Джордан Елленберг

Як ніколи не помилятися

Сила математичного мислення

Бестселер New York Times

Як ніколи не помилятися

Jordan Ellenberg

HOW NOT TO BE WRONG

The Power of Mathematical Thinking

The Penguin Press · New York · 2014

Джордан Елленберґ

Як ніколи не помилятися

Сила математичного мислення

Переклав з англійської
Андрій Іщенко

«Наш формат» · Київ · 2017

УДК 51-7
Е50

Елленберґ Джордан
Е50 Як ніколи не помилятися. Сила математичного мислення / пер. з англ. Андрій Іщенко. — К. : Наш формат, 2017. — 408 с.
ISBN 978-617-7388-75-2 (паперове видання)
ISBN 978-617-7513-41-3 (електронне видання)

Математика — це не лише цифри, обчислення й правила, як могло здатися в школі. Професор Джордан Елленберґ доводить, що ця наука розкриває приховану красу й логіку всього, що нас оточує, і має прямий стосунок до нашого щоденного життя.

Автор показує, як проблеми в політиці, медицині, бізнесі, богослов'ї вирішуються за допомогою математики. А ще з математичного погляду пояснює, за скільки часу потрібно приїжджати в аеропорт, чим насправді є «громадська думка», чому у високих батьків низькі діти, як виграти в лотерею і безліч інших речей. Джордан Елленберґ переконаний, що, озброївшись математичними інструментами, кожен зможе краще й глибше зрозуміти світ.

УДК 51-7

Перекладено за виданням
Jordan Ellenberg. *How Not To Be Wrong: The Power of Mathematical Thinking*
(NY, Penguin Press, 2014, ISBN 978-1-59420-522-4)

Літературна редакторка *Олена Рудь*. Коректорка *Інна Іванюсь.* Верстальник *Денис Піорко.* Дизайнерка обкладинки *Євгенія Мелеховець.* Художня редакторка *Катерина Аврамчук.* Технічний керівник *Микола Климчук.* Відповідальний за випуск *Антон Мартинов.*

Надруковано в Україні видавництвом «Наш формат» у типографії «Юнісофт». Підписано до друку 25.05.2017. Тираж 3000 прим. Термін придатності необмежений. Замовлення № 237/05.
ТОВ «НФ», пров. Алли Горської, 5, м. Київ, Україна, 01032, тел. (044) 222-53-49, pub@nashformat.ua.
Свідоцтво ДК No 4722 від 19.05.2014. Висновок Держ. сан.-епідем. експертизи № 05.03.02-04/51017 від 16.11.2015.

Науково-популярне видання
Серія «Світоглядна література»

ISBN 978-617-7388-75-2 (паперове видання)
ISBN 978-617-7513-41-3 (електронне видання)

Зміст

Де мені це знадобиться? 11

Частина перша · **Лінійність**

Розділ 1. Менш схожі на Швецію 29
Розділ 2. Пряма локально, крива глобально 38
Розділ 3. У всіх ожиріння 56
Розділ 4. Скільки це буде у мертвих американцях? 67
Розділ 5. Пирога більше, ніж тарілки 80

Частина друга · **Висновки**

Розділ 6. Балтиморський біржовий брокер і біблійний код 91
Розділ 7. Мертва риба не читає думок 102
Розділ 8. Доведення від неймовірного 127
Розділ 9. Міжнародний журнал гадання по нутрощах 139
Розділ 10. Чуєш, Боже? Це я, баєсівський висновок 155

Частина третя · **Очікування**

Розділ 11. Чого очікувати, сподіваючись на виграш у лотерею 183
Розділ 12. Більше спізнюйтеся на літаки! 216
Розділ 13. Де сходяться рейки 233

Частина четверта · **Регресія**

Розділ 14. Тріумф посередності 269
Розділ 15. Еліпс Ґальтона 283
Розділ 16. Чи змушує вас рак легенів курити? 313

Частина п'ята · **Існування**

Розділ 17. Немає ніякої громадської думки 329

Розділ 18. «З нічого я створив предивний новий світ» 353

Як бути правим 376

Подяки 390

Примітки 392

Присвячую Тані

Найкраще у математиці заслуговує не просто на те, щоб його вивчати як задачу. Його потрібно засвоїти як складову повсякденного мислення — і викликати в думці знову і знову зі щораз більшим піднесенням.

Бертран Рассел. «Вивчення математики» (1902)

Де мені це знадобиться?

Саме зараз десь у світі студентка огризається до викладача математики. Викладач щойно задав їй обчислити тридцять визначених інтегралів, на що піде добрий шмат вихідних.

Є речі, які студентка робила б із більшою охотою. Насправді вона робила б майже що завгодно. Вона в цьому впевнена, бо провела добрий шмат попередніх вихідних за обчисленням інших — але не *надто* відмінних — тридцяти визначених інтегралів. Тому не бачить у цьому сенсу, про що й каже викладачеві. І в якийсь момент розмови студентка поставить запитання, якого викладач боїться найбільше:

«Де мені це знадобиться?»

Імовірно, викладач математики скаже щось таке:

«Знаю, що це видається вам нудним, але пам'ятайте, що ви не знаєте, якою буде ваша майбутня робота — зараз ви не бачите в цьому сенсу, але, можливо, на вашій роботі виявиться, що це має справді велике значення — правильно і швидко вручну обчислювати визначені інтеграли».

