перетворюються за різними представленнями ґрупи Лоренца. Отже, ми можемо сподіватися, що вони поводяться незалежно. Так насправді і є.

У цьому параґрафі ми розрахуємо поляризований переріз реакції $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ у спіральному базисі двома різними способами. Перший — із застосуванням техніки обчислення слідів і операторів проектування на стані з визначеною спіральністю. Другий — безпосередньо підставивши у формулу для амплітуди $\mathcal{M}$ явні вирази для спінорів. Впродовж усього

параґрафу ми працюватимемо у високоенерґетичному наближенні, коли всі ферміони ефективно безмасові. (Можна провести обчислення і для низьких енерґій, проте технічно вони набагато складніші, а їх результати не стануть від того повчальнішими.)[20]

Відправним пунктом для обох методів обчислення поляризованого перерізу є вираз (5.1) для амплітуди розсіяння. З міркувань зручності ми наводимо його ще раз:

$$i\mathcal{M}(e^-(p)e^+(p') \to \mu^-(k)\mu^+(k')) = \frac{ie^2}{q^2}\big(\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\big)\big(\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')\big). \quad (5.1)$$

Як і раніше, ми хочемо використати тотожності для спінових сум і записати квадрат амплітуди через сліди, але наразі збираємося розглядати кожен набір поляризацій окремо. Щоб зробити це, відзначимо, що для безмасових ферміонів матриці

$$\frac{1+\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1-\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

є *проекційними операторами* на праві та ліві спінори відповідно. Отже, для правополяризованого електрона у (5.1) справедлива тотожність:

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{v}(p')\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u(p).$$

(І, відповідно, аналоґічна тотожність, зі знаком мінус перед γ^5 має місце для лівополяризованого електрона.) А оскільки

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u(p) = v^\dagger(p')\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\gamma^0\gamma^\mu u(p), \quad (5.18)$$

то для правого спінора $u(p)$ вираз $\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)$ буде ненульовим лише за умови, що $v(p')$ також є правим спінором. Як ми встановили у § 3.5, правий спінор $v(p')$ відповідає *лівополяризованому* позитрону, тому амплітуда анігіляції стає нульовою (у безмасовому наближенні, ще раз підкреслюємо), якщо електрон і позитрон правополяризовані. Схожим чином можна показати, що вона обертається на нуль і для лівополяризованих електрона та позитрона. З цього випливає, що (5.1) відрізняється від нуля лише тоді, коли електрон та позитрон мають протилежні спіральності — або, що еквівалентно, відповідні їм спінори мають однакову спіральність.

[20] Загальний формалізм для S-матриці між станами визначеної спіральності викладено в чудовій статті M. Jacob and G. C. Wick, *Ann. Phys.* 7, 404 (1959).

Зробивши підстановку проекційних операторів, ми можемо взяти суму за спінами електрона й позитрона у квадраті амплітуди. З чотирьох членів у цій сумі лише один (саме той, що нам потрібен) не є нульовим. Електронна частина $|\mathcal{M}|^2$ для правополяризованого електрона і лівополяризованого позитрона є

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{спіни}}\left|\bar{v}(p')\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u(p)\right|^2 = \\
&\quad = \sum_{\text{спіни}} \bar{v}(p')\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u(p)\,\bar{u}(p)\gamma^\nu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)v(p') = \\
&\quad = \mathrm{Tr}\left[\not{p}'\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\not{p}\gamma^\nu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\right] = \\
&\quad = \mathrm{Tr}\left[\not{p}'\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\right] = \\
&\quad = 2\left(p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu}p\cdot p' - i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}p'_\alpha p_\beta\right).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Індекси μ та ν в цьому виразі мають згорнутися з відповідними індексами мюонної частини квадрату амплітуди при перемноженні цих двох частин. Для лівополяризованого μ^+ і правополяризованого μ^- таке ж саме обчислення дає

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{спіни}}\left|\bar{u}(k')\gamma_\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)v(k)\right|^2 = \\
&\qquad = 2\left(k_\mu k'_\nu + k^\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}k\cdot k' - i\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}k^\rho k'\sigma\right).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Помноживши (5.19) на (5.20), знаходимо, що квадрат амплітуди для $e^-_R e^+_L \to \mu^-_R \mu^+_L$ у системі ЦМ є

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{q^4}\Big[2(p\cdot k)(p'\cdot k') + 2(p\cdot k')(p'\cdot k) - \\
&\qquad - \varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}p'_\alpha p_\beta k^\rho k'\sigma\Big] = \\
&= \frac{8e^4}{q^4}\Big[(p\cdot k)(p'\cdot k') + (p\cdot k')(p'\cdot k) - \\
&\qquad - (p\cdot k)(p'\cdot k') + (p\cdot k')(p'\cdot k)\Big] = \\
&= \frac{16e^4}{q^4}(p\cdot k')(p'\cdot k) = \\
&= e^4(1+\cos\theta)^2.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Підставивши цей результат у (4.85) маємо диференційний переріз:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(e_R^- e_L^+ \to \mu_R^- \mu_L^+\right) = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{цм}}^2}(1+\cos\theta)^2. \tag{5.22}$$

Немає потреби повторювати обчислення, щоб отримати інші три ненульові спіральні амплітуди. До прикладу, квадрат амплітуди для $e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+$ є майже ідентичним (5.20) за винятком знаку мінус перед γ^5 у лівій його частині, а, отже, у правій треба замінити $\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}$ на $-\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}$. Врахувавши цю заміну в (5.21), ми побачимо, що

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+\right) = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{цм}}^2}(1-\cos\theta)^2. \tag{5.23}$$

Так само,

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(e_L^- e_R^+ \to \mu_R^- \mu_L^+\right) &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{цм}}^2}(1-\cos\theta)^2;\\ \frac{d\sigma}{d\Omega}\left(e_L^- e_R^+ \to \mu_L^- \mu_R^+\right) &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{цм}}^2}(1+\cos\theta)^2.\end{aligned} \tag{5.24}$$

(Ці два результати насправді випливають із двох попередніх завдяки P-інваріантності.) Як ми бачили з (5.18), решта дванадцять спіральних перерізів (наприклад для $e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_L^+$) дорівнюють нулю. Підсумувавши всі шістнадцять внесків і розділивши на 4 для усереднення за спінами електрона та позитрона, ми ми знову одержимо вираз (5.14) для неполяризованого перерізу в безмасовому наближенні.

Зазначимо, що переріз (5.22) для $e_R^- e_L^+ \to \mu_R^- \mu_L^+$ стає нульовим при $\theta = 180°$. Це саме те, чого ми очікували, оскільки для $\theta = 180°$ повний момент імпульсу кінцевого стану є протилежним до моменту імпульсу початкового стану (див. Рис. 5.4).

На цьому завершується наше перше обчислення поляризованого перерізу для $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Тепер ми повторимо наші розрахунки іншим способом — прямішим, яснішим і менш складним. Обчислюватимемо амплітуду $\mathcal{M}$ (що є краще, ніж її квадрат) безпосередньо, з використанням явних виразів для спінорів і γ-матриць. Цей метод має свої недоліки: по-перше, він змушує нас уже від самого початку обрати певну систему відліку, через що втрачається явна лоренц-інваріантність; по-друге, з практичного погляду він дуже громіздкий, за винятком наближень у нерелятивістській та ультрарелятивістській межі.

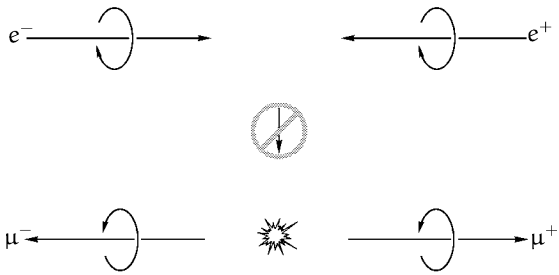


Рис. 5.4. Збереження моменту імпульсу вимагає, щоб при вимірюванні його складової уздовж осі z вона мала таке ж значення, що й на початку.

Знову розглянемо амплітуду

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2}\Big(\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\Big)\Big(\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')\Big). \tag{5.25}$$

У високоенерґетичному наближенні наші загальні вирази для діракових спінорів стають такими:

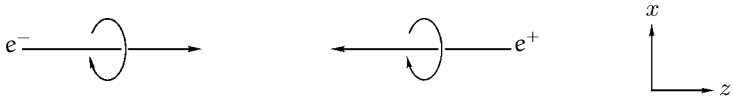
$$\begin{aligned} u(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix} \xrightarrow[E\to\infty]{} \sqrt{2E}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi \\ \frac{1}{2}(1+\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi \end{pmatrix}; \\ v(p) &= \begin{pmatrix} -\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix} \xrightarrow[E\to\infty]{} \sqrt{2E}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1-\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi \\ -\frac{1}{2}(1+\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Правий спінор задовольняє умові $(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi = +\xi$, а лівий — $(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi = -\xi$. (Ще раз нагадаємо, що для античасток поляризація спінора протилежна поляризації самої частки.) Ми маємо обчислити вирази вигляду $\bar{v}\gamma^\mu u$, тому нам знадобиться формула

$$\gamma^0\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

Відтак ми ясно бачимо, що амплітуда є нульовою, якщо один зі спінорів правий, а інший лівий. За термінологією Розділу 1, коефіцієнти Клебша–Ґордана, що зв'язують векторний фотон з добутком таких спінорів, дорівнюють нулю; власне, ці коефіцієнти є недіаґональними елементами матриці $\gamma^0\gamma^\mu$ в киральному представленні.

Оберімо p та p' спрямованими вздовж осі z, протилежно один до одного, і спершу розглянемо випадок, коли електрон є правополяризованим, а позитрон — лівополяризованим:



Тоді для електрона маємо $\xi = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, що відповідає спіну, орієнтованому в напрямку $+z$, а для позитрона — $\xi = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, що також відповідає (фізичному) спіну в напрямку $+z$. Для обох часток $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi = +\xi$, тому спінори є

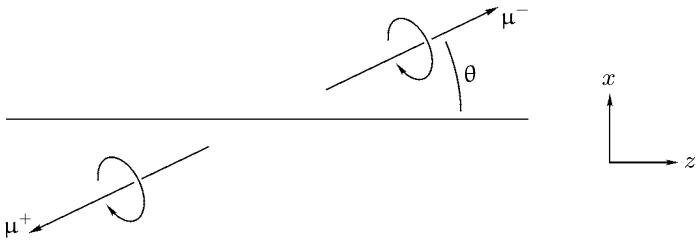
$$u(p) = \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad v(p') = \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

Таким чином, електронна частина матричного елемента:

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) = 2E\,(0,\,-1)\,\sigma^\mu\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -2E\,(0,\,1,\,i,\,0). \tag{5.29}$$

Цей вираз ми можемо інтерпретувати так, що віртуальний фотон має кругову поляризацію в напрямку $+z$, а його вектор поляризації є $\boldsymbol{\varepsilon}_+ = {}^1/\sqrt{2}(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})$.

Далі маємо обчислити мюонну частину матричного елемента. Припустимо, що μ^- вилітає під кутом θ до осі z, і передовсім розглянемо випадок, коли він правополяризований (а μ^+ лівополяризований):



Для обчислення $\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k')$ ми могли б повернутися до виразів (5.26), але тоді мусили б знайти правильні спінори ξ, що відповідають поляризації вздовж імпульсу мюона. Зручніше вдатися до такого прийому: оскільки будь-який вираз на зразок $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ перетворюється, як 4-вектор, ми можемо просто трансформувати результат (5.29). Здійснивши пово-

рот вектора на кут θ у площині xz, знайдемо

$$\begin{aligned}\bar{u}(k)\gamma^{\mu}v(k') &= \left[\bar{v}(k')\gamma^{\mu}u(k)\right]^{*} = \\ &= \left[-2E\,(0,\,\cos\theta,\,i,\,-\sin\theta)\right]^{*} = \\ &= -2E\,(0,\,\cos\theta,\,-i,\,-\sin\theta).\end{aligned} \tag{5.30}$$

Цей вектор знову можна інтерпретувати, як поляризацію віртуального фотона; якщо вона не ортоґональна до (5.29), то ми одержимо ненульову амплітуду. Підставивши (5.29) і (5.30) у (5.25), ми бачимо, що амплітуда є

$$\mathcal{M}\left(e_R^- e_L^+ \to \mu_R^- \mu_L^+\right) = \frac{e^2}{q^2}(2E)^2(-\cos\theta - 1) = -e^2(1+\cos\theta), \tag{5.31}$$

у цілковитій відповідності (включно зі знаком мінус) із (1.6) і (5.21). Диференційний переріз для цього набору спіральностей так само можна отримати з формули (4.85), що приводить нас до виразу (5.22).

Інші три ненульові спіральні амплітуди обчислюються аналоґічно. Для лівополяризованого електрона і правополяризованого позитрона легко знаходимо

$$\bar{v}(p')\gamma^{\mu}u(p) = -2E\,(0,\,1,\,-i,\,0) \equiv -2E\cdot\sqrt{2}\,\varepsilon_{-}^{\mu}.$$

Здійснивши поворот, щоб отримати вектор, який відповідає лівополяризованому μ^- і правополяризованому μ^+, маємо

$$\bar{u}(k)\gamma^{\mu}v(k') = -2E\,(0,\,cos\theta,\,i,\,\sin\theta).$$

Підставивши ці вирази в різних комбінаціях у (5.25), одержимо решту амплітуд:

$$\begin{gathered}\mathcal{M}\left(e_L^- e_R^+ \to \mu_L^- \mu_R^+\right) = -e^2(1+\cos\theta); \\ \mathcal{M}\left(e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+\right) = \mathcal{M}\left(e_L^- e_R^+ \to \mu_R^- \mu_L^+\right) = -e^2(1-\cos\theta).\end{gathered} \tag{5.32}$$

§ 5.3. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$: нерелятивістська межа

Перейдемо тепер до іншого кінця енерґетичного спектру і розглянемо реакцію $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ у гранично нерелятивістському наближенні. Коли E лише трохи більша за масу мюона m_μ, наш попередній результат (5.12) для неполяризованого диференційного перерізу стане таким:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \xrightarrow[|\mathbf{k}|\to 0]{} \frac{\alpha^2}{2E_{\text{цм}}^2}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}} = \frac{\alpha^2}{2E_{\text{цм}}^2}\frac{|\mathbf{k}|}{E}. \tag{5.33}$$

Ми можемо відтворити цей результат, провівши обчислення амплітуди з явними виразами для спінорів, і заразом дізнаємося дещо про спінову залежність процесу. Знову почнемо з матричного елемента:

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2}\Big(\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\Big)\Big(\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')\Big).$$

Електрон та позитрон, як і раніше, є релятивістськими частками (бо інакше їх анігіляція не призведе до утворення мюонів), тому вираз матиме найпростіший вигляд, якщо обрати для них стани з визначеною спіральністю. Нехай електрон є правополяризованим і рухається в напрямку $+z$, а лівополяризований позитрон — у напрямку $-z$. Тоді з (5.29) маємо

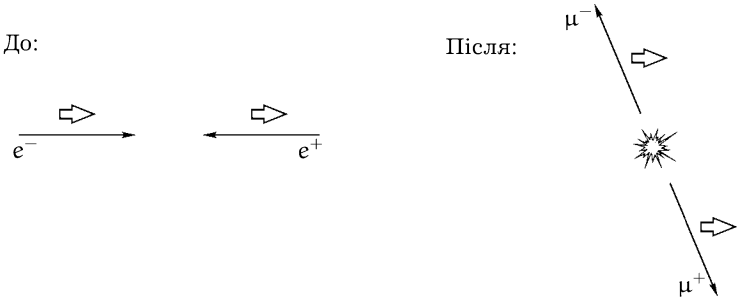


Рис. 5.5. У нерелятивістському наближенні загальний спін системи зберігається, тому обидва народжені мюони мають спіни орієнтовані в напрямку $+z$.

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) = -2E\,(0,\,1,\,i,\,0). \tag{5.34}$$

В іншій половині матричного елемента треба використати нерелятивістський вираз

$$u(k) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}, \qquad v(k') = \sqrt{m}\begin{pmatrix}-\xi'\\ -\xi'\end{pmatrix} \tag{5.35}$$

При подальшому розгляді в цьому параґрафі слід мати на увазі, що спінор ξ' дає перевернутий спін античастки. Залишивши мюонні спінори ξ і ξ' наразі невизначеними, ми легко обчислимо:

$$\begin{aligned}\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k') &= m\,(\xi^\dagger,\,\xi^\dagger)\begin{pmatrix}\bar{\sigma}^\mu & 0\\ 0 & \sigma^\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\xi'\\ -\xi'\end{pmatrix} = \\ &= \begin{cases}0 & \text{для } \mu = 0,\\ -2m\,\xi^\dagger\sigma^i\xi' & \text{для } \mu = i.\end{cases}\end{aligned} \tag{5.36}$$

Для знаходження $\mathcal{M}$ візьмемо скалярний добуток (5.34) і (5.36), а потім помножимо його на $e^2/q^2 = e^2/4m^2$. В результаті,

$$\mathcal{M}\left(e_R^- e_L^+ \to \mu^+\mu^-\right) = -2e^2\xi^\dagger\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\xi'. \tag{5.37}$$

Оскільки цей вираз не залежить від кута, мюони рівномірно вилітають у всіх напрямках. Точніше кажучи, вони випромінюються в s-хвилі, і їхній орбітальний момент імпульсу дорівнює нулю. Закон збереження моменту імпульсу вимагає, щоб повний спін кінцевого стану дорівнював 1, і справді — добуток матриць дає нуль, якщо спіни мюона й антимюона не орієнтовані в напрямку $+z$ (Рис. 5.5).

Для знаходження остаточного результату візьмемо суму за мюонними спінами і одержимо $\mathcal{M}^2 = 4e^4$, що дає формулу для перерізу:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(e_R^- e_L^+ \to \mu^+\mu^-\right) = \frac{\alpha^2}{E_{\text{цм}}^2}\frac{|\mathbf{k}|}{E}. \tag{5.38}$$

Такий самий вираз справедливий і для анігіляції лівополяризованого електрона з правополяризованим позитроном. Усереднений за спінами переріз складає $2 \cdot (1/4)$ від не усередненого, у цілковитій відповідності з (5.33).

Зв'язані стани

Досі ми вважали, що початкові та кінцеві стани у процесах розсіяння є станами окремих ізольованих часток. Проте біля порогу реакції кулонове притягання між мюонами стає істотним фактором. При енерґіях трохи нижчих за порогову $\mu^+\mu^-$-пари можуть утворювати електромаґнітні зв'язані стани.

Зв'язані стани у квантовій теорії поля є предметом глибокого та ґрунтовного розгляду, який виходить за межі нашого курсу.[21] На щастя, багато відомих у природі зв'язаних станів можна розглядати як нерелятивістські системи (принаймні, в першому наближенні), у яких внутрішні швидкості досить малі. Процес народження з вакууму часток, що утворюють зв'язану систему є, однак, релятивістським ефектом і потребує для свого описання методів квантової теорії поля. В цьому параґрафі ми розробимо формалізм для отримання амплітуд народження та знищення двочасткових нерелятивістських зв'язаних станів. Почнемо з обчислення перерізу утворення зв'язаного стану $\mu^+\mu^-$ у процесі e^+e^--анігіляції.

[21] Гарні огляди зі зв'язаних станів у квантовій теорії поля можна знайти у статтях Bodwin, Yennie, Gregorio, *Rev. Mod. Pbys.* 57, 723 (1985), і Sapirstein, Yennie, у збірці [35].

Розглянемо спершу випадок, коли спіни позитрона та електрона орієнтовані в напрямку $+z$. З попереднього обговорення ми знаємо, що спіни обох мюонів будуть орієнтовані так само, і єдиний зв'язаний стан, який може виникнути, матиме спін 1 такої ж орієнтації. Амплітуда народження вільних мюонів у цій конфіґурації є

$$\mathcal{M}\big(\uparrow\uparrow\to \mathbf{k}_1\uparrow, \mathbf{k}_2\uparrow\big) = -2e^2 \tag{5.39}$$

і не залежить від імпульсів ($\mathbf{k}_1$ і $\mathbf{k}_2$) мюонів.

Далі ми маємо з'ясувати, як записати зв'язані стани через стани вільних часток. У загальному випадку, для двочасткових систем з однаковими масами складових положення центру мас і відносні координати є

$$\mathbf{R} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tag{5.40}$$

Відповідні їм імпульси:

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \qquad \mathbf{k} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \tag{5.41}$$

Повний імпульс $\mathbf{K}$ у системі ЦМ дорівнює нулю. Якщо ми знаємо силу взаємодії між частками (для $\mu^+\mu^-$ це кулонова сила), то можемо розв'язати нерелятивістське рівняння Шродинґера і знайти шродинґерову хвильову функцію $\psi(\mathbf{r})$. Зв'язані стани є просто лінійною суперпозицією вільних станів з визначеними $\mathbf{r}$ або $\mathbf{k}$, зважених за цією хвильовою функцією. Для наших цілей зручніше побудувати таку суперпозицію в імпульсному просторі, застосувавши до $\psi(\mathbf{r})$ перетворення Фур'є:

$$\widetilde{\psi}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}); \qquad \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left|\widetilde{\psi}(\mathbf{k})\right|^2 = 1. \tag{5.42}$$

Якщо $\psi(\mathbf{r})$ має звичайне нормування, $\widetilde{\psi}(\mathbf{k})$ дає амплітуду перебування частки у стані з імпульсом $\mathbf{k}$. Явний вираз для зв'язаного стану з масою $M \approx 2m$, імпульсом $\mathbf{K} = 0$ та спіном 1, спрямованим угору, є

$$|B\rangle = \sqrt{2M}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\widetilde{\psi}(\mathbf{k})\,\frac{1}{\sqrt{2m}}\,\frac{1}{\sqrt{2m}}\,|\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\uparrow\rangle. \tag{5.43}$$

Множники $(1/\sqrt{2m})$ перетворює нормовані релятивістським чином стани вільних часток у такі, що їх інтеґрал з $\widetilde{\psi}(\mathbf{k})$ стає нормованим на 1. (Власне, множник має містити $\sqrt{2E_{\pm\mathbf{k}}}$, але в нерелятивістському наближенні $|\mathbf{k}| \ll m$.) Зовнішній множник $\sqrt{2M}$ повертає релятивістськи-інваріантне

нормування, яке використовується в нашій формулі для перерізу. Ці нормувальні множники неважко модифікувати для опису зв'язаного стану з ненульовим повним імпульсом **K**.

Маючи вираз для зв'язаного стану, ми можемо негайно виписати амплітуду його народження:

$$\mathcal{M}\big(\uparrow\uparrow\to B\big) = \sqrt{2M}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\widetilde{\psi}^*(\mathbf{k})\,\frac{1}{\sqrt{2m}}\,\frac{1}{\sqrt{2m}}\,\mathcal{M}\big(\uparrow\uparrow\to \mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\uparrow\big). \quad (5.44)$$

Позаяк амплітуда вільного стану (5.39) не залежить від імпульсів мюонів, то інтеґрал по **k** дає $\psi^*(0)$, тобто величину координатної хвильової функції в точці центру мас. Цілком природно, що амплітуда утворення двочасткового стану точковим віртуальним фотоном має бути пропорційна значенню хвильової функції в нульових координатах. З огляду на те, що в нерелятивістському наближенні $M \approx 2m$, отримуємо

$$\mathcal{M}\big(\uparrow\uparrow\to B\big) = \sqrt{\frac{2}{M}}\,(-2e^2)\psi^*(0). \quad (5.45)$$

Трохи нижче ми обчислимо з цієї амплітуди переріз, але спершу узагальнимо наш розгляд на зв'язані стани з довільними спіновими конфіґураціями. Аналіз, подібний до того, що дав нам вираз (5.37), засвідчує, що будь-який елемент S-матриці для народження нерелятивістських ферміонів з імпульсами **k** і $-\mathbf{k}$ має вигляд спінового матричного елемента:

$$i\mathcal{M}\big(\text{щось}\to \mathbf{k}, \mathbf{k}'\big) = \xi^\dagger\big[\Gamma(\mathbf{k})\big]\xi', \quad (5.46)$$

де $\Gamma(\mathbf{k})$ деяка 2×2-матриця. Тепер замінимо спінори нормованою хвильовою функцією зв'язаного стану. У щойно розглянутому прикладі ми зробили заміну

$$\xi'\xi^\dagger \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1,\,1) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

У загальнішому випадку, стан зі спіном 1 можна отримати, замінивши

$$\xi'\xi^\dagger \to \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{n}^*\cdot\boldsymbol{\sigma}, \quad (5.48)$$

де **n** є одиничним вектором. Вибір $\mathbf{n} = (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$ дає (5.47), а $\mathbf{n} = (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$ і $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}}$ — інші два стани зі спіном 1: $\downarrow\downarrow$ і $(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$. Відносний знак мінус у (5.48) в останньому випадку з'являється з правила (3.135)

для перевернутого спіну. Таким самим чином, стан з нульовим спіном $(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$ дає заміна

$$\xi'\xi^\dagger \to \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{I}, \tag{5.49}$$

де $\mathbf{I}$ позначає одиничну 2×2 матрицю. За цими правилами ми можемо перетворити S-матричний елемент вигляду (5.46) на S-матричний елемент для народження зв'язаного стану у спокої:

$$i\mathcal{M}\big(\text{щось} \to B\big) = \sqrt{\frac{2}{M}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \widetilde{\psi}^*(\mathbf{k})\, \mathrm{Tr}\Big(\frac{\mathbf{n}^*\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}}\,\Gamma(\mathbf{k})\Big), \tag{5.50}$$

де слід береться за індексами двокомпонентного спінора. Для зв'язаного стану з нульовим спіном треба замінити $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ на одиничну матрицю $\mathbf{I}$.

Народження і розпад векторного мезона

З формули (5.45) можна безпосередньо отримати переріз народження зв'язаних станів $\mu^+\mu^-$ у процесі e^+e^--анігіляції. Щоб полегшити розуміння фізичного сенсу цього виразу, введемо вектори поляризації для початкової та кінцевої спінових конфіґурацій: $\boldsymbol{\varepsilon}_+ = (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$ з (5.29) і $\mathbf{n}$ з (5.48). Тепер (5.45) можна переписати в інваріантнішій формі:

$$\mathcal{M}\big(e^-_R e^+_L \to B\big) = \frac{2}{M}\,(-2e^2)(\mathbf{n}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_+)\,\psi^*(0). \tag{5.51}$$

Спінова поляризація $\mathbf{n}$ проектується на $\boldsymbol{\varepsilon}_+$. У тому випадку, коли поляризація початкових електронів невизначена, переріз народження зв'язаного стану B включає усереднення за поляризаціями:

$$\tfrac{1}{4}\big(|\mathbf{n}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_+|^2 + |\mathbf{n}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_-|^2\big) = \tfrac{1}{4}\big((n^x)^2 + (n^y)^2\big). \tag{5.52}$$

Таким чином, зв'язані стани будуть переважно поляризовані вздовж осі зіткнення електрона та позитрона.

Виходячи з припущення, що пучок електронів не є поляризованим, і підсумовуючи (5.52) за трьома можливими напрямками $\mathbf{n}$, знайдемо наступний вираз для повного перерізу народження зв'язаного стану:

$$\begin{aligned}\sigma\big(e^+e^- \to B\big) = \frac{1}{2}\frac{1}{2m}\frac{1}{2m}\int \frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{K}}}\,\times \\ \times\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+p'-K)\frac{2}{M}(4e^4)\frac{1}{2}|\psi(0)|^2.\end{aligned} \tag{5.53}$$

Відзначимо, що інтеґрал по одночастковому фазовому простору прибирає лише три з чотирьох дельта-функцій. Щоб зрозуміти значення четвертої, слід переписати її, виходячи зі співвідношення $\delta(p^0 - K^0) = 2K^0\delta(P^2 - K^2)$. Тоді

$$\sigma\left(e^+e^- \to B\right) = 64\pi^3\alpha^2 \frac{|\psi(0)|^2}{M^3}\,\delta(E_{\text{цм}}^2 - M^2). \tag{5.54}$$

Ця остання дельта-функція вказує на те, що повна енерґія в системі ЦМ має дорівнювати загальній масі зв'язаних часток. Таким чином, зв'язаний стан народжується як резонанс в електрон-позитроній анігіляції. Якщо він має скінченний час життя, то дельта-функція розширюється в резонансний пік. На практиці, істотнішим механізмом такого розширення є різниця енерґій окремих електронів та позитронів у пучку. Та в кожному разі, формула (5.54) правильно передбачає площу під резонансним піком.

Якщо зв'язаний стан B може утворюватися з e^+e^--пар, то він також може й анігілювати з утворенням пари e^+e^- чи будь-яких інших достатньо легких лептонів. Згідно з (4.86), повна ширина для цієї моди розпаду є

$$\Gamma\left(B \to e^+e^-\right) = \frac{1}{2M}\int d\Pi_2\,|\mathcal{M}|^2, \tag{5.55}$$

де $\mathcal{M}$ є тим самим матричним елементом (5.51), за яким ми обчислювали утворення стану B. Отже,

$$\Gamma = \frac{1}{2M}\int\left(\frac{1}{2\pi}\frac{d\cos\theta}{2}\right)\frac{8e^4}{M}\,|\psi(0)|^2\left(|\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}|^2 + |\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*|^2\right). \tag{5.56}$$

Тепер ми маємо взяти суму за станами поляризації електронів і усереднити за трьома можливими значеннями $\mathbf{n}$. Відтак одержимо

$$\Gamma\left(B \to e^+e^-\right) = \frac{16\pi\alpha^2}{3}\,\frac{|\psi(0)|^2}{M^2}. \tag{5.57}$$

Формула для ширини розпаду B дуже схожа на переріз його народження, і це цілком зрозуміло, адже в обох обчисленнях присутній квадрат одного й того ж матричного елемента, підсумований за початковими та кінцевими поляризаціями. Два обчислення відрізняються лише фазовими об'ємами і тим, як ми проводили усереднення за поляризаціями. За цією лоґікою, співвідношення між двома величинами,

$$\sigma\left(e^+e^- \to B\right) = 4\pi^2 \cdot \frac{3\Gamma\left(B \to e^+e^-\right)}{M} \cdot \delta(E_{\text{цм}}^2 - M^2), \tag{5.58}$$

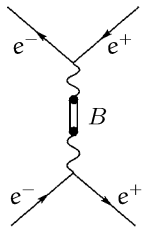
є загальним і цілком незалежним від деталей обчислення матричного елемента. Множник 3 у (5.58) виник через усереднення за орієнтацією $\mathbf{n}$; для зв'язаного стану зі спіном J він має дорівнювати $(2J+1)$.

Найвідомішим є застосування цього формалізму не до мюонів, а до зв'язаного стану двох кварків, так званого *кварконію*. Експериментальні свідчення утворення зв'язаних пар $q\bar{q}$ (наприклад, J/ψ або Υ) присутні на Рис. 5.2. (Резонансні піки занадто високі й гострі, щоб показати їх на ґрафіку, проте їхні розміри були точно виміряні.) Вирази (5.54) і (5.57) треба помножити на кольоровий фактор 3, щоб отримати переріз народження та ширину розпаду зв'язаного стану $q\bar{q}$ зі спіном 1. Значення $\psi(0)$ хвильової функції $q\bar{q}$ не можна обчислити, виходячи лише з кулонової взаємодії, але можна оцінити на підставі нерелятивістської моделі кваркового спектру з феноменолоґічно підібраним потенціалом. Альтернативно, ми можемо застосувати формулу

$$\Gamma\big(B(q\bar{q}) \to e^+e^-\big) = 16\pi\alpha^2 Q^2 \, \frac{|\psi(0)|^2}{M^2}, \tag{5.59}$$

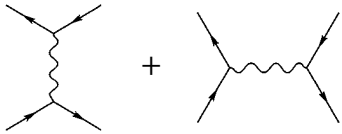
щоб визначити $\psi(0)$ для зв'язаного стану $q\bar{q}$. До прикладу, стан $1S$ пари $s\bar{s}$ зі спіном 1, ф-мезон, має парціальну ширину розпаду 1,4 кеВ по каналу e^+e^- і масу 1,02 ҐеВ. З цього ми можемо вивести, що $|\psi(0)|^2 = (1{,}2\ \text{фм})^{-3}$. Цей результат є фізично прийнятним, оскільки типові розміри адронів якраз мають порядок 1 фм.

Наш підхід у цьому параґрафі помітно відрізняється від того, що ми застосовували досі. Замість проведення обчислень на підставі засадничих принципів, зібрали по частинах наближену формулу, використавши лише мінімум інструментів квантової теорії поля та квантової механіки. А проте, ми могли б описати зв'язані стани, цілком виходячи з релятивістського формалізму. Розглянемо анігіляцію пари e^+e^- з утворення зв'язаного стану $\mu^+\mu^-$, який потім розпадеться знову на e^+e^-. Дотримуючись засад нашого формалізму, можемо представити цей процес діаґрамою

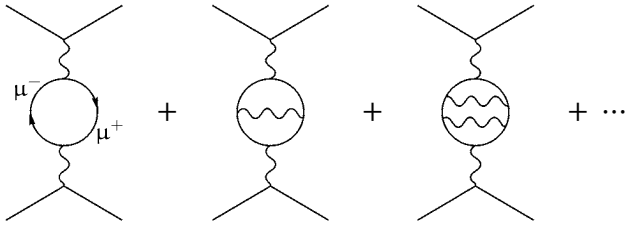


У кінцевому підсумку він має вигляд $e^+e^- \to e^+e^-$ (розсіяння Баба). Що

станеться, якщо ми спробуємо розрахувати переріз цього розсіяння, застосувавши безпосередньо теорію збурень КЕД? Очевидно, пари $\mu^+\mu^-$ не роблять внеску в деревовидні діаґрами:



Проте, перейшовши до вищих порядків пертурбативного ряду, ми виявимо, поміж інших, такий набір діаґрам:

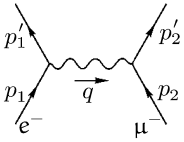


Для більшості значень $E_{\text{цм}}$ вони дають лише незначні поправки до деревовидного наближення. Та коли $E_{\text{цм}}$ є близькою до порогу народження $\mu^+\mu^-$, у діаґрамах, що включають обмін фотонами в мюонній петлі, стає істотною кулонова взаємодія між мюонами, тому їхня вага різко зростає. Підсумувавши внески всіх таких діаґрам, можна показати, що ця сума еквівалентна рішенню нерелятивістського рівняння Шродинґера.[22] Як наслідок, у виразі для перерізу з'являється резонансний пік, площа та ширина якого задаються формулами (5.54) і (5.57) відповідно.

§ 5.4. Кросинґ-симетрія

Електрон-мюонне розсіяння

Завершивши розгляд процесу $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, звернемося тепер до іншого, але тісно пов'язаного з ним, процесу КЕД: електрон-мюонного розсіяння $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$. Фейнманова діаґрама нижчого порядку є такою самою, як і в попередньому випадку, лише перевернута набік:



$$= \frac{ie^2}{q^2}\,\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1)\,\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(p_2)$$

[22] Такий аналіз є в книзі Берестецького, Ліфшица і Пітаєвського [8].

Зв'язок між процесами $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ і $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ стає очевидним, коли ми обчислимо квадрат амплітуди, усереднений і підсумований за спінами:

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4}\,\mathrm{Tr}\Big[(\not{p}_1' + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu\Big]\times$$
$$\times\,\mathrm{Tr}\Big[(\not{p}_2' + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu)\gamma_\nu\Big].$$

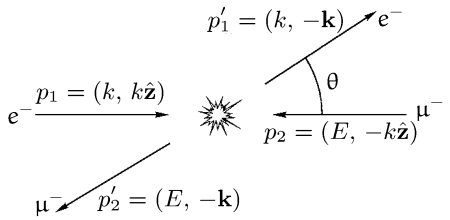
Цей вираз стане тотожним нашому результату (5.2) для $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, якщо зробити підстановки

$$p \to p_1, \quad p' \to -p_1', \quad k \to p_2', \quad k' \to -p_2. \tag{5.60}$$

А тому, замість ще одного обчислення слідів, ми можемо просто провести таку ж заміну у формулі (5.10). Встановивши $m_e = 0$, знаходимо

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4}\Big[(p_1\cdot p_2')(p_1'\cdot p_2) + (p_1\cdot p_2)(p_1'\cdot p_2') - m_\mu^2(p_1\cdot p_1')\Big]. \tag{5.61}$$

Для продовження розрахунків маємо з'ясувати кінематику процесу, яка тепер цілком інша. Обравши за систему відліку центр мас, знову перейдемо до основних кінематичних змінних, енерґії та кута розсіяння:



$$E^2 = k^2 + m_\mu^2$$
$$\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{z}} = k\cos\theta$$
$$E + k = E_{\text{цм}}$$

Потрібні нам комбінації є

$$p_1\cdot p_2 = p_1'\cdot p_2' = k(E+k); \qquad p_1'\cdot p_2 = p_1\cdot p_2' = k(E = k\cos\theta);$$
$$p_1\cdot p_2' = k^2(1-\cos\theta); \qquad q^2 = -2p_1\cdot p_1' = -2k^2(1-\cos\theta).$$

Наш вираз для квадрату стає таким:

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^4}{k^2(1-\cos\theta)^2}\times$$
$$\times\Big[(E+k)^2 + (E + k\cos\theta)^2 - m_\mu^2(1-\cos\theta)\Big]. \tag{5.62}$$

Для знаходження перерізу використаємо формулу (4.84), яка за умови, коли одна з часток є безмасовою, набуває простого вигляду:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{цм}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2(E+k)^2}. \tag{5.63}$$

Звідси одержуємо результат для електрон-мюонного розсіяння в системі ЦМ:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2k^2(E+k)^2(1-\cos\theta)^2} \times \\ \times \left[(E+k)^2 + (E+k\cos\theta)^2 - m_\mu^2(1-\cos\theta)\right].\end{aligned} \tag{5.64}$$

де $k = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$. У високоенерґетичному наближенні ми можемо знехтувати й масою мюона, і тоді диференційний переріз розсіяння:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2E_{\text{цм}}^2(1-\cos\theta)^2}\left[4 + (1+\cos\theta)^2\right]. \tag{5.65}$$

Звернімо увагу на синґулярну поведінку

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\theta^4}, \quad \text{при } \theta \to 0 \tag{5.66}$$

у формулах (5.64) і (5.65). Ця синґулярність є такою ж, як і у формулі Резерфорда (Задача 4.4). Така поведінка завжди присутня при кулоновому розсіянні; вона виникає через близькість до масової поверхні (тобто, $q^2 \approx 0$) віртуального фотона.

Кросинґ-симетрія

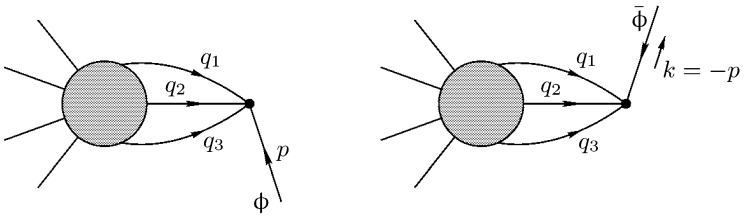
Застосований нами прийом для встановлення зв'язку між процесами $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ і $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ є першим прикладом такого типу перетворень, відомих як *кросинґ-симетрія*. В загальному випадку S-матриця будь-якого процесу, в якому бере участь частка з 4-імпульсом p в початковому стані, є еквівалентною S-матриці для в усьому іншому ідентичного процесу, але з античасткою в кінцевому стані з 4-імпульсом $k = -p$. Тобто,

$$\mathcal{M}\big(\phi(p) + \cdots \to \cdots\big) = \mathcal{M}\big(\cdots \to \cdots + \bar{\phi}(k)\big), \tag{5.67}$$

де $\bar{\phi}$ є античасткою до ϕ, а $k = -p$. (Зазначимо, що за будь-яких обставин p і k не можуть одночасно мати фізично припустимі значення, оскільки

для частки повинна виконуватись умова $p^0 > 0$, а для античастки $k^0 > 0$. Отже, на практиці одну амплітуду можна отримати з іншої лише за допомогою аналітичного продовження.)

Співвідношення (5.67) прямо випливає з фейнманових правил. Діаґрами, що роблять внесок у ці дві амплітуди, природним чином взаємопов'язані й різняться між собою лише заміною вхідного ϕ на вихідне $\bar{\phi}$. Типова пара таких діаґрам має вигляд



На першій діаґрамі імпульси q_i, що входять у вершину з решти діаґрами, мають дати в підсумку $-p$, тоді як на другій діаґрамі їхня сума дорівнює k. Отже, якщо $-p = k$, то ці дві діаґрами однакові, за винятком можливої різниці у множниках за зовнішніми лініями. Якщо ϕ є скалярним бозоном, то такі множники відсутні, і тотожність (5.67) доведено. Для ферміона аналіз стає складнішим, оскільки співвідношення залежить від домовленостей про відносні фази зовнішніх спінорів u і v. Просто замінивши p на $-k$ в сумі за поляризаціями ферміонів, ми отримаємо

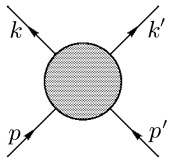
$$\sum u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = -\sum v(k)\bar{v}(k). \tag{5.68}$$

Знак мінус можна компенсувати зміною домовленості про фазу для v. На практиці зручніше взагалі відкидати один знак мінус для кожного кросинґового ферміона. При відповідних домовленостях для спінорів $u(p)$ і $v(k)$ можна довести тотожність (5.67) без усереднення за спінами.

Мандельштамові змінні

Інколи зручно записувати амплітуду розсіяння через такі змінні, які спрощують застосування кросинґових перетворень. Для процесів 2 *частки* → 2 *частки* це можна зробити наступним чином. Позначимо чотири зовні-

шні імпульси, як

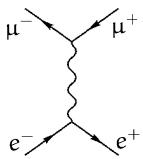


Тепер визначимо нові величини, *мандельштамові змінні*:

$$\begin{aligned} s &= (p+p')^2 = (k+k')^2; \\ t &= (k-p)^2 = (k'-p')^2; \\ u &= (k'-p)^2 = (k-p')^2. \end{aligned} \tag{5.69}$$

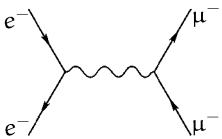
Величини t і u переходять одна в іншу при заміні $k \leftrightarrow k'$; прийнято визначати t як квадрат різниці початкового та кінцевого імпульсів двох найбільш схожих часток. Для будь-якого процесу s є квадратом повного початкового 4-імпульсу. Зауважимо, що в разі, коли ми визначимо всі чотири імпульси як вхідні, значення всіх трьох величин будуть позитивними.

Для ілюстрації застосування мандельштамових змінних, передовсім розглянемо квадрат амплітуди для $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, взявши для простоти безмасове наближення. За цієї умови ми маємо $t = -2p \cdot k = -2p' \cdot k'$, $u = 2p \cdot k' = -2p' \cdot k$ і, певна річ, $s = (p+p')^2 = q^2$. Посилаючись на наш попередній результат (5.10), знаходимо



$$= \frac{1}{4}\sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{s^2}\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2\right]. \tag{5.70}$$

Для переходу до процесу $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ повернемо діаґраму набік і застосуємо кросинґові перетворення, які стають надзвичайно простими в термінах мандельштамових змінних. Наприклад, вони стверджують, що можна змінити знак імпульсу позитрона p' і реінтерпретувати його, як імпульс вихідного електрона. Таким чином, $s = (p+p')^2$ обертається на t — різницю імпульсів вихідного і вхідного електронів. Відповідно, t переходить у s, а u не змінюється. Тому для $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ ми можемо негайно записати

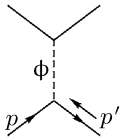


$$= \frac{1}{4}\sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{t^2}\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2\right]. \tag{5.71}$$

Легко переконатися, що цей вираз узгоджується з (5.61) у безмасовому наближенні. Зазначимо, що попри значну схожість (5.70) і (5.71), фізично вони зовсім різні: у першому виразі знаменник є просто $s^2 = E_{\text{цм}}^4$, а другий містить змінну t, що є залежна від кутів і прагне до нуля при $\theta \to 0$.