Така відповідь рідко задовольняє студентку. Тому що це — брехня. І викладач, і студентка це знають. Кількість дорослих, які коли-небудь скористаються інтегралом $(1 - 3x + 4x^2)^{-2}\,dx$, або формулою косинуса 3θ, або алгоритмом діленням многочленів, можна порахувати на пальцях кількох тисяч рук.

Брехня не дуже задовольняє і викладача. Кому, як не мені, знати: за багато років викладання математики я задавав обчислення визначених інтегралів багатьом сотням студентів.

На щастя, є краща відповідь. Десь така:

«Математика — це не просто послідовність обчислень, які потрібно зубрити, поки у вас забракне терпіння чи сил — хоча, можливо, саме так вас учили в курсі *математики*. Ці інтеграли для математики — як силові вправи і загальна фізична підготовка для футболу. Якщо ви хочете грати у футбол — маю на увазі *справді грати*, на рівні змагань, — потрібно робити багато нудних, однакових, начебто безглуздих вправ. Чи *використовують* коли-небудь професійні гравці ці тренувальні вправи? Ну, ви ніколи не побачите на полі гравця, що тягне гантелі чи оббігає конуси. Але ви побачите, як гравці використовують силу, швидкість, реакцію і гнучкість, які вони випрацювали цими тренуваннями — довгими тижнями виснажливих тренувань. Ці вправи — підготовка до футболу.

Якщо ви хочете заробляти футболом на життя чи навіть просто грати в університетській команді, вам доведеться віддати багато вихідних нудним тренуванням. По-іншому не вийде. Але є й добра новина. Якщо так тренуватися — це для вас занадто, ви все одно зможете грати у футбол для задоволення, із друзями. Ви зможете радіти вправному пасу між захисниками або результативному удару з далекої відстані, доступним тільки справжнім спортсменам. Ви будете здоровішим і щасливішим, ніж якби просто сиділи вдома і дивилися гру професіоналів по телевізору.

Математика — багато в чому те саме. Ви можете не мати на меті отримати роботу, пов'язану з математикою. Це нормально — більшість людей не мають такої мети. Але ви можете займатися математикою. Ймовірно, ви *вже займаєтеся* математикою, навіть якщо цього не усвідомлюєте. Математика вплетена у те, як ми мислимо. І математика вам допомагає. Знати математику — це як надягти рентгенівські окуляри, які відкривають структуру, приховану за незугарною й хаотичною поверхнею світу. Математика — це наука не помилятися, її прийоми і методи віками виковувалися тяжкою працею і запеклими суперечками. Маючи під рукою математичний інструментарій, ви зможете розуміти світ глибше і краще. Усе, що потрібно — це тренер чи просто книжка, які навчать вас правил і головних прийомів. Я буду тренером. Покажу вам, як».

Через брак часу я рідко кажу таке в аудиторії. Книжка дає трохи більше простору. Я сподіваюся підкріпити щойно зроблені гучні заяви, показуючи, як проблеми, що повсякчас постають перед нами — у політиці, медицині, бізнесі, богослов'ї, — вирішуються за допомогою математики. Зрозумівши це, ви отримаєте доступ до ідей, не досяжних жодним іншим способом.

Навіть якби я виголосив цю наснажливу промову повністю, мою студентку — якщо вона справді має гострий розум — це, напевно, не переконає.

«Усе так, професоре, — скаже вона. — Але дуже абстрактно. Ви кажете, що за допомогою математики можете зрозуміти щось правильно, а без неї — неправильно. Що саме? Наведіть *приклад із життя*».

І тоді я розповім їй історію Абрагама Вальда і відсутніх кульових пробоїн.

Абрагам Вальд і відсутні кульові пробоїни

Ця історія, як і багато історій періоду Другої світової війни, починається з переслідування нацистами єврея, а закінчується тим, що їм це обернулося на гірше. Абрагам Вальд народився 1902 року[1] у місті, яке звалося тоді Клаузенбурґом, у країні, яка мала тоді назву Австро-Угорської імперії. Коли Вальд був підлітком, Перша світова війна змінила назву його рідного міста на Клуж, а країни — на Румунію. Онук рабина і син кошерного пекаря, Вальд-молодший майже від самого початку був математиком. Його талант швидко помітили, і він вступив до Віденського університету, де взявся за вивчення тем, які вважаються абстрактними і тяжкими навіть за стандартами чистої математики — теорії множин і метричних просторів.

Та коли Вальд закінчив навчання, була середина 1930-х років, Австрія потерпала від глибокої економічної кризи, а стати професором у Відні іноземцеві було неможливо. Врятувала Вальда пропозиція роботи від Оскара Моргенштерна. Згодом Моргенштерн виїде до Сполучених Штатів, де братиме участь у розробці теорії ігор, але 1933 року він обіймав посаду директора Австрійського інституту економічних досліджень і взяв Вальда на роботу з маленькою зарплатнею, «математичним підсобником». Як виявилося, для Вальда це було добрим кроком: його досвід в економіці допоміг отримати стипендію від Комісії Коулза, економічного інституту, розташованого тоді в Колорадо-Спринґс. Незважаючи на постійне погіршення політичного становища, Вальд не хотів робити крок, який змусить його назавжди залишити чисту математику. Але зрештою нацисти захопили Австрію, і це допомогло Вальду визначитися. Уже через кілька місяців у Колорадо йому запропонували посаду професора статистики в Колумбійському університеті; він ще раз спакував валізи і переїхав до Нью-Йорка.

І саме там йому довелося воювати.

Група статистичних досліджень (ГСД)[2], у якій Вальд працював більшу частину Другої світової війни, являла собою секретну програму, яка мобілізувала американських статистиків для роботи на війну — щось на зразок Мангеттенського проекту, за винятком того, що тут розробляли бойові рівняння, а не вибухові пристрої. ГСД справді розташовувалася на Мангеттені, у будинку № 401 по 118-й вулиці, на Морніґсайд Гайтс, лише за квартал від Колумбійського університету. Сьогодні тут квартири викладачів університету та кілька приймалень лікарів, але 1943-го це був постійно заклопотаний нервовий центр військової математики. У Групі прикладної математики Колумбійського університету десятки молодих дівчат, схилившись над настільними калькуляторами Маршана, обчислювали формули для оптимальної кривої, рухаючись якою, винищувач найдовше триматиме ворожий літак на прицілі. В іншому приміщенні група дослідників з Принстона розробляла інструкції для стратегічних бомбардувальників. А просто за сусідніми дверима Колумбійське відділення працювало над створенням атомної бомби.

Однак ГСД була найпотужнішою і зрештою найвпливовішою з усіх цих груп. Тут поєднувалися інтелектуальна відкритість і інтенсивна праця академічної установи з відчуттям спільної мети, яке дає тільки велика відповідальність. «Коли ми давали рекомендації, — пише керівник ГСД В. Аллен Волліс, — часто це мало результат. Боєзапас винищувачів за рекомендаціями Джека Вулфовіца* був укомплектований різними типами боєприпасів, і пілоти могли повернутися або не повернутися. Літаки морської авіації випускали ракети, пальне яких перевірялося за планом вибіркового контролю Ейба Гіршика, і ракети могли вибухнути і зруйнувати наші літаки, а могли уразити цілі»[3].

Математичні таланти, задіяні у роботі, відповідали серйозності завдання. За словами Волліса, ГСД була «найвидатнішою групою статистиків усіх часів, і за кількістю, і за якістю»[4]. Там працював Фредерік Мостеллер, який згодом організує факультет статистики у Гарварді. А ще Леонард Джиммі Севідж, піонер теорії прийняття рішень і великий прихильник наукової дисципліни, яка отримала назву Баєсової статистики**. Часом забігав математик з МІТ Норберт Вінер, творець кібернетики. Це була група, у якій майбутній нобелівський лауреат з економіки Мілтон Фрідман часто виявлявся четвертою найрозумнішою людиною.

Найрозумнішим із присутніх зазвичай був Абрагам Вальд. Вальда, викладача Аллена Волліса в Колумбійському університеті, у групі вважали таким собі математичним світилом. Він усе ще був «громадянином ворожої держави» і формально не мав допуску до секретних документів, які сам же й готував; у ГСД жартували[5], що секретарям наказали виривати в нього з рук кожну сторінку записника, щойно він закінчить на ній писати. Вальд був тут до певної міри несподіваним персонажем. Його вабила абстракція, а не прикладні задачі. Утім очевидним було і його прагнення застосувати свої таланти у боротьбі проти нацистів. А коли потрібно було надати неясній ідеї математичної точності, саме Вальда краще було мати на своєму боці.

Отже, про що йдеться?[6] Ви не хочете, щоб ворожі винищувачі збивали ваші літаки, і тому ви їх бронюєте. Але броня робить літак тяжчим, а тяжчі літаки менш маневрені, і їм потрібно більше пального. Надмір броні на літаку — проблема; брак броні на літаку — теж проблема. Оптимальне рішення десь посередині. Причина, з якої ви зібрали групу математиків у нью-йоркській квартирі, — знайти це оптимальне рішення.

---

* Батько Пола.

** Севідж був майже зовсім сліпим, бачив лише куточком одного ока. Якось він прожив шість місяців на самих лише індіанських харчах, щоб довести свою думку про дослідження Арктики. Просто подумав, що це варто згадати.

Військові прийшли до ГСД із корисними, на їхню думку, даними. Американські літаки поверталися з боїв над Європою, всіяні кульовими пробоїнами. Однак ушкодження не розподілялися рівномірно по корпусу літака. У фюзеляжах пробоїн було більше, у моторних відділеннях менше.

Частина літака	Кількість пробоїн на квадратний фут
Двигун	1,11
Фюзеляж	1,73
Паливна система	1,55
Решта літака	1,8

Військові вважали, що є можливість для оптимізації: можна отримати той самий захист меншим обсягом броні, якщо зосередити її у місцях, де вона потрібна більше — там, де літаки отримують найбільше ушкоджень. Але скільки саме потрібно броні для цих частин літака? По відповідь вони і прийшли до Вальда. На це питання відповіді вони не отримали.

Вальд сказав, що бронювати частини, де є пробоїни, не потрібно. Бронювати потрібно ті, де пробоїн *немає*: двигуни.