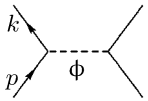
Якщо діаґрама процесу 2 *частки* → 2 *частки* містить лише одну віртуальну частку, її зручно описувати як таку, що перебуває в певному „каналі“. Самі канали можна визначити з вигляду фейнманових діаґрам, і кожен з них призводить до характерної залежності перерізу від кута:

s-канал:



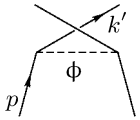
$$\mathcal{M} \propto \frac{1}{s - m_\phi^2};$$

t-канал:



$$\mathcal{M} \propto \frac{1}{t - m_\phi^2};$$

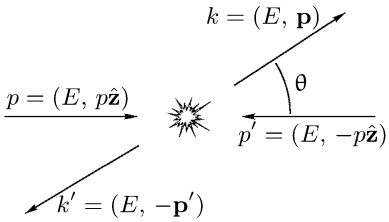
u-канал:



$$\mathcal{M} \propto \frac{1}{u - m_\phi^2}.$$

Багато процесів відбуваються більш ніж по одному каналу, і внески від кожного з них мають когерентно додаватися. Так, амплітуда *розсіяння Баба* $e^+e^- \to e^+e^-$ є сумою діаґрам s- і t-каналів, а *розсіяння Моллера* $e^-e^- \to e^-e^-$ проходить по каналах t і u.

Щоб краще відчути змінні s, t і u, обчислимо їх у явному вигляді для часток однакової маси m у системі ЦМ. Кінематика має звичайний вигляд:



Тому мандельштамові змінні є

$$\begin{aligned} s &= (p + p')^2 = (2E)^2 = E_{\text{цм}}^2; \\ t &= (k - p)^2 = -p^2 \sin^2\theta - p^2(\cos -1)^2 = -2p^2(1 - \cos\theta); \\ u &= (k' - p)^2 = -p^2 \sin^2\theta - p^2(\cos +1)^2 = -2p^2(1 + \cos\theta). \end{aligned} \tag{5.72}$$

Звідси ми бачимо, що $t \to 0$ при $\theta \to 0$, а $u \to 0$ при $\theta \to \pi$. (Коли маси різні, граничні значення t і u трохи зсуваються.)

З (5.72) випливає, що для однакових мас m усіх чотирьох часток сума мандельштамових змінних є $s + t + u = 4E^2 - 4p^2 = 4m^2$. Це окремий випадок загального співвідношення, яке часто буває корисним:

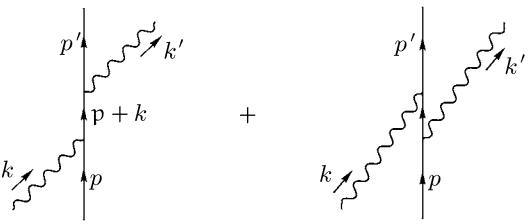
$$s + t + u = \sum_{i=1}^{4} m_i^2, \tag{5.73}$$

де сума береться за всіма чотирма зовнішніми частками. Цю тотожність легко довести, підсумувавши всі члени у правій половині (5.69) і застосувавши закон збереження 4-імпульсу у вигляді $(p + p' - k - k')^2 = 0$.

§ 5.5. Комптонове розсіяння

Розглянемо тепер процес, дещо відмінний від тих, з якими ми досі мали справу, — *комптонове розсіяння*, або $e^-\gamma \to e^-\gamma$. Обчислимо його неполяризований переріз у нижчому порядку за α. В наших розрахунках ми застосуємо весь арсенал розглянутих нами методів, зокрема мандельштамові змінні з попереднього параґрафу. Також розвинемо нову техніку для роботи із зовнішніми фотонами.

Ось наш перший приклад обчислення внесків двох діаґрам:



За вже звичним порядком, фейнманові правила вказують нам, як записати вираз для $\mathcal{M}$. Зазначимо, що оскільки ферміонні частини на обох діаґрамах однакові, то між двома доданками не виникає відносного знаку мінус. Записавши вектори поляризації початкового та кінцевого фотонів,

як $\varepsilon_\nu(k)$ і $\varepsilon^*_\mu(k')$, маємо

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} = \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)\varepsilon^*_\mu(k')\,\frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}\,(-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(k)u(p) + \\
+\bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(k)\,\frac{i(\not{p}+\not{k}'+m)}{(p+k')^2-m^2}\,(-ie\gamma^\mu)\varepsilon^*_\mu(k')u(p) = \\
= -ie^2\varepsilon^*_\mu(k')\varepsilon_\nu(k)\bar{u}(p')\times \\
\times\left[\frac{\gamma^\mu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\nu}{(p+k)^2-m^2}+\frac{\gamma^\nu(\not{p}+\not{k}'+m)\gamma^\mu}{(p+k')^2-m^2}\right]u(p).
\end{aligned}
$$

Перш ніж підносити цей вираз до квадрату, ми можемо зробити певні спрощення. Оскільки $p^2 = m^2$ і $k^2 = 0$, то знаменники пропаґаторів є

$$
(p+k)^2 - m^2 = 2p\cdot k \quad \text{і} \quad (p+k')^2 - m^2 = -2p\cdot k'.
$$

Для спрощення чисельників скористаємося алґеброю Дірака:

$$
\begin{aligned}
(\not{p}+m)\gamma^\nu u(p) &= (2p^\nu - \gamma^\nu\not{p} + \gamma^\nu m)\,u(p) = \\
&= 2p^\nu u(p) - \gamma^\nu(\not{p}-m)\,u(p) = \\
&= 2p^\nu u(p).
\end{aligned}
$$

Застосувавши цей прийом до чисельника кожного пропаґатора, знаходимо

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} = -ie^2\varepsilon^*_\mu(k')\varepsilon_\nu(k)\bar{u}(p')\times \\
\times\left[\frac{\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k}+\frac{-\gamma^\nu\not{k}'\gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p\cdot k'}\right]u(p).
\end{aligned}
\tag{5.74}
$$

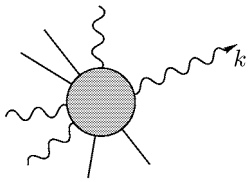
Суми фотонних поляризацій

Наступним кроком у наших розрахунках має бути піднесення до квадрату виразу для $\mathcal{M}$ і підсумовування (або усереднення) за станами поляризації електронів та фотонів. Суму за електронними поляризаціями можна обчислити як і раніше, скориставшись тотожністю $\sum u(p)\bar{u}(p) = \not{p}+m$. На щастя, існує схожий прийом і для отримання суми за поляризаціями фотона. Правильний рецепт полягає в тому, щоб здійснити заміну

$$
\sum_{\text{поляризація}} \varepsilon^*_\mu\varepsilon_\nu \longrightarrow -g_{\mu\nu}. \tag{5.75}
$$

Стрілка замість знака рівності вказує, що це не є справжньою тотожністю. А проте, така заміна виправдана, поки ε_ν і ε^*_μ входять до виразу для амплітуди $\mathcal{M}$.

Для виведення цієї формули розглянемо довільний процес КЕД, який має зовнішню фотонну лінію з імпульсом k:



$$= i\mathcal{M}(k) \equiv \mathcal{M}^\mu(k)\varepsilon^*_\mu(k). \tag{5.76}$$

Оскільки амплітуда завжди містить $\varepsilon^*_\mu(k)$, ми винесли цей множник окремо і визначили $\mathcal{M}^\mu(k)$ як решту складових амплітуди $\mathcal{M}$. Переріз має бути пропорційним до

$$\sum_\varepsilon \left|\varepsilon^*_\mu(k)\mathcal{M}^\mu(k)\right|^2 = \sum_\varepsilon \varepsilon^*_\mu\varepsilon_\nu\, \mathcal{M}^\mu(k)\mathcal{M}^{\nu*}(k).$$

Для простоти зорієнтуємо k в напрямку осі z, тоді $k^\mu = (k,\ 0,\ 0,\ k)$. У цьому разі два вектори поперечної поляризації, за якими ми беремо суму, можна обрати такими:

$$\varepsilon^\mu_1 = (0,\ 1,\ 0,\ 0); \quad \varepsilon^\mu_2 = (0,\ 0,\ 1,\ 0).$$

З урахуванням цих домовленостей, маємо

$$\sum_\varepsilon \left|\varepsilon^*_\mu(k)\mathcal{M}^\mu(k)\right|^2 = \left|\mathcal{M}^1(k)\right|^2 + \left|\mathcal{M}^2(k)\right|^2. \tag{5.77}$$

Тепер згадаймо з Розділу 4, що зовнішні фотонні лінії породжуються взаємодією $\int d^4x\, ej^\mu A_\mu$, де $j^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi$ — діраковий вектор струму. Таким чином, $\mathcal{M}^\mu(k)$ має визначатися матричним елементом гайзенберґового поля j^μ:

$$\mathcal{M}^\mu(k) = \int d^4x\, e^{ik\cdot x}\langle f|j^\mu(x)|i\rangle, \tag{5.78}$$

де початковий та кінцевий стани включають у себе всі частки, крім нашого фотона.

З класичних рівнянь руху ми знаємо, що струм j^μ зберігається: $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$. Вважаючи, що це справедливо і в квантовій теорії, ми можемо помножити (5.78) на k_μ і тоді отримаємо

$$k_\mu\mathcal{M}^\mu(k) = 0. \tag{5.79}$$

Амплітуда $\mathcal{M}$ обертається на нуль, якщо замінити вектор поляризації фотона $\varepsilon_\mu(k)$ на k_μ. Це знамените співвідношення відоме як *тотожність Варда*. Власне, це є твердженням про збереження струму, що випливає з калібрувальної симетрії (4.6) КЕД. Ми дамо формальне доведення тотожності Варда у § 7.4 і обговоримо деякі тонкощі, що не були враховані в цьому швидкому „виведенні“.

Буде корисно прямо перевірити, що комптонова амплітуда (5.74) задовольняє тотожності Варда. Для цього замінимо $\varepsilon_\nu(k)$ на k_ν, або $\varepsilon^*_\mu(k')$ на k'_μ, і проведемо певні маніпуляції з добутками діракових матриць. В обох випадках, після нескладних алґебраїчних вправ, доданки від однієї та іншої діаґрам взаємно скоротяться, і в кінцевому підсумку ми отримаємо нуль.

Повертаючись до виведення формули (5.75) для суми за поляризаціями, ми зауважуємо, що для $k^\mu = (k, 0, 0, k)$, тотожність Варда набуває вигляду

$$k\mathcal{M}^0(k) - k\mathcal{M}^3(k) = 0. \tag{5.80}$$

Отже, $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^3$, і ми маємо

$$\sum_\varepsilon \varepsilon^*_\mu \varepsilon_\nu \, \mathcal{M}^\mu(k)\mathcal{M}^{\nu*}(k) = \left|\mathcal{M}^1\right|^2 + \left|\mathcal{M}^2\right|^2 =$$
$$= \left|\mathcal{M}^1\right|^2 + \left|\mathcal{M}^2\right|^2 + \left|\mathcal{M}^3\right|^2 - \left|\mathcal{M}^0\right|^2 =$$
$$= -g_{\mu\nu}\, \mathcal{M}^\mu(k)\mathcal{M}^{\nu*}(k).$$

Таким чином, ми можемо взяти суму за поляризаціями зовнішніх фотонів, просто замінивши $\sum \varepsilon^*_\mu \varepsilon_\nu$ на $-g_{\mu\nu}$.

Це дозволяє нам (звичайно, за умови, що згодом ми в загальному вигляді доведемо тотожність Варда) вільно відкидати в обчисленнях КЕД нефізичні часоподібні та поздовжні фотони, бо для будь-якого процесу квадрати амплітуд народження таких станів взаємно скорочуються. Неґативна норма стану часоподібного фотона, що викликала в нас занепокоєння при обговоренні формули (4.134), відіграє в цьому скороченні істотну роль.

Формула Кляйна – Нішіни

Решта обчислень комптонового розсіяння не вимагає жодних хитрощів, а лише певного впорядкування. Ми хочемо усереднити квадрат амплітуди за поляризаціями початкових електрона та фотона і підсумувати за поляризаціями кінцевих електрона та фотона. Починаючи з виразу (5.74)

для $\mathcal{M}$, знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{\text{спіни}}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4}\,g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\times\\ &\times \mathrm{Tr}\left\{(\not{p}'+m)\left[\frac{\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu+2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k}+\frac{\gamma^\nu\not{k}'\gamma^\mu-2\gamma^\nu p^\mu}{2p\cdot k'}\right]\times\right.\\ &\left.\times(\not{p}+m)\left[\frac{\gamma^\sigma\not{k}\gamma^\rho+2\gamma^\rho p^\sigma}{2p\cdot k}+\frac{\gamma^\rho\not{k}'\gamma^\sigma-2\gamma^\sigma p^\rho}{2p\cdot k'}\right]\right\}\equiv\\ &\equiv\frac{e^4}{4}\left[\frac{\mathrm{Tr}_1}{(2p\cdot k)^2}+\frac{\mathrm{Tr}_2}{(2p\cdot k)(2p\cdot k')}+\frac{\mathrm{Tr}_3}{(2p\cdot k')(2p\cdot k)}+\frac{\mathrm{Tr}_4}{(2p\cdot k')^2}\right],\end{aligned}\tag{5.81}$$

де через Tr_1, Tr_2, Tr_3 і Tr_4 позначено складні сліди. Зазначимо, що Tr_4 переходить у Tr_1, якщо замінити k на $-k'$. Також, оскільки, згідно з (5.7), можна обернути порядок γ-матриць під слідом, ми бачимо, що $\mathrm{Tr}_2=\mathrm{Tr}_3$. Отож ми маємо обчислити лише Tr_1 і Tr_2.

Перший із слідів є

$$\mathrm{Tr}_1=\mathrm{Tr}\left[(\not{p}'+m)(\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu+3\gamma^\mu p^\nu)(\not{p}+m)(\gamma_\nu\not{k}\gamma_\mu+2\gamma_\mu p_\nu)\right].$$

Маємо шістнадцять доданків під знаком сліду, але половина з них містить непарну кількість γ-матриць, а тому обертається на нуль. Тепер обчислимо, один за одним, решту вісім доданків. Наприклад,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[\not{p}'\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu\not{p}\gamma_\nu\not{k}\gamma_\mu\right] &= \mathrm{Tr}\left[(-2\not{p}')\not{k}(-2\not{p})\not{k}\right]=\\ &= \mathrm{Tr}\left[4\not{p}'\not{k}(2p\cdot k-\not{k}\not{p})\right]=\\ &= 8p\cdot k\ \mathrm{Tr}\left[\not{p}'\not{k}\right]=\\ &= 32(p\cdot k)(p'\cdot k).\end{aligned}$$

Застосувавши тотожності згортання (5.8) і (5.9) та інші співвідношення діракової алґебри на зразок $\not{p}\not{p}=p^2=m^2$, ми можемо звести кожен доданок у Tr_1 до сліду від добутку не більше ніж двох γ-матриць. Коли дим розвіється, знайдемо

$$\mathrm{Tr}_1=16\big(4m^4-2m^2p\cdot p'+4m^2p\cdot k-2m^2p'\cdot k+2(p\cdot k)(p'\cdot k)\big).\tag{5.82}$$

Хоча це не очевидно, наш вираз можна спростити й далі. Щоб побачити, як це зробити, запровадимо мандельштамові змінні

$$\begin{aligned}\mathrm{s}&=(p+k)^2=2p\cdot k+m^2=2p'\cdot k'+m^2;\\ \mathrm{t}&=(p'-p)^2=-2p\cdot p'+2m^2=-2k\cdot k';\\ \mathrm{u}&=(k'-p)^2=-2k'\cdot p+m^2=-2k\cdot p'+m^2.\end{aligned}\tag{5.83}$$

З (5.73) згадаємо, що збереження 4-імпульсу призводить до $s + t + u = 2m^2$. Переписавши все в термінах змінних s, t, u і застосувавши цю тотожність, одержимо

$$\mathrm{Tr}_1 = 16\big(2m^4 + m^2(s - m^2) - \tfrac{1}{2}(s - m^2)(u - m^2)\big). \tag{5.84}$$

Здійснивши заміну $k \leftrightarrow -k'$, ми можемо негайно записати

$$\mathrm{Tr}_4 = 16\big(2m^4 + m^2(u - m^2) - \tfrac{1}{2}(s - m^2)(u - m^2)\big). \tag{5.85}$$

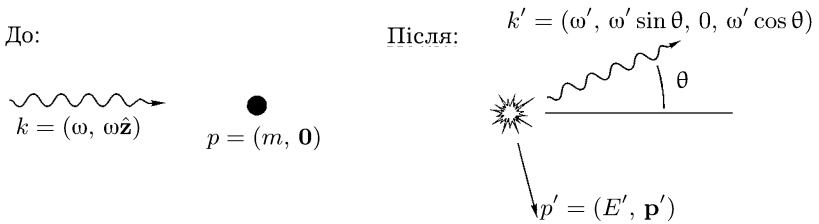
Обчислення слідів Tr_2 і Tr_3 вимагає приблизно такого ж обсягу роботи, яку ми вже провели. Результат буде

$$\mathrm{Tr}_2 = \mathrm{Tr}_3 = -8\big(4m^4 + m^2(s - m^2) + m^2(u - m^2)\big). \tag{5.86}$$

Зібравши разом усі частини квадрату матричного елемента (5.81) і переписавши s та u через $p \cdot k$ і $p \cdot k'$, остаточно маємо

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4\Bigg[&\frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + \\ &+ 2m^2\Big(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'}\Big) + m^4\Big(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'}\Big)^2\Bigg].\end{aligned} \tag{5.87}$$

Щоб отримати з цього виразу переріз, треба обрати систему відліку і зобразити кінематику процесу. Найчастіше комптонове розсіяння розглядається в „лабораторній“ системі, де електрон початково перебуває в стані спокою:



Ми збираємося записати переріз розсіяння через параметри ω і θ. Енерґію кінцевого стану фотона ω' можна знайти, скориставшись таким прийомом:

$$\begin{aligned}m^2 = (p')^2 = (p + k - k') &= p^2 + 2p \cdot (k - k') - 2k \cdot k' = \\ &= m^2 + 2m(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta),\end{aligned}$$

отже,

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos\theta). \tag{5.88}$$

Останній рядок є формулою Комптона для зміни довжини хвилі фотона. Проте для наших цілей корисніше явно виписати вираз для ω':

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \dfrac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}. \tag{5.89}$$

Інтеґрал по фазовому простору в цій системі відліку є

$$\begin{aligned}
\int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega'} \frac{1}{2E'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' + p' - k - p) = \\
&= \int \frac{(\omega')^2 d\omega' d\Omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega' E'} \times \\
&\times 2\pi\delta\Big(\omega' + \sqrt{m^2 + \omega^2 + (\omega')^2 - 2\omega\omega'\cos\theta} - \omega - m\Big) = \\
&= \int \frac{d\cos\theta}{2\pi} \frac{\omega'}{4E'} \frac{1}{\left|1 + \dfrac{\omega' - \omega\cos\theta}{E'}\right|} = \\
&= \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta \frac{\omega'}{m + \omega(1 - \cos\theta)} = \\
&= \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta \frac{(\omega')^2}{\omega m}.
\end{aligned} \tag{5.90}$$

Підставляючи всі вирази в нашу загальну формулу для перерізу (4.79) і встановивши $|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}| = 1$, знаходимо

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{2\omega} \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{8\pi} \frac{(\omega')^2}{\omega m} \cdot \left(\frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 \right).$$

Для обчислення $|\mathcal{M}|^2$ замінимо в (5.87) $p \cdot k = m\omega$ і $p \cdot k' = m\omega'$. Остаточний результат:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right], \tag{5.91}$$

де ω'/ω береться з виразу (5.89). Це є усереднена за спінами *формула Кляйна – Нішіни*, яку вперше було виведено в 1929 році.[23]

[23] O. Klein, Y. Nishina, *Z. Physik*, 52, 853 (1929).

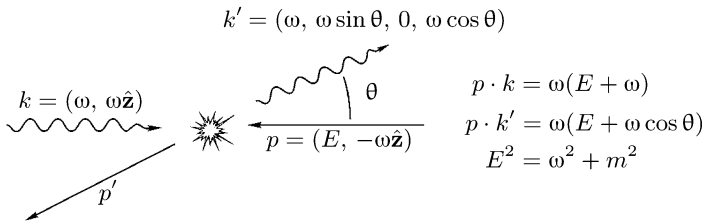
У межі $\omega \to 0$ ми бачимо з (5.89), що $\omega'/\omega \to 1$, і вираз для перерізу набуває вигляду

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}(1+\cos^2\theta); \quad \sigma_{\text{total}} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}. \tag{5.92}$$

Це відома формула Томсона для перерізу розсіяння класичного електромаґнітного випромінювання на вільному електроні.

Поведінка при високих енерґіях

Для аналізу поведінки перерізу комптонового розсіяння при високих енерґіях найзручніше працювати в системі центру мас. Щоб отримати диференційний переріз у цій системі, скористаємося інваріантним виразом (5.87). Кінематика реакції тепер виглядатиме так:



Підставивши ці величини у (5.87), ми побачимо, що при $\theta \approx \pi$, член $p \cdot k/p \cdot k'$ стає дуже великим, тоді як решта доданків мають порядок $\mathcal{O}(1)$ або менший. Отже, при $E \gg m$ і $\theta \approx \pi$ маємо

$$\tfrac{1}{4}\sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 \approx 2e^4 \cdot \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} = 2e^4 \cdot \frac{E+\omega}{E+\omega\cos\theta}. \tag{5.93}$$

Переріз у системі ЦМ визначається з (4.84):

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2E}\cdot\frac{1}{2\omega}\cdot\frac{\omega}{(2\pi)4(E+\omega)}\cdot\frac{2e^4(E+\omega)}{E+\omega\cos\theta} \approx \\ &\approx \frac{2\pi\alpha^2}{2m^2+s(1+\cos\theta)}.\end{aligned} \tag{5.94}$$

Зазначимо, що оскільки $s \gg m^2$, знаменник у (5.94) стає майже нульовим, коли фотон випромінюється у зворотному напрямку ($\theta \approx \pi$). Фактично, масою електрона в цій формулі можна було б цілком знехтувати, якби не потреба обрізати цю синґулярність. Інтеґруючи по $\cos\theta$, ми можемо відкинути член з масою електрона, замінивши його еквівалентним

обрізанням біля $\theta = \pi$. При цьому наближене значення повного перерізу комптонового розсіяння буде

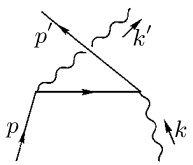
$$\int\limits_{-1}^{1} d(\cos\theta)\,\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \approx \frac{2\pi\alpha^2}{s} \int\limits_{-1+\frac{2m^2}{s}}^{1} d(\cos\theta)\,\frac{1}{(1+\cos\theta)}. \tag{5.95}$$

Таким чином, знаходимо, що повний переріз при високих енерґіях поводиться, як

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{2\pi\alpha^2}{s}\log\left(\frac{s}{m^2}\right). \tag{5.96}$$

Головна залежність α^2/s випливає з розмірного аналізу. Проте синґулярність, пов'язана з розсіянням фотона у зворотному напрямку, призводить до появи додаткового множника у вигляді логарифму від енерґії.

Спробуємо зрозуміти фізичне значення цієї синґулярності. Вона виникає з квадрату діаґрами u-каналу:



$$= -ie^2\varepsilon_\mu(k)\varepsilon_\nu(k')\bar{u}(p')\gamma^\mu\,\frac{\not{p}-\not{k}'+m}{(p-k')^2-m^2}\,\gamma^\nu u(p). \tag{5.97}$$

При $\theta \approx \pi$ амплітуда стає великою, оскільки знаменник пропаґатора малий ($\sim m^2$) порівняно з s. Для більшої точності введемо $\chi \equiv \pi - \theta$. Нас цікавлять значення χ, дещо більші за m/ω, та все ж досить малі, щоб ми могли застосувати наближення $1 - \cos\chi \approx \chi^2/2$. Для таких χ маємо

$$\begin{aligned}(p-k')^2 - m^2 = -2p\cdot k' &\approx -2\omega^2\left(\frac{m^2}{2\omega^2} + 1 - \cos\chi\right) \approx \\ &\approx -(\omega^2\chi^2 + m^2).\end{aligned} \tag{5.98}$$

В обраному нами діапазоні значень χ цей вираз малий порівняно з s, що й дає зростання повного перерізу.

Повертаючись до (5.93), ми бачимо, що при $m/\omega \ll \chi \ll 1$ квадрат амплітуди є пропорційним до $1/\chi^2$, а отже, маємо очікувати, що $\mathcal{M} \propto 1/\chi$. Проте, як ми щойно бачили, знаменник $\mathcal{M}$ пропорційний χ^2, тому зайвий степень χ мусить компенсуватися відповідним множником у чисельнику. Ми можемо зрозуміти фізичне походження цього множника, розглянувши амплітуду для окремого набору електронних та фотонних поляризацій.

Припустимо, що початковий електрон є правополяризованим. У знаменнику пропаґатора в (5.97) можемо знехтувати m порівняно з $(\not{p} - \not{k}')$. Оскільки цей член містить три γ-матриці між $\bar{u}$ та u, то кінцевий електрон також має бути правополяризованим. Отже, амплітуда є

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \varepsilon_\mu(k) \varepsilon^*_\nu(k') u_R^\dagger(p') \sigma^\mu \frac{\bar{\sigma} \cdot (p - k')}{-(\omega^2\chi^2 + m^2)} \sigma^\nu u_R(p), \tag{5.99}$$

де

$$u_R(p) = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad u_R(p') = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.100}$$

Якщо початковий фотон лівополяризований (його вектор поляризації є $\varepsilon_\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ -i,\ 0)$), то

$$\sigma^\mu \varepsilon_\mu(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

і комбінація $u_R^\dagger(p')\sigma^\mu\varepsilon_\mu(k)$ обертається на нуль. Тому початковий фотон мусить бути правополяризованим. Аналоґічним чином можна показати, що амплітуда стає нульовою, якщо й кінцевий фотон не є правополяризованим. Кінематична ситуація для такого набору поляризацій зображена на Рис. 5.6. Відзначимо, що повний спіновий момент у кінцевому стані на одиницю менший, ніж у початковому.

Продовжуючи наші обчислення, розглянемо чисельник пропаґатора в (5.99). У потрібному нам діапазоні значень χ переважний внесок дає член

$$-\sigma^1(p - k')^1 = \sigma^1 \cdot \omega\chi.$$

Це саме той множник з χ, появу якого ми передбачали вище. Він засвідчує, що кінцевий стан є p-хвилею, як того й вимагає збереження моменту імпульсу. Збираючи всі частини докупи, маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left(e_R^- \gamma_R \to e_R^- \gamma_R\right) &\approx e^2 \sqrt{2E}\,\sqrt{2}\,\frac{\omega\chi}{(\omega^2\chi^2 + m^2)} \sqrt{2E}\,\sqrt{2} \approx \\ &\approx \frac{4e^2\chi}{\chi^2 + \dfrac{m^2}{\omega^2}}. \end{aligned} \tag{5.101}$$

Такий самий результат ми одержимо у випадку, коли всі початкові та кінцеві частки лівополяризовані.

Зауважимо, що при розсіянні в точно протилежному напрямку, $\chi = 0$, матричний елемент (5.101) обертається на нуль через нульовий момент

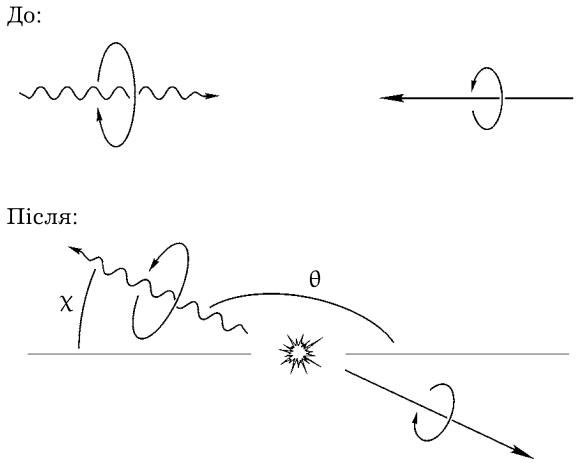


Рис. 5.6. У наближенні високих енерґій найвірогідніше, що фотон розсіється у протилежному до електрона напрямку. Оскільки спіральність зберігається, одиничне значення спінового моменту перетворюється на орбітальний момент імпульсу.

імпульсу в чисельнику. Отже, при θ, близькому до π, ми мусимо враховувати в чисельнику пропаґатора в (5.97) також і доданок з масою. Він містить лише дві ґамма-матриці, а тому перетворює правополяризований електрон на лівополяризований. Провівши аналіз, подібний до того, що дав у підсумку вираз (5.101), ми можемо побачити, що ця амплітуда не є нульовою лише в тому разі, коли початковий фотон лівополяризований, а кінцевий — правополяризований. У підсумку:

$$\mathcal{M}\left(e_R^- \gamma_L \to e_L^- \gamma_R\right) \approx \frac{4e^2 \dfrac{m}{\omega}}{\chi^2 + \dfrac{m^2}{\omega^2}}. \tag{5.102}$$

Реакція $e_L^- \gamma_R \to e_R^- \gamma_L$ дає такий самий матричний елемент.

Для порівняння цих результатів з нашими попередніми обчисленнями маємо скласти внески (5.101) і (5.102) з аналоґічними внесками для реакцій з початковими лівополяризованими електронами і поділити на 4 для усереднення за початковими спінами. Неполяризований диферен-

ційний переріз буде

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{2}\frac{1}{2E}\frac{1}{2\omega}\frac{\omega}{(2\pi)4(E+\omega)} \times$$
$$\times\left[\frac{8e^4\chi^2}{\left(\chi^2+\frac{m^2}{\omega^2}\right)^2} + \frac{8e^4\,\frac{m^2}{\omega^2}}{\left(\chi^2+\frac{m^2}{\omega^2}\right)^2}\right] = \tag{5.103}$$
$$= \frac{4\pi\alpha^2}{s\left(\chi^2+\frac{4m^2}{s}\right)},$$

що точно збігається з (5.94).

Важливість процесу з оберненням спіральності (5.102) у кінематично граничній точці $\theta = \pi$ має цікавий експериментальний наслідок. Розглянемо процес *зворотного* комптонового розсіяння — зіткнення високоенерґетичного електронного пучка з фотонним пучком низької енерґії (скажімо, з лазерним променем) для утворення високоенерґетичних фотонів. Нехай електрони мають енерґію E, а „лазерні“ фотони — $\bar{\omega}$. Позначимо енерґію розсіяного фотона, як $E' = yE$, і припустимо для простоти, що $s = 4E\bar{\omega} \gg m^2$. Тоді ми можемо застосувати проведені нами обчислення до цієї ситуації, коли фотони з найбільшою енерґією утворюються від розсіяння під кутом $\theta = \pi$ в системі центру мас. Обчисливши $2k \cdot k'$ у лабораторній системі і в ЦМ, легко показати, що енерґія кінцевого фотона співвідноситься з кутом розсіяння в системі ЦМ таким чином:

$$y \approx \frac{1}{2}(1-\cos\theta) \approx 1 - \frac{\chi^2}{4}.$$

Тоді (5.103) можна переписати як формулу для розподілу енерґії розсіяних у зворотному напрямку фотонів біля граничної точки:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{s\left((1-y)+\frac{16m^2}{s}\right)^2}\left[(1-y)+\frac{16m^2}{s}\right], \tag{5.104}$$

де перший доданок у квадратних дужках відповідає процесу зі збереженням спіральності, а другий — з її оберненням. Так, наприклад, якщо правополяризований лазерний промінь розсіюється на неполяризованому пучку високоенерґетичних електронів, то більшість розсіяних назад

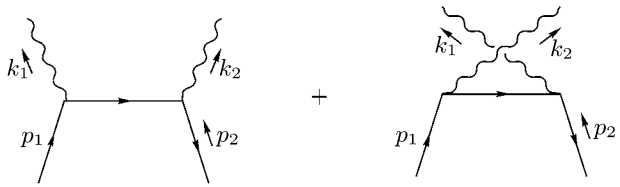
фотонів матиме праву поляризацію, але високоенерґетичні фотони будуть лівополяризованими. Цей ефект можна використати для експериментального визначення поляризації електронного пучка або для створення високоенерґетичного фотонного джерела з реґульованим розподілом за енерґією та поляризацією.

Анігіляція пар у фотони

Ми можемо отримати це один результат з амплітуди комптонового розсіяння. Розглянемо процес анігіляції

$$e^+e^- \to 2\gamma,$$

який у нижчому порядку дає діаґрами



Цей процес пов'язаний з комптоновим розсіянням через кросинґ-симетрію; його амплітуду можна одержати з комптонової шляхом заміни

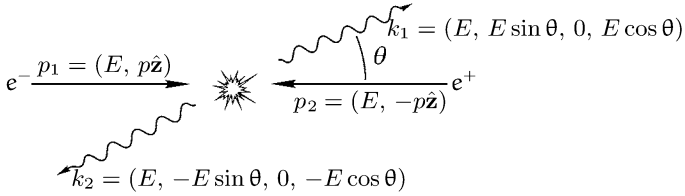
$$p \to p_1 \quad p' \to -p_2 \quad k \to -k_1 \quad k' \to k_2.$$

Здійснивши таку підстановку в (5.87), знайдемо

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = -2e^4\Bigg[&\frac{p_1\cdot k_2}{p_1\cdot k_1} + \frac{p_1\cdot k_1}{p_1\cdot k_2} + \\ &+ 2m^2\left(\frac{1}{p_1\cdot k_1} + \frac{1}{p_1\cdot k_2}\right) - m^4\left(\frac{1}{p_1\cdot k_1} + \frac{1}{p_1\cdot k_2}\right)^2\Bigg].\end{aligned} \tag{5.105}$$

Загальний знак мінус є наслідком кросинґових перетворень (5.68), і ним можна знехтувати.

Тепер перейдемо до системи ЦМ. Кінематика процесу:



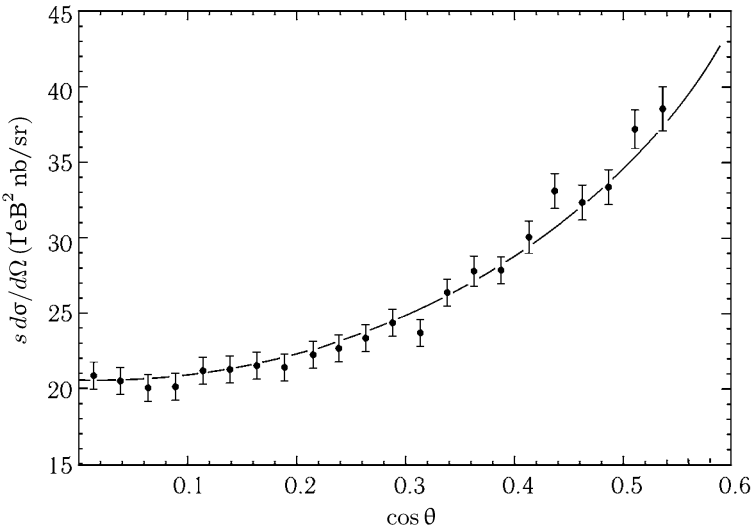


Рис. 5.7. Кутова залежність перерізу $e^+e^- \to 2\gamma$ при $E_{\text{цм}} = 29$ ГеВ, одержана колаборацією HRS (M. Derrick, et. al., *Phys. Rev.* D34, 3286 (1986)). Суцільна лінія показує теоретичні розрахунки за формулою (5.107).

Вже звичні обчислення дають диференційний переріз:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{s}\left(\frac{E}{p}\right)\times \\ \times\left[\frac{E^2+p^2\cos^2\theta}{m^2+p^2\sin^2\theta} + \frac{2m^2}{m^2+p^2\sin^2\theta} - \frac{2m^4}{(m^2+p^2\sin^2\theta)^2}\right]. \tag{5.106}$$

У межі високих енерґій цей вираз набуває вигляду

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \xrightarrow[E\gg m]{} \frac{2\pi\alpha^2}{s}\left(\frac{1+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right), \tag{5.107}$$

за винятком проміжку, де $\sin\theta$ має порядок m/p або менший. Зауважимо, що оскільки обидва фотони тотожні, то всі кінцеві стани будуть враховані інтеґруванням у діапазоні $0 \le \theta \le \pi/2$. Тому повний переріз є

$$\sigma_{\text{total}} = \int_0^1 d(\cos\theta)\,\frac{d\sigma}{d\cos\theta}.$$

На Рис. 5.7 порівнюється асимптотична формула (5.107) для диференційного перерізу з результатами вимірювання перерізу анігіляції електрон-позитронної пари у два фотони при дуже високих енерґіях.

Задачі

5.1. Кулонове розсіяння. Повторіть обчислення з Задачі 4.4, пункт (c), використавши цього разу повний релятивістський вираз для матричного елемента. Ви маєте встановити, що усереднений за спінами переріз є

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4|\mathbf{p}|^2\beta^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1-\beta^2\sin^4\frac{\theta}{2}\right),$$

де $\mathbf{p}$ — 3-імпульс електрона, а β — його швидкість. Це є *формула Мотта* для кулонового розсіяння релятивістських електронів. Тепер виведіть цю формулу іншим шляхом, скориставшись перерізом електрон-мюонного розсіяння у системі спокою мюона і зберігши масу електрона за умови, що $m_\mu \to \infty$.

5.2. Розсіяння Баба. Обчисліть диференційний переріз $d\sigma/d\cos\theta$ для розсіяння Баба $e^+e^- \to e^+e^-$. Можете працювати в наближенні $E_{\text{цм}} \gg m_e$, що дозволяє знехтувати масою електрона. Маєте дві фейнманові діаґрами, внески від яких перед піднесенням до квадрату треба додати для отримання інваріантного матричного елемента. Поставтеся уважно до визначення правильного відносного знака між цими діаґрамами. Проміжні обчислення є досить складними, але остаточний результат доволі простий. Зокрема, ви можете виявити, що його корисно записати через мандельштамові змінні s, t, u. Зазначимо, що в наближенні нульової маси електрона, $u + s + t = 0$. Тоді ви зможете привести диференційний переріз до вигляду

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{s}\left[u^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{s}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2\right].$$

Перепишіть цю формулу через $\cos\theta$ і зобразіть її ґрафік. Чому переріз розбігається при $\theta \to 0$?

5.3. Формалізм *спінорних добутків,* запроваджений у Задачі 3.3, дозволяє ефективно обчислювати деревовидні діаґрами з безмасовими частками. Нехай u_{L0} і u_{R0} є правим та лівим спінорами при певному світлоподібному імпульсі k_0. Вони задовольняють умовам

$$u_{L0}\bar{u}_{L0} = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\not{k}_0, \quad u_{R0}\bar{u}_{R0} = \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\not{k}_0. \tag{1}$$

(Ці співвідношення є просто проекціями загальнішої формули $\sum u_0\bar{u}_0 = \not{k}_0$ на стани з визначеною спіральністю.) Далі визначимо спінори для

будь-якого іншого світлоподібного імпульсу p, як

$$u_L(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{R0}, \quad u_R(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{L0}. \tag{2}$$

Ми показали, що для цих спінорів виконується умова $\not{p} u(p) = 0$; оскільки ніде не присутня m, то ці спінори можна використовувати як для ферміонів, так і для антиферміонів. Визначимо

$$\mathrm{s}(p_1, p_2) = \bar{u}_R(p_1) u_L(p_2), \quad \mathrm{t}(p_1, p_2) = \bar{u}_L(p_1) u_R(p_2).$$

У спеціально обраній системі відліку ми довели, що

$$\begin{aligned} \mathrm{t}(p_1, p_2) &= \mathrm{s}(p_2, p_1)^*, \\ \mathrm{s}(p_1, p_2) &= -\mathrm{s}(p_2, p_1), \\ |\mathrm{s}(p_1, p_2)|^2 &= 2p_1 \cdot p_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Тепер застосуємо ці результати.

(a) Для розминки дайте інше доведення співвідношень у (3), скориставшись (1), щоб переписати $|\mathrm{s}(p_1, p_2)|^2$, як слід від діракових матриць, а потім обчисліть його.

(b) Покажіть, що для будь-якого добутку діракових матриць

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \cdots\right] = \mathrm{Tr}\left[\cdots \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu\right]$$

де $\mu, \nu, \rho, \cdots = 0, 1, 2, 3, 5$. Використайте цю тотожність для доведення, що

$$\bar{u}_L(p_1) \gamma^\mu u_L(p_2) = \bar{u}_R(p_2) \gamma^\mu u_R(p_1).$$

(c) Доведіть тотожність Фірца:

$$\bar{u}_L(p_1) \gamma^\mu u_L(p_2) \left[\gamma_\mu\right]_{ab} = 2\left[u_L(p_2) \bar{u}_L(p_1) + u_R(p_1) \bar{u}_R(p_2)\right]_{ab}, \tag{4}$$

де $a, b = 1, 2, 3, 4$ є діракові індекси. Це можна зробити шляхом перевірки наступних тверджень. Права частина в (4) є діраковою матрицею, отже, її можна записати у вигляді лінійної комбінації Г-матриць, які розглядалися в § 3.4. Позначимо цю матрицю M; тоді для M виконується рівність

$$\gamma^5 \mathrm{M} = -\mathrm{M} \gamma^5,$$

а тому вона повинна мати вигляд

$$\mathrm{M} = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\gamma_\mu V^\mu + \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\gamma_\mu W^\mu.$$

де V^μ і W^μ — 4-вектори. Їх можна знайти за допомогою технолоґії слідів, наприклад:

$$V^\mu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\nu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\mathrm{M}\right].$$

(d) Розгляньте процес $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ у головному порядку за α, знехтувавши масами всіх часток. Спершу проаналізуйте випадок, коли електрон і кінцевий мюон є правополяризованими, а позитрон і антимюон — лівополяризованими. (Використайте спінор v_R для антимюона і $\bar{u}_R$ для позитрона.) Застосувавши тотожність Фірца, покажіть, що амплітуду можна вивести безпосередньо через спінорні добутки. Піднесіть її до квадрату й відтворіть результат для

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\left(e_R^+ e_L^- \to \mu_R^+ \mu_L^-\right).$$

з рівняння (5.22). Обчисліть переріз для інших наборів спіральностей у цьому процесі й покажіть, що вони також відтворюють результати, отримані в § 5.2.

(e) Обчисліть диференційний переріз розсіяння Баба з безмасовими електронами, окремо для кожного набору спіральностей. Усереднення за початковими спіральностями і сума за кінцевими мають відтворити результат Задачі 5.2. З цих викладок ви побачите, як виникає потрібний вираз для перерізу при додаванні внесків від визначених спіральностей.

5.4. Час життя позитронію.

(a) Обчисліть амплітуду $\mathcal{M}$ для e^+e^--анігіляції у два фотони в нерелятивістському наближенні (тобто, залиште тільки члени, пропорційні нульовим степеням 3-імпульсів електрона та позитрона). Використайте цей результат, разом з нашим формалізмом для зв'язаних станів ферміон-антиферміон, щоб розрахувати ширину розпаду $1S$-стану позитронію з утворенням двох фотонів. Покажіть, що стани зі спіном 1 не можуть анігілювати у два фотони, що підтверджується міркуваннями симетрії, викладеними в Задачі 3.8. Для станів

позитронію зі спіном 0 покажіть, що результат пропорційний квадратові хвильової функції $1S$-стану в початковій точці координат. Підставивши значення хвильової функції з нерелятивістської квантової механіки, ви знайдете:

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma = \frac{\alpha^5 m^e}{2} \approx 8,03 \times 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Останні вимірювання[24] дають $\Gamma = 7,994 \pm 0,011$ нс$^{-1}$; для усунення розбіжності у $0,5\%$ необхідне врахування радіаційних поправок.

(b) Обчислення ширини розпаду з більшими значеннями l помітно ускладнюється. Далі в цій задачі ми обмежимося розглядом випадку, коли $l = 1$. Передовсім, відокремте в амплітуді $e^+e^- \to 2\gamma$ члени, пропорційні першому степеню 3-імпульсу. (Для простоти оберіть систему ЦМ.) Оскільки

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, p^i \psi(\mathbf{p}) = i\frac{\partial}{\partial x^i}\psi(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=0},$$

то ця частина амплітуди перекриватиметься зі зв'язаними P-станами. Покажіть, що стани з $S = 1$, але не з $S = 0$, можуть розпадатися на два фотони. Це знову є наслідком збереження C-парності.

(c) Для обчислення ширини розпаду P-станів нам потрібні належним чином нормовані хвильові функції. Позначимо функції P-станів, як

$$\psi_i = x^i f(|\mathbf{x}|), \qquad \text{нормовані умовою} \qquad \int d^3\mathbf{x}\, \psi_i^*(\mathbf{x})\psi_j(\mathbf{x}) = \delta_{ij}.$$

а їхні фур'є-перетворення як $\psi_i(\mathbf{p})$. Покажіть, що

$$|B(\mathbf{k})\rangle = \sqrt{2M}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, \psi_i(\mathbf{p})\, \mathrm{a}^\dagger_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}\, \Sigma^i\, \mathrm{b}^\dagger_{-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}\, |0\rangle$$

є правильно нормований вектор зв'язаного стану, якщо Σ^i позначає набір трьох 2×2-матриць, для яких

$$\sum_i \mathrm{Tr}\left(\Sigma^{i\dagger}\Sigma^i\right) = 1.$$

Для побудови станів $S = 1$ маємо зробити так, щоб кожна Σ^i містила сиґма-матрицю Паулі. Загалом, спін-орбітальна взаємодія розщепить мультиплет з $S = 1, L = 1$ відповідно до повного моменту J. Для

[24] D. W. Gidley et. al., *Phys. Rev. Lett.* 49, 525 (1982).