Ідея Вальда полягала у простому питанні: куди щезають пробоїни, яких бракує? Ті, які були б на всьому корпусі, якби ушкодження розподілялися по ньому рівномірно? Вальд мав цілковиту певність, що знає це. Пробоїни, яких бракувало, були на відсутніх літаках. Причина того, що літаки поверталися з меншою кількістю пробоїн у моторних відділеннях, полягала в тому, що літаки з пробоїнами у двигунах не поверталися. Тоді як велика кількість літаків, що поверталися на аеродроми з порешеченими фюзеляжами, являла собою доказ того, що з пробоїнами у фюзеляжі можна (а тому потрібно) миритися. У післяопераційних палатах госпіталів набагато більше пацієнтів з пробитими кулями ногами, ніж грудьми. Та це не тому, що солдати не отримують поранень у груди, а тому, що ті, кого поранило у груди, до післяопераційної палати не доживають.

Існує старий математичний прийом, що прояснює картину гранично чітко: *прирівняти деякі змінні до нуля*.

У нашому випадку така змінна — це ймовірність того, що літак, який отримав ураження двигуна, залишається у повітрі. Прирівняти ці змінні до нуля означає, що єдине ураження двигуна гарантовано збиває літак. Як у такому разі виглядатимуть дані? Тоді б були літаки, що повертаються на аеродром із пробоїнами у крилах, фюзеляжі, носі — але без жодної пробоїни у двигуні. Військові аналітики мали два варіанти пояснення цього: або німецькі кулі влучають в усі частини літаків, за винятком однієї, або двигун є місцем стовідсоткової вразливості. Обидва варіанти пояснюють отримані дані, але останнє набагато достовірніше. Бронювати треба там, де пробоїн немає.

Рекомендацію Вальда було швидко втілено в життя; вона використовувалася у військовій авіації під час Корейської і В'єтнамської війн[7]. Не можу точно сказати, скільки американських літаків було врятовано, проте, поза сумнівом, наступники ГСД у сьогоднішній армії знають це достеменно. Американські військові традиційно дуже добре усвідомлюють одну річ: країни перемагають у війнах не через те, що вони хоробріші або вільніші за супротивника, чи тому, що Бог до них трішечки ласкавіший. Переможці, як правило, — це ті хлопці, чиїх літаків збивають на 5 % менше, хто використовує на 5 % менше пального, хто дає на 5 % більше харчів своїй піхоті за 95 % вартості. Цього не побачиш у кінофільмах про війну, але саме з цього робиться війна. І на кожному кроці тут — математика.

Чому Вальд розумів те, чого не розуміли військові, що значно більше за нього знали про війну в повітрі? Усе зводиться до натренованого математикою способу його мислення. Математик завжди запитує: «З яких припущень ви виходите? Чи обґрунтовані вони?» Це може дратувати. Але це водночас може бути надзвичайно продуктивним. У нашому випадку військові мимохіть робили припущення: літаки, які повертаються з бою, становлять випадкову вибірку всіх літаків. Якби це було так, можна було б робити висновки про розподіл кульових пробоїн на всіх літаках за розподілом пробоїн на тих, що повернулися. Тільки-но ви розумієте, що висуваєте таку гіпотезу, відразу стає ясною її докорінна хибність; немає жодної підстави вважати, що літаки мають однаковий шанс не бути збитими безвідносно до того, куди саме вони утримують ураження. Математичною мовою, до якої ми повернемося у розділі 15, кажуть, що між показниками виживання літаків і місцями уражень *існує кореляція*.

Ще одна перевага Вальда полягала у його схильності до абстракції. Вулфовіц, який учився у Вальда в Колумбійському університеті, пише, що він найбільше полюбляв задачі «найабстрактнішого ґатунку»[8] і що він «завжди охоче говорив про математику, але не був зацікавлений у її популяризації і практичному застосуванні».

Через такий характер Вальдові було тяжко зосереджуватися на прикладних завданнях, це правда. Він вважав, що подробиці щодо літаків, кулеметів і гармат були зайвими — його погляд проникав безпосередньо до математичної структури, на якій усе тримається. Часом через такий підхід можна не помітити того, що має значення. Але він також дає змогу бачити спільну основу проблем, які з поверхового погляду здаються цілковито різними. Таким чином виявляється, що ви маєте важливий досвід навіть у тому, де, здається, не маєте жодного.

Для математика в основі задачі про кульові пробоїни лежить явище, що має назву *систематична помилка уцілілого*. Вона виникає знову і знову, у найрізноманітніших умовах. І якщо ви з нею знайомі, як був знайомий Вальд, ви її помітите, хай там де вона ховається.

Наприклад, у пайових інвестиційних фондах. Оцінка діяльності фондів — це сфера, у якій не хочеться припускатися помилки, навіть незначної. Різниця в 1 % річного зростання може бути різницею між цінним активом і безперспективною інвестицією. Великі фонди, представлені в рейтингу агентства «Морнінґстар», які здійснюють взаємні інвестиції у великі компанії, що приблизно відповідають спискові S&P 500, виглядають як перше. Фонди цієї категорії продемонстрували у період 1995–2004 років середнє зростання в 178,4 %, у середньому добрі 10,8 % на рік*. Начебто виглядає так, що, коли маєш гроші, то потрібно інвестувати у ці фонди, хіба ні?

А от і ні. Дослідження 2006 року компанії «Сейвант Кепітал»[9] допомагає подивитися на представлені цифри дещо тверезіше. Ще раз погляньмо, як агентство «Морнінґстар» отримує ці показники. 2004 рік: беремо всі фонди згаданої категорії агентства «Морнінґстар» і дивимося, як вони зростали протягом останніх десяти років.

Але чогось бракує: *фондів, яких там немає*. Фонди взаємного інвестування не існують вічно. Хтось процвітає, хтось зникає. Ті, що зникають, переважно не заробляють грошей. Тож оцінювати десятилітню вартість фондів взаємного інвестування в кінці десятирічного періоду — це, зрештою, те саме, що оцінювати маневри ухилення пілотів, рахуючи кульові пробоїни на літаках, що повернулися з бою. Що значить, коли на літак припадає не більше за одну пробоїну? Не те, що наші льотчики так майстерно ухиляються від ворожого вогню, а те, що коли літак отримує два ураження, то він загоряється й падає.

Дослідження компанії «Сейвант» показує, що якби нарівні з діючими було враховано діяльність зниклих фондів, показник рентабельності знизився б до 134,5 % — набагато більш звичайні 8,9 % на рік. Це підтверджується і результатами новішого дослідження: масштабне дослідження 2011 року, здійснене виданням «Рев'ю оф Файненс»[10], яке охопило майже 5 тисяч фондів, свідчить, що показник перевищення середньої рентабельності 2641 діючого фонду є приблизно на 20 % вищим, ніж той самий показник, обчислений з урахуванням фондів, яких уже немає. Розміри ефекту систематичної помилки уцілілого можуть здивувати інвесторів, але Абрагама Вальда вони б не здивували.

---

* Якщо чесно, то сам рейтинг S&P 500 показує ще краще зростання — 212,5 % за той самий період.

Математика — це продовження здорового глузду іншими засобами

У цей момент моя молода співрозмовниця зупинить мене і запитає (цілком слушно): а де математика? Вальд був математиком, це правда. Також не можна заперечити, що він знайшов неординарне рішення проблеми кульових пробоїн, але що тут математичного? Тригонометрії немає, немає ні інтегралів, ні нерівностей, ні формул.

По-перше: Вальд користувався формулами. Я розповів історію без них, тому що це тільки вступ. У вступі до книжок про розмноження людей для дошкільнят уся гідравліка процесу, як малюк потрапляє до маминого живота, оминається. Замість неї пишуть щось таке: «Усе в природі змінюється; на зиму листя з дерев опадає, щоб знову з'явитися тільки навесні; скромна гусінь стає лялечкою, щоб знову з'явитися вже чудовим метеликом. Ти теж частина природи, і...»

Зараз ми в цій частині книжки.

Але ми дорослі. Наведімо на секунду потрібну різкість: ось як виглядає приклад сторінки зі справжнього звіту Вальда[11]:

Можна отримати нижню межу Q_i. Припускаємо, що різниця між q_i і q_{i+1} лежить у визначених межах. Отже, для Q_i можна знайти і верхню, і нижню межі.

Припустимо, що

$$\lambda_1 q_i \leq q_{i+1} \leq \lambda_2 q_i$$

де $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$, і виконуються умови такого виразу:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_1^{\frac{j(j-1)}{2}}} < 1 - a_0. \qquad \text{(A)}$$

Строге розв'язання є клопітким, однак наближені значення нижньої і верхньої меж Q_i для $i < n$ можна отримати за допомогою такої процедури. Маємо гіпотетичні дані:

$a_0 = 0{,}780$ $a_3 = 0{,}010$
$a_1 = 0{,}070$ $a_4 = 0{,}005$
$a_2 = 0{,}040$ $a_5 = 0{,}005$
$\lambda_1 = 0{,}80$ $\lambda_2 = 0{,}90$

Умова А задовольняється, оскільки підстановкою отримуємо.

$$0{,}07 + \frac{0{,}04}{0{,}8} + \frac{0{,}01}{(0{,}8)^3} + \frac{0{,}005}{(0{,}8)^6} + \frac{0{,}005}{(0{,}8)^{10}} = 0{,}20529,$$

що менше за

$1 - a_0 = 0{,}22.$

НИЖНЯ МЕЖА Q_i

Спочатку розв'яжемо рівняння 66. Це передбачає розв'язання таких чотирьох рівнянь з додатними коренями g_0, g_1, g_2, g_3.

Сподіваюся, це не було надто жахливим.

Проте думка, що лежить в основі ідеї Вальда, не потребує формул. Ми вже її пояснили, без жодних математичних записів. Тож запитання студентки залишається. Що робить математику математикою? Хіба це не просто здоровий глузд?

Так. Математика — це здоровий глузд. Це ясно на певному базовому рівні. Як комусь пояснити, чому додавання семи речей до п'яти дає той самий результат, що і додавання п'яти до семи? Це неможливо: цей факт вбудовано в наше уявлення про поєднання речей. Математики полюбляють давати назви явищам, які описує наш здоровий глузд: замість того щоб сказати «Додати *цю* річ до *тієї*, це те саме, що *ту* до *цієї*», ми кажемо: «Додавання є комутативним». Чи, оскільки ми ще й полюбляємо символи, пишемо:

Для будь-яких a і b: $a + b = b + a$.

Незважаючи на офіційний вигляд формули, ми говоримо про факт, інстинктивно зрозумілий кожній дитині.