станів з визначеним J маємо

$$
\begin{aligned}
J = 0: &\qquad \Sigma^i = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\,\sigma^i,\\
J = 1: &\qquad \Sigma^i = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk} n^j \sigma^k,\\
J = 2: &\qquad \Sigma^i = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,h^{ij}\sigma^j,
\end{aligned}
$$

де $\mathbf{n}$ є вектор поляризації, що задовольняє умові $|\mathbf{n}|^2 = 1$, а h^{ij} — тензор з нульовим слідом, типове значення якого має бути $h^{12} = 1$, коли решта компонентів нульові.

(d) Використавши розкладення для амплітуди процесу $e^+e^- \to 2\gamma$, отримане у (b), та явний вираз із (c) для станів позитронію з $S = 1$, $L = 1$ і визначеним J, обчисліть для кожного J ширину розпаду на два фотони.

5.5. Фізика масивного векторного бозона. Введемо в КЕД масивне фотонне поле B_μ з масою M, що взаємодіє з електроном, як

$$\Delta H = \int d^3\mathbf{x}\left(g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi B_\mu\right).$$

Масивний фотон у початковому та кінцевому станах має три можливі фізичні поляризації, що відповідають трьом простороподібним одиничним векторам у системі спокою бозона. Їх можна інваріантно описати, як три вектори $\varepsilon_\mu^{(i)}$, що задовольняють умовам

$$\varepsilon^{(i)} \cdot \varepsilon^{(j)} = -\delta^{ij}, \quad k \cdot \varepsilon^{(i)} = 0,$$

де k є 4-імпульсом бозона. Чотири вектори $(k_\mu/M,\ \varepsilon_\mu^{(i)})$ утворюють ортоґональний базис. Оскільки B_μ пов'язане зі збереженим струмом $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, то з тотожності Варда випливає, що скалярний добуток k на амплітуду народження B дає нуль. Отже, ми можемо зробити заміну

$$\sum_i \varepsilon_\mu^{(i)}\varepsilon_\mu^{(i)*} \to -g_{\mu\nu}.$$

Це поширює на масивні бозони прийом Фейнмана для векторів поляризації фотона і спрощує обчислення перерізів народження B. (Увага: цей прийом не можна механічно перенести на неабелеві калібрувальні поля.) Тепер проведіть вказані нижче розрахунки, щоразу нехтуючи масою електрона.

(a) Обчисліть переріз процесу $e^+e^- \to B$. Визначте час життя бозона B, виходячи з припущення, що він розпадається лише на електрони. Перевірте співвідношення

$$\sigma\left(e^+e^- \to B\right) = \frac{12\pi^2}{M}\,\Gamma(B \to e^+e^-)\,\delta(M^2 - s),$$

яке розглядалося в § 5.3.

(b) Обчисліть диференційний переріз процесу $e^+e^- \to \gamma + B$ в системі ЦМ. (Ці розрахунки майже без змін переносяться на реальний процес $e^+e^- \to \gamma + Z^0$, що дозволяє виміряти число розпадів Z^0 у неспостережні кінцеві стани, які, у свою чергу, є пропорційними до кількості різновидів нейтрино.)

(c) Зверніть увагу, що переріз з (b) розбігається при $\theta \to 0$ або π. Проаналізуйте значення кута поблизу $\theta = 0$. У цьому проміжку переважний внесок дає t-канальна діаґрама. Інтуїтивно це відповідає випромінюванню фотона з електронної лінії до анігіляції e^+e^- в B. Перекомпонуйте формулу так, щоб підтвердити цю інтерпретацію. Передовсім зауважте, що розбіжність при $\theta \to 0$ обрізається електронною масою: нехай імпульс електрона є $(E,\ 0,\ 0,\ k)$, де $k = \sqrt{E^2 - m_e^2}$, а імпульс фотона $k^\mu = (xE,\ xE\sin\theta,\ 0,\ xE\cos\theta)$. Покажіть, що знаменник пропаґатора ніколи не стає меншим за $\mathcal{O}(m_e^2/s)$. Тепер проінтеґруйте переріз з пункту (b) по кутах, обрізавши інтеґрал при $\theta^2 \sim (m_e^2/s)$ і залишивши тільки основний лоґарифмічний член, пропорційний $\log(s/m_e^2)$. Покажіть, що в цьому наближенні переріз для випромінювання фотона вперед можна записати як

$$\sigma\left(e^+e^- \to B\right) \approx \int dx\, f(x) \cdot \sigma\left(e^+e^- \to B \text{ при } E_{\text{цм}}^2 = (1-x)s\right),$$

де переріз анігіляції обчислено для зіткнення позитрона з енерґією E та електрона з енерґією $(1-x)E$, а $f(x)$, *функція розподілу Вайцзекера–Вільямса,* є

$$f(x) = \frac{\alpha}{2\pi}\,\frac{1 + (1-x)^2}{x} \cdot \log\left(\frac{s}{m_e^2}\right).$$

Ця функція неодмінно виникає в тих процесах, де фотон випромінюється колінеарно з електронної лінії. Ми знову зустрінемо її, уже в іншому контексті, в Задачі 6.2.

5.6. Ця задача поширює технолоґію спінорних добутків з Задачі 5.3 на зовнішні фотони.

(a) Нехай k є імпульс фотона, а p — інший світлоподібний вектор, обраний так, щоб $p \cdot k \neq 0$. Нехай $u_R(p)$ і $u_L(p)$ будуть спінорами з певною спіральністю для ферміонів зі світлоподібним імпульсом p, визначені відповідно до домовленостей у Задачі 5.3. Визначимо вектори поляризації фотона:

$$\varepsilon_+^\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{4p \cdot k}}\,\bar{u}_R(k)\gamma^\mu u_R(p), \quad \varepsilon_-^\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{4p \cdot k}}\,\bar{u}_L(k)\gamma^\mu u_L(p).$$

Застосуємо тотожність

$$u_L(p)\bar{u}_L(p) + u_R(p)\bar{u}_R(p) = \not{p}$$

для обчислення суми за поляризаціями

$$\varepsilon_+^\mu \varepsilon_+^{\nu *} + \varepsilon_-^\mu \varepsilon_-^{\nu *} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu p^\nu + k^\nu p^\mu}{p \cdot k}.$$

Другий доданок у правій частині дасть нуль, якщо його згорнути з будь-якою амплітудою $\mathcal{M}^\mu$ випромінювання фотона, відтак маємо

$$|\varepsilon_+ \cdot \mathcal{M}|^2 + |\varepsilon_- \cdot \mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu *}(-g_{\mu\nu});$$

отже, ми можемо використовувати вектори ε_+, ε_- для обчислення сум за поляризаціями фотонів.

(b) Використовуючи визначені вище поляризації, спінорні добутки і тотожність Фірца з Задачі 5.3, обчисліть диференційний переріз анігіляції безмасових електрона та позитрона у два фотони. Покажіть, що цей результат узгоджується з безмасовим наближенням, отриманим у (5.107):

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{s}\left(\frac{1+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

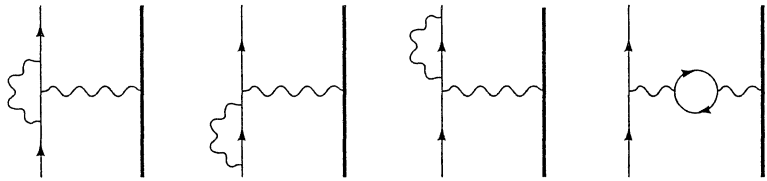
для системи ЦМ. З результату пункту (a) випливає, що відповідь не залежить від конкретного вектора p, який використовувався для визначення поляризаційних векторів; проте обчислення значно спрощується, коли вибрати за цей вектор початковий 4-імпульс електрона.

Розділ 6

Радіаційні поправки: вступ

Тепер, коли ми набули певного досвіду проведення обчислень КЕД, перейдімо до дещо складніших задач. У Розділі 5 ми мали справу лише з *деревовидними* діаґрамами, тобто з такими, що не містили петель. Проте всі розглянуті нами процеси у вищих порядках отримують внески, відомі як *радіаційні поправки* від діаґрам з петлями. Іншим джерелом радіаційних поправок у КЕД є *гальмівне випромінювання* — поява в кінцевому стані додаткових фотонів, утворених під час реакції. У цьому розділі ми вивчимо обидва типи радіаційних поправок і виявимо, що неправомірно враховувати одні без урахування інших.

Упродовж усього розділу, для ілюстрації цих ідей у найпростішому контексті, ми розглядатимемо розсіяння електрона на іншій, дуже важкій частці. У деревовидному наближенні ми вже аналізували цей процес у § 5.4 і в Задачі 5.1. У наступному порядку теорії збурень внесок у нього дають такі діаґрами:



(6.1)

Поправка першого порядку за α виникає від інтерференції між внесками від цих і деревовидних діаґрам. Існує ще шість додаткових однопетельних діаґрам з важкою часткою в петлі, проте ними можна знехтувати, якщо друга частка набагато важча за електрон, бо тоді у знаменнику пропаґатора з'являється доданок з великою масою. (Фізично це можна пояснити так, що важча частка у процесі зіткнення зазнає меншого прискорення, а отже, менше випромінює.)

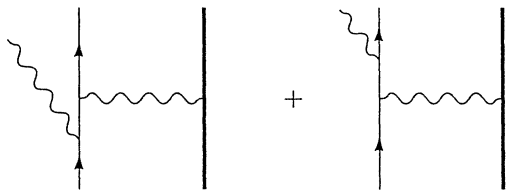
З чотирьох діаґрам у (6.1), перша (відома як *вершинна поправка*) є найскладнішою і призводить до найбільшої кількості нових ефектів. Наприклад, саме вона викликає аномальний маґнітний момент електрона, який ми обчислимо в § 6.3.

Наступні дві діаґрами є *поправками до зовнішніх ліній*. Ми знехтуємо ними в поточному розділі, оскільки ці діаґрами не ампутовані, як вимагає формула (4.90) для елементів S-матриці. Ми детально розглянемо ці діаґрами після того, як доведемо згадану формулу в § 7.2.

Остання діаґрама в (6.1) називається *поляризацією вакууму*. Оскільки вона потребує значно складнішої обчислювальної техніки, ніж решта діаґрам, ми не розглядатимемо її до § 7.5.

Наше вивчення радіаційних поправок ускладнюватиметься ще й тією обставиною, що вони є погано визначеними. Кожна така діаґрама передбачає інтеґрування по імпульсу в петлі, і щоразу цей інтеґрал розбігається при $k \to \infty$, в *ультрафіолетовій зоні*. На щастя, нескінченні частини цих інтеґралів завжди скорочуються при обчислені спостережних величин, на зразок перерізу розсіяння.

Перші три діаґрами у (6.1) також містять й *інфрачервоні розбіжності* — нескінченності, що виникають на межі $k \to 0$ інтеґрування по імпульсу в петлі. У § 6.4 ми побачимо, що ці розбіжності скорочуються при врахуванні діаґрам *гальмівного випромінювання*:



(6.2)

Ці діаґрами є розбіжними в межі, коли енерґія випроміненого фотона прагне до нуля. У цій межі жоден фізичний детектор не спроможний виявити фотони з такою низькою енерґією, проте ми мусимо їх враховувати в загальному перерізі розсіяння. Діаґрами гальмівного випромінювання є істотною частиною радіаційних поправок як для цього, так і для решти процесів КЕД.

Головна наша мета в цьому розділі полягає у вивченні гальмівного випромінювання низькоенерґетичних фотонів, діаґрам вершинних поправок та скорочення інфрачервоних розбіжностей між ними.

§ 6.1. М'яке гальмівне випромінювання

Почнемо вивчення радіаційних поправок з аналізу гальмівного випромінювання. У цьому параґрафі ми спершу проведемо класичне обчислення низькочастотного випромінювання в разі раптового прискорення електрона. Потім розрахуємо споріднену величину з квантової теорії поля —

переріз утворення дуже м'яких фотонів за діаґрамами (6.2). Також ми побачимо, що класичний результат виникає як граничний випадок квантового.

Класичне обчислення

Припустімо, що класичний електрон, перебуваючи в точці $\mathbf{x} = 0$, зазнає в момент часу $t = 0$ раптового поштовху, що призводить до зміни його імпульсу від p до p'. (Певна річ, миттєва зміна імпульсу є нереальною ідеалізацією. Проте точна форма траєкторії в процесі прискорення не впливає на низькочастотне випромінювання. Тому наші обчислення будуть справедливі для частот, менших від зворотної величини часу розсіяння.)

$\longleftarrow$ раптовий поштовх у момент часу $t = 0$, коли частка перебуває в точці $x = 0$.

Поле випромінювання можемо знайти, записавши вираз для струму електрона, як джерела в рівняннях Максвела.

Яке значення має питомий струм у цьому випадку? Для зарядженої частки, що перебуває в стані спокою при $\mathbf{x} = 0$, струм є

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= (1,\, \mathbf{0})^\mu \cdot e\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \\ &= \int dt\, (1,\, \mathbf{0})^\mu \cdot e\, \delta^{(4)}\big(x - y(t)\big) \quad \text{де} \quad y^\mu(t) = (t,\, \mathbf{0})^\mu. \end{aligned}$$

А для довільної траєкторії $y^\mu(\tau)$,

$$j^\mu(x) = e \int d\tau\, \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau}\, \delta^{(4)}\big(x - y(t)\big). \tag{6.3}$$

Зазначимо, що цей вираз не залежить від точного способу параметризації траєкторії, оскільки заміна τ на $\gamma(\tau)$ дає в мірі інтеґрування додатковий фактор $d\tau/d\sigma$, який при перемноженні на $dy^\mu/d\tau$ перетворюється на $dy^\mu/d\sigma$. З виразу (6.3) ми можемо довести, що такий струм тотожно зберігається, оскільки для будь-якої функції $f(x)$, що обертається на нуль на

нескінченності,

$$\int d^4x\, f(x)\, \partial_\mu j^\mu(x) = \int d^4x\, f(x)\, e \int d\tau\, \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau}\, \partial_\mu\, \delta^{(4)}\big(x - y(t)\big) =$$
$$= -e \int d\tau\, \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau}\, \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x)\Big|_{x=y(t)} =$$
$$= -e \int d\tau\, \frac{d}{d\tau} f\big(y(\tau)\big) =$$
$$= -e\, f\big(y(\tau)\big)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Для нашого процесу траєкторія має вигляд

$$y^\mu(\tau) = \begin{cases} (p^\mu/m)\tau & \text{для } \tau < 0; \\ (p'^\mu/m)\tau & \text{для } \tau > 0. \end{cases}$$

Тому струм можна переписати, як

$$j^\mu(x) = e \int\limits_0^\infty d\tau\, \frac{p'^\mu}{m}\, \delta^{(4)}\Big(x - \frac{p'}{m}\Big) + e \int\limits_{-\infty}^0 d\tau\, \frac{p^\mu}{m}\, \delta^{(4)}\Big(x - \frac{p}{m}\Big).$$

Наразі нам знадобиться фур'є-перетворення цієї функції. Вставивши множники $e^{-\varepsilon\tau}$ та $e^{\varepsilon\tau}$, щоб усунути розбіжності в інтеґралах, маємо

$$\begin{aligned} \tilde{j}^\mu &= \int d^4x\, e^{ik\cdot x} j^\mu(x) = \\ &= e \int\limits_0^\infty d\tau \Big(\frac{p'^\mu}{m}\Big) e^{i\left(\frac{k\cdot p'}{m} + i\varepsilon\right)\tau} + e \int\limits_{-\infty}^0 d\tau \Big(\frac{p^\mu}{m}\Big) e^{i\left(\frac{k\cdot p}{m} - i\varepsilon\right)\tau} = \\ &= ie\Big(\frac{p'^\mu}{k\cdot p' + i\varepsilon} - \frac{p^\mu}{k\cdot p - i\varepsilon}\Big). \end{aligned} \tag{6.4}$$

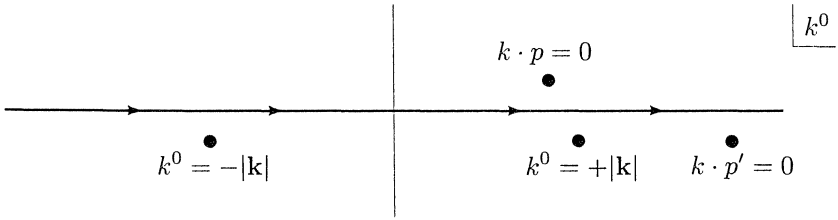
Тепер ми готові до розв'язання рівняння Максвела. В лоренцовому калібруванні $\partial^\mu A_\mu = 0$ треба розв'язати $\partial^2 A^\mu = j^\mu$, або, у фур'є-просторі,

$$\widetilde{A}^\mu(k) = -\tfrac{1}{k^2}\, \tilde{j}^\mu(k).$$

Підставивши $\tilde{j}^\mu$ з (6.4), отримуємо формулу для векторного потенціалу:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\; e^{-ik\cdot x}\, \frac{-ie}{k^2}\Big(\frac{p'^\mu}{k\cdot p' + i\varepsilon} - \frac{p^\mu}{k\cdot p - i\varepsilon}\Big). \tag{6.5}$$

Інтеґрал по k^0 можемо обчислити, як контурний інтеґрал у комплексній площині. Полюси знаходяться в точках:



Ми пересунули полюси $k^0 = \pm|k|$ нижче дійсної осі для того (незабаром ми підтвердимо цей висновок), щоб поле випромінювання задовольняло запізнювальним граничним умовам.

Для $t < 0$ замкнемо контур у верхній півплощині, охопивши полюс $k \cdot p = 0$, тобто, $k^0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/p^0$. В результаті,

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}/p^0)t}\, \frac{(2\pi i)(+i\varepsilon)}{(2\pi)k^2}\, \frac{p^\mu}{p^0}.$$

У системі відліку, де електрон початково перебуває в стані спокою, його імпульс є $p^\mu = (p^0,\, \mathbf{0})$, а векторний потенціал переходить у

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, \frac{e}{|\mathbf{k}|^2} \cdot (1,\, \mathbf{0})^\mu.$$

Це є кулонів потенціал не прискореного заряду. Як і слід очікувати, випромінювання відсутнє, поки електрон не зазнає розсіяння.

Після розсіяння ($t > 0$) замкнемо контур знизу, охопивши три полюси, розташовані нижче дійсної осі. Полюс при $k^0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}'/p'^0$ призводить до кулонового потенціалу вихідної частки. Отже, інші два полюси відповідальні за поле випромінювання. Їхній внесок дає

$$\begin{aligned} A^\mu_{\mathrm{rad}}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \frac{-e}{2|\mathbf{k}|} \left\{ e^{-ik\cdot x}\Big(\frac{p'^\mu}{k\cdot p'} - \frac{p^\mu}{k\cdot p} \Big) + \text{к. с.} \right\}\Bigg|_{k^0=|\mathbf{k}|} = \\ &= \mathrm{Re} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \mathcal{A}^\mu(\mathbf{k})\, e^{-ik\cdot x}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

де амплітуда в імпульсному просторі $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ є

$$\mathcal{A}^\mu(\mathbf{k}) = -\frac{e}{|\mathbf{k}|}\Big(\frac{p'^\mu}{k\cdot p'} - \frac{p^\mu}{k\cdot p} \Big). \tag{6.7}$$

(Тут і далі неявно припускається виконання умови $k^0 = |\mathbf{k}|$.)

Для обчислення енерґії випромінювання маємо знайти електричне та маґнітне поля. Найпростіше записати $\mathbf{E}$ та $\mathbf{B}$ через дійсні складові комплексних інтеґралів Фур'є, як ми це вчинили для A^μ:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x) &= \mathrm{Re}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\,e^{-ik\cdot x};\\ \mathbf{B}(x) &= \mathrm{Re}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k})\,e^{-ik\cdot x}.\end{aligned} \tag{6.8}$$

В імпульсному просторі амплітуди $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})$ і $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k})$ випромінюваних полів є просто

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) &= -i\mathbf{k}\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + ik^0\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{k}),\\ \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) &= i\mathbf{k}\times\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \widehat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}).\end{aligned} \tag{6.9}$$

Використавши явний вигляд (6.7) для $\mathcal{A}^\mu(\mathbf{k})$, легко переконатися, що електричне поле є поперечним: $\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) = 0$.

Маючи вирази для полів, можемо знайти енерґію випромінювання:

$$\text{Енерґія} = \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\left(|\mathbf{E}(x)|^2 + |\mathbf{B}(x)|^2\right). \tag{6.10}$$

Перший член є

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}\int d^3\mathbf{x}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\,e^{-ik\cdot x} + \boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k})\,e^{ik\cdot x}\right)\cdot\\ &\qquad\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}')\,e^{-ik'\cdot x} + \boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k}')\,e^{ik'\cdot x}\right) =\\ &= \frac{1}{8}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(-\mathbf{k})\,e^{-2ik^0t} + 2\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k}) + \boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(-\mathbf{k})\,e^{2ik^0t}\right).\end{aligned}$$

Такий самий вираз, що містить $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k})$, дає другий член. Використовуючи (6.9) і той факт, що $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})$ є поперечним, ми можемо показати, що залежні від часу доданки з $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ і $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ скорочуються, а решта в підсумку дають

$$\text{Енерґія} = \frac{1}{2}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k}). \tag{6.11}$$

Оскільки вектор $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})$ поперечний, введемо два поперечні одиничні поляризаційні вектори $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$, $\lambda = 1, 2$. Тоді підінтеґральний вираз можемо

переписати, як

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=1,2}\left|\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\right|^2 = \\ = |\mathbf{k}|^2\sum_{\lambda=1,2}\left|\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\right|^2.$$

Скориставшись явним виглядом (6.7) для $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, маємо остаточний вираз для енерґії випромінювання:[25]

$$\text{Енерґія} = \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1,2}\frac{e^2}{2}\left|\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda(\mathbf{k})\cdot\left(\frac{\mathbf{p}'}{k\cdot p'}-\frac{\mathbf{p}}{k\cdot p}\right)\right|^2. \tag{6.12}$$

Тут ми можемо вільно замінити вектори $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{p}'$, і $\mathbf{p}$ на 4-вектори. Зауваживши, що заміна ε^μ на k^μ має давати нуль,

$$k_\mu\left(\frac{p'^\mu}{k\cdot p'}-\frac{p^\mu}{k\cdot p}\right)=0,$$

знаходимо, що суму за поляризаціями можна обчислити, вдавшись до прийому з § 5.5, тобто замінивши $\sum\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu^*$ на $-g_{\mu\nu}$. В результаті,

$$\begin{aligned}\text{Енерґія} &= \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^2}{2}(-g_{\mu\nu})\left(\frac{p'^\mu}{k\cdot p'}-\frac{p^\mu}{k\cdot p}\right)\left(\frac{p'^\nu}{k\cdot p'}-\frac{p^\nu}{k\cdot p}\right) = \\ &= \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^2}{2}\left(\frac{2p\cdot p'}{(k\cdot p')(k\cdot p)}-\frac{m^2}{(k\cdot p')^2}-\frac{m^2}{(k\cdot p)^2}\right).\end{aligned} \tag{6.13}$$

Щоб зробити цю формулу нагляднішою, оберемо систему відліку, в якій $p^0 = p'^0 = E$. Тоді імпульси є

$$k^\mu = (k,\,\mathbf{k}),\quad p^\mu = E(1,\,\mathbf{v}),\quad p'^\mu = E(1,\,\mathbf{v}').$$

У такій системі наша формула набуває вигляду

$$\text{Енерґія} = \frac{e^2}{(2\pi)^2}\int dk\,\mathcal{I}(\mathbf{v},\,\mathbf{v}'), \tag{6.14}$$

де $\mathcal{I}(\mathbf{v},\,\mathbf{v}')$ — диференційна інтенсивність $d(\text{Енерґія})/dk$:

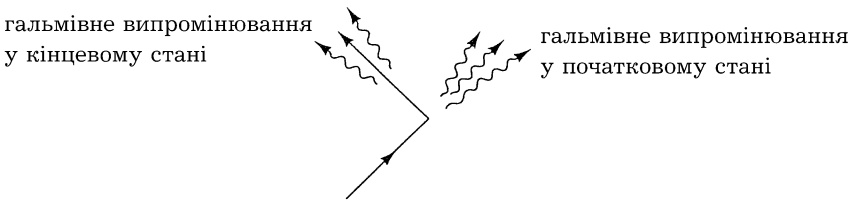
$$\mathcal{I}(\mathbf{v},\,\mathbf{v}') = \int\frac{d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}}}{4\pi}\left(\frac{2(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')}{(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{v})(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{v}')}-\frac{m^2/E^2}{(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{v}')^2}-\frac{m^2/E^2}{(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{v})^2}\right). \tag{6.15}$$

[25] Цей результат отримано у [32], стор. 703.

Оскільки $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ не залежить від k, ми бачимо, що інтеґрал у (6.14) по k є тривіальним, але розбіжним. Ця розбіжність насправді виникає через використану нами ідеалізацію з миттєвою зміною імпульсу. Ми очікуємо, що наша формула буде працювати лише для випромінювання з частотами, меншими від зворотної величини часу розсіяння. З релятивістським електроном має місце ще одне обмеження, яке виникає за рахунок ефекту, коли окремі фотони відбирають істотну частину його енерґії. В обох випадках формула справедлива в межі малих частот, тому ми можемо обрізати інтеґрал на певному значенні максимальної частоти $k_{\max}$. У цьому разі,

$$\text{Енерґія} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot k_{\max} \cdot \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \tag{6.16}$$

Підінтеґральний вираз у $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ є великим, коли $\widehat{\mathbf{k}}$ паралельний $\mathbf{v}$ або $\mathbf{v}'$:



В ультрарелятивістському наближенні основний внесок в енерґію дають два максимуми в першому члені виразу (6.15). Обчислимо $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ в цьому наближенні, обмежившись інтервалами поблизу двох згаданих максимумів:

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \approx \int\limits_{\widehat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}^{\cos\theta=1} d\cos\theta \, \frac{1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{(1-v\cos\theta)(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')} + \\ + \int\limits_{\widehat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{v}'=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}^{\cos\theta=1} d\cos\theta \, \frac{1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{(1-v'\cos\theta)(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')}.$$

(Нижні межі в інтеґралах насправді неістотні, бо можна вибрати $\widehat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} = 1-x(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')$ таким чином, щоб x не був надто близьким до 0 і не набагато більшим від 1. Легко показати, що провідний внесок в ультрарелятивіст-

ському наближенні не залежить від x.) Проінтеґрувавши, отримуємо

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\mathbf{v},\,\mathbf{v}') &\approx \log\left(\frac{1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{1-|\mathbf{v}|}\right)+\log\left(\frac{1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{1-|\mathbf{v}'|}\right)= \\ &= \log\left(\frac{(E^2-\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}')^2}{E^2(E-|\mathbf{p}|)^2}\right)= \\ &\approx 2\log\left(\frac{p\cdot p'}{(E^2-|\mathbf{p}|^2)/2}\right)=2\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right),\end{aligned} \tag{6.17}$$

де $q^2=(p'-p)^2$.

Отже, ми встановили, що енерґія, випромінена при низьких частотах,

$$\text{Енерґія} = \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^{k_{\max}} dk\,\mathcal{I}(\mathbf{v},\,\mathbf{v}') \xrightarrow[E\gg m]{} \frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^{k_{\max}} dk\,\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right). \tag{6.18}$$

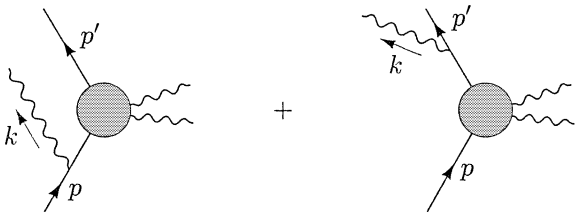
Якщо випромінювання складається з фотонів, то кожен з них переносить енерґію k. Тоді ми можемо знайти їхню кількість:

$$\text{Число фотонів} = \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^{k_{\max}} \frac{dk}{k}\,\mathcal{I}(\mathbf{v},\,\mathbf{v}'). \tag{6.19}$$

Маємо сподівання, що обчислення в рамках квантової механіки підтвердить цей результат.

Квантовомеханічне обчислення

Тепер розглянемо квантовомеханічний процес, що полягає у випромінюванні одного фотона в процесі розсіяння електрона:



Нехай $\mathcal{M}_0$ позначає частину амплітуди, що виникає від взаємодії електрона із зовнішнім полем. Амплітуда процесу загалом є така:

$$\begin{aligned}i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p')\Bigg(&\mathcal{M}_0(p',\,p-k)\,\frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(p-k)^2-m^2}\,\gamma^\mu\varepsilon^*_\mu(k)+ \\ &+\gamma^\mu\varepsilon^*_\mu(k)\,\frac{i(\not{p}'+\not{k}+m)}{(p'+k)^2-m^2}\,\mathcal{M}_0(p'+k,\,p)\Bigg)u(p).\end{aligned} \tag{6.20}$$

Оскільки нас цікавить зв'язок з класичним наближенням, припустимо, що випромінюється м'який фотон з $|\mathbf{k}| \ll |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|$. Тоді ми можемо наближено записати

$$\mathcal{M}_0(p', p-k) \approx \mathcal{M}_0(p'+k, p) \approx \mathcal{M}_0(p', p), \tag{6.21}$$

де можемо знехтувати $\not{k}$ в чисельниках пропаґаторів. Ці чисельники можна ще більше спростити, застосувавши алґебру діракових матриць. У першому доданку,

$$(\not{p} + m)\gamma^\mu \varepsilon^*_\mu u(p) = \left[2p^\mu \varepsilon^*_\mu(-\not{p} + m)\right]u(p) = \\ = 2p^\mu \varepsilon^*_\mu u(p).$$

Так само в другому,

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu \varepsilon^*_\mu(\not{p}' + m) = \bar{u}(p')\, 2p'^\mu \varepsilon^*_\mu.$$

Знаменники пропаґаторів також спрощуються:

$$(p-k)^2 - m^2 = -2\, p \cdot k;$$
$$(p'+k)^2 - m^2 = -2\, p' \cdot k.$$

Отже, в наближенні, коли випромінюється м'який фотон, амплітуда набуває вигляду

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p')\left[\mathcal{M}_0(p', p)\right]u(p) \cdot \left[e\left(\frac{p' \cdot \varepsilon^*}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \varepsilon^*}{p \cdot k}\right)\right]. \tag{6.22}$$

Вона просто дорівнює амплітуді пружного розсіяння (без гальмівного випромінювання), помноженій на вираз у квадратних дужках, що дає поправку на утворення м'якого фотона.

Так само й переріз процесу ми можемо легко виразити через переріз пружного розсіяння, для чого треба просто додатково провести фазово-просторове інтеґрування по фотонному імпульсу k. Підсумувавши за двома станами поляризації фотона, маємо

$$d\sigma(p \to p' + \gamma) = d\sigma(p \to p') \cdot \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \sum_{\lambda=1,2} e^2 \left| \frac{p' \cdot \varepsilon^{(\lambda)}}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \varepsilon^{(\lambda)}}{p \cdot k} \right|^2. \tag{6.23}$$

Отже, диференційна ймовірність того, що електрон, розсіяний зі зміною імпульсу від p до p', випромінить фотон з імпульсом k, є

$$d(\text{імовірність}) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_\lambda \frac{e^2}{2k} \left| \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \cdot \left(\frac{\mathbf{p}'}{p' \cdot k} - \frac{\mathbf{p}}{p \cdot k}\right)\right|^2. \tag{6.24}$$

Цей вираз має дуже знайомий вигляд. Помноживши його на енерґію фотона k, щоб отримати випромінену енерґію, ми повертаємося до класичного виразу (6.12).

Проте є одна проблема. Рівняння (6.24) визначає не кількість випромінених фотонів, а лише ймовірність випромінювання одного фотона. Ситуація ще погіршиться, якщо ми проінтеґруємо по фотонному імпульсу. Як і в (6.16), ми можемо інтеґрувати лише до того значення енерґії, на якому наше наближення м'яких фотонів перестає працювати. Розумною оцінкою обрізання є $|\mathbf{q}| = |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|$, і тоді

$$\text{Повна імовірність} \approx \frac{\alpha}{\pi} \int\limits_0^{|\mathbf{q}|} dk\, \frac{1}{k}\, \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \tag{6.25}$$

Оскільки $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ не залежить від k, то інтеґрал розбігається на нижній межі (де всі наші наближення добре справджувались). Інакше кажучи, повна ймовірність випромінювання дуже м'якого фотона є нескінченною. У цьому й полягає відома проблема інфрачервоної розбіжності в теорії збурень КЕД.

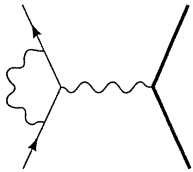
Ми можемо штучно зробити інтеґрал у (6.25) добре визначеним, припустивши, що фотон має малу ненульову масу μ. Ця маса визначає обрізання інтеґрала на нижній межі, що в підсумку дає

$$\begin{aligned} d\sigma\big(p \to p' + \gamma(k)\big) &= d\sigma(p \to p') \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \underset{-q^2 \to \infty}{\approx} \\ &\underset{-q^2 \to \infty}{\approx} d\sigma(p \to p') \cdot \frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right). \end{aligned} \tag{6.26}$$

Залежність результату від q^2, відома як *судаківський подвійний логарифм*, насправді має фізичний сенс і знову виникне в § 6.4. Проте залежність від μ є проблемою, якій ми мусимо дати раду. Неважко здогадатися, що вирішення цієї проблеми полягатиме у впровадженні нової інтерпретації формули (6.24), як очікуваної кількості випромінених фотонів, а не ймовірності випромінювання одного фотона. В §§ 6.4 і 6.5 ми побачимо, як ця нова інтерпретація випливає з розгляду фейнманових діаґрам. Проте, щоб підготуватися до цього обговорення, ми маємо поглибити розуміння амплітуди розсіяння без випромінювання.

§ 6.2. Електронна вершинна функція: формальна структура

Після короткого розгляду радіаційних поправок КЕД, що виникають від гальмівного випромінювання, перейдемо до поправок, викликаних присутністю додаткового *віртуального* фотона:

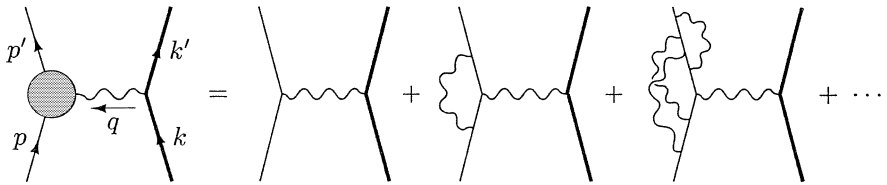


(6.27)

Це стане нашим першим досвідом роботи з фейнмановими діаґрамами, що містять петлі. Такі діаґрами породжують у квантовій теорії поля надзвичайно серйозні ускладнення.

Результат обчислення цієї діаґрами має бути досить громіздким, тому корисно заздалегідь спробувати зрозуміти, на який вигляд поправки слід очікувати і як інтерпретувати її можливі складові. В поточному параґрафі ми розглянемо загальні властивості діаґрам вершинних поправок і побачимо, що засадничі вимоги лоренц-інваріантності, дискретних симетрій у КЕД і тотожності Варда жорстко обмежують припустиму форму вершини.

Отже, розглянемо клас діаґрам:



де сірим колом позначено суму електрон-фотонних вершин у нижчому порядку з усіма ампутованими петельними поправками. Надалі позначатимемо цю суму вершинних діаґрам, як $-ie\,\Gamma^{\mu}(p',p)$. Відповідно до основної формули (4.103) для елементів S-матриці, амплітуда розсіяння електрона на важкій мішені є

$$i\mathcal{M} = ie^2\Big(\bar{u}(p')\,\Gamma^{\mu}(p',p)\,u(p)\Big)\frac{1}{q^2}\Big(\bar{u}(k')\,\gamma_{\mu}\,u(k)\Big). \tag{6.28}$$

У загальнішому випадку, функція $\Gamma^{\mu}(p',p)$ виникає в елементі S-матриці розсіяння електрона у зовнішньому електромаґнітному полі. Як і в

Задачі 4.4, додамо до гамільтоніана КЕД член із взаємодією

$$\Delta H_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x}\, eA^{\text{cl}}_{\mu}\, j^{\mu}, \tag{6.29}$$

де $j^{\mu}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)$ є електромаґнітний струм, а A^{cl}_{μ} — фіксований вектор-потенціал класичного зовнішнього поля. У провідному порядку теорії збурень матричний елемент розсіяння електрона на такому зовнішньому полі є

$$i\mathcal{M}\,(2\pi)\,\delta(p'^{0} - p^{0}) = -ie\bar{u}(p')\,\gamma^{\mu}\,u(p)\cdot\widetilde{A}^{\text{cl}}_{\mu}(p'-p),$$

де $\widetilde{A}^{\text{cl}}_{\mu}(q)$ — фур'є-перетворення $A^{\text{cl}}_{\mu}(x)$. Вершинні поправки змінюють цей вираз на

$$i\mathcal{M}\,(2\pi)\,\delta(p'^{0} - p^{0}) = -ie\bar{u}(p')\,\Gamma^{\mu}(p',p)\,u(p)\cdot\widetilde{A}^{\text{cl}}_{\mu}(p'-p), \tag{6.30}$$

У (6.28) і (6.30) ми свідомо вилучили внески від діаґрам поляризації вакууму, на зразок четвертої діаґрами в (6.1). Причина полягає в тому, що такі діаґрами описують квантові поправки до самого електромаґнітного поля, тоді як діаґрами в Γ^{μ} є поправками до відгуку електрона на задане наведене поле.[26]

Ми можемо вдатися до загальних міркувань, щоб накласти обмеження на вигляд $\Gamma^{\mu}(p',p)$. Очевидно, що в нижчому порядку $\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}$. Власне кажучи, Γ^{μ} є певним виразом, що містить p, p', γ^{μ}, різні константи (на зразок m і e) та числові коефіцієнти. Це є вичерпним списком, бо жодні інші величини не входять до фейнманових правил для обчислення діаґрам у Γ^{μ}. Єдино ще міг би ще з'явитися тензор $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ (або, що еквівалентно, γ^5), проте його присутність неприпустима в будь-якій теорії, де зберігається парність.

Ми можемо ще більше звузити можливий вибір форм для Γ^{μ}, звернувшись до лоренц-інваріантності. Оскільки Γ^{μ} перетворюється, як 4-вектор (у тому ж сенсі, що й γ^{μ}), то вона має бути певною лінійною комбінацією векторів з наведеного вище переліку — γ^{μ}, p^{μ} і p'^{μ}. Скориставшись для зручності комбінаціями $p' + p$ і $p' - p$, маємо

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}\cdot A + (p'^{\mu} + p^{\mu})\cdot B + (p'^{\mu} - p^{\mu})\cdot C. \tag{6.31}$$

Коефіцієнти A, B і C можуть містити діракові матриці, згорнуті з векторами на зразок $\not{p}$ та $\not{p}'$, але оскільки $\not{p}\,u(p) = m\cdot u(p)$ і $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')\cdot m$, то

[26] Для обґрунтування цього твердження ми мусимо строго визначити, що є наведеним зовнішнім полем у квантовій теорії. Це буде зроблено в Розділі 11 (Том II).

ми можемо без втрати загальності записати ці коефіцієнти як звичайні числа. Єдиним нетривіальним скаляром є $q^2 = -2p' \cdot p + 2m^2$, тож A, B і C мають бути функціями лише від q^2 (та констант на зразок m і e).

Перелік допустимих векторів ще скоротиться, якщо застосувати тотожність Варда (5.79): $q_\mu \Gamma^\mu = 0$. (Відзначимо, що наші арґументи на користь цієї тотожності в § 5.5 — і доведення в § 7.4 — не вимагають $q^2 = 0$.) Згорнувши q_μ з (6.31) за лоренцовими індексами і розмістивши між $\bar{u}(p')$ та $u(p)$, ми можемо переконатися, що перший та другий доданки обертаються на нуль, а третій ні, тому $C = 0$.

Далі спрощувати (6.31) на підставі лише загальних принципів ми вже не можемо. Проте зручно переписати цей вираз за допомогою тотожності Ґордона (Задача 3.2):

$$\bar{u}(p')\,\gamma^\mu\,u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(p). \tag{6.32}$$

Ц дозволяє нам замінити член з $(p' + p)$ на такий, що містить $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$. Остаточно запишемо результат, як

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\,F_2(q^2), \tag{6.33}$$

де F_1 і F_2 є невідомими функціями від q^2, що мають назву *форм-факторів*.

У найнижчому порядку теорії збурень $F_1 = 1$ і $F_2 = 0$. В наступному параґрафі ми обчислимо для них однопетельні (порядку α) поправки за рахунок вершинної діаґрами (6.27). Загалом, форм-фактори можна знайти для будь-якого порядку теорії збурень.

Позаяк F_1 і F_2 містять усю інформацію про вплив електромаґнітного поля на електрон, вони мають, зокрема, включати електричний заряд електрона та його маґнітний момент. Для знаходження електричного заряду скористаємося (6.30) й обчислимо амплітуду пружного кулонового розсіяння нерелятивістського електрона на ділянці простору з ненульовим електростатичним потенціалом. Нехай $A^{\mathrm{cl}}_\mu(x) = (\phi(\mathbf{x}), \mathbf{0})$. Тоді $\widetilde{A}^{\mathrm{cl}}_\mu(q^2) = ((2\pi)\delta(q^0)\widetilde{\phi}(\mathbf{q}), \mathbf{0})$. Підставивши цей вираз у (6.30), маємо

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p')\,\Gamma^0(p', p)\,u(p) \cdot \widetilde{\phi}(\mathbf{q}).$$

Якщо електростатичне поле дуже повільно змінюється на великій (можливо, макроскопічній) ділянці простору, то $\widetilde{\phi}(\mathbf{q})$ буде зосереджена поблизу $\mathbf{q} = 0$, а отже, ми можемо перейти до межі $\mathbf{q} \to 0$ у спінорному

матричному елементі. Внесок дає лише форм-фактор F_1. Скориставшись виразом для спінорів у нерелятивістському наближенні,

$$\bar{u}(p')\,\gamma^0\,u(p) = u^\dagger(p')u(p) \approx 2m\,\xi'^\dagger\xi,$$

отримуємо амплітуду розсіяння електрона на електростатичному полі:

$$i\mathcal{M} = -ieF_1(0)\widetilde{\phi}(\mathbf{q})\cdot 2m\,\xi'^\dagger\xi. \tag{6.34}$$

Це є борнове наближення для розсіяння на потенціалі

$$v(\mathbf{x}) = eF_1(0)\phi(\mathbf{x}).$$

Таким чином, $F_1(0)$ є електричним зарядом електрона в одиницях e. Оскільки $F_1(0) = 1$ вже в головному порядку теорії збурень, радіаційні поправки до $F_1(q^2)$ мають обертатися на нуль при $q^2 = 0$.

Повторивши ці міркування для розсіяння електрона на статичному векторному потенціалі, можемо виявити схожий зв'язок між форм-факторами та маґнітним моментом електрона.[27] Встановимо $A^{\rm cl}_\mu(x) = (0,\,\mathbf{A}^{\rm cl})$. Амплітуда розсіяння на цьому полі є

$$i\mathcal{M} = +ie\Big[\bar{u}(p')\Big(\gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\,F_2\Big)u(p)\Big]\widetilde{A}^i_{\rm cl}(\mathbf{q}). \tag{6.35}$$

Вираз у квадратних дужках обертається на нуль при $\mathbf{q} = 0$, тому ми мусимо акуратно виокремити з нього внесок, лінійний за q^i. Для цього розкладемо $u(p)$ в нерелятивістському наближенні й залишимо тільки лінійні за імпульсами члени:

$$u(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi\end{pmatrix} \approx \sqrt{m}\begin{pmatrix}(1-\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2m)\,\xi\\ (1+\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2m)\,\xi\end{pmatrix}. \tag{6.36}$$

Доданок з F_1 можна спростити наступним чином:

$$\bar{u}(p')\,\gamma^i\,u(p) = 2m\xi'^\dagger\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m}\,\sigma^i + \sigma^i\,\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m}\right)\xi.$$

Застосувавши тотожність $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$, знаходимо два члени — незалежний від спіну (пропорційний $(\mathbf{p}'+\mathbf{p})$) і залежний від нього (пропорційний $(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$). Перший з них є внеском від оператора $\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}$ в звичайну кінетичну енерґію нерелятивістської квантової механіки. Другий

[27] Подальші викладки містять багато множників (-1), що виникають від підняття й опускання простороподібних індексів. Перевіряючи обчислення, будьте пильні!

представляє взаємодію з полем маґнітного моменту — що ми й шукали. Відкинувши перший член, маємо

$$\bar{u}(p')\,\gamma^i\,u(p) = 2m\xi'^{\dagger}\Big(\frac{-i}{2m}\,\varepsilon^{ijk}q^j\sigma^k\Big)\xi.$$

Доданок з F_2 вже містить у явному вигляді множник q, тому ми можемо обчислити його, використавши головний член розкладення спінорів:

$$\bar{u}(p')\Big(\frac{i}{2m}\,\sigma^{i\nu}q_\nu\Big)u(p) = 2m\xi'^{\dagger}\Big(\frac{-i}{2m}\,\varepsilon^{ijk}q^j\sigma^k\Big)\xi.$$

Звідси повний член електрон-фотонної функції, пропорційний q, є

$$\bar{u}(p')\Big(\gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{i\nu}q_\nu}{2m}\,F_2\Big)u(p) \underset{q\to 0}{\approx} 2m\xi'^{\dagger}\Big(\frac{-i}{2m}\,\varepsilon^{ijk}q^j\sigma^k[F_1(0)+F_2(0)]\Big)\xi.$$

Підставивши цей вираз у (6.35), знаходимо

$$i\mathcal{M} = -i(2m)\cdot e\xi'^{\dagger}\Big(\frac{-1}{2m}\,\sigma^k[F_1(0)+F_2(0)]\Big)\xi\,\widetilde{B}^k(\mathbf{q}),$$

де

$$\widetilde{B}^k(\mathbf{q}) = -i\varepsilon^{ijk}q^i\widetilde{A}^j_{\mathrm{cl}}(\mathbf{q})$$

є фур'є-перетворенням маґнітного поля, породженого $\mathbf{A}^{\mathrm{cl}}(\mathbf{x})$.

Ми знову можемо інтерпретувати $\mathcal{M}$ як борнове наближення амплітуди розсіяння електрона на деякому потенціалі. Цей потенціал відповідає взаємодії маґнітного моменту,

$$V(\mathbf{x}) = -\langle\boldsymbol{\mu}\rangle\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x}),$$

де

$$\langle\boldsymbol{\mu}\rangle = \frac{e}{m}\,[F_1(0)+F_2(0)]\,\xi'^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\,\xi.$$

Цей вираз для маґнітного моменту електрона можемо переписати в стандартній формі:

$$\boldsymbol{\mu} = g\Big(\frac{e}{2m}\Big)\mathbf{S},$$

де $\mathbf{S}$ — спін електрона. Коефіцієнт g має назву *фактора Ланде*:

$$g = 2[F_1(0)+F_2(0)] = 2 + 2F_2(0). \tag{6.37}$$

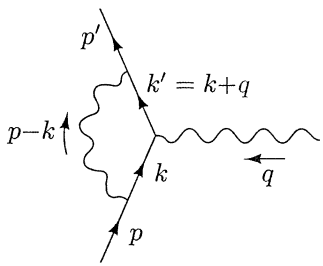
Оскільки в головному порядку теорії збурень член із F_2 не з'являється, КЕД стверджує, що $g = 2 + \mathcal{O}(\alpha)$. Провідний член у g-факторі є стандартним наслідком рівняння Дірака. Проте у вищих порядках ми виявимо

ненульовий F_2, і тоді виникне невелика розбіжність між маґнітним моментом електрона і діраковим значенням для нього. В наступному параґрафі ми обчислимо в першому порядку за α внесок до цього *аномального маґнітного моменту*.

Оскільки наші викладки для структури вершини (6.33) ґрунтувалися лише на загальних принципах симетрії, є всі підстави сподіватися, що ця формула справедлива для взаємодії з електромаґнітним полем не лише електрона, а й будь-якого ферміона. До прикладу, електромаґнітна амплітуда розсіяння протона на фотоні так само має описуватися двома інваріантними функціями від q^2. Та оскільки протон не є елементарною часткою, не варто очікувати, що діракові значення $F_1 = 1$ і $F_2 = 0$ будуть вдалими наближеними значеннями для форм-факторів протона. Насправді обидва форм-фактори протона дуже залежать від q^2. Проте розгляд вершинної функції за допомогою форм-факторів дає змогу порівнювати й узагальнювати дані про розсіяння при різних енерґіях та кутах. Точний зв'язок форм-факторів з перерізами розглядається в Задачі 6.1. Зрештою, щойно виведені нами загальні обмеження при $q^2 = 0$ справедливі й для протона: $F_1(0) = 1$ і $2F_2(0) = (g_{\mathrm{p}} - 2)$, хоча g-фактор протона відрізняється від діракового значення на 40 відсотків.

§ 6.3. Електронна вершинна функція: обчислення

Тепер, знаючи з виразу (6.33) загальний вигляд відповіді, ми вже готові розпочинати обчислення однопетельної поправки до вершинної функції електрона. Позначимо імпульси на діаґрамі:



Застосувавши фейнманові правила, одержимо в першому порядку за α, що $\bar{u}(p')\,\Gamma^\mu\,u(p) = \bar{u}(p')\,\gamma^\mu\,u(p) + \delta\Gamma^\mu$, де

$$\begin{aligned}\delta\Gamma(p',p) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2+i\varepsilon}\times\\ &\times\bar{u}(p')\,(-ie\gamma^\nu)\,\frac{i(\not{k}'+m)}{k'^2-m^2+i\varepsilon}\,\gamma^\mu\,\frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\varepsilon}\,(-ie\gamma^\rho)\,u(p) = \\ &= 2ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{\bar{u}(p')\big[\not{k}\gamma^\mu\not{k}'+m^2\gamma^\mu-2m(k+k')^\mu\big]u(p)}{((k-p)^2+i\varepsilon)(k'^2-m^2+i\varepsilon)(k^2-m^2+i\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{6.38}$$

У третьому рядку ми скористалися тотожністю $\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho g_{\nu\rho} = \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu = -2\gamma^\mu$. Зазначимо, що члени $+i\varepsilon$ у знаменниках вилучати не можна, бо вони знадобляться для правильного обчислення інтеґрала по петлі.

Інтеґрал має жахливий вигляд, і, направду, його обчислення є непростим. Такі інтеґрали вимагають особливого підходу, відомого як метод *фейнманових параметрів* (хоча дуже схожий спосіб раніше запропонував Швінґер).

Фейнманові параметри

Суть цього методу полягає в приведенні добутку трьох знаменників у (6.38) до одного квадратичного полінома по k, піднесеного до кубу. Потім ми зможемо перевизначити змінну на певну константу, щоб перетворити поліном на повний квадрат і без особливих зусиль обчислити отриманий сферично-симетричний інтеґрал. Однак за це доведеться заплатити впровадженням деяких довільних параметрів, за якими також треба інтеґрувати.

Почнемо з розгляду простішого випадку двох множників у знаменнику. Застосуємо тотожність

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx\,\frac{1}{\big[xA+(1-x)B\big]^2} = \int_0^1 dx\,dy\,\delta(x+y-1)\,\frac{1}{\big[xA+yB\big]^2}. \tag{6.39}$$

Один з прикладів її використання:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(p-k)^2(k^2-m^2)} &= \int_0^1 dx\,dy\,\delta(x+y-1)\,\frac{1}{\big[x(k-p)+y(k^2-m^2)\big]^2} = \\ &= \int_0^1 dx\,dy\,\delta(x+y-1)\,\frac{1}{\big[k^2-2x\,k\cdot p+xp^2-ym^2\big]^2}.\end{aligned}$$

Підставивши $\ell \equiv k - xp$, ми побачимо, що знаменник залежить лише від ℓ^2. Тепер інтеґрувати по d^4k набагато простіше, бо $d^4k = d^4\ell$, а підінтеґральний вираз сферично-симетричний за ℓ. Змінні x та y, які було впроваджено, щоб зробити можливою таку трансформацію, називаються *фейнмановими параметрами*.

Наш інтеґрал (6.38) має знаменник уже з трьома множниками, тож ми потребуємо дещо іншої тотожності. Продиференціювавши (6.39) по B, легко довести, що

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx\, dy\, \delta(x+y-1)\, \frac{ny^{n-1}}{\left[xA+yB\right]^{n+1}}. \tag{6.40}$$

Проте цього ще замало. Нам потрібна формула вигляду

$$\frac{1}{A_1A_2\cdots A_n} = \int_0^1 dx_1\cdots dx_n\, \delta\Big(\sum x_i - 1\Big)\, \frac{(n-1)!}{\left[x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n\right]^n}. \tag{6.41}$$

Доведення проводиться за індукцією. При $n = 2$ цей вираз збігається з (6.39), а крок індукції є нескладним і полягає в застосуванні виразу (6.40).

Послідовно продиференціювавши (6.41), можемо вивести ще загальнішу тотожність:

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_1^{m_1}A_2^{m_2}\cdots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1\cdots dx_n\, \delta\Big(\sum x_i - 1\Big)\times \\ \times \frac{\prod x_i^{m_i-1}}{\left[\sum x_iA_i\right]^{\Sigma m_i}}\, \frac{\Gamma(m_1+\cdots+m_n)}{\Gamma(m_1)\cdots\Gamma(m_n)}.\end{aligned} \tag{6.42}$$

Ця формула справедлива навіть тоді, коли m_i не є цілими. У § 10.5 ми матимемо справу якраз із таким випадком.

Обчислення форм-факторів

Застосуємо формулу (6.41) до знаменника в (6.38):

$$\frac{1}{((k-p)^2+i\varepsilon)(k'^2-m^2+i\varepsilon)(k^2-m^2+i\varepsilon)} = \int_0^1 dx\, dy\, dz\, \delta(x+y+z-1)\, \frac{2}{D^3},$$

де в знаменнику правої частини

$$\begin{aligned} D &= x(k^2 - m^2) + y(k'^2 - m^2) + z(k-p)^2 + (x+y+z)i\varepsilon = \\ &= k^2 + 2k\cdot(yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x-y)m^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \tag{6.43}$$

У другому рядку було використано рівності $x + y + z = 1$ і $k' = k + q$. Тепер перевизначимо змінну k, щоб отримати повний квадрат:

$$\ell \equiv k + yq - zp.$$

Після суто алґебраїчних викладок знаходимо, що D спрощується до

$$D = \ell^2 - \Delta + i\varepsilon,$$

де

$$\Delta \equiv -xyq^2 + (1-z)^2 m^2. \tag{6.44}$$

Оскільки в процесі розсіяння $q^2 < 0$, то Δ позитивна. Вважатимемо її ефективним масовим членом.

Далі виразимо чисельник у (6.38) через ℓ. Ця задача значно спроститься, коли взяти до уваги, що D залежить лише від абсолютного значення ℓ,

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\,\frac{\ell^\mu}{D^3} = 0; \tag{6.45}$$

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\,\frac{\ell^\mu\ell^\nu}{D^3} = \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\,\frac{\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\ell^2}{D^3}. \tag{6.46}$$

Перша рівність випливає із симетрії. Для доведення другої відзначимо, що інтеґрал обертається на нуль, якщо $\mu \neq \nu$. Таким чином, лоренц-інваріантність вимагає, щоб результат був пропорційним $g^{\mu\nu}$. Для перевірки правильності коефіцієнта треба просто згорнути обидві частини з $g_{\mu\nu}$. Скориставшись цими тотожностями, легко знайти, що

$$\begin{aligned} \text{Чисельник} &= \bar{u}(p')\Big[\not{k}\gamma^\mu\not{k}' + m^2\gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu\Big]u(p) \to \\ &\to \bar{u}(p')\Big[-\tfrac{1}{2}\gamma^\mu\ell^2 + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu((1-y)\not{q} + z\not{p}) + \\ &\qquad + m^2\gamma^\mu - 2m((1-2y)q^\mu + 2zp^\mu)\Big]u(p). \end{aligned}$$

(Майте на увазі, що $k' = k + q$).

Алґебра Дірака дозволяє привести цей вираз до компактнішого вигляду — на що знадобиться десь сторінка або дві викладок. Саме зараз

компенсуються зусилля, що їх ми витратили на обчислення наприкінці попереднього параґрафу, оскільки нам відомо загальний вигляд очікуваної відповіді. Насамкінець усі отримані доданки треба зібрати у дві ґрупи, пропорційні відповідно до γ^μ і $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$. Найкоротший шлях полягає в тому, щоб намагатися отримати вираз типу

$$\gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + q^\mu \cdot C,$$

так само, як і в (6.31). Для приведення до такого вигляду потрібні лише співвідношення антикомутації (наприклад, $\not{p}\gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu\not{p}$) і рівняння Дірака $\not{p}u(p) = mu(p)$ та $\bar{u}(p')\not{p} = \bar{u}(p')m$; з цього, між іншим, випливає, що $\bar{u}(p')\not{q}u(p) = 0$. Також варто пам'ятати, що $x + y + z = 1$. А коли розвіється дим, отримаємо

$$\begin{aligned}\text{Чисельник} = \bar{u}(p')\Big[\gamma^\mu \cdot \big(-\tfrac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2\big) + \\ + (p'^\mu + p^\mu) \cdot mz(z-1) + q^\mu \cdot m(z-2)(x-y)\Big]u(p).\end{aligned}$$

Відповідно до тотожності Варда, коефіцієнт при q^μ має дорівнювати нулю — ми обговорювали це після (6.31). І справді, знаменник, як випливає з (6.44), симетричний до заміни $x \leftrightarrow y$. Множник при q^μ в чисельнику непарний відносно $x \leftrightarrow y$, а отже, обертається на нуль після інтеґрування по x та y.

Дотримуючись схеми попереднього параґрафу, застосуємо тотожність Ґордона (6.32) і запишемо $(p' + p)$ через $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$. Наш повний вираз для внеску $\mathcal{O}(\alpha)$ в електронну вершину набуває вигляду

$$\begin{aligned}\delta\Gamma(p',p) = 2ie^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{2}{D^3} \times \\ \times \bar{u}(p')\Big[\gamma^\mu \cdot \big(-\tfrac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z-z^2)m^2\big) + \\ + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\big(2m^2z(1-z)\big)\Big]u(p),\end{aligned} \tag{6.47}$$

де, як і раніше,

$$D = \ell^2 - \Delta + i\varepsilon, \quad \Delta = -xyq^2 + (1-z)^2m^2 > 0.$$

Тепер розподіл на форм-фактори є очевидним.

Наймарудніша частина роботи лишилася позаду, і головною нашою задачею стає обчислення інтеґрала по імпульсах. Неважко взяти інтеґрал

по ℓ^0, розглядаючи його як контурний, а потім обчислити інтеґрал по просторових компонентах у сферичних координатах. Ми вдамося навіть до простішого прийому, що має назву *віків поворот*. Зазначимо, що якби не знаки мінус у метриці Мінковського, ми могли б обчислити весь чотиривимірний інтеґрал у сферичних координатах. Для усунення незручних мінусів розглянемо контур інтеґрування у площині ℓ^0 (Рис. 6.1). Розта-

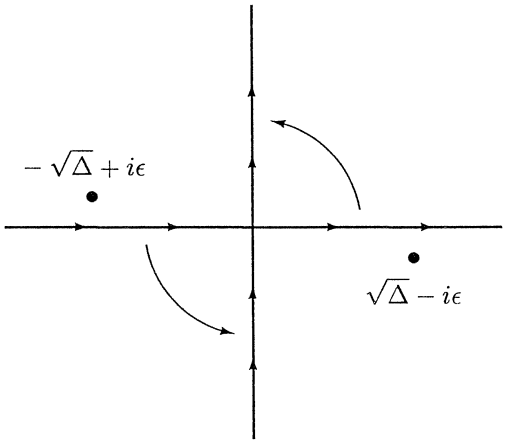


Рис. 6.1. Контур інтеґрування по ℓ^0 можна повернути наступним чином.

шування полюсів і той факт, що підінтеґральний вираз досить швидко прагне до нуля при великих $|\ell^0|$, дають можливість повернути контур на 90∘ проти часової стрілки. Визначимо тепер *евклідів* 4-імпульс ℓ_E:

$$\ell^0 \equiv i\ell_E^0; \quad \ell = \ell_E. \tag{6.48}$$

Повернутий контур починається від $\ell_E^0 = -\infty$ і закінчується на $\ell_E^0 = \infty$. Замінивши змінні інтеґрування на ℓ_E, ми можемо обчислити інтеґрал у чотиривимірних сферичних координатах.

Для початку,

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{[\ell^2-\Delta]^m} = \frac{i}{(-1)^m}\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4\ell_E\,\frac{1}{[\ell_E^2+\Delta]^m} =$$
$$= \frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4}\int d\Omega_4 \int\limits_0^\infty dl_E\,\frac{\ell_E^3}{[\ell_E^2+\Delta]^m}.$$

Дарма що наразі нас цікавить лише окремий випадок $m = 3$, буде корисно знати загальний результат — він знадобиться при обчисленні інших петельних поправок. Множник $\int d\Omega_4$ є „площею“ поверхні чотиривимірної сфери одиничного радіусу, яка дорівнює $2\pi^2$. (Її можна отримати,

перейшовши до сферичних координат:

$$x = (r \sin\omega \sin\theta \cos\varphi,\ r \sin\omega \sin\theta \sin\varphi,\ r \sin\omega \cos\theta,\ r \cos\omega).$$

Міра інтеґрування при цьому є $d^4x = r^3 \sin^2\omega \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\omega\, dr$.) Решта інтеґрала береться напряму, і остаточно ми маємо

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}. \tag{6.49}$$

Таким самим чином,

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^m} = \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2} \frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}. \tag{6.50}$$

Зауважимо, що другий результат справедливий лише для $m > 3$. При $m = 3$ віків поворот робити не можна, і такий інтеґрал у кожному разі розбігається. Проте саме цей випадок потрібен для (6.47).

Далі ми зрозуміємо фізичний сенс цієї розбіжності, а поки вдамося до штучного прийому, щоб зробити інтеґрал збіжним. Для цього повернемося до початкового виразу для фейнманового інтеґрала (6.38) і змінимо фотонний пропаґатор:

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\varepsilon} \longrightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon}, \tag{6.51}$$

де Λ — деяка дуже велика маса. Така заміна не впливає на інтеґрал у діапазоні малих k (бо Λ є великою), проте при $k \gtrsim \Lambda$ він м'яко обрізається. Вважатимемо другий член у (6.51) пропаґатором якогось фіктивного важкого фотона, чий внесок віднімається від внеску звичайного фотона. Для цього пропаґатора чисельник залишається незмінним, а в знаменнику

$$\Delta \longrightarrow \Delta_\Lambda = -xyq^2 + (1-z)^2 m^2 + z\Lambda^2. \tag{6.52}$$

Тепер інтеґрал (6.50) збігається, і ми можемо, здійснивши віків поворот, обчислити його:

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \left(\frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right) = \\ &\qquad = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\ell_E^2 \left(\frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta]^3} - \frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta_\Lambda]^3} \right) = \\ &\qquad = \frac{i}{(4\pi)^2} \log\left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right). \end{aligned} \tag{6.53}$$

До збіжних членів у (6.47) ще додаються поправки порядку Λ^{-2}, проте ними ми тут знехтували.

Спосіб реґуляризації фейнманових інтеґралів через впровадження фіктивних важких часток має назву *реґуляризації Паулі–Вілларса*. Слід, однак, мати на увазі, що поява фіктивного фотона не має жодного фізичного сенсу, і такий спосіб реґуляризації є лише одним з багатьох можливих. (Ми розглянемо їх у наступному розділі, зокрема в Задачі 7.2.) А поки покладаємо сподівання на те, що в остаточному виразі для спостережних перерізів новий параметр Λ буде відсутній.

Скориставшись формулами (6.49) та (6.53) для обчислення інтеґралів у (6.47), ми одержимо явний, хоч і доволі громіздкий, вираз для однопетельної поправки до вершинної функції:

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\times$$

$$\times\bar{u}(p')\left(\gamma^\mu\left[\log\frac{z\Lambda^2}{\Delta}+\frac{(1-x)(1-y)q^2+(1-4z+z^2)m^2}{\Delta}\right]+\right. \tag{6.54}$$

$$\left.+\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\,\frac{2m^2z(1-z)}{\Delta}\right)u(p).$$

Вирази у квадратних дужках і є бажаними поправками до форм-факторів.

Перед аналізом цього результату підсумуємо використані обчислювальні методи. Вони типові для будь-яких розрахунків з петлями.

1. Зображаємо діаґраму (діаґрами) і виписуємо вираз для амплітуди.

2. Впроваджуємо фейнманові параметри і об'єднуємо добутки знаменників пропаґаторів.

3. Приводимо знаменник до повного квадрату, перевизначивши петельну імпульсну змінну $k \to \ell$.

4. Переписуємо чисельник через ℓ. Відкидаємо непарні степені ℓ, а до парних застосовуємо тотожності на зразок (6.46).

5. Вдавшись до вікового повороту, обчислюємо інтеґрал по імпульсу в чотиривимірних сферичних координатах.

На останньому етапі інтеґрал по імпульсах часто виявляється розбіжним. У цьому разі слід довизначити (або *реґуляризувати*) інтеґрал, застосувавши метод Паулі-Вілларса або якийсь інший.

Тепер спробуємо розібратися з ультрафіолетовою розбіжністю, параметризованою в (6.54). Зазначимо, що розбіжність виникає в найнеприємнішому місці. Вона робить внесок у форм-фактор F_1 при $q^2 = 0$, тоді як у попередньому параґрафі ми встановили, що $F_1(0)$ має дорівнювати одиниці. Проте це єдиний наслідок наявності розбіжності. Тому приймемо просту, але цілком доречну для цього випадку (тобто, *ad hoc*) процедуру фіксації розбіжного члена, віднявши від (6.54) величину, пропорційну вершинній функції нульового порядку $\bar{u}(p')\,\gamma^\mu\,u(p)$ таким чином, щоб виконувалась умова $F_1(0) = 1$. Інакше кажучи, проведемо заміну

$$\delta F_1(q^2) \to \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0) \tag{6.55}$$

(де δF_1 — поправка першого порядку до F_1). Для обґрунтування такої процедури треба трохи підправити вираз для S-матриці (4.103). Кількома словами, заміна (6.55) компенсує вилучення діаґрам з поправками до зовнішніх ліній у (6.1). Усі пояснення з приводу правомірності такої заміни відкладемо до § 7.2.

Крім ультрафіолетової, $F_1(q^2)$ містить ще й інфрачервону розбіжність, що виникає від доданка з Δ^{-1}. Так, при $q^2 = 0$ цей доданок є

$$\int\limits_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{1-4z+z^2}{\Delta(q^2=0)} =$$

$$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{1-z} dy\,\frac{-2+(1-z)(3-z)}{m^2(1-z)^2} = \int\limits_0^1 dz\,\frac{-2}{m^2(1-z)} + \text{скінченні члени.}$$

Цю хворобу теж можна вилікувати, припустивши, що фотон має невелику масу μ. Тоді в знаменнику фотонного пропаґатора $(k-p)^2$ перетвориться на $(k-p)^2 - \mu^2$, а в Δ з'явиться додатковий член $z\mu^2$. У наступних двох параґрафах ми детально розглянемо інфрачервону розбіжність.

З урахуванням обох цих проміжних змін, вирази для форм-факторів стають

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\Bigg[\log\frac{m^2(1-z)^2}{m^2(1-z)^2 - q^2xy} +$$

$$+ \frac{m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2 - q^2xy + \mu^2 z} - \frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z}\Bigg] + \mathcal{O}(\alpha^2); \tag{6.56}$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\left[\frac{2m^2z(1-z)}{m^2(1-z)^2-q^2xy}\right]+\mathcal{O}(\alpha^2). \quad (6.57)$$

Зазначимо, що жодна з розбіжностей не впливає на $F_2(q^2)$. Тому ми можемо однозначно обчислити

$$\begin{aligned} F_2(q^2=0) &= \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\left[\frac{2m^2z(1-z)}{m^2(1-z)^2}\right] = \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{1-z} dy\,\frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{2\pi}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Таким чином, поправка до g-фактора електрона є

$$a_e \equiv \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,0011614. \quad (6.59)$$

Вперше цей результат отримав Швінґер у 1948 р.[28] Досліди дають $a_e = 0,0011597$. Як бачимо, знайдене нами значення $F_2(0)$ є правильним з точністю до вищих порядків α.

Перевірка точності КЕД

Після успішних передбачень КЕД для a_e у порядку α наступні покоління фізиків підвищили точність як теоретичних розрахунків, так і дослідів для визначення цієї величини. На момент написання цієї книги коефіцієнти в теоретичній формулі КЕД для a_e були відомі аж до членів порядку α^4. Обчислення поправок з α^2 і вище потребує розробленої схеми поводження з ультрафіолетовими розбіжностями.

Результати теоретичних обчислень щоразу підтверджувалися дедалі точнішими дослідами. Останні вимірювання a_e спиралися на методику, розроблену Ван Дайком, Швінберґом і Демелтом, яка полягає в тому, що одиночні електрони захоплюються системою електро- і маґнітостатичних полів, після чого збуджуються в спіновому резонансі.[29] Наразі експериментальне і теоретичне значення a_e узгоджуються з точністю до восьмого знаку після коми.

[28] J. Schwinger, *Phys. Rev.* 73, 416L (1948).
[29] R. Van Dyck, Jr., P. Schwinberg, H. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* 59, 26 (1987).

Табл. 6.1. Значення α^{-1}, одержані в результаті точних експериментів.

КЕД при низьких енерґіях:	
Значення $(g-2)$ для електрона	137,035 992 35 (73)
Значення $(g-2)$ для мюона	137,035 5 (1 1)
Надтонке розщеплення в мюонії	137,035 994 (18)
Лембів зсув	137,036 8 (7)
Надтонке розщеплення у водні	137,036 0 (3)
$2^3S_1 - {}^3S_1$-розщеплення в позитронії	137,034 (16)
Ширина розпаду $^1S_0$-стану позитронію	137,00 (6)
Ширина розпаду $^3S_1$-стану позитронію	136,971 (6)
Комптонова довжина хвилі нейтрона	137,036 010 1 (5 4)
КЕД при високих енерґіях:	
$\sigma(e^+e^- \to e^+e^-e^+e^-)$	136,5 (2,7)
$\sigma(e^+e^- \to e^+e^-\mu^+\mu^-)$	139,9 (1,2)
Конденсована матерія:	
Квантовий ефект Холла	137,035 997 9 (3 2)
Ефект Джозефсона	137,035 977 0 (7 7)

Кожне значення α одержано при порівнянні відповідного експерименту з теоретичним виразом, що містить α як параметр. Числа в дужках — стандартні помилки в останніх цифрах, причому враховані і експеримент, і теорія. Ця таблиця ґрунтується на результатах, представлених у книзі Т. Кіношіти (1990), яка містить цілу низку ясно написаних оглядів по теорії та технолоґії експерименту з перевірки КЕД. П'ять найточніших значень наведені Т. Кіношітою в книзі *History of Original Ideas and Basic Discoveries in Particle Physics*, H. Newman and T. Ypsilantis, eds. (Plenum Press, New York, 1995). У цій книзі, крім іншого, йдеться про перспективи майбутніх точних дослідів з перевірки КЕД.

Розрахунок поправок вищих порядків КЕД було проведено для багатьох інших величин. До них належать енерґії переходів між рівнями атома водню та воднеподібних атомів, аномальний маґнітний момент мюона, ширина розпаду синґлетного і триплетного позитронію. Більшість цих величин з високою точністю вимірювалися в експериментах. Сукупність цих порівнянь представляє детальну перевірку справедливості КЕД у різних ситуаціях. Результати наведено в Таблиці 6.1.

При демонстрації результатів точного порівняння теорії КЕД з дослідами виникає певний нюанс, позаяк теоретичні розрахунки вимагають якнайточнішого значення α, яке можна отримати лише з іншого точного експерименту. Тому ми наводимо кожне порівняння теорії з дослідом, як незалежне визначення α. Кожній величині α приписується похибка, яка складається з очікуваних неточностей, що випливають з теорії та експе-

рименту. КЕД підтверджується до тієї міри, до якої збігаються значення α, отримані різними шляхами.

Перші дев'ять рядків у Таблиці 6.1 ґрунтуються на розрахунках КЕД в атомній фізиці. Зокрема, надтонке розщеплення рівнів у атомі водню, виміряне з використанням водневого мазера Ремзі, є найточніше виміряною величиною у фізиці. На жаль, вплив внутрішньої структури протона призводить до невизначеностей, що задають межу точності, з якою ця величина може бути розрахована в теорії. Таке ж ускладнення виникає при розгляді лембового зсуву — розщеплення між $j = 1/2$ $2S$- і $2P$-рівнями водню. Тому найточніші досліди з перевірки КЕД проводяться над системами, що не містять сильновзаємодіючих часток, наприклад, експерименти з визначення $(g-2)$-фактора електрона і надтонкого розщеплення в атомі мюонію $e^-\mu^+$. Останнім у ґрупі дослідів з перевірки КЕД при низьких енерґіях наведено новий метод визначення α, що полягає в перетворенні дуже точно виміряної комптонової довжини хвилі нейтрона до значення електронної маси з використанням дуже точно відомого співвідношення мас. Це можна поєднати з відомим значенням постійної Рідберґа та точної формули КЕД, щоб знайти α. Єдине суттєве відхилення від решти значень постійної тонкої структури одержано в дослідах з вимірювання ширини розпаду триплетного стану позитронію. Проте є всі підстави вважати, що значну поправку до величини, наведеної в таблиці, вносять діаґрами порядку α^2.

Наступні два пункти стосуються визначення α з реакцій вищого порядку КЕД на електронних колайдерах високих енерґій. Зазвичай ці експерименти забезпечують точність лише на рівні відсотків, але надзвичайно важливо, що їхні результати узгоджуються з точними даними, одержаними при низьких енерґіях.

Нарешті, у двох останніх рядках таблиці наведено результати незалежних вимірювань α в дослідах, пов'язаних з екзотичними квантовими інтерференційними явищами у фізиці конденсованої матерії. У цих дослідах вимірюються, відповідно, стандартний опір і стандартна частота. Вважається, що при цьому вимірюється заряд електрона, причому поправки до його значення в макроскопічних системах є строго нульовими.[30]

Загальна картина направду вражає уяву. На підставі доказів, зібраних у таблиці, ми можемо стверджувати, що КЕД є найточніше перевіреною — а тому найуспішнішою — з усіх фізичних теорій.

[30] Детально про ці ефекти та про їх стосунок до вимірювання α див. D. R. Yennie, *Rev. Mod. Phys.* 59, 781 (1987).

§ 6.4. Електронна вершинна функція: інфрачервона розбіжність

Тепер розберемося з інфрачервоною розбіжністю у нашому результаті (6.56) для $F_1(q^2)$. У наближенні $\mu \to 0$ головний внесок в інтеґрал є

$$F_1(q^2) \approx \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\times \\ \times\left[\frac{m^2(1-4z+z^2)+q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2-q^2xy+\mu^2 z}-\frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2+\mu^2 z}\right]. \tag{6.60}$$

Для розуміння цього виразу його слід трохи спростити, виокремивши й обчисливши розбіжну частину інтеґрала. Надалі в цьому параґрафі залишатимемо тільки члени, що розбігаються при $\mu \to 0$.

Насамперед зауважимо, що розбіжність виникає в тій ділянці простору фейнманових параметрів, де $z \approx 1$ (а отже, $x \approx y \approx 0$). За цих умов можна вважати, що в чисельниках виразу (6.60) $z = 1$ і $x = y = 0$. Крім того, можна встановити $z = 1$ у членах з μ^2 у знаменниках. Скориставшись дельта-функцією для обчислення інтеґрала по x, маємо

$$F_1(q^2) = \\ = \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{1-z} dy\left[\frac{-2m^2+q^2}{m^2(1-z)^2-q^2y(1-z-y)+\mu^2}-\frac{-2m^2}{m^2(1-z)^2+\mu^2}\right].$$

(Нижня межа в інтеґралі по z неістотна.) Після заміни змінних

$$y = (1-z)\xi, \quad w = (1-z),$$

вираз набуває вигляду

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^1 d\xi\,\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dw^2\left[\frac{-2m^2+q^2}{[m^2-q^2\xi(1-\xi)]w^2+\mu^2}-\frac{-2m^2}{m^2w^2+\mu^2}\right] = \\ = \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^1 d\xi\left[\frac{-2m^2+q^2}{m^2-q^2\xi(1-\xi)}\log\left(\frac{m^2-q^2\xi(1-\xi)}{\mu^2}\right)+2\log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\right].$$

У наближенні $\mu \to 0$ ми можемо знехтувати особливостями структури чисельників під логарифмом, оскільки всі величини, пропорційні m^2 або

q^2, мають однаковий порядок. А отже, можемо записати

$$F_1(q^2) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} f_{\mathrm{IR}}(q^2) \log\left(\frac{-q^2 \text{ або } m^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2), \tag{6.61}$$

де коефіцієнт при розбіжному лоґарифмі,

$$f_{\mathrm{IR}}(q^2) = \int_0^1 \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}\, d\xi - 1. \tag{6.62}$$

Оскільки q^2 є від'ємною величиною, а максимальне значення $\xi(1-\xi)$ дорівнює $1/4$, то перший член у цьому виразі більший за одиницю, а отже, $f_{\mathrm{IR}}(q^2)$ є позитивним.

Яким чином такий нескінченний доданок впливає на переріз розсіяння електрона на потенціалі? Оскільки $F_1(q^2)$ у матричному елементі перемножується на γ^μ, то, зробивши заміну $e \to e \cdot F_1(q^2)$, можемо знайти новий вираз для перерізу. Для процесу $\mathbf{p} \to \mathbf{p}'$ це

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \cdot \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\mathrm{IR}}(q^2) \log\left(\frac{-q^2 \text{ або } m^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right], \tag{6.63}$$

де перший множник є диференційним перерізом у деревовидному наближенні. Відзначимо, що поправка до перерізу порядку $\mathcal{O}(\alpha)$ не лише нескінченна, а ще й неґативна. Це означає, що наша теорія має серйозні негаразди.

Для кращого розуміння природи розбіжності оцінимо поведінку коефіцієнта при розбіжному лоґарифмі, $f_{\mathrm{IR}}(q^2)$, в межі $-q^2 \to \infty$. У цьому наближенні виникає ще один лоґарифм:

$$\begin{aligned}\int_0^1 d\xi\, \frac{-q^2/2}{-q^2\xi(1-\xi) + m^2} &\simeq \frac{1}{2}\int_0^1 d\xi\, \frac{-q^2}{-q^2\xi + m^2} + \frac{1}{2}\int_0^1 d\xi\, \frac{-q^2}{-q^2(1-\xi) + m^2} = \\ &= \int_0^1 d\xi\, \frac{-q^2}{-q^2\xi + m^2} = \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right).\end{aligned} \tag{6.64}$$

Відповідно, форм-фактор

$$F_1(-q^2 \to \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2). \tag{6.65}$$

Зверніть увагу, що чисельник у другому логарифмі є не m^2, а $-q^2$, отже, цей вираз містить правильний множник не лише при $\log(1/\mu^2)$, а й при $\log^2(-q^2)$.

Такий самий подвійний логарифм від $-q^2$ виникає у виразі для перерізу м'якого гальмівного випромінювання (6.26). Це підказує нам спосіб подолання проблеми інфрачервоної розбіжності. Порівнюючи (6.65) з (6.26), бачимо, що при $-q^2 \to \infty$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \to p') &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi}\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)\log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]; \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \to p' + \gamma) &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[\quad + \frac{\alpha}{\pi}\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)\log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]. \end{aligned} \tag{6.66}$$

Кожен з цих перерізів окремо розбігається, але їхня сума не залежить від μ, а отже, є скінченною.

Насправді ж ні переріз пружного розсіяння, ні переріз м'якого гальмівного випромінювання не піддається незалежному вимірюванню, спостережною величиною є лише їхня сума. В будь-якому реальному досліді детектор може реєструвати фотони з енерґією не нижчою від певної порогової енерґії E_ℓ. Імовірність того, що розсіяння відбулося, проте детектор не зміг зареєструвати фотон, дорівнює сумі

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(p \to p') + \frac{d\sigma}{d\Omega}\big(p \to p' + \gamma(k < E_\ell)\big) \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{вимірюваний}}. \tag{6.67}$$

Розбіжна частина цього „вимірюваного" диференційного перерізу,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{вимірюваний}} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \Bigg[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2)\log\left(\frac{-q^2 \text{ або } m^2}{\mu^2}\right) + \\ + \frac{\alpha}{2\pi}\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')\log\left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\Bigg] \end{aligned}$$

Ми вже бачили, що $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 2f_{\text{IR}}(q^2)$ при $-q^2 \gg m^2$. Якщо таке співвідношення справедливе для довільних q^2, то вимірюваний переріз є

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{вимірюваний}} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2)\log\left(\frac{-q^2 \text{ або } m^2}{E_\ell^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]. \tag{6.68}$$

Він визначається експериментальними умовами, але більше не залежить від μ^2. Інфрачервоні розбіжності в перерізі м'якого гальмівного випромінювання і в $F_1(q^2)$ взаємно скорочуються, і в підсумку ми маємо скінченний переріз для величини, яку реально можна виміряти.

Ми ще маємо довести, що співвідношення $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 2f_{\mathrm{IR}}(q^2)$ справедливе для довільних q^2. З (6.13) отримуємо

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi}\left(\frac{2p\cdot p'}{(\widehat{k}\cdot p')(\widehat{k}\cdot p)} - \frac{m^2}{(\widehat{k}\cdot p')^2} - \frac{m^2}{(\widehat{k}\cdot p)^2}\right). \tag{6.69}$$

Неважко обчислити останні два члени:

$$\int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi}\,\frac{1}{(\widehat{k}\cdot p)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} d\cos\theta\,\frac{1}{(p^0 - p\cos\theta)^2} = \frac{1}{p^2} = \frac{1}{m^2}.$$

У першому доданку ми можемо об'єднати знаменники за допомогою фейнманових параметрів і привести інтеґрал до вигляду

$$\int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi}\,\frac{1}{(\widehat{k}\cdot p')(\widehat{k}\cdot p)} = \int\limits_0^1 d\xi \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi}\,\frac{1}{[\xi\widehat{k}\cdot p' + (1-\xi)\widehat{k}\cdot p]^2} =$$

$$= \int\limits_0^1 d\xi\,\frac{1}{[\xi p' + (1-\xi)p]^2} = \int\limits_0^1 d\xi\,\frac{1}{m^2 - \xi(1-\xi)q^2},$$

де на останньому кроці ми скористалися співвідношенням $2p\cdot p' = 2m^2 - q^2$. Зібравши всі члени (6.69), в остаточному підсумку маємо

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int\limits_0^1 \frac{2m^2 - q^2}{m^2 - \xi(1-\xi)q^2}\,d\xi - 2 = 2f_{\mathrm{IR}}(q^2), \tag{6.70}$$

що й потребували для скорочення інфрачервоних розбіжностей.

Хоча (6.68) і демонструє, що інфрачервоні розбіжності скорочуються, практичної користі від цього виразу небагато, бо для проведення дослідів бажано знати точну залежність від q^2, а ми її належним чином не обчислили. Проте згадаймо з (6.65), що в наближенні $-q^2 \gg m^2$ ми змогли отримати правильний коефіцієнт при $\log^2(-q^2)$. У цьому разі (6.68) набуває вигляду

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{вимірюваний}} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0\left[1 - \frac{\alpha}{\pi}\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)\log\left(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right], \tag{6.71}$$

Такий результат є однозначним і корисним. Зауважимо, що поправка порядку $\mathcal{O}(\alpha)$ знову містить судаківський подвійний логарифм.

§ 6.5. Підрахунок та інтерпретація інфрачервоних розбіжностей

Розгляд інфрачервоних розбіжностей у попередньому параґрафі дає достатні методи для усунення нескінченностей в обчисленнях гальмівного випромінювання і вершинних поправок. Проте лишилися нез'ясованими три суттєві моменти:

1. Ми не продемонстрували скорочення розбіжностей у вищих порядках.

2. Поправка до спостережної величини перерізу (6.68) і (6.71), одержана після скорочення інфрачервоних розбіжностей, буде необмежено зростати (зі знаком мінус), якщо створювати фотонні детектори з дедалі меншою пороговою енерґією E_ℓ.

3. Досі не вдалося відтворити класичний результат (6.19) для кількості фотонів, випромінених при зіткненні.

Друга та третя проблеми природним чином вирішуються, коли вирішити першу, до цього ми зараз і візьмемося.

Повне доведення факту скорочення в усіх порядках інфрачервоних розбіжностей виходить за рамки нашого курсу.[31] Ми ж розглянемо лише найсильніші, лоґарифмічні члени, що виникають у кожному порядку теорії збурень. Загалом, такі члени мають порядок

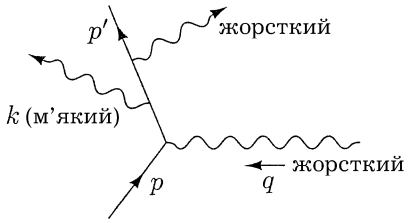
$$\left[\log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)\right]^n \tag{6.72}$$

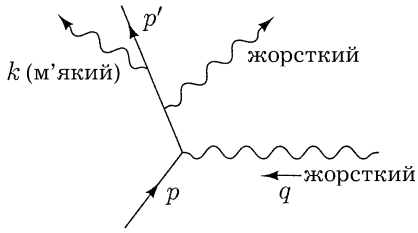
у n-ому порядку теорії збурень. Остаточні фізичні висновки було вперше сформульовано у праці Блоха та Нордсіка, фактично написаної ще до створення квантової релятивістської теорії.[32] Ми ж дотримуватимемося сучасної і спрощеної версії їхнього аналізу, запропонованої Вайнберґом.[33]

Інфрачервоні розбіжності виникають через внесок фотонів з „м'якими" імпульсами — як реальних, з енерґіями меншими від E_ℓ, так і віртуальних, з $k^2 < E_\ell^2$ (після здійснення вікового повороту). Типова діаґрама вищого порядку містить велику кількість реальних і віртуальних фотонних

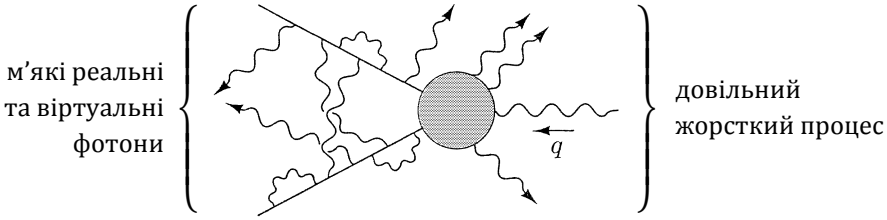
[31] Детальне дослідження цього питання див. D. Yennie, S. Frautschi, H. Suura, *Aim. Phys.* 13, 379 (1961).
[32] F. Bloch, A. Nordsieck, *Pbys. Rev.* 52, 54 (1937).
[33] S. Weinberg, *Phys. Rev.* 140, B516 (1965).

ліній. Проте для виникнення розбіжності недостатньо мати м'який фотон, потрібна ще й синґулярність у пропаґаторі електрона. Розглянемо, наприклад, такі дві діаґрами:



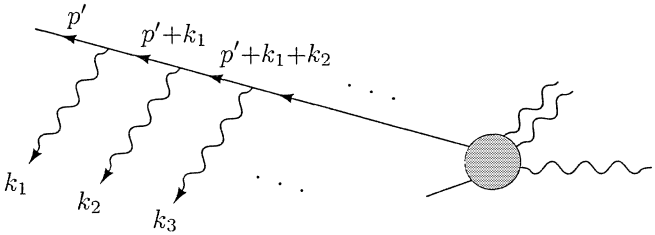


Перша з них, у якій електрон випромінює спершу м'який, а потім жорсткий фотон, не має інфрачервоної розбіжності, бо імпульси в обох електронних пропаґаторах лежать далеко від масової поверхні. Та якщо останнім випромінюється не жорсткий, а м'який фотон, знаменник у відповідному пропаґаторі є $(p' + k)^2 - m^2 = 2p' \cdot k$ і обертається на нуль нуль при $k \to 0$. Отже, друга діаґрама справді містить розбіжність. Тому ми розглядатимемо такі діаґрами, де довільний жорсткий процес, який, можливо, супроводжується випромінюванням жорстких або м'яких фотонів, змінено таким чином, що до зовнішніх електронних ліній долучено лінії м'яких реальних та віртуальних фотонів:



За методом Вайнберґа, підсумуємо внески від усіх таких діаґрам. Єдине нове ускладнення з'являється тут через комбінаторику підрахунку всіх способів, за якими може виникнути фотон.