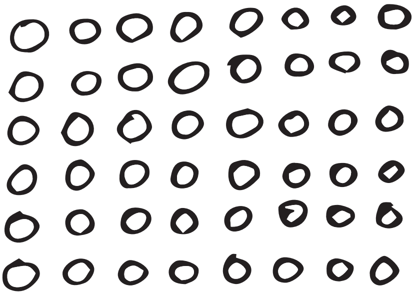
Множення трішки інше. Формула виглядає дуже схоже:

Для будь-яких a і b: $a \times b = b \times a$.

Аналізуючи це твердження, наш розум не каже «Та це ж ясно!» так само миттєво, як у попередньому випадку. Чи погодиться здоровий глузд, що дві групи з шести речей — те саме, що й шість з двох?

Можливо, ні; але це може *стати* здоровим глуздом. Ось мій перший математичний спогад. Я лежу на підлозі у помешканні батьків, щока на килимку, дивлюся на колонку стереосистеми. Дуже ймовірно, що слухаю другий бік «Синього альбому» «Бітлз». Мені, напевно, шість років. Це сімдесяті роки, тому колонку вмонтовано у ДСП, яка збоку має прямокутну решітку отворів для повітря. Вісім отворів по горизонталі, шість по вертикалі. Тож я лежу і дивлюся на ці отвори. Шість рядів отворів. Вісім колонок отворів. Фокусуючи зір, я бачу то рядки, то колонки. Шість рядів по вісім отворів. Вісім колонок по шість отворів.

І ось воно — вісім груп з шести — це те саме, що шість з восьми. Не тому, що це правило мені хтось сказав, а тому, що інакше бути не може. Кількість отворів у плиті — це кількість отворів у плиті, і немає значення, як їх рахувати.



Стереосистема моїх батьків, 1977

Ми схильні навчати математики через довгий список правил. Ви вчите їх по порядку і маєте їм підкорятися, бо коли не підкоряєтеся, то отримаєте двійку. *Це не математика*. Математика — це вивчення речей, які відбуваються певним чином, тому інакше неможливо.

А тепер чесно: не все у математиці можна зробити так гранично ясно для нашої інтуїції, як додавання і множення. Інтеграли інтуїтивно не обчислюються. Однак інтегральне числення випливає зі здорового глузду — Ньютон взяв наше сприйняття предметів, що рухаються по прямій, формалізував його, а потім надбудував над цією формальною структурою загальний математичний опис руху. Маючи теорію Ньютона, ви можете застосовувати її у задачах, від яких голова пішла б обертом, якби не було потрібних рівнянь. Так само ми маємо вбудовані у наш розум системи для оцінювання ймовірності невизначеного результату. Але ці системи дуже слабкі й ненадійні, особливо коли йдеться про надзвичайно рідкісні події. Тут-то ми й підпираємо нашу інтуїцію кількома міцними, точними теоремами і прийомами, і так отримуємо математичну теорію ймовірностей.

Спеціалізована мова, якою спілкуються математики, — це чудовий інструмент для того, щоб передавати складні ідеї швидко і точно. Однак у незнайомих з нею може скластися враження, що ця сфера цілковито чужа для повсякденного мислення. Це абсолютно не так.

Математика схожа на протез на атомній енергії, який ви чіпляєте до свого здорового глузду, грандіозно посилюючи його масштаб і потужність. Незважаючи на силу математики та її часом незрозумілу мову й абстрактність, справжня робота думки, потрібна для неї, трохи відрізняється від того, як ми мислимо про більш повсякденні проблеми. Мені здається корисним тримати в пам'яті образ Залізної Людини, яка пробиває цегляний мур. З одного боку, насправді пробивна сила йде не від м'язів Тоні Старка, а від чудово синхронізованих сервомеханізмів, що живляться від компактного генератора бета-частинок. З іншого боку, з погляду Тоні Старка, він б'є по стіні — так само, як робив би це без обладнання. Тільки набагато, набагато сильніше.

Перефразуючи Клаузевіца: математика — це продовження здорового глузду іншими засобами.

Без строгої структури, яку надає математика, здоровий глузд може заводити на манівці. Це сталося з військовими, що хотіли бронювати частини літаків, які й без того вже мали достатній захист. Та формальна математика без здорового глузду — без постійної взаємодії між абстрактним мисленням і нашим інтуїтивним розумінням кількості, часу, простору, руху, поведінки і невизначеності — була б просто вихолощеним вправлянням у дотримуванні правил і рахівництві. Іншими словами, математика була б такою, якою її вважає знайома нам роздратована студентка.

Це справжня небезпека. Джон фон Нейман в есе «Математик» (1947) попереджав:

> Математика, віддаляючись від свого емпіричного джерела, а тим більше, коли у другому і третьому поколінні вона лише опосередковано наснажується ідеями, що походять від "реальності", опиняється у смертельній небезпеці. Дедалі більше вона стає чистим естетством, дедалі чистішим мистецтвом для мистецтва. Це не обов'язково погано, якщо є сусідні сфери, що тісніше пов'язані з реальністю, або якщо математична дисципліна перебуває під впливом людей з винятковим смаком. Але існує серйозна небезпека, що математична дисципліна буде розвиватися по лінії найменшого опору, що далеко від джерела потік розділиться на численні незначущі потічки і що дисципліна перетвориться на безладну масу деталей і складнощів. Іншими словами, на великій відстані від емпіричного джерела або після великої кількості "абстрактних" близькоспоріднених схрещувань математиці загрожує виродження*.

* Погляди фон Неймана на природу математики обґрунтовані, однак справедливу незручність може викликати його характеристика як «дегенеративної» щодо математики, яка переслідує виключно естетичні цілі. Фон Нейман написав так усього через десять років після виставки «дегенеративного мистецтва» у гітлерівському Берліні. Гітлер вважав, що «мистецтво для мистецтва» — це саме те, що полюбляють євреї й комуністи, а мета його в тому, щоб підважити здорове «реалістичне» мистецтво, потрібне бадьорій тевтонській державі. За таких обставин відчуваєш певне прагнення оборонити математику, яка не обслуговує певну очевидну мету. Автор, політичні переконання якого відрізняються від моїх, на цьому етапі згадав би про активну діяльність фон Неймана з розробки ядерних боєприпасів та засобів їх доставки.

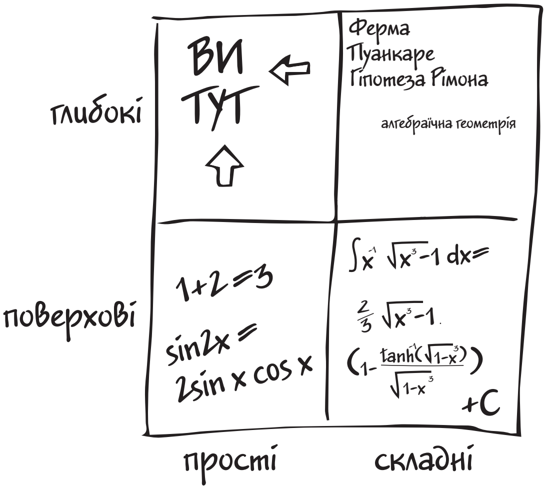
Яка математика буде у цій книжці?

Якщо ваше знайомство з математикою обмежується виключно школою, то вам розповідали дуже скорочену історію, а в деяких важливих моментах — і неправдиву. Шкільна математика будується переважно як послідовність фактів і правил: певних доконаних фактів і правил, що походять від вищої влади і не можуть ставитися під сумнів. Математика за такого підходу вважається цілком незмінною.

Математика не незмінна. Це стосується навіть таких базових об'єктів, як числа й геометричні фігури: і тут ми не знаємо набагато більше, ніж знаємо. А те, що знаємо, було отримано тільки в результаті величезних зусиль, суперечок і помилок. Увесь піт і багатоголосся з вашого підручника ретельно викреслено.

Звісно, є факти і факти. Ніколи не було великих суперечок щодо того, що $1 + 2 = 3$. Питання, *чи можливо і як саме довести*, що $1 + 2 = 3$, яке борсається між математикою і філософією, — інша річ, до нього ми повернемося наприкінці книжки. Але те, що обчислення правильне, — чиста правда. Проблема в іншому. І далі ми на неї ще натрапимо.

Математичні факти можуть бути прості і складні, також вони можуть бути поверховими і глибокими. Виходячи з цього, математичний усесвіт можна подати як квадрат, що складається з чотирьох менших:



Основні арифметичні факти, такі як $1 + 2 = 3$ — прості й поверхові. Так само, як і основні формули на зразок $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ чи формула коренів квадратного рівняння: можливо, трохи складніше переконати себе у їх правильності, ніж у правильності $1 + 2 = 3$, але зрештою великої концептуальної ваги вони не мають.

Перейшовши до сектора складні/поверхові, ми отримуємо задачі на зразок множення двох десятицифрових чисел або обчислення заплутаного визначеного інтеграла, або, якщо ви років зо два вчилися в університеті, сліду Фробеніуса на модулярній формі кондуктора 2377. Можна собі уявити, що вам з якоїсь причини потрібно розв'язати такі задачі. Також немає сумніву в тому, що таке розв'язання вручну буде лежати десь між неприємним і неможливим. Або ж, як у випадку з модулярною формою, може знадобитися серйозна підготовка навіть просто для того, щоб зрозуміти запитання. Проте насправді, знаючи відповіді на такі питання, ви не збагатите свого знання про світ.

У секторі складні/глибокі математичні факти професійні математики, такі як я сам, воліють проводити найбільше часу. Саме тут живуть знамениті теореми й гіпотези: гіпотеза Рімана, Велика теорема Ферма*, гіпотеза Пуанкаре, проблема рівності класів складності *P* і *NP*, теорема Ґьоделя... Кожна з цих теорем містить ідеї глибокого сенсу і фундаментальної важливості, карколомної краси і виключної техніки, і кожна з них є головним героєм книжок, присвячених тільки їм[12].

Але не в цій книжці. Ця зачепиться за верхній лівий куток: прості і глибокі факти. Математичні ідеї, до яких ми звернемося, можна використовувати безпосередньо, отримуючи від них практичну користь незалежно від того, чи ваше математичне навчання зупинилося на підступах до алгебри, чи зайшло набагато далі. І це не «просто факти», як-от прості арифметичні твердження — це принципи, застосування яких виходить далеко за межі речей, які ви звикли вважати «математикою». Це незамінні інструменти з набору майстра, і якщо їх правильно використовувати, вони допоможуть вам уникнути помилок.