Насамперед розглянемо зовнішню лінію вихідного електрона:



Прикріпимо до неї n фотонів з імпульсами $k_1 \cdots k_n$ і поки не перейматимемося тим, які саме ці фотони — реальні, віртуальні, поєднані між собою, чи віртуальні, зв'язані з вершинами на вхідній електронній лінії. Діракова структура діаґрами є такою:

$$\begin{gathered}\bar{u}(p')(-ie\gamma^{\mu_1})\frac{i(\not{p}' + \not{k}_1 + m)}{2p' \cdot k_1}(-ie\gamma^{\mu_2})\frac{i(\not{p}' + \not{k}_1 + \not{k}_2 + m)}{2p' \cdot (k_1 + k_2) + \mathcal{O}(k^2)} \cdots \\ \cdots (-ie\gamma^{\mu_n})\frac{i(\not{p}' + \not{k}_1 + \cdots + \not{k}_n + m)}{2p' \cdot (k_1 + \cdots + k_n) + \mathcal{O}(k^2)}(i\mathcal{M}_{\text{жорст}}) \cdots\end{gathered} \tag{6.73}$$

Вважатимемо, що всі k_i малі, і членами в знаменниках порядку $\mathcal{O}(k^2)$ можна знехтувати. Відкинемо, як і в § 6.1, доданки на зразок $\not{k}_i$ в чисельниках. Також ми можемо перемістити множники $(\not{p}' + m)$ вліво і скористатися рівнянням $\bar{u}(p')(-\not{p}' + m) = 0$:

$$\begin{aligned}\bar{u}(p')\gamma^{\mu_1}(\not{p}' + m)\gamma^{\mu_2}(\not{p}' + m) \cdots &= \bar{u}(p')\, 2p'^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}(\not{p}' + m) \cdots = \\ &= \bar{u}(p')\, 2p'^{\mu_1}\, 2p'^{\mu_2} \cdots .\end{aligned}$$

Вираз (6.73) перетворюється на

$$\bar{u}(p')\left(e\,\frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1}\right)\left(e\,\frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot (k_1 + k_2)}\right) \cdots \left(e\,\frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot (k_1 + \cdots k_n)}\right) \cdots . \tag{6.74}$$

Продовжуючи розглядати лише вихідну електронну лінію, ми маємо тепер підсумувати за всіма перестановками $k_1 \ldots k_n$. (Якщо два фотони поєднані й утворюють один віртуальний фотон, його буде враховано двічі. Як з цим бути, розберемося згодом.) У сумі присутні n різних діаґрам, що відповідають $n!$ перестановкам $n!$ фотонних імпульсів. Позначимо таку перестановку як π, тож $\pi(i)$ є числом між 1 і n, у яке i переходить при перестановці. (Наприклад, якщо π позначає перестановку $1 \to 3$, $2 \to 1$ і $3 \to 2$, то $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 1$ і $\pi(3) = 2$.)

Озброєні таким означенням, ми можемо підсумувати за всіма перестановками, вдавшись до тотожності

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\text{всі}\\ \text{переста-}\\ \text{новки } \pi}} \frac{1}{p \cdot k_{\pi(1)}}\,\frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} \cdots \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)} + \cdots + k_{\pi(n)})} &= \\ = \frac{1}{p \cdot k_1}\,\frac{1}{p \cdot k_2} \cdots \frac{1}{p \cdot k_n}.\end{aligned} \tag{6.75}$$

Доведення цієї формули проводиться за індукцією. При $n = 2$ маємо

$$\sum_{\pi} \frac{1}{p \cdot k_{\pi(1)}} \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} = \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot (k_1 + k_2)} + \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot (k_1 + k_2)} =$$
$$= \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2}.$$

Щоб здійснити крок індукції, зауважимо, що останній множник ліворуч у (6.75) не змінюється при довільній перестановці π. Після його винесення за знак суми, ліва частина рівності стає

$$\text{ЛЧ} = \frac{1}{p \cdot \sum k} \sum_{\pi} \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} \cdots \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + \cdots + k_{\pi(n-1)})}.$$

Для будь-якого заданого π величина під знаком суми не залежить від $k_{\pi(1)}$. Встановивши $i = \pi(n)$, можемо записати:

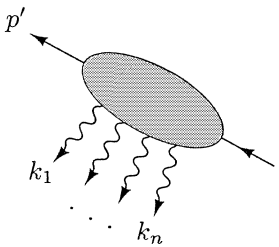
$$\sum_{\pi} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi'(i)}$$

де $\pi'(i)$ є всі перестановки решти $n - 1$ чисел. Припустимо за індукцією, що (6.75) справедливе для $n - 1$. Тоді

$$\text{ЛЧ} = \frac{1}{p \cdot \sum k} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \cdots \frac{1}{p \cdot k_{i-1}} \frac{1}{p \cdot k_{i+2}} \cdots \frac{1}{p \cdot k_n}.$$

Помноживши і розділивши кожен член у сумі на $p \cdot k_i$, ми легко отримаємо бажаний результат(6.75).

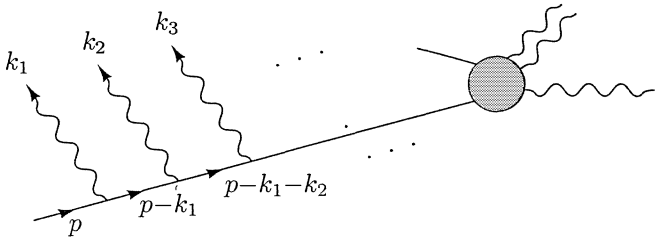
Застосувавши (6.75) до (6.74), знайдемо



$$= \bar{u}(p')\left(e\frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1}\right)\left(e\frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot k_2}\right)\cdots\left(e\frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot k_n}\right) \quad (6.76)$$

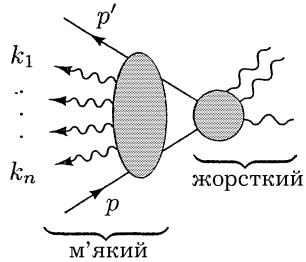
де сіра зона відповідає сумі за всіма можливими способами вставлення n фотонних ліній.

Таким самим чином можемо спростити суму за всіма м'якими фотонами, прикріпленими до вхідної лінії електрона. Імпульси у пропаґаторах є $p - k_1, p - k_1 - k_2$ і т. д.:



Отже, кожному фотону відповідає додатковий знак мінус, тому $(p-\Sigma k)^2 - m^2 \approx -2p \cdot \Sigma k$.

Далі розглянемо діаґрами, в яких n м'яких фотонів у будь-якому можливому порядку поєднані з лінією вхідного або вихідного електрона. Суму таких діаґрам можна записати, як



$$= \bar{u}(p')\, i\mathcal{M}_{\text{жорст}}\, u(p) \cdot$$
$$\cdot e\Big(\frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1} - \frac{p^{\mu_1}}{p \cdot k_1}\Big) \cdot e\Big(\frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot k_2} - \frac{p^{\mu_2}}{p \cdot k_2}\Big) \cdots$$
$$\cdots e\Big(\frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot k_n} - \frac{p^{\mu_n}}{p \cdot k_n}\Big). \tag{6.77}$$

Розкриваючи дужки у співмножниках, ми переконаємося, що отримуємо правильний внесок для кожного способу розподілу n фотонів між двома електронними лініями.

Тепер маємо визначити, які фотони є реальними, а які — віртуальними. Ми можемо одержати віртуальний фотон, поєднавши два фотонні імпульси k_i та k_j, встановивши $k_j = -k_i \equiv k$, помноживши вираз на фотонний пропаґатор і проінтеґрувавши по всіх k. Для кожного віртуального фотона маємо вираз

$$\frac{e^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \Big(\frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k}\Big) \cdot \Big(\frac{p'}{-p' \cdot k} - \frac{p}{-p \cdot k}\Big) \equiv X. \tag{6.78}$$

Множник $1/2$ є необхідним, оскільки в такій процедурі ми двічі враховуємо кожну фейнманову діаґраму — перестановка k_i і k_j дає одну й ту саму

діаґраму. Цей вираз можна обчислити за допомогою контурного інтеґрування, проте існує простіший спосіб. Зазначимо, що в рамках нашої наближеної схеми кожній однопетельній діаґрамі, що не містить зовнішніх фотонних ліній, приписується значення

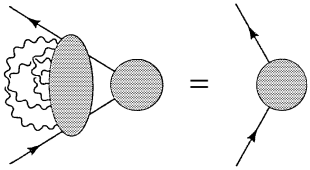
$$\bar{u}(p')\big(i\mathcal{M}_{\text{жорст}}\big)u(p)\cdot X.$$

Отже, X є інфрачервоною межею однопетельної поправки до форм-фактора в (6.61):

$$X = -\frac{\alpha}{2\pi} f_{\text{IR}}(q^2)\log\Big(\frac{-q^2}{\mu^2}\Big). \tag{6.79}$$

Безпосереднє виведення цього виразу з (6.78) присутнє в цитованій вище праці Вайнберґа. Зауважимо, що в попередньому параґрафі результат (6.79) було отримано лише після проведення процедури фіксації (6.55) при $q^2 = 0$, тому слід подбати про те, чи узгоджується (6.79) з аналоґічним обчисленням у діаґрамі n-го порядку. До цього додамо, що деякі з підсумованих діаґрам містять поправки до зовнішніх ліній, які ми не розглядаємо. Виявляється, що вони не впливають на кінцевий результат — доведення цього факту, а також деякі інші моменти, які ми пропустили, можна знайти в цитованій на початку параґрафу праці Єнні, Фраучі та Суура.

Якщо число віртуальних фотонів є m, матимемо m множників типу (6.79) і, крім того, множник $1/m!$, який виникає через те, що перестановка імпульсів віртуальних фотонів не змінює діаґрами. Для отримання повної поправки, пов'язаної з наявністю довільної кількості м'яких віртуальних фотонів, підсумуємо за m:



$$= \quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} = \bar{u}(p')\big(i\mathcal{M}_{\text{жорст}}\big)u(p)\exp(X). \tag{6.80}$$

Якщо на додачу до m віртуальних фотонів випромінюється реальний фотон, ми маємо помножити на його вектор поляризації, підсумувати за всіма поляризаціями і проінтеґрувати квадрат матричного елемента по фазовому простору фотона. У цьому разі виникне додатковий множник

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^2}{2k}\,(-g_{\mu\nu})\Big(\frac{p'^{\mu}}{p'\cdot k} - \frac{p}{p^{\mu}\cdot k}\Big)\cdot\Big(\frac{p'^{\nu}}{p'\cdot k} - \frac{p^{\nu}}{p\cdot k}\Big) \equiv Y \tag{6.81}$$

у перерізі. За умови, що енерґія фотона більша, ніж μ, але менша, ніж E_ℓ (порогова енерґія детектора), вираз спрощується:

$$Y = \frac{\alpha}{\pi}\mathcal{I}(\mathbf{v}', \mathbf{v})\log\left(\frac{E_\ell}{\mu}\right) = \frac{\alpha}{\pi}f_{\mathrm{IR}}(q^2)\log\left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\right). \tag{6.82}$$

У випадку випромінювання n реальних фотонів одержимо n таких множників, а ще фактор симетрії $1/n!$ (оскільки в кінцевому стані присутні n тотожних бозонів). Переріз випромінювання довільної кількості м'яких фотонів є

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}'+n\gamma) &= \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}')\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}Y^n = \\ &= \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}')\cdot\exp(Y).\end{aligned} \tag{6.83}$$

Об'єднавши результати для реальних і віртуальних фотонів, отримаємо остаточний вираз в усіх порядках за α для вимірюваного перерізу процесу $\mathbf{p}\to\mathbf{p}'+$ (довільна кількість фотонів з $k<E_\ell$):

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{вимірюваний}} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0\times\exp(2X)\times(Y) = \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0\times\exp\left[-\frac{\alpha}{\pi}f_{\mathrm{IR}}(q^2)\log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)\right]\times \\ &\qquad\times\exp\left[-\frac{\alpha}{\pi}f_{\mathrm{IR}}(q^2)\log\left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\right)\right] = \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0\times\exp\left[-\frac{\alpha}{\pi}f_{\mathrm{IR}}(q^2)\log\left(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{6.84}$$

Поправочний множник може залежати лише від порогової енерґії детектора, але не залежить від інфрачервоного обрізання μ. Якщо розкласти цей результат до членів $\mathcal{O}(\alpha)$, матимемо формулу (6.68). Однак тепер величина поправочного множника обмежена проміжком між 0 і 1.

У межі $-q^2\gg m^2$ наш результат стає

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{вимірюваний}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0\times\left|\exp\left[-\frac{\alpha}{\pi}\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)\log\left(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\right)\right]\right|^2. \tag{6.85}$$

У цьому наближенні ймовірність розсіяння без випромінювання жорсткого фотона прагне до нуля швидше будь-якого степеня q^2. Експоненційний поправочний множник, що містить подвійний логарифм, має назву *форм-фактора Судакова*.

На завершення цього параґрафу обчислимо ймовірність того, що певний процес розсіяння супроводжується випромінюванням n м'яких фотонів з енерґіями в інтервалі від E_- до E_+. Інтеґрал по їх фазовому простору дає не $\log(E_\ell/\mu)$, а $\log(E_+/E_-)$. Якщо віднести фотони з енерґією, більшою за E_+, до жорсткої частини процесу, то переріз дорівнює виразу (6.84) з додатковим множником:

$$\begin{aligned}\text{Імовірність}(n\gamma \text{ з } E_- < E < E_+) = \frac{1}{n!}\Big[\frac{\alpha}{\pi} f_{\mathrm{IR}}(q^2)\log\Big(\frac{E_+^2}{E_-^2}\Big)\Big]^n \times \\ \times \exp\Big[-\frac{\alpha}{\pi} f_{\mathrm{IR}}(q^2)\log\Big(\frac{E_+^2}{E_-^2}\Big)\Big].\end{aligned} \tag{6.86}$$

Цей вираз має вигляд розподілу Пуассона:

$$P(n) = \frac{1}{n!}\lambda^n e^{-\lambda},$$

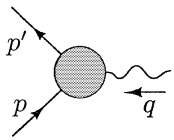
де

$$\lambda = \langle n\rangle = \frac{\alpha}{\pi}\log\Big(\frac{E_+}{E_-}\Big)\mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'),$$

і збігається з квазікласичною оцінкою числа випромінених фотонів (6.19).

Задачі

6.1. Формула Розенблюта. Як зазначалося в § 6.2, точну вершину електромаґнітної взаємодії діракового ферміона можна в загальному вигляді виразити через форм-фактори $F_1(q^2)$ і $F_2(q^2)$:



$$= \bar{u}(p')\Big[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}F_2(q^2)\Big]u(p),$$

де $q = p' - p$ і $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Якщо ферміон також бере участь і в сильній взаємодії (наприклад, протон), у форм-факторах ця взаємодія має бути врахована, а отже, їх не можна вивести із засадничих принципів КЕД. Проте вирази для форм-факторів одержують з дослідів. Розглянемо розсіяння електрона з енерґією $E \gg m_e$ на протоні, що початково перебуває в стані спокою. Покажіть, що наведений вище вираз для вершини призводить до *формули Розенблюта* для перерізу пружного розсіяння в го-

ловному порядку за α, але з урахуванням усіх порядків за сильною взаємодією:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2\left[\left(F_1^2 - \frac{q^2}{4m^2}F_2^2\right)\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{4m^2}\left(F_1+F_2\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]}{2E^2\left[1+\frac{2E}{m}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\sin^4\frac{\theta}{2}},$$

де θ є кут розсіяння в лабораторній системі відліку, а форм-фактори F_1 і F_2 обчислюються при значенні q^2, пов'язаному з пружним розсіянням на цей кут. Вимірюючи $(d\sigma/d\cos\theta)$, як функцію кута, можна знайти F_1 і F_2. Зазначимо, що при $F_1 = 1$ і $F_2 = 0$ ця формула переходить у формулу Мотта (в безмасовому наближенні) для розсіяння на точковій частці (Задача 5.1).

6.2. Наближення еквівалентних фотонів. Розглянемо процес розсіяння високоенерґетичних електронів на певній мішені. У головному порядку за α електрон пов'язаний з мішенню одним фотонним пропаґатором. Якщо початкова та кінцева енерґії електрона є відповідно E і E', фотон переносить імпульс q такий, що $q^2 \approx 2EE'(1-\cos\theta)$. У граничному випадку розсіяння вперед імпульс фотона прагне до $q^2 = 0$ при будь-якій втраті енерґії; звідси переріз має пік у напрямку вперед. Виникає спокуса припустити, що в цій межі віртуальний фотон стає реальним. З'ясуймо, в якому сенсі таке припущення можна вважати правильним.

(a) Матричний елемент процесу розсіяння можна записати, як

$$\mathcal{M} = (-ie)\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\,\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\,\widehat{\mathcal{M}}^\nu(q),$$

де $\widehat{\mathcal{M}}^\nu$ позначає (загалом досить складну) вершину взаємодії віртуального фотона з мішенню. Проаналізуємо структуру $\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)$. Нехай $q = (q^0, \mathbf{q})$. Визначимо $\tilde{q} = (q^0, -\mathbf{q})$. Добуток спінорів можна розкласти на суму:

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = A\cdot q^\mu + B\cdot\tilde{q}^\mu + C\cdot\varepsilon_1^\mu + D\cdot\varepsilon_2^\mu,$$

де A, B, C, D — функції кута розсіяння і втрати енерґії, а ε_i — два одиничних вектора, нормальних до $\mathbf{q}$. Згорнувши цей вираз з q_μ, покажіть, що за порядком B не перевищує θ^2. Це означає, що в подальшому аналізі цим коефіцієнтом можна знехтувати. Крім того, дарма що A велике, його також слід відкинути внаслідок тотожності Варда $q^\mu\widehat{\mathcal{M}}_\mu = 0$.

(b) Працюючи в системі відліку, де $p = (E, 0, 0, E)$, отримайте явний вираз для

$$\bar{u}(p')\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i u(p).$$

Використайте безмасові електрони, спінори $u(p)$ та $u(p')$ з визначеною спіральністю і одиничні вектори $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, один з яких паралельний, а інший перпендикулярний до площини розсіяння. Насправді ця величина потрібна лише для випадку розсіяння вперед, тобто можна обчислювати лише члени порядку θ. Зверніть, проте, увагу, що малий z-компонент $\boldsymbol{\varepsilon}$, який лежить у площині розсіяння, також має порядок θ, і його треба враховувати.

(c) Тепер запишіть вираз для перерізу розсіяння електрона через квадрат матричного елемента. Потім його слід проінтеґрувати по кінцевому імпульсу електрона p'. Інтеґрал по p'^3 еквівалентний інтеґралові по енерґії, втраченій електроном. Покажіть, що інтеґрал по $p'_\perp$ у випадку розсіяння вперед лоґарифмічно розбігається, якщо $p'_\perp \to 0$ або $\theta \to 0$.

(d) Розбіжність при $\theta \to 0$ виникла через те, що ми надто часто нехтували масою електрона. Покажіть, що при врахуванні маси електрона у виразі для q^2,

$$q^2 = -2(EE' - pp'\cos\theta) + 2m^2,$$

лоґарифмічна розбіжність обрізається, і це призводить до появи множника $\log(s/m^2)$.

(e) Об'єднавши всі результати і припустивши, що перерізи не залежать від поляризації фотона, покажіть, що найбільшу частину перерізу розсіяння електрона на мішені можна отримати, якщо вважати, що електрон є джерелом пучка реальних фотонів з розподілом по енерґії ($x = E_\gamma/E$):

$$N_\gamma(x)\,dx = \frac{dx}{x}\,\frac{\alpha}{2\pi}\left[1 + (1-x)^2\right]\log\left(\frac{s}{m^2}\right).$$

Це і є *наближенням еквівалентних фотонів* Вайцзекера–Вільямса. Зокрема воно дозволяє вивчати розсіяння світла на світлі, використовуючи e^+e^--зіткнення. Відзначимо, що коли розглядати випромінювання м'якого фотона до моменту розсіяння, вищенаведений розподіл збігається з тим, що ми отримали в Задачі 5.5.

6.3. Екзотичні внески до $\mathbf{g-2}$. Будь-яка частка, що перебуває у взаємодії з електроном, має давати поправки до електрон-фотонних форм-фа-

кторів і, зокрема, до $g-2$. Оскільки $g-2$ для електрона чудово узгоджується з розрахунками КЕД, поправки дозволяють накладати обмеження на властивості нових гіпотетичних часток.

(a) В об'єднаній теорії електромаґнітної та слабкої взаємодії присутня скалярна частка $\mathfrak{h}$, яку називають *бозоном Гіґса*. Вона взаємодіє електроном наступним чином:

$$H_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x}\, \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\, \phi_{\mathfrak{h}} \bar{\psi}\psi.$$

Обчисліть внесок віртуального гіґсового бозона до електронного $(g-2)$-фактора, виразивши поправку через λ та масу $m_{\mathfrak{h}}$ цього бозона.

(b) КЕД дає дуже точний вираз для аномального маґнітного моменту електрона. Якщо $a = (g-2)/2$,

$$\left|a_{\text{експ}} - a_{\text{КЕД}}\right| < 1 \times 10^{-10}.$$

Які обмеження накладає це на λ і $m_{\mathfrak{h}}$? У найпростішій версії електрослабкої теорії $\lambda = 3 \times 10^6$ і $m_{\mathfrak{h}} > 60$ ҐеВ. Покажіть, що такі значення узгоджуються з нерівністю для a. Константа взаємодії гіґсового бозона з мюоном більша за електронну в (m_μ/m_e) разів: $\lambda = 6 \times 10^{-4}$. А отже, попри неточність в експериментальному значенні аномального маґнітного моменту мюона,

$$\left|a_{\text{експ}} - a_{\text{КЕД}}\right| < 3 \times 10^{-8},$$

ця умова накладає набагато сильніше обмеження на $m_{\mathfrak{h}}$. Чи досить воно сильне?

(c) Є складніші варіанти електрослабкої теорії, що містять псевдоскалярну частку *аксіон*, яка взаємодіє з електроном відповідно до

$$H_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x}\, \frac{i\lambda}{\sqrt{2}}\, \phi_{\mathfrak{a}} \bar{\psi}\gamma^5\psi.$$

Можливо, аксіон є так само легким, як і електрон, чи навіть легшим, і водночас взаємодіє з електроном сильніше, ніж гіґсів бозон. Обчисліть внесок віртуального аксіона до електронного $g-2$-фактора і визначте неприпустимі значення λ та $m_{\mathfrak{a}}$.

Розділ 7

Радіаційні поправки: формальний розгляд

Чотири рази впродовж трьох останніх розділів[34] ми вдавалися до певних тверджень (іноді з наведенням мотивації), які не було доведено. Ідеться про таке:

1. Формула (4.86) для ширини розпаду через елементи S-матриці.
2. Основна формула (4.103) для елементів S-матриці через фейнманові діаґрами.
3. Тотожність Варда (5.79).
4. *Ad hoc* процедура фіксації (6.55) для усунення ультрафіолетової розбіжності в діаґрамі вершинної поправки.

Наразі настав час повернутися до цих питань і розглянути їх з належною ретельністю. У §§ 7.2 – 7.4 ми доведемо всі чотири твердження. Ті знання, що їх ми здобудемо в процесі доведення, дозволять нам інтерпретувати решту петельних поправок для розсіяння електрона на важкій частці — поправки до зовнішніх ліній і поляризацію вакууму. Другу та третю діаґрами з (6.1) ми обчислимо в § 7.1, а останню — в § 7.5.

Цей розділ буде абстрактнішим, ніж два попередні. Головною його темою будуть особливості фейнманових діаґрам, представлених як аналітичні функції зовнішніх імпульсів. Проте ми виявимо, що це питання, на перший погляд призначене для вузького кола фахівців, насправді породжує чимало фізичних наслідків і проливає світло на зв’язок між фейнмановими діаґрамами та загальними принципами квантової теорії.

[34] Ще ми постулювали, а не вивели, вираз для фотонного пропаґатора. Це буде виправлено в Розділі 9 (Том II).

§ 7.1. Перенормування напруженості поля

У цьому параґрафі ми досліджуватимемо аналітичну структуру двоточкової кореляційної функції,

$$\langle\Omega|\, T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle \quad \text{або} \quad \langle\Omega|\, T\psi(x)\bar{\psi}(y)|\Omega\rangle.$$

У вільній теорії поля двоточкова функція $\langle\Omega|\, T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$ має просту інтерпретацію. Вона є амплітудою ймовірності того, що частка розповсюджується з точки y в точку x. У якій мірі така інтерпретація є справедливою в теорії із взаємодією?

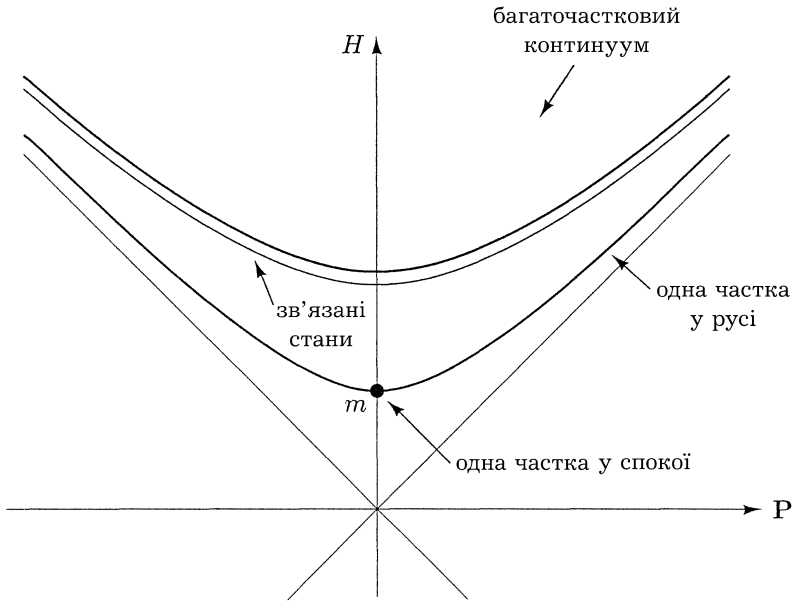


Рис. 7.1. Власні значення оператора 4-імпульсу $P^{\mu} = (H, \mathbf{P})$ покривають поверхні послідовності гіперболоїдів у імпульсно-енерґетичному просторі. В типовій теорії стан описує одну або більше часток з масою m. Таким чином маємо гіперболоїд одночасткових станів і нескінченний набір гіперболоїдів двочасткових, тричасткових і т. д. станів. Крім того, нижче порогу утворення двох вільних часток може бути один або більше гіперболоїдів, що відповідають зв'язаним станам.

Наш аналіз двоточкової функції спиратиметься лише на загальні принципи теорії відносності та квантової механіки і не залежатиме від природи взаємодії чи від розкладення в пертурбативний ряд. Проте для простоти ми обмежимося скалярними полями. Схожі результати можна отримати і для кореляційних функцій полів зі спіном. Наприкінці за приклад ми наведемо відповідний результат для діракового поля.

Розіб'ємо двоточкову функцію $\langle\Omega|\, T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$, для чого вставимо в неї між $\phi(x)$ та $\phi(y)$ тотожний оператор у вигляді суми за повним набором станів. За такі оберемо власні стани повного гамільтоніана із взаємодією H. Оскільки оператор імпульсу $\mathbf{P}$ комутує з H, ці стани можна обрати так, щоб вони були власними станами $\mathbf{P}$. Твердження можна посилити, якщо врахувати лоренц-інваріантність. Нехай $|\lambda_0\rangle$ є власним станом H з нульовим імпульсом: $\mathbf{P}|\lambda_0\rangle = 0$. Тоді всі бусти $|\lambda_0\rangle$ також є власними станами H і пробігають усі можливі значення 3-імпульсу. І навпаки — будь-який власний стан H з певним імпульсом можна записати у вигляді бусту стану з нульовим імпульсом $|\lambda_0\rangle$. Власні значення оператора 4-імпульсу $P^\mu = (H,\, \mathbf{P})$ лежать на гіперболоїдах, як зображено на Рис. 7.1.

Згадаймо з Розділу 2, що співвідношення повноти для одночасткових станів є

$$\mathcal{I}_{1\text{ч}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\, |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| \tag{7.1}$$

Ми можемо написати аналоґічне співвідношення повноти для всього гільбертового простору, лише трохи змінивши позначення. Нехай $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$ є бустом $|\lambda_0\rangle$ з імпульсом $\mathbf{p}$. Припустимо, що стан $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$, подібно до одночасткових станів $|\mathbf{p}\rangle$, нормовано релятивістськи інваріантним чином. Встановимо $E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_\lambda^2}$, де m_λ — „маса" стану $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$, тобто енерґія стану $|\lambda_0\rangle$. Потрібне нам співвідношення повноти має вигляд

$$\mathbf{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_\lambda \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)}\, |\lambda_{\mathbf{p}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{p}}|, \tag{7.2}$$

де сума береться за всіма станами з нульовим імпульсом $|\lambda_0\rangle$.

Тепер вставимо це розкладення між операторами у двоточковій функції. Вважатимемо, що $x^0 > y^0$, і знехтуємо постійним внеском $\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle\langle\Omega|\phi(y)|\Omega\rangle$, що не становить для нас інтересу.[35] Двоточкова функція є

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_\lambda \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)}\, \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{p}}|\phi(y)|\Omega\rangle. \tag{7.3}$$

[35] Зазвичай він є нульовим внаслідок симетрії. А для полів з вищими спінами він дорівнює нулю в силу лоренц-інваріантності.

Ми можемо провести маніпуляції з матричними елементами:

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle &= \langle\Omega|\, e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\phi(0)\, e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle = \\ &= \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle\, e^{-ip\cdot x}\big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = \\ &= \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle\, e^{-ip\cdot x}\big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Остання рівність є наслідком лоренц-інваріантності $\langle\Omega|$ і $\phi(0)$. Щоб переконатися в цьому, треба вставити два множники $U^{-1}U$, де U є унітарним оператором бусту від $\mathbf{p}$ до 0, і скористатися рівністю $U\phi(0)U^{-1} = \phi(0)$.[36] Після введення інтеґрала по p^0 вираз для двоточкової функції (як і досі, $x^0 > y^0$) стає

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{i}{p^2 - m_\lambda^2 + i\varepsilon}\, e^{-ip\cdot(x-y)} \big|\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle\big|^2. \tag{7.5}$$

Звернімо увагу на появу пропаґатора $D_F(x-y)$ із заміною m на m_λ. Для $y^0 > x^0$ справедливі аналоґічні вирази, тому обидва випадки можна об'єднати. Узагальнений вираз такого розкладення для двоточкової функції має назву *спектрального представлення Челлена–Лемана*:

$$\langle\Omega|\,\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \int\limits_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\, \rho(M^2)\, D_F(x-y;\, M^2), \tag{7.6}$$

де $\rho(M^2)$ є позитивно визначена функція *спектральної густини*:

$$\rho(M^2) = \sum_\lambda (2\pi)\, \delta(M^2 - m_\lambda^2) \big|\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle\big|^2. \tag{7.7}$$

Спектральна густина $\rho(M^2)$ для типової теорії поля показана на Рис. 7.2. Зазначимо, що одночасткові стани роблять у неї внесок у вигляді ізольованих дельта-функцій:

$$\rho(M^2) = 2\pi\, \delta(M^2 - m^2)\cdot Z + (\text{нічого іншого до } M^2 \simeq (2m)^2), \tag{7.8}$$

де Z — деяке число, що визначається квадратом матричного елемента в (7.7). Називатимемо Z *константою перенормування напруженості поля*. Величина m є точна маса однієї частки або точне власне значення енерґії частки у спокої. Загалом, ця величина відрізняється від тієї, що фіґурує в лаґранжіані і яку ми надалі позначатимемо m_0, називаючи її *голою* масою. Величина ж m є *фізичною* масою ф-бозона. Безпосередньо спостережною є лише фізична маса m.

[36] Для полів зі спіном слід враховувати їх нетривіальне перетворення Лоренца.

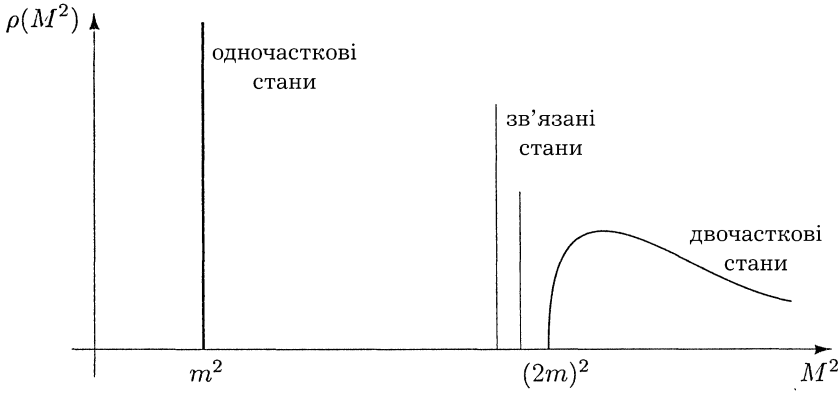


Рис. 7.2. Спектральна функція $\rho(M^2)$ для типової теорії поля із взаємодією. Одночасткові стани роблять внесок з дельта-функцій при m^2 (квадрат маси частки). Багаточасткові стани дають безперервний спектр, що починається при $(2m)^2$. Також можуть бути внески від зв'язаних станів.

Спектральне розкладення (7.6) дає такий вигляд фур'є-перетворення двоточкової функції:

$$\int d^4x\, e^{ip\cdot x}\langle\Omega|\, T\phi(x)\phi(0)|\Omega\rangle = \int\limits_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\,\rho(M^2)\,\frac{i}{p^2-M^2+i\varepsilon} = \\ = \frac{iZ}{p^2-m^2+i\varepsilon} + \int\limits_{\sim 4m^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\,\rho(M^2)\,\frac{i}{p^2-M^2+i\varepsilon}. \tag{7.9}$$

Аналітична структура цієї функції в комплексній p^2-площині показана на Рис. 7.3. Перший доданок відповідає простому ізольованому полюсові при $p^2 = m^2$, а другий — розрізу, що починається в точці $p^2 = (2m)^2$. Якщо існують будь-які двочасткові зв'язані стани, то в $\rho(M^2)$ з'являться додаткові дельта-функції, а в комплексній площині — нові полюси.

У § 2.4 ми знайшли точний вираз для двоточкової кореляційної функції для вільного скалярного поля:

$$\int d^4x\, e^{ip\cdot x}\langle 0|\, T\phi(x)\phi(0)|0\rangle = \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}. \tag{7.10}$$

При $x^0 > 0$ ми інтерпретували цю формулу, як амплітуду ймовірності того, що частка розповсюджується від 0 до x. З рівняння (7.9) видно, що двоточкова функція має схожий вигляд в узагальненій теорії із взаємодією. Загальний вираз є просто сумою скалярних амплітуд розповсюдження станів, народжених з вакууму під дією оператора $\phi(0)$. Проте між (7.9)

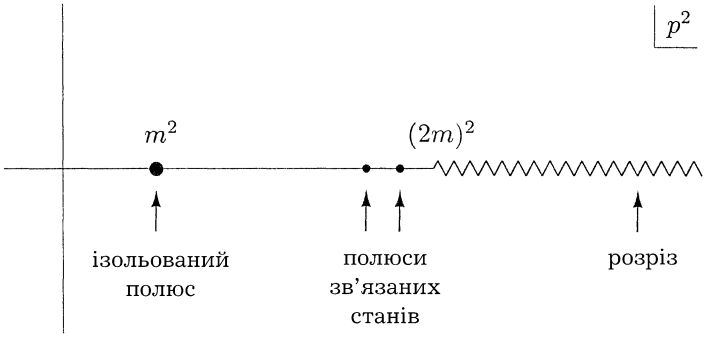


Рис. 7.3. Аналітична структура фур'є-перетворення двоточкової функції типової теорії в комплексній p^2-площині. Одночасткові стани дають внесок у вигляді ізольованих полюсів у точках, що відповідають масам часток. Стани двох і більше часток дають розріз, а зв'язані стани — додаткові полюси.

і (7.10) існує дві відмінності. Перша полягає в тому, що (7.9) містить константу перенормування напруженості поля $Z = |\langle\lambda_0|\phi(0)|\Omega\rangle|^2$, яка є ймовірністю того, що $\phi(0)$ утворить даний стан з вакууму. У (7.10) цей множник присутній неявно, оскільки для вільної теорії $\langle p|\phi(0)|0\rangle = 1$. Друга відмінність викликана наявністю в (7.9) внесків від багаточасткових проміжних станів з безперервним спектром мас. У вільній теорії оператор $\phi(0)$ може утворити з вакууму лише одночастковий стан. З урахуванням цих двох відмінностей (7.9) є безпосереднім узагальненням (7.10).

При подальшому аналізі буде істотним, що внески в (7.9) від одночасткових і багаточасткових проміжних станів можна розрізняти по силі відповідних їм синґулярностей. Полюси у площині p^2 виникають винятково через одночасткові стани, а багаточастковим відповідають розрізи — слабші синґулярності. У наступному параґрафі ми побачимо, як ця доволі формальна обставина поширюється на випадок багатоточкових кореляційних функцій і відіграє вирішальну роль при виведенні діаґрамної формули для елементів S-матриці.

Проведений у цьому параґрафі аналіз безпосередньо узагальнюється для двоточкових функцій полів з ненульовим спіном. Найбільше ускладнення виникає при адаптації (7.4), оскільки тепер поле нетривіально перетворюється під дією бустів. Власне, щоб описати багаточасткові стани, потрібно кілька інваріантних спектральних функцій. Проте це жодним чином не впливає на остаточний висновок, що полюси у площині p^2 можуть з'явитися лише від внеску одночасткових станів, утворених оператором поля. До прикладу, двоточкова функція діракових полів має

структуру:

$$\int d^4x\, e^{ip\cdot x}\, \langle\Omega|\, T\psi(x)\bar{\psi}(0)|\Omega\rangle = \frac{iZ_2 \sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \cdots = \\ = \frac{iZ_2(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \cdots, \tag{7.11}$$

де подальші члени дають розріз, що відповідає багаточастковим станам. Як і для скалярного поля, константа Z_2 є ймовірністю того, що оператор квантового поля утворить або знищить одночастковий власний стан H:

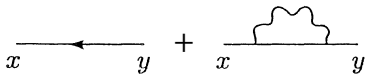
$$\langle\Omega|\psi(0)|p, s\rangle = \sqrt{Z_2}\, u^s(p). \tag{7.12}$$

(Для античастки слід замінити v на $\bar{v}$.) Таким чином, діракова двоточкова функція з точністю до масштабного множника Z_2 збігається з відповідною функцією для вільного діракового поля з фізичною масою.

Приклад: власна енерґія електрона

Такий непертурбативний аналіз двоточкової кореляційної функції радикально відрізняється від уже звичного нам безпосереднього вивчення фейнманових діаґрам. Одержавши висновок про синґулярну структуру функції в найзагальнішому вигляді, ми маємо всі підстави сподіватися, що її буде виявлено і при обчисленні діаґрам. У решті цього параґрафу ми безпосередньо перевіримо це на прикладі двоточкової електронної функції в КЕД.

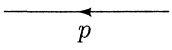
Ця функція є сумою діаґрам

$\langle\Omega|\, T\psi(x)\bar{\psi}(y)|\Omega\rangle =$ 

$+ \cdots$ (7.13)

Відповідно до фейнманових правил для кореляційних функцій, кожна з цих діаґрам містить множник $e^{-ip\cdot(x-y)}$ для двох зовнішніх точок та інтеґрування $\int(d^4p/(2\pi)^4)$ по імпульсу p, що переноситься початковим та кінцевим пропаґаторами. До кінця поточного параґрафу ми відкидатимемо ці множники — інакше кажучи, кожна діаґрама позначатиме відповідний член у фур'є-перетворенні двоточкової функції.

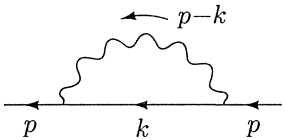
Перша з них є просто пропаґатором вільного поля:



$$= \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon}. \tag{7.14}$$

При обчисленнях позначатимемо масу в електронному пропаґаторі через m_0, щоб явно підкреслити встановлений вище факт, що маса, яка фіґурує в лаґранжіані, відрізняється від спостережної енерґії спокою частки. Проте, якщо справедлива теорія збурень, вираз для пропаґатора в головному порядку має апроксимувати точний вираз. І справді, функція (7.14) має при $p^2 = m_0^2$ полюс вигляду (7.11). Тому природно сподіватися, що остаточний вираз для двоточкової функції має полюс такого ж вигляду, але його розташування трохи зсунуте: $m^2 = m_0^2 + \mathcal{O}(\alpha)$.

Друга діаґрама в (7.13), що має назву *власної енерґії електрона*, складніша:



$$= \frac{i(\not p + m_0)}{p^2 - m_0^2}\left[-i\Sigma_2(p)\right]\frac{i(\not p + m_0)}{p^2 - m_0^2}, \qquad (7.15)$$

де

$$-i\Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\gamma^\mu\,\frac{i(\not k + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon}\,\gamma_\mu\,\frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \qquad (7.16)$$

(Позначення Σ_2 вказує, що це внесок другого порядку за e у величину Σ, яку ми визначимо нижче.) Інтеґрал Σ_2 має інфрачервону розбіжність, яку можна реґуляризувати шляхом запровадження малої маси фотона μ. Крім цього інтеґрала, діаґрама, вочевидь, має подвійний полюс при $p^2 = m_0^2$. Загалом, уся поправка виглядає не надто приємно. Проте спробуємо обчислити $\Sigma_2(p)$, застосувавши техніку, розроблену при обчисленні вершинної поправки в § 6.3.

Насамперед запровадимо фейнманів параметр і об'єднаємо два знаменники в один:

$$\frac{1}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon}\,\frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} =$$
$$= \int_0^1 dx\,\frac{1}{\left[k^2 - 2xk\cdot p + xp^2 - x\mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\varepsilon\right]^2}.$$

Потім виокремимо повний квадрат і здійснимо заміну $\ell \equiv k - xp$. Відкинувши в чисельнику лінійний за ℓ доданок, маємо

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\,\frac{-2x\not p + 4m_0}{\left[\ell^2 - \Delta + i\varepsilon\right]^2}, \qquad (7.17)$$

де $\Delta = -x(1-x)p^2 + x\mu^2 + (1-x)m_0^2$. Інтеґрал по ℓ розбігається, тому спершу реґуляризуємо його за процедурою Паулі – Вілларса (6.51):

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \to \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon}.$$

Другий доданок дає вираз аналоґічний (7.17), лише із заміною μ на Λ. Як і в § 6.3, здійснимо віків поворот і перейдемо до евклідової змінної $\ell_E^0 = -i\ell^0$. В кінцевому підсумку,

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{[\ell^2-\Delta]^2} &\to \frac{i}{(4\pi)^2}\int\limits_0^\infty d\ell_E^2\left(\frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2-\Delta]^2} - \frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2-\Delta_\Lambda]^2}\right) = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2}\log\left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right),\end{aligned} \tag{7.18}$$

де

$$\Delta = -x(1-x)p^2 + x\Lambda^2 + (1-x)m_0^2 \xrightarrow[\Lambda\to\infty]{} x\Lambda^2$$

Остаточний результат:

$$\Sigma_2(p) = \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^1 dx\,(2m_0 - x\not{p})\log\left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2}\right). \tag{7.19}$$

Перед розглядом розбіжностей у цьому виразі вивчимо його аналітичну поведінку, як функції p^2. Лоґарифм у (7.19) має розріз у комплексній площині, коли його арґумент від'ємний. Для будь-якого фіксованого x це має місце при досить великих p^2. А точніше, розріз починається там, де

$$(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння відносно x, одержимо

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \sqrt{\frac{(p^2+m_0^2-\mu^2)^2}{4p^4} - \frac{m_0^2}{p^2}} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \frac{1}{2p^2}\sqrt{\left[p^2-(m_0+\mu)^2\right]\left[p^2-(m_0-\mu)^2\right]}.\end{aligned} \tag{7.20}$$

Розріз функції $\Sigma_2(p^2)$ починається при мінімальному значенні p^2, за якого в цього рівняння є дійсні рішення для x на відрізку між 0 і 1. Це відбувається при $p^2 = (m_0+\mu)^2$, тобто, коли досягнуто порогу народження

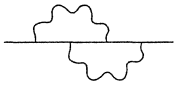
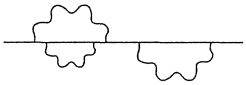
двочасткового (електрон і фотон) стану. Насправді неважко показати, що квадратний корінь у (7.20), переписаний у вигляді

$$k = \frac{1}{2\sqrt{q^2}}\sqrt{\left[p^2 - (m_0 + \mu)^2\right]\left[p^2 - (m_0 - \mu)^2\right]},$$

є імпульсом у системі центру мас двох часток з масами m_0 і μ та енерґією $\sqrt{q^2}$. Зрозуміло, що цей імпульс стає дійсним за порогом народження двочасткового стану. Розріз розташовано в цілковитій відповідності з формулою Челлена – Лемана.[37]

Ми визначили розташування двочасткового розрізу, передбаченого формулою Челлена – Лемана, але ще не знайшли простого полюса в точці $p^2 = m_0^2$. Для цього насправді треба врахувати нескінченний ряд фейнманових діаґрам, який, на щастя, легко підсумувати.

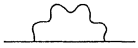
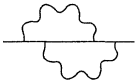
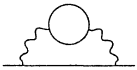
Визначимо *одночастково неприводну* (1ЧН) діаґраму, як таку, що її не можна розділити на дві шляхом видалення однієї лінії:

 є 1ЧН, тоді як  ні.

Нехай $-i\Sigma(p)$ позначає суму всіх 1ЧН діаґрам з двома зовнішніми ферміонними лініями:

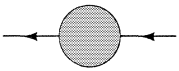
$i\Sigma(p) =$

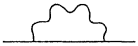
$=$

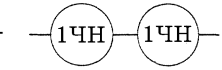
$=$  $+$  $+$  $+ \cdots$ (7.21)

(При цьому не включатимемо до $\Sigma(p)$ пропаґатори, що відповідають цим зовнішнім лініям.) У провідному порядку за α ми бачимо, що $\Sigma = \Sigma_2$.

Тепер перепишемо фур'є-перетворення двоточкової функції, як

$\int d^4x\, \langle\Omega|\, T\psi(x)\bar{\psi}(0)|\Omega\rangle\, e^{ip\cdot x} =$  $=$

$=$  $+$

$+$ 

$+ \cdots =$ (7.22)

$$= \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} + \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2}\left(-i\Sigma\right)\frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} + \cdots$$

[37] У реальній КЕД $\mu = 0$, і розріз збігається з одночастковим полюсом. Ця обставина відіграє роль при детальному дослідженні інфрачервоних розбіжностей, але її розгляд виходить за межі нашого аналізу.

Перша діаґрама має при $p^2 = m_0^2$ простий полюс, кожна з діаґрам другого типу — подвійний, а кожна третього типу — потрійний. З урахуванням діаґрам подальших типів, поведінка при $p^2 = m_0^2$ стає чимраз гіршою, та на щастя, сума всіх діаґрам утворює ґеометричну проґресію. Зазначимо, що $\Sigma(p)$ комутує з $\not{p}$, бо $\Sigma(p)$ залежить лише від $\not{p}$ та числових коефіцієнтів. Фактично, якщо записати $p^2 = (\not{p})^2$, то $\Sigma(p)$ можна розглядати, як функцію $\not{p}$. Отже, кожен електронний пропаґатор можемо переписати, як $i/(\not{p} - m_0)$, а відтак підсумувати ряд:

$$\int d^4x \, \langle\Omega| \, T\psi(x)\bar{\psi}(0)|\Omega\rangle \, e^{ip\cdot x} =$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0}\left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0}\right) + \frac{i}{\not{p} - m_0}\left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0}\right)^2 + \cdots = \tag{7.23}$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})}.$$

Точний пропаґатор має простий полюс, зсунутий від точки m_0 на величину $\Sigma(\not{p})$.

Розташування цього полюса є фізичною масою m і визначається рішенням рівняння

$$\left[\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})\right]_{\not{p}=m} = 0. \tag{7.24}$$

Якщо $\Sigma(\not{p})$ визначена умовою (7.21), то позитивний внесок у Σ забезпечує збільшення маси електрона. Поблизу полюса знаменник (7.23) має вигляд

$$\left(\not{p} - m\right) \cdot \left(1 - \left.\frac{d\Sigma}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m}\right) + O\left((\not{p} - m)^2\right). \tag{7.25}$$

Таким чином, точний електронний пропаґатор має одночастковий полюс вигляду (7.11), де m визначається з (7.24), а

$$Z_2^{-1} = 1 - \left.\frac{d\Sigma}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m} \tag{7.26}$$

Явне обчислення Σ_2 дозволяє знайти перші поправки до m і Z_2. Почнемо m. У першому порядку за α зсув маси є

$$\delta m = m - m_0 = \Sigma_2(\not{p} = m) \approx \Sigma_2(\not{p} = m_0). \tag{7.27}$$

А отже, застосувавши (7.19),

$$\delta m = \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_0^1 dx \, (2 - x) \log\left(\frac{x\Lambda^2}{(1 - x)^2 m_0^2 + x\mu^2}\right). \tag{7.28}$$

Зсув маси містить ультрафіолетову розбіжність. Розбіжний член має вигляд

$$\delta m \xrightarrow[\Lambda\to\infty]{} \frac{3}{4\pi} m_0 \log\left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2}\right). \tag{7.29}$$

Чи є насправді проблемою розбіжна величина в різниці між m і m_0? Це питання має два рівні, концептуальний та практичний.

На концептуальному рівні слід очікувати, що маса електрона буде змінюватися за рахунок взаємодії з електромаґнітним полем. У класичній електродинаміці до енерґії спокою будь-якої зарядженої частки додається енерґія електростатичного поля, яке вона утворює. Якщо частка точкова, цей внесок є розбіжним:

$$\int d^3r\, \tfrac{1}{2}|\mathbf{E}|^2 = \int d^3r\, \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4\pi r}\right)^2 = \frac{\alpha}{2}\int \frac{dr}{r^2} \sim \alpha\Lambda. \tag{7.30}$$

Насправді не зовсім зрозуміло, чому розбіжність у (7.29) така слабка — лоґарифмічна за Λ замість лінійної, як у (7.30). Для з'ясування причини розглянемо межу $m_0 \to 0$. Тоді в гамільтоніані КЕД два спіральні компоненти електронного поля ψ_L і ψ_R не взаємодіятимуть між собою. Звідси випливає, що поправки теорії збурень жодним чином не можуть призвести ні до взаємодії ψ_L з ψ_R, ні, зокрема, до появи масового члена. Інакше кажучи, δm має обертатися на нуль при $m_0 = 0$. Отже, зсув маси має бути пропорційним m_0, і з міркувань розмірності ясно, що залежність від Λ може бути лише лоґарифмічною за Λ.

На практичному рівні, поява нескінченностей не викликає довіри до наших пертурбативних обчислень. Наприклад, усі теоретичні результати Розділу 5 містять m_0, а не m. Для порівняння теорії з експериментом слід замінити m_0 на m зі співвідношення $m_0 = m + \mathcal{O}(\alpha)$. А оскільки „мала“ поправка $\mathcal{O}(\alpha)$ насправді нескінченна, то обґрунтованість процедури викликає серйозні сумніви. Придатність теорії була б очевиднішою, якби при обчислені фейнманових діаґрам ми користувалися замість $\dfrac{i}{(\not{p} - m_0)}$ пропаґатором $\dfrac{i}{(\not{p} - m)}$, полюс якого розташовано правильно. У Розділі 10 ми покажемо, як переґрупувати пертурбативний ряд, щоб m_0 замінилася на m, і пропаґатор у нульовому порядку мав би полюс, що відповідає фізичній масі. А надалі в цьому розділі ми просто будемо замінювати m_0 на m у поправках $\mathcal{O}(\alpha)$.

Нарешті, знайдемо поправку до Z_2. З (7.26) маємо, що поправка поряд-

ку α до $\delta Z_2 = (Z_2 - 1)$ є

$$\delta Z_2 = \left.\frac{d\Sigma}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m} = \\ = \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^1 dx\left[-x\log\frac{x\Lambda^2}{(1-x)^2m^2+x\mu^2} + \frac{2x(2-x)(1-x)m^2}{(1-x)^2m^2+x\mu^2}\right]. \tag{7.31}$$

Цей вираз, знов-таки, логарифмічно розбігається в ультрафіолетовій межі. Спостережність розбіжного члена ми обговоримо наприкінці § 7.2, проте вже зараз звернімо увагу на ту цікаву обставину, що (7.31) на вигляд дуже схожа на взятий майже навмання доданок, який ми використали для фіксації форм-фактора в § 6.3. Відповідно до (6.56), цей доданок є

$$\delta F_1(0) = \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\times \\ \times\left[\log\frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2} + \frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2}\right] = \\ = \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^1 dz\,(1-z)\left[\log\frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2} + \frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2}\right]. \tag{7.32}$$

Інтеґруючи по частинах, маємо

$$\int\limits_0^1 dz\,(1-2z)\log\frac{\Lambda^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2} = -\int\limits_0^1 dz\,z(1-z)\,\frac{2(1-z)m^2-\mu^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2} = \\ = -\int\limits_0^1 dz\left[(1-z) - \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2}\right].$$

Неважко показати, що $\delta F_1(0) + \delta Z_2 = 0$. Ця тотожність відіграє вирішальну роль при обґрунтуванні *ad hoc* процедури (6.55).

§ 7.2. Редукційна формула ЛСЦ

У попередньому параґрафі ми бачили, що фур'є-перетворення двоточкової кореляційної функції, представленої як аналітична функція від p^2, має простий полюс, що відповідає масі одночасткового стану:

$$\int d^4x\; e^{ip\cdot x}\,\langle\Omega|\,T\phi(x)\phi(0)|\Omega\rangle \underset{p^2\to m^2}{\sim} \frac{iZ}{p^2-m^2+i\varepsilon}. \tag{7.33}$$

(Тут і далі символ $\sim$ означатиме, що обидві частини мають однакові полюси. Існують і додаткові скінченні члени, які в даному випадку визначаються виразом (7.9).) У поточному параґрафі ми узагальнимо цей результат для кореляційних функцій вищого порядку. Ми виведемо формулу, що пов'язує кореляційні функції та елементи S-матриці. Це формула була вперше отримана Леманом, Симанзіком та Цімерманом і одержала назву *редукційної формули ЛСЦ*.[38] Цей результат, разом з фейнмановими правилами обчислення кореляційних функцій, дозволить обґрунтувати основну формулу (4.103), для елементів S-матриці через фейнманові діаґрами. З міркувань простоти проведемо всі викладки для скалярних полів.

Стратегія виведення формули така. Для обчислення елемента S-матриці для процесу 2 *частки* $\to n$ *часток*, почнемо з кореляційної функції $n+2$ гайзенберґових полів. Здійснивши фур'є-перетворення за координатою будь-якого з цих полів, одержимо полюс типу (7.33) у площині фур'є-перетворення p^2. Ми покажемо, що одночасткові стані, які відповідають цим полюсам, насправді є асимптотичними станами, що з'являються в наближенні добре локалізованих хвильових пакетів з визначеними імпульсами. Перейшовши до межі, коли всі $n + 2$ частки перебувають на масовій поверхні, можна вважати коефіцієнт при багатократному полюсі елементом S-матриці.

Передовсім, проведемо фур'є-перетворення $(n + 2)$-точкової кореляційної функції за одним арґументом x. Треба проаналізувати інтеґрал

$$\int d^4x\ e^{ip\cdot x}\,\langle\Omega|\,T\{\phi(x)\phi(z_1)\phi(z_2)\cdots\}|\Omega\rangle.$$

Було б бажано виокремити полюси за змінною p^0. Для цього розіб'ємо інтеґрал по x^0 на три інтервали:

$$\int dx^0 = \int_{\tau_+}^{\infty} dx^0 + \int_{\tau_-}^{\tau_+} dx^0 + \int_{-\infty}^{\tau_-} dx^0, \tag{7.34}$$

де τ_+ набагато більша, а τ_- набагато менша, ніж усі z_i^0. Назвемо ці інтервали I, II і III. Позаяк інтервал II є обмеженим і підінтеґральний вираз залежить від p^0 через аналітичну функцію $\exp(ip^0x^0)$, внесок від цього інтервалу також буде аналітичним за змінною p^0. Інтервали ж I і III є необмеженими і можуть містити синґулярності за p^0.

Спершу розглянемо інтервал I. Тут x^0 — найпізніший момент часу, і $\phi(0)$ стоїть першим у хронолоґічному добутку. Вставимо повний набір

[38] H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* 1, 1425 (1955).

проміжних станів у вигляді (7.2):

$$\mathbf{1} = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} |\lambda_{\mathbf{q}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{q}}|.$$

Таким чином, інтеґрал по інтервалу I є

$$\int\limits_{\tau_+}^{\infty} dx^0 \int d^3\mathbf{x}\, e^{ip^0x^0}\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} \times \\ \times \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\mathbf{q}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{q}}|\, T\{\phi(z_1)\phi(z_2)\cdots\}|\Omega\rangle. \tag{7.35}$$

Використавши (7.4),

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\mathbf{q}}\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle\, e^{-iq\cdot x}\big|_{q^0=E_{\mathbf{q}}(\lambda)},$$

і вставивши множник $e^{-\varepsilon x^0}$, щоб інтеґрал був добре визначеним, отримаємо

$$\sum_{\lambda} \int\limits_{\tau_+}^{\infty} dx^0 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)}\, e^{ip^0x^0}\, e^{-iq^0x^0}\, e^{-\varepsilon x^0} \times \\ \times \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle\, (2\pi)^3\, \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\, \langle\lambda_{\mathbf{q}}|\, T\{\phi(z_1)\phi(z_2)\cdots\}|\Omega\rangle = \\ = \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} \frac{ie^{i(p^0-E_{\mathbf{p}}+i\varepsilon)\tau_+}}{p^0 - E_{\mathbf{p}}(\lambda) + i\varepsilon} \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle\langle\lambda_{\mathbf{q}}|\, T\{\phi(z_1)\phi(z_2)\cdots\}|\Omega\rangle. \tag{7.36}$$

Знаменник цього виразу такий самий, як і в (7.5): $p^2 - m_\lambda^2$. Отже, має місце аналітична синґулярність за змінною p^0. Як і в § 7.1, вона може бути полюсом або розрізом, залежно від того, чи ізольована енерґія спокою m_λ. Одночастковий стан відповідає ізольованому значенню енерґії $p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 - m^2}$, і в цій точці (7.36) має полюс:

$$\int d^4x\; e^{ip\cdot x}\, \langle\Omega|\, T\{\phi(x)\phi(z_1)\cdots\}|\Omega\rangle \underset{p^0\to+E_{\mathbf{p}}}{\sim} \\ \underset{p^0\to+E_{\mathbf{p}}}{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z}\, \langle\mathbf{p}|\, T\{\phi(z_1)\cdots\}|\Omega\rangle. \tag{7.37}$$

Множник $\sqrt{Z}$ є та сама константа перенормування напруженості поля, що присутня в (7.8), оскільки вона замінює такий самий матричний елемент, як у (7.7).

Для обчислення внеску від III, поставимо оператор $\phi(x)$ останнім у хронологічному добутку і вставимо повний набір станів між $T\{\phi(z_1)\cdots\}$ і $\phi(x)$. Повторивши викладки, бачимо, що при $p^0 \to -E_{\mathbf{p}}$ знову має місце полюс:

$$\int d^4x\; e^{ip\cdot x}\,\langle\Omega|\,T\{\phi(x)\phi(z_1)\cdots\}|\Omega\rangle \underset{p^0\to -E_{\mathbf{p}}}{\sim} \underset{p^0\to -E_{\mathbf{p}}}{\sim} \langle\Omega|\,T\{\phi(z_1)\cdots\}|-\mathbf{p}\rangle\sqrt{Z}\,\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}. \tag{7.38}$$

Тепер здійснимо фур'є-перетворення відносно до решти координат полів. Проте, щоб уникнути інтерференції між зовнішніми частками, треба ізолювати їх одна від одної у просторі. Для цього повторимо попередні обчислення, використавши не звичайне фур'є-перетворення, а хвильовий пакет. У (7.35) зробимо заміну

$$\int d^4x\, e^{ip^0x^0}\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \to \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\int d^4x\, e^{ip^0x^0}\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{k}), \tag{7.39}$$

де $\varphi(\mathbf{k})$ — деякий вузький розподіл, локалізований поблизу $\mathbf{k} = \mathbf{p}$. Завдяки йому x буде обмежено ділянкою з характерним розміром хвильового пакета, яка оточуватиме траєкторію частки з імпульсом $\mathbf{p}$. З урахуванням цієї зміни права частина (7.36) має складнішу синґулярну структуру:

$$\sum_\lambda \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{\varphi(\mathbf{k})}{2E_{\mathbf{k}}(\lambda)}\,\frac{i}{p^0-E_{\mathbf{k}}(\lambda)+i\varepsilon}\,\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle\langle\lambda_{\mathbf{k}}|\,T\{\phi(z_1)\cdots\}|\Omega\rangle \underset{p^0\to +E_{\mathbf{p}}}{\sim} \underset{p^0\to +E_{\mathbf{p}}}{\sim} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\varphi(\mathbf{k})\,\frac{i}{\widetilde{p}^0-m^2+i\varepsilon}\,\sqrt{Z}\,\langle\mathbf{k}|\,T\{\phi(z_1)\cdots\}|\Omega\rangle. \tag{7.40}$$

де в другому рядку $\widetilde{p} = (p^0, \mathbf{p})$. Тепер одночасткова синґулярність перетворилася на розріз, довжина якого має порядок ширини хвильового пакета $\varphi(\mathbf{k})$ в імпульсному просторі. Проте, якщо $\varphi(\mathbf{k})$ є дуже вузький, розріз також дуже короткий, тоді (7.40) має добре визначену межу при $\varphi(\mathbf{k}) \to (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})$, і синґулярність (7.40) прагне до полюса (7.36). Синґулярність (7.38), пов'язана з одночастковими станами в далекому минулому, змінюється таким самим чином.

Далі розглянемо інтеґрування по кожній координаті полів $(n+2)$-точкової кореляційної функції з відповідною вагою хвильового пакета:[39]

$$\left(\prod_i \int \frac{d^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3}\int d^4x_i\, e^{i\widetilde{p}_i\cdot x_i}\varphi_i(\mathbf{k}_i)\right)\langle\Omega|\,T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\}|\Omega\rangle. \tag{7.41}$$

[39] Як і в § 4.5, знак добутку відноситься як до інтеґрувань, так і до множників у дужках. Інтеґрування по x_i стосується всього виразу цілком.

Хвильові пакети оберемо так, щоб вони перекривалися поблизу $x = 0$ і розділялися в далекому минулому та в далекому майбутньому. Для аналізу інтеґрала оберемо велике позитивне значення часу τ_+, щоб усі хвильові пакети були відокремлені один від одного при $x > \tau_+$, а також велике неґативне значення часу τ_-, щоб вони були розділені при $x_i^0 < \tau_-$. Відтак кожен з інтеґралів по x_i^0 розіб'ємо на три інтервали, як зробили це в (7.34). Будь-який з інтеґралів по x_i^0 на інтервалі II є аналітичним за значенням відповідної енерґії p_i^0, тому знову треба зосередитися на інтервалах, де всі x_i^0 лежать у далекому минулому або майбутньому.

Для визначеності розглянемо випадок, коли лише дві координати, x_1^0 та x_2^0, лежать у майбутньому. Тоді поля $\phi(x_1)$ і $\phi(x_2)$ у хронолоґічному добутку стоятимуть ліворуч від решти. Вставивши повний набір станів $|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle$, знайдемо, що інтеґрали по координатах у (7.41) набувають вигляду

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{K}}} \left(\prod_{i=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i \, e^{i\tilde{p}_i \cdot x_i} \varphi_i(\mathbf{k}_i) \right) \times$$
$$\times \langle\Omega| \, T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} |\lambda_{\mathbf{K}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{K}}| \, T\{\phi(x_3) \cdots |\Omega\rangle.$$

Стан $|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle$ знищується двома польовими операторами. Отже, він має складатися з двох різних збуджень вакууму, що перебувають у різних точках. Якщо ці збудження досить віддалені одне від одного, вони є незалежними, тому можна наближено записати

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{K}}} \langle\Omega| \, T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} |\lambda_{\mathbf{K}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{K}}| =$$
$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_1}} \int \frac{d^3\mathbf{q}_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_2}} \langle\Omega|\phi(x_1)|\lambda_{\mathbf{q}_1}\rangle\langle\Omega|\phi(x_2)|\lambda_{\mathbf{q}_2}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{q}_1} \lambda_{\mathbf{q}_2}|.$$

Сума за λ_1 і λ_2 в цьому виразі проводиться за всіма станами з нульовим імпульсом, але внесок у потрібні нам полюси дають лише одночасткові стани. Інтеґрали по x_1^0 і $\mathbf{q}_1$ призводять до синґулярності за змінною p_1^0 типу (7.40), а інтеґрали по x_2^0 і $\mathbf{q}_2$ — до аналітичної синґулярності за p_2^0. Член у (7.41), що містить обидві синґулярності, має вигляд

$$\left(\prod_{i=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \varphi_i(\mathbf{k}_i) \frac{i}{\tilde{p}_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \cdot \sqrt{Z} \right) \langle\mathbf{k}_1 \, \mathbf{k}_2| \, T\{\phi(x_3) \cdots\} |\Omega\rangle.$$

У межі, коли хвильові пакети перетворюються на дельта-функції, лока-

лізовані на визначених імпульсах $\mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$, цей вираз переходить у

$$\left(\prod_{i=1,2} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \cdot \sqrt{Z}\right)_{\text{out}} \langle \mathbf{p}_1\, \mathbf{p}_2 | \, T\{\phi(x_3) \cdots\} | \Omega \rangle.$$

Стан $\langle \mathbf{p}_1\, \mathbf{p}_2 |$ є достоту асимптотичний кінцевий *out*-стан (див. § 4.5), оскільки він є межею з добре визначеними імпульсами, одержаними зі стану, утвореного добре розділеними хвильовими пакетами. Застосування аналоґічних міркувань до часів x_i^0, що відповідають далекому минулому, засвідчує, що коефіцієнт при найсинґулярнішому члені, що відповідає p_i^0, є матричним елементом між вакуумом та асимптотичним початковим *in*-станом. Таким чином, найсинґулярніший член у (7.41) має вигляд

$$\left(\prod_{i=1,2} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \cdot \sqrt{Z}\right)\left(\prod_{i=3,\ldots} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \cdot \sqrt{Z}\right)_{\text{out}} \langle \mathbf{p}_1\, \mathbf{p}_2 | - \mathbf{p}_3 \cdots \rangle_{\text{in}}.$$

Останній множник якраз і є елементом S-матриці.

Отже, ми показали, що можемо одержати елемент S-матриці, розглядаючи відповідне вакуумне середнє за хвильовими пакетами полів шляхом виокремлення головних синґулярностей за енерґіями p_i^0 і наступного переходу до межі, в якій ці пакети обертаються на дельта-функції від імпульсів. Проте обчислення можна спростити, провівши його в зворотному порядку — спершу перейти від хвильових пакетів до дельта-функцій, повернувшись до звичайного фур'є перетворення, а вже потім виокремити синґулярність. Остаточний результат для головної синґулярності не залежатиме від порядку виконання цих операцій, хоча доведення цього факту є досить тонкою справою. А схематично можна пояснити, що нові синґулярності можуть виникнути за умови, якщо x_1 та x_2 у фур'є-перетворенні стають у далекому майбутньому близькими одне до одного. Однак у цьому асимптотичному реґіоні експонента набуває вигляду $\exp[i(p_1+p_2)\cdot x_1]$, тому нові синґулярності мають бути простими полюсами у площині (p_1+p_2), а не добутком полюсів по p_1^0 і p_2^0 окремо. Строгіше пояснення (на жаль, викладене в зовсім інших математичних термінах) можна знайти в ориґінальній роботі Лемана, Симанзіка й Цімермана.

Взявши до уваги можливість зміни порядку операцій, ми можемо знайти точне співвідношення між фур'є-перетвореннями кореляційних функцій та елементами S-матриці. Це і є редукційна формула Лемана–

Симанзіка – Цімермана (ЛСЦ):

$$\prod_{i=1}^{n}\int d^4x_i e^{ip_i\cdot x_i}\prod_{j=1}^{m}\int d^4y_j\, e^{ik_j\cdot y_j}\langle 0|T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi(y_1)\cdots\phi(y_m)\}|0\rangle \sim$$

$$\underset{\substack{\text{кожен } p_i^0\to+E_{\mathbf{p}_i}\\ \text{кожен } q_j^0\to+E_{\mathbf{q}_j}}}{\sim}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{Z}\,i}{p_i^2-m^2+i\varepsilon}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{\sqrt{Z}\,i}{k_j^2-m^2+i\varepsilon}\right)\langle\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_n|\,S|\mathbf{k}_1\cdots\mathbf{k}_m\rangle. \tag{7.42}$$

Величина Z, що з'явилась у цьому виразі, точно збігається з константою перенормування напруженості поля, яку ми визначили в § 7.1, як лишок в одночастковому полюсі двоточкової функції полів. Кожній частці відповідає свій фактор Z, що отримується з відповідної двоточкової функції. Для полів з вищими спінами кожен множник $\sqrt{Z}$ входить разом з поляризаційними множниками типу $u^s(p)$, як у (7.12). У другому рядку (7.42) треба взяти суму за поляризаціями s.

Формула ЛСЦ дає такий рецепт знаходження елемента S-матриці. Треба обчислити фур'є-перетворення відповідної кореляційної функції, розглянути ділянку в імпульсному просторі, де імпульси зовнішніх часток лежать поблизу масової поверхні, і знайти коефіцієнт при багаточастковому полюсі. Для полів зі спіном ще слід помножити на поляризаційний спінор $u^s(p)$ (для ферміонів) або вектор $\varepsilon^r(k)$ (для бозонів), щоб спроектувати на потрібний спіновий стан.

Наша наступна задача полягає в тому, щоб описати цю процедуру мовою фейнманових діаґрам. Аналізуватимемо зв'язок між діаґрамними розкладеннями чотириточкової функції скалярного поля та елементом S-матриці процесу 2 *частки* → 2 *частки*. Розглядатимемо лише цілком зв'язні діаґрами, що дають внесок у корелятор. Легко показати, що незв'язними діаґрамами можна знехтувати, бо вони не мають синґулярної структури у вигляді добутку чотирьох полюсів, як у (7.42).

Точна чотириточкова функція

$$\left(\prod_{i=1}^{2}\int d^4x_i\, e^{ip_i\cdot x_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{2}\int d^4y_j\, e^{ik_j\cdot y_j}\right)\langle 0|\,T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2)|0\rangle.$$

має загальну структуру, зображену на Рис. 7.4. На ній явно показані діаґрамні поправки до кожної зовнішньої лінії. Коло в центрі представляє суму всіх ампутованих чотириточкових діаґрам.

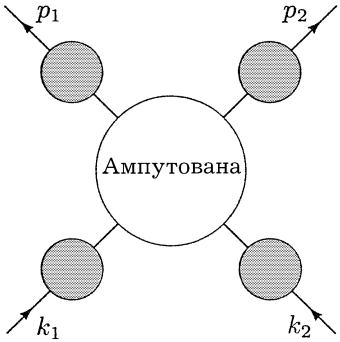
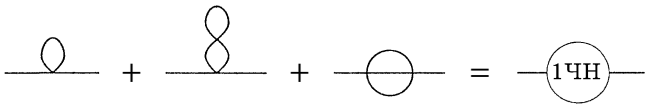
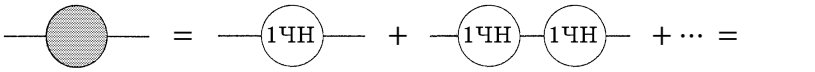


Рис. 7.4. Структура чотириточкової кореляційної функції у скалярній теорії поля.

Ми можемо підсумувати поправки до кожної зовнішньої лінії так само, як це робили при знаходженні точного електронного пропаґатора в попередньому параґрафі. Нехай $-iM^2(p^2)$ позначає суму одночастково непривідних (1ЧН) вставлень у пропаґатор скалярного поля:

$-iM^2(p^2) =$ 

Отже, точний пропаґатор можна записати у вигляді ґеометричної проґресії і взяти його суму, як у (7.23):



$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2}\,(-iM^2)\,\frac{i}{p^2 - m_0^2} + \cdots = \tag{7.43}$$
$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)}.$$

Зазначимо, що як і у випадку електронного пропаґатора, з домовленості про знаки при $M^2(p^2)$ випливає, що позитивний внесок у $M^2(p^2)$ відповідає збільшенню фізичної маси скалярної частки. Розклавши кожен підсумований пропаґатор поблизу фізичного полюса, ми можемо побачити, що кожна зовнішня лінія чотириточкової амплітуди дає внесок

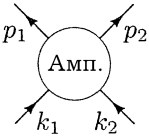
$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)} \underset{p^0 \to E_{\mathbf{p}}}{\sim} \frac{iZ}{p^2 - m^2} + (\text{реґулярна частина}). \tag{7.44}$$

Таким чином, сума діаґрам містить добуток чотирьох полюсів:

$$\frac{iZ}{p_1^2 - m^2}\,\frac{iZ}{p_2^2 - m^2}\,\frac{iZ}{k_1^2 - m^2}\,\frac{iZ}{k_2^2 - m^2}.$$

Це така сама синґулярність, як і в другому рядку (7.42). Порівнюючи коефіцієнти при добутках полюсів, одержимо співвідношення

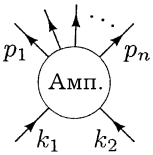
$$\langle \mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2|\,S\,|\mathbf{k}_1\,\mathbf{k}_2\rangle = \left(\sqrt{Z}\right)^4$$



де коло позначає суму ампутованих чотириточкових діаґрам, а Z — константу перенормування напруженості поля.

Такі ж міркування можна застосувати і до фур'є-перетворення $(n+2)$-точкового корелятора довільної теорії поля. Загальне співвідношення між елементами S-матриці та фейнмановими діаґрамами є таким:

$$\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n|\,S\,|\mathbf{k}_1\,\mathbf{k}_2\rangle = \left(\sqrt{Z}\right)^{n+2}$$



(7.45)

(Якщо зовнішні частки належать до різних типів, то кожному з них відповідає свій множник $\sqrt{Z}$. А якщо частки мають ненульовий спін, до правої частини треба додавати поляризаційні множники на зразок $u^s(k)$.) Це майже та сама діаґрамна формула для S-матриці, що була постульована в § 4.6. Єдина її нова особливість полягає в появі константи перенормування $\sqrt{Z}$. Такі константи неістотні при розрахунках у головному порядку теорії збурень, але стають важливими при обчисленні вищих поправок.

Досі ми провели повне обчислення лише однієї вищої поправки — а саме, поправки порядку α до форм-факторів електрона. Вплив перенормування електронного поля не брався до уваги. Тепер ми врахуємо цей множник і подивимося, як він впливає на результат.

Оскільки вирази (6.28) і (6.30) для розсіяння електрона на важкій мішені було отримано з використанням старої, неправильної формули для елемента S-матриці, виправимо їх, вставивши для початкового та кінцевого електронів множники $\sqrt{Z_2}$. Вираз (6.33) для структури точної вершини набуває вигляду

$$Z_2\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\,F_2(q^2), \tag{7.46}$$

де $\Gamma^\mu(p', p)$ є сумою ампутованих вершинних електрон-фотонних діаґрам.

Ми можемо скористатися цим виразом і знову обчислити форм-фактори у першому порядку за α. Оскільки $Z_2 = 1 + \mathcal{O}(\alpha)$, а F_2 з'являється лише в першому за α порядку, наш старий результат для F_2 не змінюється. Для обчислення F_1 запишемо ліву частину (7.46) як

$$Z_2\Gamma^\mu = (1 + \delta Z - 2)(\gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu) = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu + \gamma^\mu \cdot \delta Z_2,$$

де δZ_2 і $\delta\Gamma^\mu$ позначають поправки порядку α до цих величин. Порівнюючи це з правою частиною (7.46), бачимо, що до $F_1(q^2)$ додається новий внесок, що дорівнює δZ_2. Нехай $\delta F_1(q^2)$ позначає поправку (не фіксовану) до форм-фактора, обчисленого в § 6.3. Нагадаємо, що з результатів наприкінці § 7.1 випливає тотожність $\delta Z_2 = -\delta F_1(0)$. Тоді

$$F_1(q^2) = 1 + \delta F_1(q^2) + \delta Z_2 = 1 + \left[\delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)\right].$$

Це цілком збігається з постульованим, але не доведеним виразом (6.55). Отже, врахування перенормування напруженості поля обґрунтовує процедуру фіксації, яка в § 6.3 була проведена на підставі хистких арґументів.

На цьому етапі аналізу важко збагнути, яким чином при обчисленні F_1 скорочуватимуться розбіжності у вищих порядках. Навіть гірше — хоча ми й намагалися в § 6.3 показати, що $F_1(0) = 1$ у будь-якому порядку, справедливість цього припущення у першому порядку за α видається наслідком випадкового збігу чисел.

Строга постановка задачі є такою. Визначимо другий масштабний множник Z_1 через

$$\Gamma^\mu(q = 0) = Z_1^{-1}\gamma^\mu, \tag{7.47}$$

де Γ^μ — точна ампутована вершинна функція. Для доведення рівності $F_1(0) = 1$ треба показати, що $Z_1 = Z_2$, тобто перенормування вершини точно компенсує перенормування напруженості поля. Наприкінці § 7.4 ми покажемо, що ця тотожність справедлива в будь-якому порядку теорії збурень.

Аналіз редукційної формули ЛСЦ завершимо ще одним формальним спостереженням. Початкові та кінцеві частки у цій формулі відрізняються лише знаком відповідного фур'є-перетворення імпульсу p_i^0 або k_i^0. Звідси випливає, що аналітично продовжуючи лишок полюса в точці p^2 від позитивних до неґативних p^0, можна перетворити елемент S-матриці з часткою $\phi(\mathbf{p})$ в кінцевому стані до елемента S-матриці з античасткою

$\phi^*(-\mathbf{p})$ у початковому стані. Отже, є справедливою *кросинґ-симетрія*, яку ми вивели в § 5.4 на підставі діаґрам:

$$\langle \cdots \phi(p) | \, S \, | \cdots \rangle \big|_{p=-k} = \langle \cdots | \, S \, | \phi^*(k) \cdots \rangle.$$

А оскільки доведення формули ЛСЦ не залежить від пертурбативних методів, то кросинґ-симетрія S-матриці є загальним результатом квантової теорії поля, а не просто певною властивістю фейнманових діаґрам.

§ 7.3. Оптична теорема

У § 7.1 ми побачили, що двоточкова кореляційна функція квантових полів при її розгляді, як аналітичної функції імпульсу p^2, має розрізи, що відповідають багаточастковим проміжним станам. Цей результат не став несподіванкою для тих, хто знайомий з нерелятивістською теорією розсіяння, у якій амплітуда, як функція енерґії, також має розріз уздовж позитивної дійсної осі. Уявна складова амплітуди з'являється внаслідок її розриву на цьому розрізі. Відповідно до *оптичної теореми*, уявна складова амплітуди розсіяння вперед пропорційна повному перерізові. Зараз ми доведемо польовий варіант цієї теореми і проілюструємо, як вона виникає обчисленнях фейнманових діаґрам.

Оптична теорема безпосередньо випливає з унітарності S-матриці: $S^\dagger S = 1$. Підставляючи $S = 1 + i\mathrm{T}$, як у (4.72), маємо

$$-i(\mathrm{T} - \mathrm{T}^\dagger) = \mathrm{T}^\dagger \mathrm{T}. \tag{7.48}$$

Розглянемо матричний елемент цього виразу між двочастковими станами $|\mathbf{p}_1\, \mathbf{p}_2\rangle$ і $|\mathbf{k}_1\, \mathbf{k}_2\rangle$. Для обчислення правої частини, вставимо повний набір проміжних станів:

$$\langle \mathbf{p}_1\, \mathbf{p}_2 | \, \mathrm{T}^\dagger \mathrm{T} \, | \mathbf{k}_1\, \mathbf{k}_2 \rangle = \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3\mathbf{q}_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) \langle \mathbf{p}_1\, \mathbf{p}_2 | \, \mathrm{T}^\dagger \, | \{\mathbf{q}_i\} \rangle \langle \{\mathbf{q}_i\} | \, \mathrm{T} \, | \mathbf{k}_1\, \mathbf{k}_2 \rangle.$$

Тепер представимо елементи T-матриці, як інваріантні матричні елементи $\mathcal{M}$, помножені на дельта-функції, що забезпечують збереження 4-імпульсу. Тоді тотожність (7.48) стає

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(k_1 k_2 \to p_1 p_2) = \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3\mathbf{q}_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) \times$$
$$\times\, \mathcal{M}^*(p_1 p_2 \to q_i) \mathcal{M}(k_1 k_2 \to q_i) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - \sum_i q_i),$$

помноженою на спільну дельта-функцію $(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2)$. Скорочено запишемо цю рівність як

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(a\to b)=\sum_f\int d\Pi_f\,\mathcal{M}^*(b\to f)\mathcal{M}(a\to f), \tag{7.49}$$

де сума береться за всіма можливими наборами f часток у кінцевому стані. Ця тотожність образно показана на Рис. 7.5. Дарма що досі ми вважали a і b двочастковими станами, вони так само можуть бути одночастковими або ж багаточастковими асимптотичними станами.

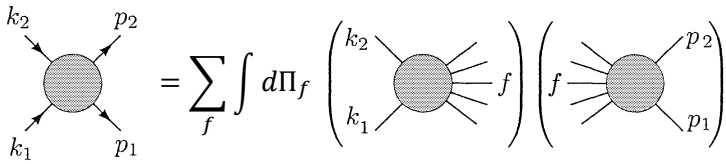


Рис. 7.5. Оптична теорема. Уявна частина амплітуди розсіяння вперед виникає за рахунок внесків усіх можливих багаточасткових проміжних станів.

Підставивши $p_i=k_i$ і додавши потрібні для формули (4.79) кінематичні множники, щоб утворити переріз розсіяння, одержимо стандартний вигляд оптичної теореми:

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(k_1,k_2\to k_1,k_2)=2E_{\text{цм}}\,p_{\text{цм}}\,\sigma_{\text{tot}}(k_1,k_2\to\text{всі}), \tag{7.50}$$

де $E_{\text{цм}}$ є повна енерґія, а $p_{\text{цм}}$ — імпульс кожної з часток у системі центру мас. Цей вираз пов'язує амплітуду розсіяння на нульовий кут з повним перерізом утворення всіх кінцевих станів. Оскільки уявна складова амплітуди розсіяння вперед визначає послаблення спрямованої вперед хвилі, коли пучок проходить крізь мішень, то цілком природно, що вона пропорційна ймовірності розсіяння. Вираз (7.50) дає точний зв'язок між ними.

Оптична теорема для фейнманових діаґрам

Тепер розглянемо, як ця тотожність для уявної складової елемента S-матриці з'являється в розкладенні за фейнмановими діаґрамами. Легко перевірити (наприклад, у КЕД), що кожна діаґрама, яка дає внесок в елемент S-матриці $\mathcal{M}$, є суто дійсна за винятком випадків, коли деякі знаменники прагнуть до нуля, і тоді стає істотним доданок $i\varepsilon$. Таким чином,

фейнманова діаґрама дає уявний внесок у $\mathcal{M}$ лише тоді, коли віртуальні частки в діаґрамі потрапляють на масову поверхню. Покажемо, як виокремити й обчислити цю уявну складову.

Для наших теперішніх цілей *визначимо* $\mathcal{M}$ за допомогою фейнманових правил для теорії збурень. Це дозволить розглядати $\mathcal{M}(\mathrm{s})$, як аналітичну функцію комплексної змінної $\mathrm{s} = E_{\text{цм}}$, навіть попри те, що елементи S-матриці визначені лише для зовнішніх часток з дійсними імпульсами.

Передовсім покажемо, що поява ненульової уявної складової $\mathcal{M}(\mathrm{s})$ завжди вимагає синґулярності типу розрізу. Нехай s_0 є пороговою енерґією утворення найлегшого багаточасткового стану. Для дійсних $\mathrm{s} < \mathrm{s}_0$ проміжний стан не може лежати на масовій поверхні, тому $\mathcal{M}(\mathrm{s})$ є дійсна, а отже, в цьому випадку маємо рівність

$$\mathcal{M}(\mathrm{s}) = \left[\mathcal{M}(\mathrm{s}^*)\right]^* \tag{7.51}$$

Обидві частини цієї рівності є аналітичними функціями s, бо її можна аналітично продовжити на всю комплексну площину s. Зокрема, поблизу дійсної осі при $\mathrm{s} > \mathrm{s}_0$ з (7.51) випливає, що

$$\operatorname{Re}\mathcal{M}(\mathrm{s} + i\varepsilon) = \operatorname{Re}\mathcal{M}(\mathrm{s} - i\varepsilon);$$
$$\operatorname{Im}\mathcal{M}(\mathrm{s} + i\varepsilon) = -\operatorname{Im}\mathcal{M}(\mathrm{s} - i\varepsilon).$$

Отже, вздовж дійсної осі існує розріз, що починається при пороговій енерґії s_0; а розрив на розрізі є

$$\operatorname{Disc}\mathcal{M}(\mathrm{s}) = 2i\operatorname{Im}\mathcal{M}(\mathrm{s} + i\varepsilon).$$

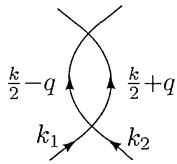
Зазвичай простіше обчислити цей розрив, а не безпосередньо уявну складову. Припис $i\varepsilon$ у фейнмановому пропаґаторі вказує, що фізичні амплітуди розсіяння треба обчислювати над розрізом при $\mathrm{s} + i\varepsilon$.

У § 7.1 ми вже бачили, що діаґрама власної енерґії електрона також має розріз, який починається на порозі утворення електрон-фотонного стану. Розглянемо загальніші однопетельні діаґрами й покажемо, що неоднорідності на розрізах дають саме такі уявні складові, яких вимагає вираз (7.49). Узагальнення цього результату на багатопетельні діаґрами було одержано Куткоським,[40] який показав, що розрив фейнманової діаґрами на розрізі визначається набором простих *правил розрізання*.[41]

[40] R. E. Cutkosky, *J. Math. Phys.* 1, 429 (1960).

[41] Ці правила мають простий вигляд лише для синґулярностей у фізичній зоні, а поза нею синґулярності трьох- і багаточасткових амплітуд стають дуже заплутаними. Цей предмет розглядається у книзі [60].

Почнемо з перевірки (7.49) для теорії ϕ^4. Оскільки права частина (7.49) з'являється в порядку λ^2, ми можемо припустити, що перший внесок у $\operatorname{Im}\mathcal{M}$ також виникає від діаґрам вищих порядків. Розглянемо, наприклад, діаґраму порядку λ^2:



$$k = k_1 + k_2$$

з петлею в s-каналі. (Легко показати, що відповідні t- і u-канальні діаґрами не мають синґуляностей типу розрізів для s вище порогу.) Повний імпульс є $k = k_1 + k_2$, і для простоти оберемо імпульси симетрично, як показано вище. Значення цієї фейнманової діаґрами є

$$i\delta\mathcal{M} = \frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(k/2-q)^2-m^2+i\varepsilon}\,\frac{1}{(k/2+q)^2-m^2+i\varepsilon}. \qquad (7.52)$$

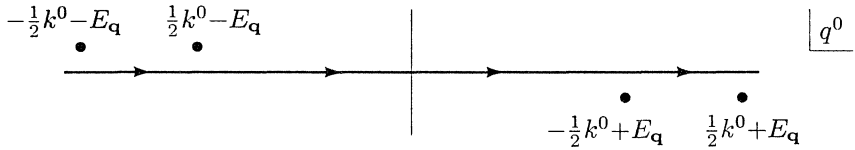
Якщо обчислювати інтеґрал методами § 6.3, то віків поворот дасть додатковий множник i, тому нижче порогу $\delta\mathcal{M}$ є суто дійсною.

Далі маємо переконатися, що інтеґрал (7.52) має розрив уздовж дійсної осі у фізичній зоні $k^0 > 2m$. Найпростіше знайти цей розрив, обчисливши інтеґрал для $k^0 < 2m$, а потім здійснивши аналітичне продовження. Вдавшись до методу фейнманових параметрів, інтеґрал узяти неважко (Задача 7.1). Проте наочніше скористатися не таким прямолінійним підходом.

Працюватимемо в системі ЦМ, у якій $k = (k^0, \mathbf{0})$. Тоді підінтеґральний вираз у (7.52) має чотири полюси для змінної інтеґрування q^0. Вони розташовані в

$$q^0 = \tfrac{1}{2}\,k^0 \pm (E_{\mathbf{q}} - i\varepsilon), \qquad q^0 = -\tfrac{1}{2}\,k^0 \pm (E_{\mathbf{q}} - i\varepsilon).$$

Два з цих полюсів лежать вище дійсної осі q^0, а два — нижче:



Замкнемо конур знизу й обчислимо лишки в полюсах у нижній півплощині. З двох полюсів лише один, $q^0 = \frac{1}{2}k^0 \pm (E_{\mathbf{q}} - i\varepsilon)$, дає внесок у розрив.

Зазначимо, що отримання лишку в цьому полюсі еквівалентно заміні

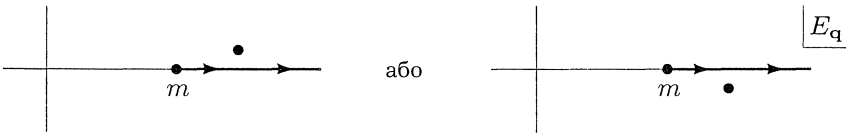
$$\frac{1}{(k/2+q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \to -2\pi i\delta\big((k/2+q)^2 - m^2\big) \tag{7.53}$$

під знаком інтеґрала по dq^0.

Внесок від цього полюса призводить до інтеґрала

$$\begin{aligned} i\delta\mathcal{M} &= -2\pi i\,\frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{q}}}\,\frac{1}{(k^0-E_{\mathbf{q}})^2 - E_{\mathbf{q}}^2} = \\ &= -2\pi i\,\frac{\lambda^2}{2}\,\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int\limits_m^\infty dE_{\mathbf{q}}\,E_{\mathbf{q}}\,|\mathbf{q}|\,\frac{1}{2E_{\mathbf{q}}}\,\frac{1}{k^0(k^0-2E_{\mathbf{q}})}. \end{aligned} \tag{7.54}$$

Підінтеґральний вираз у другому рядку має полюс при $E_{\mathbf{q}} = k^0/2$. Коли $k^0 < 2m$, він не знаходиться на контурі інтеґрування, тож $\delta\mathcal{M}$ явно є дійсною. Коли ж $k^0 > 2m$, він лежить трохи вище або трохи нижче контуру інтеґрування, залежно від того, який знак має мала уявна складова k^0:



Таким чином, інтеґрал зазнає розриву між $k^2 + i\varepsilon$ і $k^2 - i\varepsilon$. Для його обчислення скористаємося

$$\frac{1}{k^0 - 2E_{\mathbf{q}} \pm i\varepsilon} = P\,\frac{1}{k^0 - 2E_{\mathbf{q}}} \mp i\pi\delta(k^0 - 2E_{\mathbf{q}}),$$

(де P позначає головне значення). Розрив одержуємо шляхом заміни полюса на дельта-функцію, що еквівалентно заміні дельта-функцією початкового пропаґатора:

$$\frac{1}{(k/2-q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \to -2\pi i\delta\big((k/2-q)^2 - m^2\big). \tag{7.55}$$

Простежмо ще раз за всіма етапами і спробуймо збагнути, що ми довели. Повернемося до початкового інтеґрала (7.52), перепозначимо імпульси в пропаґаторах через p_1, p_2 і зробимо заміну

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} = \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k).$$

Ми показали, що розрив у інтеґралі можна обчислити, замінивши кожен з пропаґаторів на дельта-функцію:

$$\frac{1}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \to -2\pi i \delta(p_i^2 - m^2). \tag{7.56}$$

Розрив у $\mathcal{M}$ виникає від тієї частини інтеґрала по d^4q, де одночасно виконуються умови, задані обома дельта-функціями. Інтеґруючи по них, ми переносимо імпульси p_i на масову поверхню і перетворюємо інтеґрали d^4p_i в інтеґрали по релятивістському фазовому об'єму. Крім того, у виразі (7.52) лишилися множник λ^2, квадрат амплітуди у головному порядку та фактор симетрії ($\frac{1}{2}$), який можна інтерпретувати як множник, що виникає через тотожність бозонів у кінцевому стані. Отже, ми показали, що в порядку λ^2

$$\begin{aligned}\operatorname{Disc}\mathcal{M}(k) &= 2i\,\operatorname{Im}\mathcal{M}(k) = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{E_{\mathbf{p}_1}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{E_{\mathbf{p}_2}} |\mathcal{M}(k)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k).\end{aligned}$$

Це явно підтверджує справедливість (7.49) у порядку λ^2 для теорії ϕ^4.

У наведених міркуваннях ми не скористались ані тим, що обом пропаґаторам у діаґрамі відповідають рівні маси, ані тим, що ці пропаґатори пов'язані з простою точковою вершиною, тому наш аналіз можна поширити і на довільну однопетельну діаґраму. Щоразу, коли в межах інте-

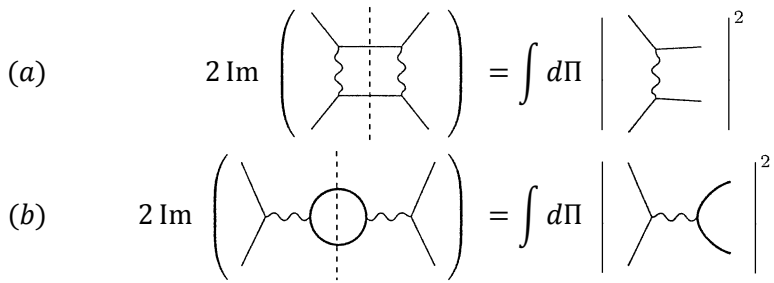


Рис. 7.6. Два внески в оптичну теорему для розсіяння Баба.

ґрування по імпульсах у діаґрамі обидва пропаґатори одночасно потрапляють на масову поверхню, ми можемо скористатися вищенаведеними арґументами для обчислення ненульового розриву $\mathcal{M}$. Величину цього розриву можна знайти, здійснивши для кожного з пропаґаторів заміну

(7.56). Наприклад, для порядку α^2 розсіяння Баба (Рис. 7.6), ми можемо обчислити уявні складові, розрізавши діаґрами і розмістивши імпульси розрізаних пропаґаторів на масовій поверхні, застосовуючи (7.56). Полюси додаткових пропаґаторів не роблять внеску в розріз. Інтеґруючи по дельта-функціях, як і в попередньому абзаці, ми отримаємо співвідношення між уявними складовими цих діаґрам і внесками до повного перерізу.

Куткоський показав, що такий метод обчислення розривів є цілком загальним. Фізичний розрив будь-якої діаґрами можна знайти, дотримуючись алґоритму:

1. Розрізаємо діаґраму всіма можливими способами так, щоб імпульси розрізаних пропаґаторів одночасно лежали на масовій поверхні.

2. Для кожного розрізу робимо заміну $\dfrac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \to -2\pi i\delta(p^2 - m^2)$, після чого обчислюємо петельні інтеґрали.

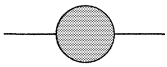
3. Беремо суму внесків від усіх можливих розрізів.

Застосовуючи ці *правила розрізання*, можна довести оптичну теорему (7.49) у будь-якому порядку теорії збурень.

Нестабільні частки

Правила розрізання свідчать, що оптична теорема (7.49) виконується не лише для елементів S-матриці, а й для будь-яких амплітуд $\mathcal{M}$, які можна визначити через фейнманові діаґрами. Це стає дуже корисним, коли ми розглядаємо нестабільні частки, що в принципі не можуть бути асимптотичними станами.

Згадаймо, що відповідно до співвідношення (7.43), точна двоточкова функція скалярного поля має вигляд



$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)}.$$

Ми визначили величину $-iM^2(p^2)$, як суму всіх можливих одночастково непривідних вставлень до бозонного пропаґатора, але на таких самих підставах можемо розглядати її, як суму всіх ампутованих діаґрам для процесу „розсіяння“ 1 *частка* →1 *частка*. З формули ЛСЦ випливає, що

$$\mathcal{M}(p \to p) = -ZM^2(p^2). \tag{7.57}$$

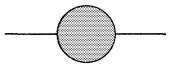
Ми можемо скористатися цим співвідношенням та оптичною теоремою для вивчення властивостей уявної складової $M^2(p^2)$.

Насамперед розглянемо знайомий уже випадок стабільного скалярного бозона. Тоді немає ніякого можливого кінцевого стану, що може дати внесок до правої частини виразу (7.49). Отже, $M^2(p^2)$ є дійсною. Розташування полюса у пропаґаторі визначається рівнянням $p^2 - m_0^2 - M^2(p^2) = 0$, яке має дійсне рішення m. Таким чином, полюс лежить на дійсній осі p^2 нижче багаточасткового розрізу.

Проте в багатьох випадках частка може розпадатися на дві або більше часток з меншою масою. У цьому разі $M^2(p^2)$ набуває уявної складової, тому ми мусимо трохи змінити означення. Встановимо масу частки m умовою

$$m^2 - m_0^2 - \operatorname{Re} M^2(m^2) = 0. \tag{7.58}$$

Тоді полюс пропаґатора переміститься з дійсної осі:



$$= \frac{iZ}{p^2 - m^2 - iZ \operatorname{Im} M^2(p^2)}.$$

Якщо пропаґатор виникає в s-каналі діаґрами, переріз поблизу полюса поводиться, як

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{s - m^2 - iZ \operatorname{Im} M^2(s)} \right|^2. \tag{7.59}$$

Цей вираз дуже схожий на релятивістську формулу Брейта–Віґнера (4.64) для перерізу розсіяння поблизу резонансу:

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{p^2 - m^2 + im\Gamma} \right|^2. \tag{7.60}$$

Маса m, визначена в (7.58), є розташуванням резонансу. Якщо $\operatorname{Im} M^2(m^2)$ мала, то резонанс у (7.59) вузький, і в його межах можемо наближено замінити $\operatorname{Im} M^2(s)$ на $\operatorname{Im} M^2(m^2)$. Тоді (7.59) точно збігається з формулою Брейта–Віґнера, і в цьому випадку

$$\Gamma = -\frac{Z}{m} \operatorname{Im} M^2(m^2). \tag{7.61}$$

Якщо резонанс широкий, з'являться відхилення від форми брейт-віґнерового резонансу, що призводять до звуження країв попереду і їхнього розширення позаду.

Для обчислення $\operatorname{Im} M^2$ та Γ скористаємося означенням M^2, як суми 1ЧН внесків до пропаґатора. Уявні складові відповідних петельних діаґрам дадуть ширину розпаду. Проте застосування оптичної теореми

(7.49), узагальненої на фейнманові діаґрами правилами розрізання, дозволяє спростити цю процедуру. Взявши (7.57) за означення матричного елемента $\mathcal{M}(p \to p)$ і так само визначивши матричні елементи розпаду $\mathcal{M}(p \to f)$ через фейнманові діаґрами, з виразу (7.49) одержимо

$$Z \operatorname{Im} M^2(p^2) = -\operatorname{Im} \mathcal{M}(p \to p) = -\frac{1}{2} \sum_f \int d\Pi_f \, |\mathcal{M}(p \to f)|^2, \qquad (7.62)$$

де сума береться за всіма можливими кінцевими станами f. Тому ширина розпаду є

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \sum_f \int d\Pi_f \, |\mathcal{M}(p \to f)|^2, \qquad (7.63)$$

як і було вказано у виразі (4.86).

Ще раз наголосимо, що виведення цього рівняння справедливе лише для нестабільних часток з довгою тривалістю життя, коли $\Gamma \ll m$. Для випадку широкого резонансу треба враховувати повну залежність $M^2(p^2)$ від енерґії.

§ 7.4. Тотожність Варда – Такахаші

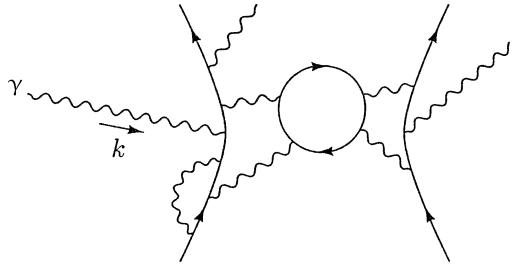
З чотирьох „хвостів“, перерахованих на початку цього розділу, залишилася недоведеною тільки тотожність Варда. Згадаймо з § 5.5, що вона стверджувала про наступне: якщо $\mathcal{M}(k) = \varepsilon_\mu(k)\mathcal{M}^\mu(k)$ є амплітудою певного процесу КЕД, що включає в початковому або кінцевому стані фотон з імпульсом k, то вона обертається на нуль при заміні ε_μ на k_μ:

$$k_\mu(k)\mathcal{M}^\mu(k) = 0. \qquad (7.64)$$

Для доведення цього твердження корисно отримати загальнішу тотожність для кореляційних функцій КЕД, що має назву *тотожності Варда – Такахаші*. Для розгляду цього загального випадку позначимо через $\mathcal{M}$ фур'є-перетворення кореляційної функції, в якій зовнішні імпульси не конче розташовані на масовій поверхні. У цьому випадку права частина (7.64) містить ненульові члени. А проте, коли для виокремлення елемента S-матриці ми скористаємося формулою ЛСЦ, то переконаємося, що ці члени не дають внеску.

Будемо доводити тотожність Варда – Такахаші у довільному порядку α, безпосередньо розглядаючи фейнманові діаґрами, що дають внесок у $\mathcal{M}(k)$. Загалом ця тотожність не виконується для окремих фейнманових діаґрам; ми маємо взяти суму за всіма діаґрамами в поточному порядку.

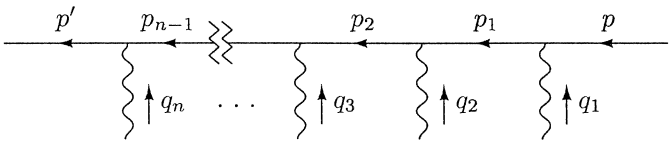
Візьмемо типову діаґраму для типової амплітуди $\mathcal{M}(k)$:



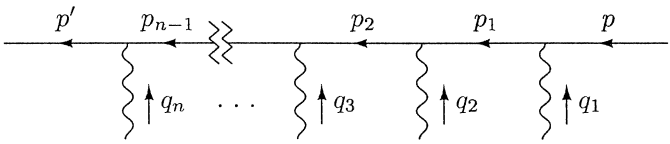
Якщо прибрати фотон $\gamma(k)$, матимемо простішу діаґраму, що є частиною спрощеної амплітуди $\mathcal{M}_0$. Якщо у спрощену діаґраму знову десь вставити фотон, ми знову одержимо внесок у $\mathcal{M}(k)$. Вирішальне спостереження полягає в тому, що коли ми візьмемо суму за всіма діаґрамами, які дають внесок у $\mathcal{M}_0$, а далі підсумуємо за всіма точками вставлення фотона в кожній з цих діаґрам, то в результаті одержимо $\mathcal{M}(k)$. Тотожність Варда – Такахаші справедлива для кожної діаґрами, яка дає внесок у $\mathcal{M}_0$, коли взяти суму за всіма можливими точками вставлення; це твердження ми й доведемо.

Є два способи вставити фотонну лінію в діаґраму — приєднати її до електронної лінії, що виходить з діаґрами і сполучає дві зовнішні точки, або до електронної петлі. Розглянемо по черзі кожен з цих способів.

Спершу припустимо, що електронна лінія сполучає дві зовнішні точки. До того, як ми вставили фотон, лінія мала вигляд



Імпульси електронних пропаґаторів є p, $p_1 = p + q_1$, $p_2 = p_1 + q_2$ — і так далі до $p' = p_{n-1} + q_n$. Якщо маємо n вершин, фотон можемо вставити в $n + 1$ різних місцях. Нехай ми вставили його після i-ї вершини:



До імпульсів усіх електронних пропаґаторів ліворуч від нового фотона тепер додалося k.

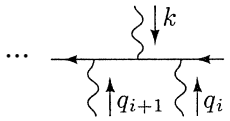
Поглянемо на значення цих діаґрам, якщо $\varepsilon_\mu(k)$ замінити на k_μ. Добуток k_μ і нової вершини зручно записати, як

$$-iek_\mu\gamma^\mu = -ie\big[(\not p_i + \not k - m) - (\not p_i - m)\big].$$

Перемноживши на прилеглі електронні пропаґатори,

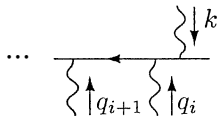
$$\frac{i}{\not p_i + \not k - m}(-ie\not k)\frac{i}{\not p_i - m} = e\left(\frac{i}{\not p_i - m} - \frac{i}{\not p_i + \not k - m}\right). \tag{7.65}$$

Отже, діаґрама з фотоном, вставленим після вершини i, має структуру



$$\cdots = \cdots\left(\frac{i}{\not p_{i+1} + \not k - m}\right)\gamma^{\lambda_{i+1}} \times$$
$$\times\left(\frac{i}{\not p_i - m} - \frac{i}{\not p_i + \not k - m}\right)\gamma^{\lambda_i}\left(\frac{i}{\not p_{i-1} + \not k - m}\right)\gamma^{\lambda_{i-1}}\cdots$$

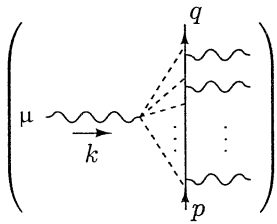
Таким самим чином отримуємо діаґраму з фотоном після вершини $i-1$:



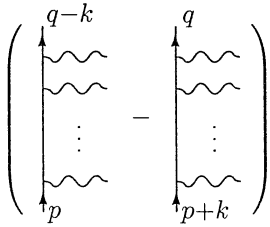
$$\cdots = \cdots\left(\frac{i}{\not p_{i+1} + \not k - m}\right)\gamma^{\lambda_{i+1}}\left(\frac{i}{\not p_i + \not k - m}\right)\gamma^{\lambda_i} \times$$
$$\times\left(\frac{i}{\not p_{i-1} - m} - \frac{i}{\not p_{i-1} + \not k - m}\right)\gamma^{\lambda_{i-1}}\cdots$$

Зазначимо, що перший член у цьому виразі скорочується з другим у попередньому. Таке скорочення виконуватиметься для будь-якої пари діаґрам, у яких точки вставлення фотона знаходяться поруч. Якщо підсумувати за всіма можливими точками вставлення, то скорочуються всі члени за винятком тих, що не мають пари на кінцях. Доданок, що з'являється від вставлення фотона після останньої вершини (далеко ліворуч), дорівнює e, помноженому на значення початкової діаґрами; інший доданок без пари виникає від вставлення фотона перед першою вершиною і має такий самий вигляд за винятком знаку мінус та заміни всюди p на $p+k$. Мовою діаґрам, наш результат є

$$\sum_{\substack{\text{точки}\\ \text{вставки}}} k_\mu \cdot$$



$$= e$$



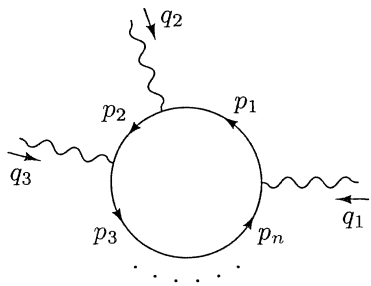
(7.66)

де з міркувань симетрії зроблено підстановку $p' + k \to q$. У кожній діаґрамі у лівій частині (7.66) вхідний імпульс електронної лінії є p, а вихідний q. Відповідно до формули ЛСЦ, з кожної діаґрами можна виокремити внесок у S-матрицю. Для цього маємо взяти коефіцієнт при добутку полюсів

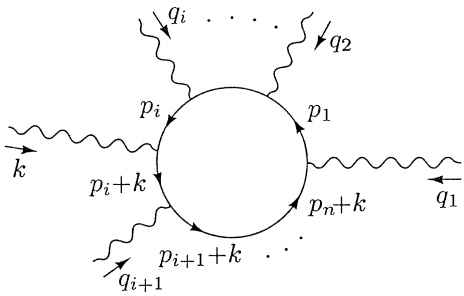
$$\left(\frac{i}{\not{q} - m}\right)\left(\frac{i}{\not{p} - m}\right).$$

Кожен член праворуч у (7.66) містить один з цих полюсів, але жоден не має одразу обох. Таким чином, права частина (7.66) не дає ніякого внеску в S-матрицю.[42]

Для завершення доведення маємо розглянути випадок, коли фотон приєднується до електронної петлі. До вставлення фотона типова петля мала вигляд



Імпульси електронних пропаґаторів є p_1, $p_1 + q_2 = p_2$ — і так далі до p_n. Нехай фотон $\gamma(k)$ вставлено між вершинами i та $i + 1$:



Тепер ми маємо додатковий імпульс k, що пробігає по петлі від нової вершини. Домовимося вважати, що ця вершина має порядковий номер 1.

Щоб підсумувати за всіма можливими способами вставлення фотона в петлю, застосуємо рівність (7.65) до кожної діаґрами. Для тієї з них, у

[42] Цей етап доведення стане простим, якщо ми перерозподілимо пертурбативний ряд таким чином, щоб пропаґатор містив m, а не m_0. Це буде зроблено в Розділі 10.

якій фотон вставлено між вершинами 1 і 2, маємо

$$-e\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{i}{\not p_n+\not k-m}\right)\gamma^{\lambda_n}\cdots\left(\frac{i}{\not p_2+\not k-m}\right)\gamma^{\lambda_2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{i}{\not p_1-m}-\frac{i}{\not p_1+\not k-m}\right)\gamma^{\lambda_1}\right].$$

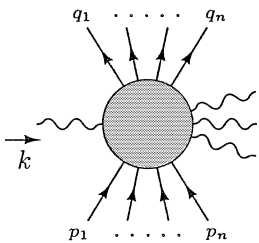
Перший член скоротиться з одним із членів іншої діаґрами, у якій фотон вставлено між вершинами 2 і 3. Такі самі скорочення відбудуться для кожної пари сусідніх діаґрам. Після підсумовування за n можливими способами вставлення фотона залишиться

$$\begin{aligned}&-e\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{i}{\not p_n-m}\right)\gamma^{\lambda_n}\left(\frac{i}{\not p_{n-1}-m}\right)\gamma^{\lambda_{n-1}}\cdots\left(\frac{i}{\not p_1-m}\right)\gamma^{\lambda_1}-\right.\\&\left.-\left(\frac{i}{\not p_n+\not k-m}\right)\gamma^{\lambda_n}\left(\frac{i}{\not p_{n-1}+\not k-m}\right)\gamma^{\lambda_{n-1}}\cdots\left(\frac{i}{\not p_1+\not k-m}\right)\gamma^{\lambda_1}\right].\end{aligned}\tag{7.67}$$

Пересуваючи змінну інтеґрування у другому члені на k, побачимо, що решта два члени також скорочуються. Отже, діаґрами, в яких фотон приєднується до замкненої петлі, не дають внеску.

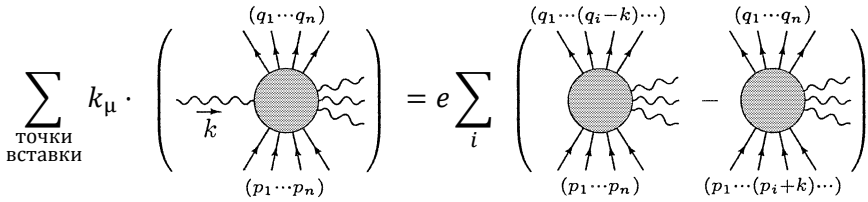
Тепер зберемо докупи всі частини доведення. Нехай амплітуда $\mathcal{M}$ має $2n$ зовнішніх електронних ліній — n вхідних і n вихідних. Позначимо вхідні імпульси як p_i, а вихідні як q_i:

$\mathcal{M}(k;\,p_1\cdots p_n;\,q_1\cdots q_n)=$



(Також амплітуда може містити довільну кількість додаткових зовнішніх фотонних ліній.) Амплітуда $\mathcal{M}_0$ не має фотона $\gamma(k)$, а в іншому ідентична $\mathcal{M}$. Щоб з $\mathcal{M}_0$ отримати $k_\mu\mathcal{M}^\mu$, треба взяти суму за всіма діаґрамами, що дають внесок у $\mathcal{M}_0$, а в кожній з цих діаґрам підсумувати за всіма можливими способами вставлення фотона. Сума за точками вставлення в петлі для будь-якої діаґрами дає нуль. Сума за точками вставлення у наскрізній електронній лінії в будь-якій діаґрамі дає внесок типу (7.66). Просу-

мувавши за всіма точками вставлення для кожної діаґрами, маємо



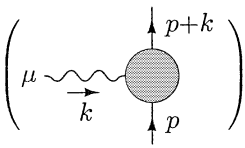
де сіре коло позначає будь-яку діаґраму, що дає внесок у $\mathcal{M}_0$. І, остаточно, сума за всіма цими діаґрамами:

$$\begin{aligned} k_\mu \mathcal{M}^\mu(k;\, p_1 \cdots p_n;\, q_1 \cdots q_n) \;&= \\ = e \sum_i \Big[\mathcal{M}_0(p_1 \cdots p_n;\, q_1 \cdots (q_i - k) \cdots) &- \\ - \mathcal{M}_0(p_1 \cdots (p_i + k) \cdots;\, q_1 \cdots q_n) \Big]. & \end{aligned} \tag{7.68}$$

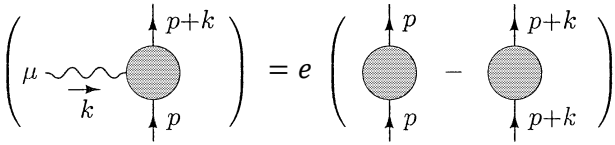
Це і є тотожність Варда – Такахаші для кореляційних функцій у КЕД. Ми вже з'ясували, що права частина не дає внеску в елемент S-матриці; отже, в тому окремому випадку, коли $\mathcal{M}$ є елементом S-матриці, (7.68) переходить у тотожність Варда (7.64).

Перш ніж продовжити розгляд цієї тотожності, вкажемо на потенційну ваду нашого доведення. Для скорочення доданків у (7.67) ми пересунули змінну інтеґрування на константу. Проте, якщо інтеґрал розбіжний, такий крок є неприпустимим. Так само у виразах, що дають (7.66), можуть бути розбіжні інтеґрали по петлях. Хоча тут відсутній явний зсув змінної, на практиці при обчисленні інтеґралів його справді виконують. У кожному разі, ультрафіолетові розбіжності потенційно спроможні зруйнувати тотожність Варда – Такахаші. Приклад цієї проблеми, а також її загальне рішення, ми розглянемо в наступному параґрафі.

Найпростіший приклад тотожності Варда – Такахаші є її застосування до триточкової функції з одним вхідним і одним вихідним електронами та одним зовнішнім фотоном:



Тоді

$k_\mu \cdot$ 

Величини у правій частині є точними електронними пропаґаторами з імпульсами p і $(p+k)$ відповідно; позначимо їх, як $S(p)$ і $S(p+k)$. Згідно з (7.23),

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)}.$$

Повну триточкову амплітуду в лівій частині можна переписати, як і в (7.44), у вигляді добутку точних пропаґаторів вхідного та вихідного електронів і діаґрами розсіяння з ампутованими зовнішніми лініями. У нашому випадку ампутована діаґрама є вершиною $\Gamma^\mu(p+k,\, p)$. Тотожність Варда–Такахаші стверджує, що

$$S(p+k)\big[-iek_\mu\Gamma^\mu(p+k,\, p)\big]S(p) = e\big(S(p) - S(p+k)\big).$$

Щоб спростити цей вираз, помножимо його ліворуч та праворуч на діракові матриці $S^{-1}(p+k)$ і $S^{-1}(p)$ відповідно. Тоді

$$-ik_\mu\Gamma^\mu(p+k,\, p) = S^{-1}(p+k) - S^{-1}(p). \tag{7.69}$$

Часто назву *тотожність Варда–Такахаші* використовують саме для цього окремого випадку.

Ми можемо застосувати (7.69) для отримання загального співвідношення між константами Z_1 і Z_2. Визначимо Z_1 у (7.47) , як

$$\Gamma^\mu(p+k,\, p) \to Z_1^{-1}\gamma^\mu \quad \text{при } k \to 0.$$

Константу Z_2 ми визначили, як лишок у полюсі $S(p)$:

$$S(p) \sim \frac{iZ_2}{\not{p} - m}.$$

Взявши p поблизу масової поверхні і розклавши (7.69) в околиці $k = 0$, маємо для членів першого порядку ліворуч і праворуч:

$$-iZ_1^{-1}\not{k} = -iZ_2^{-1}\not{k},$$

або

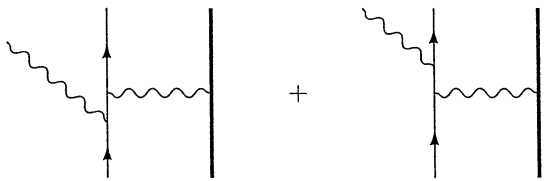
$$Z_1 = Z_2. \tag{7.70}$$

Таким чином, тотожність Варда–Такахаші забезпечує точне скорочення нескінченних перенормовочних множників у амплітуді електронного розсіяння, про що йшлося в § 7.2. Розглянувши цей результат разом з точним формальним виразом для електронних форм-факторів (7.46), ми виявимо, що тотожність гарантує рівність $F_1(0) = 1$ в усіх порядках теорії збурень.

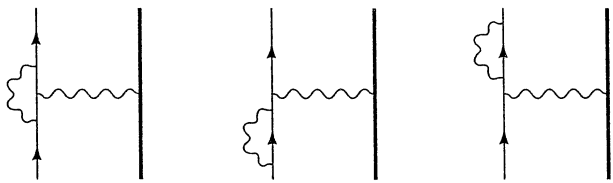
Досить часто в літературі поняття *тотожність Варда*, *збереження струму* і *калібрувальна інваріантність* вживаються як синоніми. Це цілком зрозуміло, бо тотожність Варда є діаґрамним представленням твердження про збереження електричного струму, яке своєю чергою випливає з калібрувальної інваріантності. Проте ми й надалі розрізнятимемо їх. Під *калібрувальною інваріантністю* розумітимемо фундаментальну симетрію лаґранжіана, під *збереженням струму* — рівняння руху, що випливає з цієї симетрії і, нарешті, під *тотожністю Варда* — діаґрамну тотожність, що накладає вимогу симетрії на квантовомеханічну амплітуду.

§ 7.5. Перенормування електричного заряду

На початку Розділу 6 ми розглядали радіаційні поправки порядку α до розсіяння електрона на важкій мішені. Ми обчислили (принаймні, у класичному наближенні) діаґрами гальмівного випромінювання:

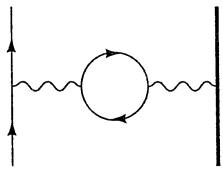


і поправки, викликані віртуальними фотонами:



Наш розгляд перенормування напруженості поля в цьому розділі остаточно прояснив роль двох останніх діаґрам. Зокрема, ми побачили, що тотожність Варда і рівність $Z_1 = Z_2$, як один з її наслідків, гарантують, що сума всіх поправок, пов'язаних з віртуальним фотоном, обертається на

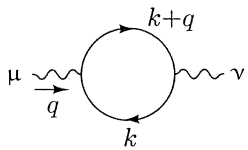
нуль при $q \to 0$. Залишився ще один тип радіаційних поправок для цього процесу:



Це є діаґрама *поляризації вакууму* першого порядку за α, яку іноді ще називають *власною енерґією фотона*. Ми можемо трактувати її, як зміну структури фотонного пропаґатора за рахунок віртуальної електрон-позитронної пари. Ця діаґрама змінює ефективне поле $A^\mu(x)$, яке впливає на розсіяний електрон. Потенційно це може змінити загальну напруженість поля, а також вплинути на його залежність від x (або, в фур'є-просторі, від q). У поточному параґрафі ми обчислимо цю діаґраму і переконаємося, що вона справді призводить до обох згаданих ефектів.

Загальне уявлення про перенормування заряду

Перед початком детальних розрахунків спробуємо зрозуміти, якого типу результат ми очікуємо отримати і як його можна інтерпретувати. Частина діаґрами, що нас найбільше цікавить, це електронна петля:



$$= (-ie)^2(-1)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \times \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m}\gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m}\right] = \equiv i\Pi_2^{\mu\nu}(q). \tag{7.71}$$

(Ферміонний петельний множник (-1) було запроваджено в рівнянні (4.120).) Більш загально, визначимо $i\Pi^{\mu\nu}(q)$, як суму всіх одночастково непривідних вставлень у фотонний пропаґатор:

$$\equiv i\Pi^{\mu\nu}(q), \tag{7.72}$$

а отже, $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$ є внеском другого порядку за e в $\Pi^{\mu\nu}(q)$. Єдині тензори, що можуть з'явитися в $\Pi^{\mu\nu}(q)$, це $g^{\mu\nu}$ і $q^\mu q^\nu$. Проте, згідно з тотожністю Варда, $q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$, тому $\Pi^{\mu\nu}(q)$ є пропорційний проекторові $(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu/q^2)$.

Також ми очікуємо, що $\Pi^{\mu\nu}(q)$ не має полюса при $q^2 = 0$, бо його єдиним очевидним джерелом міг бути одночастковий безмасовий проміжний стан, який не може виникнути в жодній з 1ЧН діаґрам.[43] Тому зручно виокремити тензорну структуру $\Pi^{\mu\nu}$ наступним чином:

$$\Pi^{\mu\nu} = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2), \tag{7.73}$$

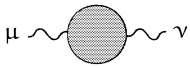
де $\Pi(q^2)$ є реґулярним при $q^2 = 0$.

Тоді точна двоточкова фотонна функція є

$$= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2}\Big[i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)\Big]\frac{-ig^{\sigma\nu}}{q^2} + \cdots =$$

$$= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2}\,\Delta^\rho_\nu\,\Pi(q^2) + \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2}\,\Delta^\rho_\sigma\,\Delta^\sigma_\nu\,\Pi^2(q^2) + \cdots,$$

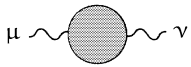
де $\delta^\rho_\nu \equiv \delta^\rho_\nu - q^\rho q_\nu q^2$. З огляду на те, що $\Delta^\rho_\sigma\,\Delta^\sigma_\nu = \Delta^\rho_\nu$, цей вираз можна ще спростити:



$$= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}\Big(\delta^\rho_\nu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2}\Big)\big(\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \cdots\big) =$$

$$= \frac{-i}{q^2\big[1 - \Pi(q^2)\big]}\Big(g_\mu\nu - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\Big) + \frac{-i}{q^2}\Big(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\Big). \tag{7.74}$$

При обчислені будь-якого елемента S-матриці щонайменше один з кінців цього пропаґатора приєднано до ферміонної лінії. Якщо ми візьмемо суму за всіма можливими точками приєднання вздовж ферміонної лінії, то, згідно з тотожністю Варда, знайдемо, що члени, пропорційні q_μ або q_ν, зникають. Маючи за мету обчислення елементів S-матриці, можемо скорочено записати



$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2\big[1 - \Pi(q^2)\big]}. \tag{7.75}$$

Зазначимо, що допоки $\Pi(q^2)$ є реґулярною при $q^2 = 0$, точний пропаґатор завжди має полюс при $q^2 = 0$. Інакше кажучи, фотон залишається безмасовим у всіх порядках теорії збурень. Справедливість цього

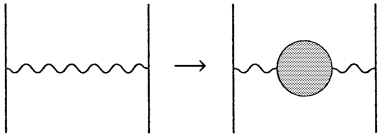
[43] Можна довести, що такого полюса насправді не існує, проте доведення цього факту є вельми нетривіальним. Швінґер показав, що в двох просторово-часових вимірах синґулярність у Π_2, пов'язана з парою безмасових ферміонів, є полюсом, а не розрізом; це є знаменитий контрприклад до наших арґументів. У чотирьох вимірах такої проблеми немає.

твердження дуже сильно залежить від використання тотожності Варда (7.73). Якщо, наприклад, $\Pi^{\mu\nu}(q)$ містить доданок $M^2 g^{\mu\nu}$ (без компенсуючого члена $q^\mu q^\nu$), маса фотона набуде значення M.

Лишок у полюсі при $q^2 = 0$ є

$$\frac{1}{1-\Pi(0)} \equiv Z_3.$$

Амплітуда будь-якого процесу розсіяння при малих q^2 зсунеться відносно внеску деревовидного наближення на цей множник:



або $$\cdots \frac{e^2 g_{\mu\nu}}{q^2} \cdots \longrightarrow \cdots \frac{Z_3 e^2 g_{\mu\nu}}{q^2} \cdots .$$

Оскільки на кожному кінці фотонного пропаґатора наявний множник e, можна врахувати цей зсув шляхом заміни $e \to \sqrt{Z_3}\, e$. Така заміна має назву *перенормування заряду*, і загалом вона схожа на перенормування маси, про яке йшлося в § 7.1. Відзначимо, що в дослідах спостерігається саме „фізичний“ заряд $\sqrt{Z_3}\, e$. Тому змінимо позначення і надалі під e розумітимемо саме цю величину, а „голий“ заряд, що є коефіцієнтом при $A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ в лаґранжіані позначатимемо e_0. Отже, маємо

$$(\text{фізичний заряд}) = e = \sqrt{Z_3}\, e_0 = \sqrt{Z_3}\ \cdot (\text{голий заряд}). \tag{7.76}$$

У нижчому порядку, $Z_3 = 1$, а $e = e_0$.

Крім постійного зсуву величини електричного заряду, $\Pi(q^2)$ призводить до ще одного ефекту. Розглянемо процес розсіяння з ненульовим q^2 і припустимо, що $\Pi(q^2)$ обчислено в головному за α порядку: $\Pi(q^2) \approx \Pi_2(q^2)$. Тоді амплітуда цього процесу включатиме величину

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\left(\frac{e_0^2}{1-\Pi(q^2)}\right) \underset{\mathcal{O}(\alpha)}{=} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\left(\frac{e^2}{1-\left[\Pi_2(q^2)-\Pi_2(0)\right]}\right)$$

(заміна e^2 на e_0^2 наразі не грає ролі). Величину в дужках можна інтерпретувати, як електричний заряд, залежний від q^2. Таким чином, весь ефект від заміни фотонного пропаґатора в деревовидному наближенні на точний фотонний пропаґатор полягає в тому, щоб замінити

$$\alpha_0 \to \alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{e_0^2/4\pi}{1-\Pi(q^2)} \underset{\mathcal{O}(\alpha)}{=} \frac{\alpha}{1-\left[\Pi_2(q^2)-\Pi_2(0)\right]}. \tag{7.77}$$

(У головному порядку треба додати П-члени також і до чисельника, проте в Розділі 12 ми побачимо, що в разі заміни Π_2 на П вираз у такому вигляді залишиться справедливим в усіх порядках.)

Обчислення Π_2

Доклавши чимало зусиль для інтерпретації $\Pi_2(q^2)$, тепер варто обчислити його. Повертаючись до (7.71), маємо

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2}\gamma^\nu \frac{i(\not{k}+\not{q}+m)}{(k+q)^2-m^2}\right] = \\ &= -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - g^{\mu\nu}\big(k\cdot(k+q)-m^2\big)}{\big(k^2-m^2\big)\big((k+q)^2-m^2\big)}. \end{aligned} \tag{7.78}$$

З міркувань зручності ми написали e і m, замість e_0 і m_0, оскільки різниця між ними дає в $\Pi^{\mu\nu}$ внесок порядку α^2.

Тепер знову запровадимо фейнманові параметри й об'єднаємо множники в знаменниках:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\big(k^2-m^2\big)\big((k+q)^2-m^2\big)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{\big(k^2+2xk\cdot q+xq^2-m^2\big)^2} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{\big(\ell^2+x(1-x)q^2-m^2\big)^2}, \end{aligned}$$

де $\ell = k + xq$. Чисельник (7.78), записаний через ℓ, є

$$\begin{aligned} \text{Чисельник} = 2\ell^\mu\ell^\nu - g^{\mu\nu}\ell^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}\big(m^2+x(1-x)q^2\big) + \\ + (\text{лінійні за } \ell \text{ члени}) \end{aligned}$$

Вдавшись до вікового повороту і здійснивши заміну $\ell^0 = i\ell_E^0$, одержимо

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \frac{-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\ell_E^2 + g^{\mu\nu}\ell_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}\big(m^2+x(1-x)q^2\big)}{\big(\ell_E^2+\Delta\big)^2}, \end{aligned} \tag{7.79}$$

де $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$. Цей інтеґрал має сильну ультрафіолетову розбіжність. Якби ми обрізали його при $\ell_E = \Lambda$, то мали б провідний доданок

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \propto e^2\Lambda^2 g^{\mu\nu}$$

без компенсуючого члена $q^{\mu}q^{\nu}$. Цей результат порушує тотожність Варда, а фотон набуває нескінченної маси $M \propto e\Lambda$.

Наше доведення тотожності Варда руйнується саме таким чином, як ми й передбачали наприкінці попереднього параґрафу: якщо інтеґрал розбіжний, то пересунення змінної в (7.67) є неприпустимим. Для наших поточних розрахунків порушення тотожності Варда взагалі є катастрофічним — воно призводить до нескінченної маси фотона[44] в цілковитій суперечності з експериментом. На щастя, маємо можливість урятувати тотожність Варда.

Вище ми реґуляризували розбіжний інтеґрал найпростішим і наївним способом, обрізаючи його за великим імпульсом Λ. Є й інші шляхи реґуляризації, і деякі з них дозволяють зберегти тотожність Варда. При обчисленні поправок до вершини та власної енерґії електрона ми вдалися до реґуляризації Паулі – Вілларса. Такий спосіб (Задача 7.2), на відміну від примітивного обрізання, зберігає рівність $Z_1 = Z_2$, яка є наслідком тотожності Варда. Ми могли б завершити розпочаті обчислення, ввівши ферміони Паулі – Вілларса. На жаль, для цього потрібно кілька наборів ферміонів, що робить цей метод занадто складним.[45] Наразі застосуємо простіший *метод розмірної реґуляризації*, запропонований ‘т Гоофтом і Вельтманом.[46] Розмірна реґуляризація зберігає тотожність Варда не лише в КЕД, а й у широкому класі загальніших теорій.

У випадках, коли різні способи реґуляризації дають різні результати для спостережних величин, це відбувається тому, що один з них (або й усі) порушують якусь симетрію (скажімо, тотожність Варда). Тоді виходять з умови, що симетрія є фундаментальною, і вимагають її збереження при реґуляризації. Проте обґрунтованість такого вибору довести неможливо, і ми приймаємо симетрію, як нову аксіому.

Розмірна реґуляризація

Ідея розмірної реґуляризації на загал є дуже проста і полягає в розгляді фейнманової діаґрами, як аналітичної функції від розмірності простору d. Для досить малих d будь-який петельний інтеґрал збігається, і можна

[44] Ми могли б зробити фізичну масу фотона нульовою, додавши до лаґранжіана компенсуючий член з нескінченною масою фотона. Загалом, лаґранжіан можна підправляти, щоб забезпечити виконання тотожності Варда для будь-якої n-точкової кореляційної функції. Ця процедура дає ті ж самі результати, як і метод, до якого ми збираємося вдатися, проте вона набагато складніша.

[45] Детальніше див. книгу Бйоркена і Дрелла [9], стор. 154.

[46] G. ‘t Hooft and M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys.* B44, 189 (1972).

довести тотожність Варда. Остаточні вирази для спостережних величин повинні мати добре визначену межу при $d \to 4$.

Проведемо пробне обчислення, щоб побачити, як працює ця техніка. Розглянемо простір-час з однією часовою і $(d-1)$ просторовими координатами. Як і досі, ми можемо вдатися до вікового повороту, щоб отримати фейнманові інтеґрали в d-вимірному евклідовому просторі. Типовим прикладом є

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left(\ell_E^2 + \Delta\right)^2} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \cdot \int_0^\infty d\ell_E \, \frac{\ell_E^{d-1}}{\left(\ell_E^2 + \Delta\right)^2}. \tag{7.80}$$

Перший множник у (7.80) містить площу одиничної сфери у d вимірах. Для обчислення скористаємося таким прийомом:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\pi}\right)^d &= \left(\int dx\, e^{-x^2}\right)^d = \int d^d x \exp\Big(-\sum_{i=1} dx_i^2\Big) = \\
&= \int d\Omega_d \int_0^\infty dx\, x^{d-1} e^{-x^2} = \\
&= \left(\int d\Omega_d\right) \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2)\, (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-(x^2)} = \\
&= \left(\int d\Omega_d\right) \cdot \tfrac{1}{2}\, \Gamma(\tfrac{d}{2}).
\end{aligned}$$

Отже, площа одиничної d-вимірної сфери є

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}. \tag{7.81}$$

Для добре знайомих окремих випадків ця формула дає:

d	$\Gamma(\frac{d}{2})$	$\int d\Omega_d$
1	$\sqrt{\pi}$	2
2	1	2π
3	$\sqrt{\pi}/2$	4π
4	1	$2\pi^2$

Другий множник у (7.80) є

$$\int_0^\infty d\ell\, \frac{\ell^{d-1}}{\left(\ell^2+\Delta\right)^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty d(\ell^2)\, \frac{(\ell^2)^{\frac{d}{2}-1}}{\left(\ell^2+\Delta\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx\, x^{1-\frac{d}{2}}(1-x)^{\frac{d}{2}-1},$$

де в другому рядку ми зробили підстановку $x = \Delta/(\ell^2+\Delta)$. Скориставшись означенням бета-функції

$$\int_0^1 dx\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = B(\alpha,\,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{7.82}$$

можемо легко обчислити інтеґрал по x. Остаточний результат для d-вимірного інтеґрала:

$$\int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{\left(\ell_E^2+\Delta\right)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\, \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}.$$

Оскільки $\Gamma(z)$ має ізольовані полюси при $z = 0, -1, -2, \ldots$, інтеґрал також має полюси в точках $d = 4, 6, 8, \ldots$ Щоб дослідити його поведінку поблизу $d = 4$, введемо $\varepsilon = 4 - d$ і наближено запишемо[47]

$$\Gamma\left(2-\tfrac{d}{2}\right) = \Gamma\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{7.83}$$

де $\gamma \approx 0,5772$ є константою Ейлера – Маскероні (ця константа в усіх спостережних величинах завжди скорочується). Таким чином, інтеґрал стає

$$\int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{\left(\ell_E^2+\Delta\right)^2} \xrightarrow[d\to 4]{} \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \log\Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right). \tag{7.84}$$

Коли ми визначили цей інтеґрал через реґулятори Паулі – Вілларса в рівнянні (7.18), то знайшли

$$\int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{\left(\ell_E^2+\Delta\right)^2} \xrightarrow[\Lambda\to\infty]{} \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\log\frac{x\Lambda^2}{\Delta} + \mathcal{O}(\Delta^{-1})\right).$$

[47] Це наближення безпосередньо випливає з представлення ґамма-функції, як ряду:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}.$$

Отже, полюс $1/\varepsilon$ у методі розмірної реґуляризації відповідає лоґарифмічній розбіжності в інтеґралі по імпульсах. Відзначимо курйозний факт: до (7.84) входить лоґарифм Δ, арґумент якого є розмірною величиною. Скорочення розмірності лоґарифма криється в члені $1/\varepsilon$ і стає явним при скороченні розбіжностей.

Так само легко можна перевірити загальніші формули:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left(\ell_E^2 + \Delta\right)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}}. \tag{7.85}$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{\left(\ell_E^2 + \Delta\right)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1}. \tag{7.86}$$

У d вимірах $g^{\mu\nu}$ задовольняє умові $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d$. Отже, якщо чисельник підінтеґрального виразу містить $\ell^\mu \ell^\nu$, ми мусимо замінити

$$\ell^\mu \ell^\nu \to \frac{1}{d} \ell^2 g^{\mu\nu} \tag{7.87}$$

за аналоґією з (4.126). У багатомірній КЕД діраковими матрицями можна вважати набір d матриць, для яких виконуються співвідношення:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \qquad \mathrm{Tr}[1] = 4. \tag{7.88}$$

При маніпуляціях з виразом (7.78) ці правила дають такий самий результат, що й у випадку з чотирма вимірами. Проте обчислення інших діаґрам дає додаткові внески порядку ε. Зокрема, тотожності (5.9) у $d = 4 - \varepsilon$ вимірах змінюються на

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -(2 - \varepsilon)\gamma^\nu, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} - \varepsilon \gamma^\nu \gamma^\rho, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + \varepsilon \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma. \end{aligned} \tag{7.89}$$

Додаткові члени можуть дати внесок в остаточне значення фейнманової діаґрами, якщо вони мають множник ε^{-1}, що виникає з розбіжного інтеґрала. В однопетельному наближенні КЕД такі члени з'являються при обчисленні вершинних поправок або діаґрам з власною енерґією електрона, але при обчисленні спостережних величин вони взаємно скорочуються.

Подальше обчислення Π_2

А тепер застосуємо формули розмірної реґуляризації до інтеґрала по імпульсах (7.79). Неприємні члени з ℓ^2 у чисельниках дають

$$\int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\,\frac{\left(-\frac{2}{d}+1\right)g^{\mu\nu}\ell_E^2}{\left(\ell_E^2+\Delta\right)^n} = \frac{-1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\left(1-\tfrac{d}{2}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{d}{2}\right)\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-\frac{d}{2}} g^{\mu\nu} =$$
$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\,\Gamma\left(2-\tfrac{d}{2}\right)\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}\cdot(-\Delta g^{\mu\nu}).$$

Ми мали б очікувати на полюс при $d = 2$, бо квадратична розбіжність у чотирьох вимірах стає лоґарифмічною у двох. Проте полюс скорочується. Тотожність Варда працює.

Обчисливши решту членів у (7.79) і скориставшись $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$, отримаємо

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2\int_0^1 dx\,\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}\times$$
$$\times\left[g^{\mu\nu}(-m^2+x(1-x)q^2)+g^{\mu\nu}(m^2+x(1-x)q^2)-2x(1-x)q^\mu q^\nu\right] =$$
$$= (q^2g^{\mu\nu}-q^\mu q^\nu)\cdot i\Pi_2(q^2),$$

де

$$\Pi_2(q^2) = \frac{-8e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_0^1 dx\,x(1-x)\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \underset{d\to 4}{\to}$$
$$\underset{d\to 4}{\to} -\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx\,x(1-x)\left(\frac{2}{\varepsilon}-\log\Delta-\gamma+\log(4\pi)\right) \tag{7.90}$$
$$(\varepsilon = 4-d).$$

Шляхом розмірної реґуляризації $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$ справді набуває вигляду, який узгоджується з тотожністю Варда. А проте, він і далі лоґарифмічно розбігається.

Тепер можемо обчислити поправку порядку α до електричного заряду:

$$\frac{e^2-e_0^2}{e_0^2} = \delta Z_3 \underset{\mathcal{O}(\alpha)}{=} \Pi_2(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}.$$

Голий заряд нескінченно більший від фізичного, але ця різниця не є спостережною. У дослідах можна спостерігати лише залежність (7.77) ефективного електричного заряду від q^2. Вона визначається різницею

$$\widehat{\Pi}_2(q^2) \equiv \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) = \\ = -\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx\, x(1-x)\log\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right), \tag{7.91}$$

яка в межі $\varepsilon \to 0$ не залежить від ε. В останньому пункті поточного параґрафу дослідимо фізику, що міститься в цьому виразі.

Інтерпретація Π_2

Передовсім розглянемо аналітичну структуру $\widehat{\Pi}_2(q^2)$. При $q^2 < 0$ (наприклад, коли фотонний пропаґатор присутній у t- або u-каналах) $\widehat{\Pi}_2(q^2)$ є явно дійсною й аналітичною. Але для процесу в s-каналі q^2 буде позитивним. Логарифмічна функція має розріз при від'ємному арґументі , тобто коли

$$m^2 - x(1-x)q^2 < 0.$$

Добуток $(1-x)$ дорівнює щонайбільше $1/4$, тому розріз $\widehat{\Pi}_2(q^2)$ починається при

$$q^2 = 4m^2,$$

на порозі народження реальної електрон-позитронної пари. Обчислимо уявну складову $\widehat{\Pi}_2$ при $q^2 > 4m^2$. Для будь-якого фіксованого q^2 значення x, що дають внески, лежать між $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\beta$, де $\beta = \sqrt{1 - 4m^2/q^2}$. А оскільки $\mathrm{Im}\left[\log(-X \pm i\varepsilon)\right] = \pm\pi$, то ми маємо

$$\mathrm{Im}\left[\widehat{\Pi}_2(q^2 \pm i\varepsilon)\right] = -\frac{2\alpha}{\pi}(\pm\pi)\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta} dx\, x(1-x) = \\ = \mp 2\alpha \int_{-\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}\beta} dy\left(\tfrac{1}{4} - y^2\right) = \qquad \left(y \equiv x - \tfrac{1}{2}\right) \\ = \mp\frac{\alpha}{3}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}\left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right). \tag{7.92}$$

Залежність від q^2 достоту така сама, як і у виразі для утворення ферміон-антиферміонної пари (5.13). Це ми й мали очікувати, виходячи зі співвідношення унітарності, показаного на Рис. 7.6(b); розрізана навпіл діаґрама для розсіяння Баба вперед дає повний переріз процесу $e^+e^- \to f\bar{f}$. Параметр β точно збігається зі швидкістю ферміонів у системі ЦМ.

Далі з'ясуємо, як величина $\widehat{\Pi}_2(q^2)$ модифікує електромаґнітну взаємодію за виразом (7.77). У нерелятивістському наближенні є сенс обчислити ефективний потенціал $V(r)$. Для взаємодії між різними зарядами, за аналоґією з (4.126) , маємо

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\, \frac{-e^2}{|\mathbf{q}|^2\big[-\widehat{\Pi}_2(-|\mathbf{q}|^2)\big]}. \tag{7.93}$$

Розклавши $\widehat{\Pi}_2$ при $|q^2| \ll m^2$, одержимо

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{4\alpha^2}{15m^2}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}). \tag{7.94}$$

Поправка свідчить, що електромаґнітна сила значно зростає на малих відстанях. Цей ефект можна виміряти в атомі водню, де енерґетичні рівні зсуваються на величину

$$\Delta E = \int d^3\mathbf{x}\,|\psi(\mathbf{x})|^2 \cdot \Big(-\frac{4\alpha^2}{15m^2}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x})\Big) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2}\,|\psi(0)|^2.$$

Хвильова функція $\psi(\mathbf{x})$ на початку координат відмінна від нуля лише для s-хвильових станів. Для $2S$ стану цей зсув є

$$\Delta E = -\frac{4\alpha^2}{15m^2}\cdot\frac{\alpha^3}{8\pi} = -\frac{\alpha^5 m}{30\pi} = -1,123\times 10^{-7}\ \text{еВ}.$$

Це є одна зі складових (незначна) лембового зсуву (див. Таблицю 6.1).

Дельта-функція в (7.94) є лише наближенням; для знаходження точної поправки, перепишемо вираз (7.93), як

$$V(\mathbf{x}) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} dQ\,\frac{Q\,e^{iQr}}{Q^2+\mu^2}\big[1+\widehat{\Pi}_2(-Q^2)\big] \qquad (Q \equiv |\mathbf{q}|),$$

де для реґуляризації кулонового потенціалу ми вставили масу фотона μ. Замкнемо контур інтеґрування згори (Рис. 7.7). Основний внесок дає полюс при $Q = i\mu$, що призводить до кулонового потенціалу $-\alpha/r$. Також є додатковий внесок від розрізу, що починається при $Q = 2mi$. Дійсна

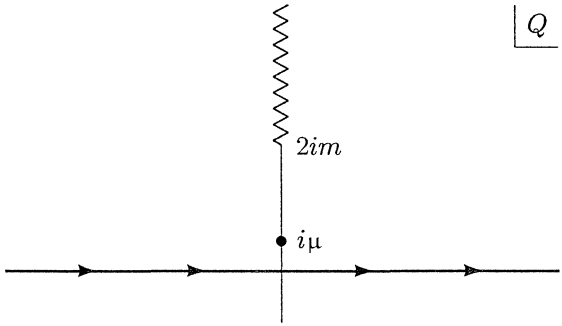


Рис. 7.7. Контур для обчислення ефективної сили електромаґнітної взаємодії в нерелятивістському наближенні. Полюс при $Q = i\mu$ відповідає кулоновому потенціалу, а розріз — поправці порядку α, викликаній поляризацією вакууму.

складова підінтеґрального виразу по обидві сторони розрізу є однаковою, тож він дає внесок лише в уявну складову $\widehat{\Pi}_2$. Визначивши $q = -iQ$, знаходимо, що внесок від розрізу

$$\delta V(r) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r} \int\limits_{2m}^{\infty} dq\, \frac{e^{-qr}}{q}\, \mathrm{Im}\left[\widehat{\Pi}_2(q^2 - i\varepsilon)\right] =$$

$$= -\frac{\alpha}{r}\frac{2}{\pi} \int\limits_{2m}^{\infty} dq\, \frac{e^{-qr}}{q}\, \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right).$$

При $r \gg 1/m$, інтеґрал визначається ділянкою, де $q \approx 2m$. Апроксимувавши на ній підінтеґральний вираз і зробивши підстановку $\mathrm{t} = q - 2m$, маємо

$$\delta V(r) = -\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} d\mathrm{t}\, \frac{e^{-(\mathrm{t}+2m)r}}{2m}\, \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{\mathrm{t}}{m}} \left(\frac{3}{2}\right) + \mathcal{O}(\mathrm{t}) \approx$$

$$\approx -\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}}\, \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}},$$

отже,

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}\left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}}\, \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \cdots\right). \tag{7.95}$$

Таким чином, ділянка, де поправка є великою, визначається комптоновою довжиною хвилі електрона $1/m$. Оскільки на цій ділянці хвильові функції атома водню можна вважати постійними, дельта-функція в (7.94)

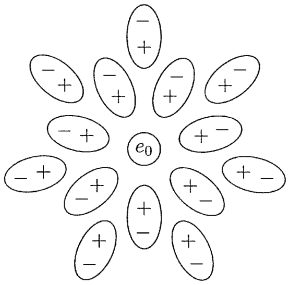


Рис. 7.8. Віртуальні e^+e^--пари ефективно є диполями завдовжки $\sim \frac{1}{m}$, що екранують голий заряд електрона.

є гарним наближенням. Радіаційна поправка до закону Кулона $V(r)$ має назву *потенціалу Юлінґа*.

Ми можемо інтерпретувати цю поправку, як наслідок екранування. При $r \gtrsim \frac{1}{m}$ віртуальні e^+e^--пари перетворюють вакуум на діелектричне середовище, у якому видимий заряд є меншим, ніж справжній (Рис. 7.8). На менших відстанях ми починаємо проникати крізь поляризаційну хмару і відчуваємо вже голий заряд. Це явище відоме як *поляризація вакууму*.

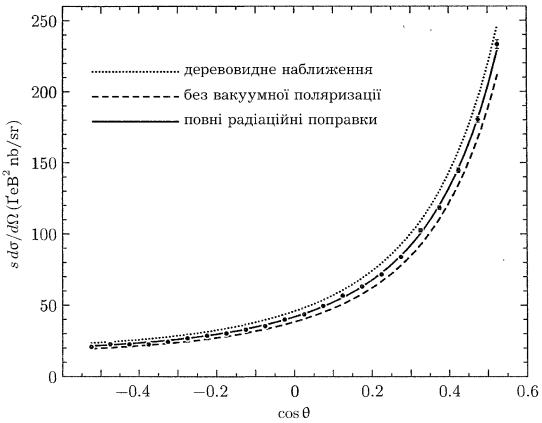


Рис. 7.9. Диференційний переріз розсіяння Баба $e^+e^- \to e^+e^-$ при $E_{\text{цм}} = 29$ ҐеВ, одержаний колаборацією HRS, M. Derrick, et. al., *Phys. Rev.* D34, 3286 (1986). Верхня крива відповідає врахуванню поправки порядку α^2, про яку йшлося в Задачі 5.2 і малої поправки ($\sim 2\%$), пов'язаною зі слабкою взаємодією. Нижня крива враховує всі радіаційні поправки КЕД порядку α^3 *за винятком* поляризації вакууму. Відзначимо, що ці поправки залежать від умов експерименту (див.Розділ 6). Середня крива враховує поляризацію вакууму і решту внесків, що за наявної енерґії збільшує значення α^2 майже на 10%.

Тепер розглянемо протилежну межу — коли відстані дуже малі або $-q^2 \gg m^2$. Рівняння (7.91) набуває вигляду

$$\widehat{\Pi}_2(q^2) \approx \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx\, x(1-x)\Big[\log\Big(\frac{-q^2}{m^2}\Big) + \log\big(x(1-x)\big) + \mathcal{O}\Big(\frac{m^2}{q^2}\Big)\Big] =$$
$$= \frac{\alpha}{3\pi}\Big[\log\Big(\frac{-q^2}{m^2}\Big) - \frac{5}{3} + \mathcal{O}\Big(\frac{m^2}{q^2}\Big)\Big].$$

Ефективна константа взаємодії в цьому наближенні є

$$\alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \dfrac{\alpha}{3\pi}\log\Big(\dfrac{-q^2}{Am^2}\Big)}, \tag{7.96}$$

де $A = \exp(5/3)$. Отже, на малих відстанях ефективний електричний заряд стає значно більшим, коли ми проникаємо крізь екрануючу хмару віртуальних електрон-позитронних пар.

Комбінований ефект поляризації вакууму електронами і більш важкими лептонами та кварками призводять до збільшення $\alpha_{\text{eff}}(q^2)$ приблизно на 5% у діапазоні від $q = 0$ до $q = 30$ ҐеВ, і це спостерігається в експериментах при високих енерґіях. На Рис. 7.9 показано переріз розсіяння Баба при $E_{\text{цм}} = 29$ ҐеВ і проведено порівняння з теоретичними результатами КЕД як з урахуванням діаґрами поляризації вакууму, так і без неї.

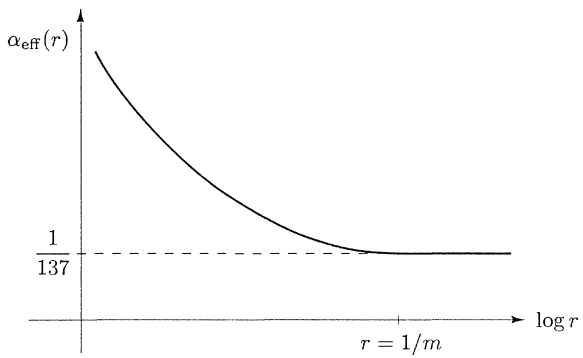


Рис. 7.10. Якісна поведінка ефективної константи електромаґнітного зв'язку з урахуванням однопетельної вакуумної поляризації, як функція відстані. Горизонтальна шкала перекриває багато порядків величини.

Ми можемо записати α_{eff}, як функцію відстані r, припустивши, що $q = \frac{1}{r}$. Поведінка $\alpha_{\text{eff}}(r)$ для всіх r показана на Рис. 7.10. Ідея залежної

від відстані („масштабно-залежної“ або „біжучої“) константи зв’язку буде важливою темою розгляду в наступних двох томах цієї книги.

Задачі

7.1. У § 7.3 ми вдалися до непрямого методу при аналізі однопетельної s-канальної діаґрами для бозон-бозонного розсіяння в теорії ϕ^4. Перевірте цей метод, використавши фейнманові параметри, і обчисліть внески всіх трьох однопетельних діаґрам. Переконайтеся, що для цього випадку виконується оптична теорема.

7.2. Альтернативні способи реґуляризації в КЕД. У § 7.5 ми бачили, як порушується тотожність Варда через невдало обраний спосіб реґуляризації. Перевірте справедливість рівності $Z_1 = Z_2$ у першому порядку за α для вказаних далі реґуляризацій. Ми вже переконалися, що це співвідношення зберігається для методу Паулі – Вілларса.

(a) Обчисліть знову δZ_1 і δZ_2, встановивши в інтеґралах (6.49) та (6.50) верхню межу Λ при інтеґруванні по ℓ_E. Покажіть, що тоді $\delta Z_1 \neq \delta Z_2$.

(b) Обчисліть ще раз δZ_1 і δZ_2, визначивши інтеґрали (6.49) та (6.50) шляхом розмірної реґуляризації. Можете скористатися звичайними діраковими 4×4 матрицями, але врахуйте, що в d вимірах

$$g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = d$$

Покажіть, що в цьому разі $\delta Z_1 = \delta Z_2$.

7.3. Розгляньте теорії елементарних ферміонів, що перебувають у взаємодії з калібрувальним полем КЕД і юкавським полем ϕ:

$$H_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x}\, \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\, \phi\bar{\psi}\psi + \int d^3\mathbf{x}\; eA_\mu\, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

(a) Переконайтеся, що внесок у Z_1 від вершинної діаґрами з віртуальним ϕ дорівнює внескові в Z_2 від діаґрами з віртуальним ϕ. Використайте розмірну реґуляризацію. Чи виконується тотожність Варда в такій теорії?

(b) Далі розгляньте перенормування вершини $\phi\bar{\psi}\psi$. Покажіть, що зміна масштабу цієї вершини при $q^2 = 0$ *не скорочується* з поправкою до

Z_2. (Для цього досить підрахувати ультрафіолетово розбіжну частину діаґрами.) У цій теорії константи перенормування для вершини і напруженості поля дають додаткові зсуви спостережної константи зв'язку порівняно з її голим значенням.

Прикінцевий проект
Випромінювання ґлюонних струменів

Хоча в останніх двох розділах ми й розглядали різні радіаційні поправки, проте жодного разу не провели повного обчислення перерізу з цими поправками. Причина, звісно, полягає в тому, що такі розрахунки здебільшого дуже громіздкі. А проте, не можна претендувати на розуміння радіаційних поправок після обчислення лише окремих їхніх ефектів, які ми розглядали досі. Цей „прикінцевий проект“ покликаний виправити ситуацію. Він присвячений обчисленню перерізу з радіаційними поправками одного з найпростіших, але вкрай важливого процесу. Перед розглядом цього проекту ви маєте вивчити Розділ 6, але не зобов’язані знайомитися з матеріалом Розділу 7.

Сильно взаємодіючі частки — піони, каони та протони — утворюються в процесі e^+e^--анігіляції, коли віртуальний фотон народжує пару кварків. Якщо іґнорувати ефекти сильної взаємодії, то зовсім неважко обчислити повний переріз такого процесу. У нашому прикінцевому проекті ми проаналізуємо перші поправки до перерізу, пов’язані із сильною взаємодією.

Певна річ, ми не вдаватимемося в тонкощі квантової хромодинаміки, а скористаємося простою емпіричною моделлю, запровадивши безмасову векторну частку, *ґлюон*, що взаємодіє з кварками таким чином:

$$\Delta H = \int d^3\mathbf{x}\, g\, \bar{\psi}_{\mathrm{f}_i}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{f}_i}B_\mu.$$

Тут f позначає тип („аромат“) кварка (u, d, s, c, і т. д.), а індекс $i = 1, 2, 3$ — його колір. Константа сильного зв’язку g не залежить від кольору та аромату, а от електромаґнітна взаємодія між кварками перебуває в залежності від аромату, бо кварки u і c мають електричний заряд $Q_{\mathrm{f}} = +2/3$, а кварки d і s — заряд $Q_{\mathrm{f}} = -1/3$. За аналоґією з α, визначимо

$$\alpha_g = \frac{g}{4\pi}.$$

Нижче ми обчислимо пропорційні α_g радіаційні поправки до народження кваркової пари.

Така модель сильної взаємодії не цілком узгоджується із загальноприйнятою наразі теорією — квантовою хромодинамікою. Проте всі результати, що їх ми одержимо, справедливі й для КХД, якщо замінити

$$\alpha_g \to \tfrac{4}{3}\,\alpha_s.$$

Ми перевіримо це твердження в Розділі 17 (Том III).

Надалі ми можемо іґнорувати маси кварків. Також можемо знехтувати масами електрона та позитрона й робити усереднення за їхніми поляризаціями. Щоб контролювати інфрачервоні розбіжності, необхідно надати ґлюонові малу масу μ, яку можна зробити нульовою лише наприкінці обчислень. Та оскільки в нашому розгляді усе ж фіґуруватиме масивний бозон, суму за його станами поляризації (як ми вже обговорювали в Задачі 5.5) слід брати шляхом підстановки

$$\sum \varepsilon^{\mu}\varepsilon^{\nu *} \to -g^{\mu\nu},$$

з чого випливає, що ми можемо скористатися пропаґатором

$$\overbracket{B_\mu B_\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}.$$

(a) Згадайте з § 5.1, що в нижчому порядку за α і при нехтуванні впливом ґлюонів повний переріз народження кваркової пари аромату f є[48]

$$\sigma\left(e^+e^- \to \bar{q}q\right) \to \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3Q_f^2.$$

Обчисліть внесок у $e^+e^- \to \bar{q}q$ від діаґрами з одним віртуальним ґлюоном. Приведіть цей вираз до інтеґрала по фейнманових параметрах і перенормуйте його шляхом віднімання відповідного члена при $q^2 = 0$, дотримуючись процедури, аналоґічної (6.55). Зверніть увагу, що остаточний вираз можна інтерпретувати, як поправку до кваркового форм-фактора $F_1(q^2)$. Доведіть, що для безмасових кварків у всіх порядках за α_g повний переріз народження кваркової пари за відсутності ґлюона є

$$\sigma\left(e^+e^- \to \bar{q}q\right) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3\left|F_1(q^2 = s)\right|^2$$

з $F_1(q^2 = 0) = Q_f$.

[48] Тут s позначає не кварковий аромат, а мандельштамову змінну. Втім, сплутати їх неможливо, оскільки аромат не є числовою величиною. (*Прим. перекл.*)

(b) Перед обчисленням інтеґрала з пункту (a) зробіть відступ і розгляньте процес $e^+e^- \to \bar{q}qg$ утворення кваркової пари з випромінюванням додаткового ґлюона g. Спершу з'ясуйте його кінематику. Нехай q є повним 4-імпульсом реакції, k_1 і k_2 — 4-імпульсами кінцевих кварка й антикварка, а k_3 — 4-імпульсом ґлюона. Визначимо

$$x_i = \frac{2k_i \cdot q}{q^2}, \qquad i = 1, 2, 3;$$

це є відношенням енерґії частки i в системі центру мас до максимально можливої енерґії. Тепер покажіть, що: (i) $\sum x_i = 2$; (ii) решта лоренцових скалярів, що містять лише імпульси кінцевого стану, можна виразити через x_i та маси часток; і (iii) повний інтеґрал по тричастковому фазовому простору можна записати як

$$\int d\Pi_3 = \prod_i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - \sum_i k_i) = \frac{q^2}{128\pi^3} \int dx_1\, dx_2.$$

Знайдіть межі інтеґрування по x_1 і x_2, якщо кварк та антикварк є безмасовими, а ґлюон має масу μ.

(c) Зобразіть фейнманові діаґрами для процесу $e^+e^- \to \bar{q}qg$ у провідному порядку за α та α_g й обчисліть диференційний переріз. Ви можете позбутися інформації про кореляцію між кутом початкового пучка та напрямком імпульсів кінцевих часток наступним чином. Звичайний прийом зі слідами для обчислення квадрату матричного елемента дає в нашому випадку результат вигляду

$$\int d\Pi_3 \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 = L_{\mu\nu} \int d\Pi_3\, H^{\mu\nu},$$

де $L_{\mu\nu}$ представляє електронний слід, а $H^{\mu\nu}$ — кварковий. Якщо проінтеґруєте по всіх параметрах кінцевого стану за винятком x_1 та x_2, які є скалярами, то єдиним 4-вектором, що характеризуватиме кінцевий стан, залишиться q^μ. З іншого боку, $H_{\mu\nu}$ задовольняє

$$q^\mu H_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} q^\nu = 0.$$

Чому це справедливо? (Існує арґументація, що ґрунтується на засадничих принципах, проте вам буде корисно перевірити цю рівність безпосередньо, шляхом прямих викладок.) Оскільки після інтеґрування по векторах кінцевого стану $\int H^{\mu\nu}$ залежить винятково від q^μ

та скалярів, він може мати лише такий вигляд

$$\int d\Pi_3\, H^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) \cdot H,$$

де H є скаляр. З урахуванням цього, покажіть, що

$$L_{\mu\nu} \int d\Pi_3\, H^{\mu\nu} = \frac{1}{3}\left(g^{\mu\nu} L_{\mu\nu}\right) \cdot \int d\Pi_3 \left(g^{\rho\sigma} H^{\rho\sigma}\right).$$

Скориставшись цим прийомом, отримайте вираз для диференційного перерізу

$$\frac{d\sigma}{dx_1 dx_2}\left(e^+e^- \to \bar{q}q\right) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3Q_f^2 \cdot \frac{\alpha_g}{2\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

у межі $\mu \to 0$. Коли припустити, що кожна частка в кінцевому стані фізично реалізується як струмінь сильно взаємодіючих часток, то ця формула дає ймовірність появи трьох таких струменів у процесі e^+e^--анігіляції. Форма розподілу в x_i є абсолютним передбаченням, і вона збігається з експериментальними даними, що дозволяє виміряти константу зв'язку для сильної взаємодії.

(d) Тепер зробіть заміну $\mu \neq 0$ у формулі для диференційного перерізу з пункту (c) й уважно проінтеґруйте її в межах, знайдених у пункті (b). Можете вважати, що $\mu^2 \ll q^2$. У цьому наближенні знайдіть інфрачервоно розбіжні члени порядків $\log(q^2/\mu^2)$ і $\log^2(q^2/\mu^2)$, кінцеві члени порядку 1, а також члени, що в явному вигляді містять степені від (μ^2/q^2). Останні можете відкинути, бо вони обертаються на нуль при $\mu \to 0$. Наразі нас цікавлять лише члени з інфрачервоними розбіжностями.

(e) Проаналізуйте інтеґрал з фейнмановими параметрами, одержаний в (a), знову працюючи в наближенні $\mu^2 \ll q^2$. Зауважте, що в межах інтеґрування присутні синґулярності. Їх можна проконтролювати, обчислюючи інтеґрал для простороподібного q, а потім аналітично продовживши на фізичні значення імпульсу. Для цього зробіть підстановку $Q^2 = -q^2$ і обчисліть інтеґрал для $Q^2 > 0$, відтак акуратно здійсніть аналітичне продовження на $Q^2 = -q^2 - i\varepsilon$. Об'єднайте цей результат з результатом пункту (d), щоб отримати повний переріз для процесу

$$e^+e^- \to (\text{сильно взаємодіючі частки})$$

в порядку α_g. Покажіть, що всі інфрачервоні лоґарифми в цій величині скорочуються, тож у межі $\mu \to 0$ вона добре визначена.

(f) І, нарешті, зберіть разом усі члени порядку 1 в інтеґруваннях з пунктів (d) і (e). Для їх точного обчислення буде корисною формула

$$\int_0^1 dx\, \frac{\log(1-x)}{x} = -\frac{\pi^2}{6},$$

яку неважко довести. Покажіть, що повний переріз для цього порядку α_g є

$$\sigma\left(e^+e^- \to \bar{q}q \text{ або } \bar{q}qg\right) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3Q_f^2 \cdot \left(1 + \frac{3\alpha_g}{4\pi}\right).$$

Ця формула дає другий спосіб вимірювання константи зв'язку для сильної взаємодії. Експериментальні результати (з урахуванням похибок) цілком узгоджуються з результатами, одержаними за методом пункту (c).

Додаток

Фізичні константи і перевідні множники

Точно відомі фізичні константи:

$$c = 2,998 \times 10^{10} \text{ см/с}$$
$$\hbar = 6,582 \times 10^{-22} \text{ МеВ} \cdot \text{с}$$
$$e = -1,602 \times 10^{-19} \text{ Кл}$$
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137,04} = 0,00730$$
$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1,166 \times 10^{-5} \text{ ҐеВ}^{-2}.$$

Маси часток (помножені на c^2):

e : 0.5110 МеВ	p : 938,3 МеВ	$W^{\pm}$: 80,2 ҐеВ
μ : 105.6 МеВ	n : 939,6 МеВ	Z^0 : 91,19 ҐеВ
τ : 1777 МеВ	$\pi^{\pm}$: 139,6 МеВ	π^0 : 135,0 МеВ

Корисні комбінації:

Радіус Бора: $a_0 = \dfrac{\hbar}{\alpha m_e c} = 5,292 \times 10^{-9}$ см

Комптонова довжина хвилі електрона: $\lambda\!\!\!^{-} = \dfrac{\hbar}{m_e c} = 3,862 \times 10^{-11}$ см

Класичний радіус електрона: $r_e = \dfrac{\alpha\hbar}{m_e c} = 2,818 \times 10^{-13}$ см

Томпсонів переріз розсіяння: $\sigma_T = \dfrac{8\pi e_e^2}{3} = 0,6652$ барн

Переріз розсіяння при анігіляції: $1R = \dfrac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{цм}}^2} = \dfrac{86,8 \text{ нбарн}}{(E_{\text{цм}} \text{ у ҐеВ})^2}$

Перевідні множники:

$$(1 \text{ ҐеВ})/c^2 = 1,783 \times 10^{-24} \text{ г}$$

$$(1\ \text{ҐеВ})^{-1}(\hbar c) = 0,1973 \times 10^{-13}\ \text{см} = 0,1973\ \text{фм}$$

$$(1\ \text{ҐеВ})^{-2}(\hbar c)^2 = 0,3894 \times 10^{-27}\ \text{см}^2 = 0,3894\ \text{мбарн}$$

$$1\ \text{барн} = 10^{-24}\ \text{см}^2$$

$$(1\ \text{в/м})(e\hbar c) = 1,973 \times 10^{-25}\ \text{ҐеВ}^2$$

$$(1\ \text{тл})(e\hbar c^2) = 5,916 \times 10^{-17}\ \text{ҐеВ}^2$$

Бібліоґрафія

[1] Abrikosov, A. A., Gorkov, L. P., and Dzyaloshinskii, I. E., *Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics* (second edition), Pergamon, Oxford, 1965. Класичний посібник із застосування фейнманових діаґрам у теорії конденсованої матерії.

[2] Aitchison, Ian J. R. and Hey, Anthony J. G., *Gauge Theories in Particle Physics* (second edition), Adam Hilger, Bristol, 1989. Елементарний вступ у калібрувальні теорії, зосереджений здебільшого на трирівневих процесах.

[3] Anderson, P. W., *Basic Notions of Condensed Matter Physics,* Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984. Неформальний огляд концепції порушення симетрії і перенормувань у застосуванні до конденсованої матерії.

[4] Bailin, D. and Love, A., *Introduction to Gauge Field Theory* (revised edition), Institute of Physics Publishing, Bristol, 1993. Теорія розвинена цілком на засадах функціонального інтеґрування.

[5] Balian, Roger and Zinn-Justin, Jean (eds.), *Methods in Field Theory,* North-Holland, Amsterdam, 1976. Лекції з функціональних методів, перенормувань і калібрувальних теорій, прочитані в літній школі теоретичної фізики, Ош, 1975 рік.

[6] Barger, Vernon and Phillips, Roger J. N., *Collider Physics,* Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1987. Розгляд застосувань КХД до феноменолоґії колайдерів високих енерґій.

[7] Baym, Gordon, *Lectures on Quantum Mechanics,* Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1969. Конспективний, неформальний текст, насичений нетривіальними прикладами.

[8] Berestetskii, V. B., Lifshitz, E. M., and Pitaevskii, L. P., *Quantum Electrodynamics* (second edition, trans. J. B. Sykes and J. S. Bell), Pergamon, Oxford, 1982. Чудовий виклад застосувань КЕД.

[9] Bjorken, James D. and Drell, Sidney D., *Relativistic Quantum Mechanics,* McGraw-Hill, New York, 1964. Вивчення фейнманових діаґрам на підставі інтуїтивних арґументів, без запровадження полів.

[10] Bjorken, James D. and Drell, Sidney D., *Relativistic Quantum Fields,* McGraw-Hill, New York, 1965. Запровадження фейнманових діаґрам з польової точки зору, із застосуванням канонічного квантування.

[11] Brown, Lowell S., *Quantum Field Theory,* Cambridge University Press, New York, 1992. Ґрунтовний розгляд засад квантової теорії поля і її застосування до процесів розсіяння.

[12] Cahn, Robert N., *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations,* Benjamin/Cummings Menlo Park, California, 1984. Написано фізиком для фізиків.

[13] Calm, Robert N. and Goldhaber, Gerson, *The Experimental Foundations of Particle Physics,* Cambridge University Press, Cambridge, 1989. Передрук низки ориґінальних статей, доповнених вступними оглядами, додатковими посиланнями та вправами. Дуже рекомендовано.

[14] Carrier, George F., Krook, Max, and Pearson, Carl E., *Functions of a Complex Variable,* McGraw-Hill, New York, 1966. Чудовий практичний підручник з методів комплексних змінних і контурного інтеґрування.

[15] Cheng, Ta-Pei and Li, Ling-Fong, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics,* Oxford University Press, New York, 1984. Просунута, авторитетна моноґрафія.

[16] Coleman, Sidney, *Aspects of Symmetry,* Cambridge University Press, Cambridge, 1985. Неформальні лекції з калібрувальних полів і симетрії, прочитані між 1966 і 1979 рр.

[17] Collins, John, *Renormalization,* Cambridge University Press, Cambridge, 1984. Ґрунтовний виклад технічного апарату, необхідного для доведення перенормованості в усіх порядках, розширення операторного добутку і теорем факторизації.

[18] Commins, Eugene D. and Bucksbaum, Philip H., *Weak Interactions of Leptons and Quarks,* Cambridge University Press, Cambridge, 1983. Вичерпний огляд теорії й експерименту.

[19] Deser, Stanley, Grisaru, Marc, and Pendleton, Hugh, *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory,* MIT Press, Cambridge, 1970, vol. 1. Чотири корисні лекції, прочитані в літній школі.

[20] Fetter, Alexander L. and Walecka, John Dirk, *Quantum Theory of Many-Particle Systems,* McGraw-Hill, New York, 1971. Посібник із застосування фейнманових діаґрам у фізиці ядра і конденсованої матерії.

[21] Fetter, Alexander L. and Walecka, John Dirk, *Theoretical Mechanics of Particles and Continua,* McGraw-Hill, New York, 1980. Включає кілька розділів з механіки суцільних середовищ і корисні математичні додатки.

[22] Feynman, Richard P. and Hibbs, A. R., *Quantum Mechanics and Path Integrals,* McGraw-Hill, New York, 1965. Посібник із застосування функціональних інтеґралів у нерелятивістській квантовій механіці.

[23] Feynman, Richard P., *QED: The Strange Theory of Light and Matter,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1985. Запис чотирьох лекцій для широкої аудиторії, у яких представлений фейнманів підхід до квантової механіки, включно з фейнмановими діаґрамами. Дуже рекомендовано.

[24] Field, Richard D., *Applications of Perturbative QCD,* Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1989. Корисний опис методів, необхідних для обчислень у КХД поза головним порядком.

[25] Georgi, Howard, *Weak Interactions and Modern Particle Theory,* Benjamin/ Cummings, Menlo Park, California, 1984. Просунутий, проникливий огляд обраних розділів.

[26] Goldstein, Herbert, *Classical Mechanics* (second edition), Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980. У Розділі 12 викладено класичну релятивістську теорію поля.

[27] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series, and Products* (trans, and ed. by Alan Jeffrey), Academic Press, Orlando, Florida, 1980.

[28] Griffiths, David, *Introduction to Elementary Particles,* Wiley, New York, 1987. Чудовий огляд аспірантського рівня.

[29] Gross, Franz, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory,* Wiley, New York, 1993. Включає низку розділів з „передової квантової механіки“ і вступ до зв'язаних станів.

[30] Halzen, Francis and Martin, Alan D., *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics,* Wiley, New York, 1984. Цілком ґрунтується на методі фейнманових діаґрам; виклад зосереджено на калібрувальних теоріях.

[31] Itzykson, Claude and Zuber, Jean-Bernard, *Quantum Field Theory,* McGraw-Hill, New York, 1980. Дуже ґрунтовний підручник.

[32] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics* (second edition), Wiley, New York, 1975. Класичний підручник з класичної електродинаміки.

[33] Jauch, J. M. and Rohrlich, F., *The Theory of Photons and Electrons* (second edition), Springer-Verlag, Berlin, 1976. Авторитетна моноґрафія з КЕД.

[34] Kaku, Michio, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction,* Oxford University Press, New York, 1993. Містить короткі вступні розділи до кількох важливих тем.

[35] Kinoshita, T., ed., *Quantum Electrodynamics,* World Scientific, Singapore, 1990. Збірка статей, присвячених точним перевіркам КЕД.

[36] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Statistical Physics* (third edition, Part 1, trans. J. B. Sykes and M. J. Kearsley), Pergamon Press, 1980. Ґарний підручник зі статистичної механіки, містить ориґінальний педаґоґічний виклад теорії фазових переходів Ландау.

[37] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *The Classical Theory of Fields* (fourth revised English edition, trans. Morton Hamermesh), Pergamon, Oxford, 1975. Містить стислий виклад електромаґнітної теорії з лаґранжової точки зору.

[38] Ma, Shang-Keng, *Modern Theory of Critical Phenomena,* Benjamin/Cummings, 1976. Огляд методів ґрупи перенормувань у теорії критичних явищ.

[39] Mandl, F. and Shaw, G., *Quantum Field Theory* (revised edition), Wiley, New York, 1993. Найпростіша книга з теорії поля; розглянуті КЕД і електрослабка теорія на основі канонічного квантування.

[40] Mattuck, Richard D., *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem,* McGraw-Hill, New York, 1967. Ясний і простий посібник з фейнманових діаґрам у фізиці твердого тіла.

[41] Parisi, Giorgio, *Statistical Field Theory,* Benjamin/Cummings, 1988. Розвинене застосування ідей квантової теорії поля до проблем статистичної механіки.

[42] Perkins, Donald H., *Introduction to High Energy Physics* (third edition), Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1987. Чудовий огляд явищ з порівняно невеликим наголосом на фейнманові діаґрами і калібрувальні теорії.

[43] Quigg, Chris, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions,* Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1983. Дуже гарний огляд калібрувальних теорій та їх експериментальних перевірок.

[44] Ramond, Pierre, *Field Theory: A Modern Primer* (second edition), Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989. Містить чудовий виклад ґрупи Лоренца, функціональних інтеґралів, теорії ϕ^4 і квантування калібрувальних полів.

[45] Reichl, L. E., *A Modern Course in Statistical Physics,* University of Texas Press, Austin, 1980. Ґрунтовний підручник зі статистичної механіки.

[46] Ross, Graham G., *Grand Unified Theories,* Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984. Ясний вступ у калібрувальні теорії, що об'єднують взаємодії у фізиці часток.

[47] Ryder, Lewis H., *Quantum Field Theory,* Cambridge University Press, Cambridge, 1985. Коротко розглянуто формальні аспекти теорії.

[48] Sakurai, J. J., *Advanced Quantum Mechanics,* Addison-Wesley, Reading, 1967. Виклад фейнманових діаґрам без запровадження поняття поля.

[49] Schiff, Leonard I., *Quantum Mechanics* (third edition), McGraw-Hill, New York, 1968.

[50] Schweber, Silvan S., *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga,* Princeton University Press, Princeton, 1994. Чудовий виклад історії КЕД приблизно до 1950 р.

[51] Schwinger, Julian (ed.), *Selected Papers on Quantum Electrodynamics,* Dover, New York, 1958. Передрук важливих статей, написаних між 1927 і 1953 рр.

[52] Shankar, Ramamurti, *Principles of Quantum Mechanics,* Plenum, New York, 1980. Дуже ясний виклад засад теорії.

[53] Stanley, H. Eugene, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena,* Oxford University Press, Oxford, 1971.

[54] Sterman, George, *Introduction to Quantum Field Theory,* Cambridge University Press, Cambridge, 1993. Вступний підручник з особливим наголосом на основах пертурбативної КХД.

[55] Taylor, Edwin F. and Wheeler, John Archibald, *Spacetime Physics* (second edition), Freeman, New York, 1992. Елементарний, але вельми корисний вступ до спеціальної теорії відносності.

[56] Taylor, John R., *Scattering Theory,* Robert E. Krieger, Malabar, Florida, 1983 (reprint of original edition published by Wiley, New York, 1972). Ясний виклад теорії розсіяння в нерелятивістській квантовій механіці.

[57] Taylor, J. C, *Gauge Theories of Weak Interactions,* Cambridge University Press, Cambridge, 1976. Стислий виклад стандартної моделі.

[58] Zinn-Justin, Jean, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (second edition), Oxford University Press, Oxford, 1993. Застосування теорії перенормувань до вивчення критичних явищ.

Додано при перекладі:

[59] Ballentine, L. E., *Quantum Mechanics. A Modern Development,* World Scientific Publishing, Singapour, 1998.

[60] Eden, R. J., Landshoff, P. V., Olive, D .I., Polkinghorne, J. C., *The Analytic S-Matrix,* Cambridge University Press, 1966.

[61] Weinberg, S., *The Quantum Theory of Fields. Volume I, Foundations*, Oxford University Press, Oxford, 1995.

[62] Weinberg, S., *The Quantum Theory of Fields. Volume II, Modern Applications*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

[63] Weinberg, S., *The Quantum Theory of Fields. Volume III, Supersymmetry*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[64] Streater, R. F. and Wightman, A. S., *PCT, Spin and Statistics, and All That,* Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1964.

[65] Вакарчук, І. О., *Квантова механіка,* Львівський університет, Львів, 1998.

[66] Дирак, П. А. М., *Принципы квантовой механики,* Мир, Москва, 1979.

[67] Мессиа, А., *Квантовая механика. Том 1,* Наука, Москва, 1978.

[68] Мессиа, А., *Квантовая механика. Том 2,* Наука, Москва, 1979.

[69] Садовский, М. В., *Лекции по квантовой теории поля,* Институт компьютерных исследований, Москва — Ижевск, 2003.