Чиста математика може бути таким собі монастирем, спокійним місцем, надійно захищеним від згубних впливів безладності й непослідовності світу. Я виріс за такими стінами. Інших дітей-математиків, яких я знав, спокушали фізика, геноміка, чорна магія хедж-фондів, та мене ці несерйозні речі не приваблювали**. У магістратурі я зайнявся теорією чисел, яку Гаус назвав «царицею математики» — найчистішим із чистих предметів, таємним садом в осерді монастиря, де ми розмірковували над тими самими питаннями про

---

* У професіоналів вона тепер має назву теореми Вайлса, оскільки Ендрю Вайлс її довів (із суттєвою допомогою Річарда Тейлора), а Ферма — ні. Але стара назва, напевно, залишиться назавжди.

** Чесно кажучи, я таки віддав частину молодості, коли мені було двадцять із чимось, мріяв стати Серйозним Письменником-романістом. Я навіть написав Серйозний Роман «Король-Цвіркун», і його надрукували. Та поки я цим займався, виявилося, що половину кожного дня, присвяченого Серйозному Роману, я тоскно тинявся, мріючи про вирішення математичних проблем.

числа і рівняння, які непокоїли греків і навряд чи стали менш тривожними за двадцять п’ять віків, що відтоді минули.

Спочатку я займався теорією чисел класичного штибу, доводячи твердження про суми четвертих степенів цілих чисел. Якби мене змусили, я міг би пояснити це рідним на День подяки — хоча пояснити, як я довів те, що довів, мені б, напевно не вдалося. Та невдовзі я захопився ще абстрактнішими речами — дослідженням проблем, про головних дійових осіб яких — «залишково модулярні представлення Галуа», «когомологія модульних схем», «динамічні системи на однорідних просторах», такі-от речі, — неможливо було говорити поза архіпелагом університетських аудиторій і вестибюлів, що простягнувся від Оксфорда до Принстона і від Кіото до Парижа і Медісона, штат Вісконсин, де я зараз професор. Коли я вам кажу, що все це захопливе, змістовне і красиве і що я ніколи не стомлююся думати про все це, напевно, вам варто просто мені повірити, тому що потрібно довго вчитися, щоб просто зрозуміти, з якого боку до них підступатися.

Але сталося дещо цікаве. Що далі у своїх дослідженнях я відходив від життєвого досвіду, то частіше я почав помічати, як багато математики у світі за стінами. Не представлення Галуа й когомологія, а ідеї, набагато простіші, давніші й так само глибокі — північно-західний сектор концептуального квадрата. Я почав писати статті в газети й журнали про те, як виглядає світ через математичні окуляри, і виявив, на своє здивування, з якою охотою навіть люди, які кажуть, що ненавидять математику, їх читають. Це своєрідне викладання математики, але воно дуже відрізняється від того, що я роблю в аудиторії.

Спільним із традиційним викладанням є те, що читачеві дається певне завдання. Повернімося до Нейманового «Математика»: «Зрозуміти принцип дії літака і теорію сил, що піднімають його у повітря і приводять у рух, тяжче, ніж просто летіти на ньому, підніматися в небо і долати відстані — і навіть тяжче, ніж керувати ним. Лише у виняткових випадках можливо зрозуміти якийсь процес, попередньо не навчившись застосовувати його на практиці, не освоївши його на інстинктивному практичному рівні».

Інакше кажучи: дуже складно *зрозуміти* математику, не *займаючись* математикою. До геометрії царських доріг немає, як сказав Евклід Птолемею, чи, можливо, залежно від вашого джерела, Менехм Александру Македонському. (Скажемо відверто: знамениті вислови, які приписують давнім ученим, ймовірно, зовсім не їхні, але через те вони не стають менш повчальними).

У книжці я не робитиму красивих і величних жестів у бік математичних пам’яток і не навчатиму вас правильно ними захоплюватися з великої відстані. Ми тут, щоб трохи забруднити собі руки. Щось ми обчислюватимемо. Буде трохи формул і рівнянь, коли виникне потреба на чомусь наголосити. Вам не знадобиться формальна математика, крім арифметики, хоча я пояснюватиму й багато такого, що виходить за межі арифметики. Я малюватиму прості графіки й діаграми. Ми зустрінемося з деякими темами зі шкільної математики там, де їх зазвичай не помічають; ми побачимо, як тригонометричні функції описують зв'язок між двома змінними, що математичний аналіз може сказати про зв'язок між лінійними й нелінійними явищами і як формула коренів квадратного рівняння слугує пізнавальною моделлю наукового дослідження. А ще ми натрапимо на таку математику, яка зазвичай з'являється тільки у коледжі або далі, — це, наприклад, криза у теорії множин, яка слугуватиме тут своєрідною метафорою для судової практики у Верховному суді та суддівства в бейсболі; новітні досягнення аналітичної теорії чисел, які демонструють взаємодію між закономірністю і випадковістю; теорія інформації і комбінаторні схеми, які допоможуть пояснити, як групі студентів MIT вдалося виграти мільйони доларів, зрозумівши механізм лотереї штату Массачусетс.

Часом будуть плітки про видатних математиків і філософські роздуми. Буде навіть одне-два доведення. Але ні домашніх завдань, ні іспитів не буде.

Частина перша

ЛІНІЙНІСТЬ

У цій частині: крива Лаффера, пояснення математичного аналізу на одній сторінці, закон великих чисел, деякі аналогії з тероризмом, «2048 року всі американці матимуть ожиріння», чому у Південній Дакоті рак мозку поширеніший, ніж у Північній, привиди чисел-небіжчиків, звичка до визначення

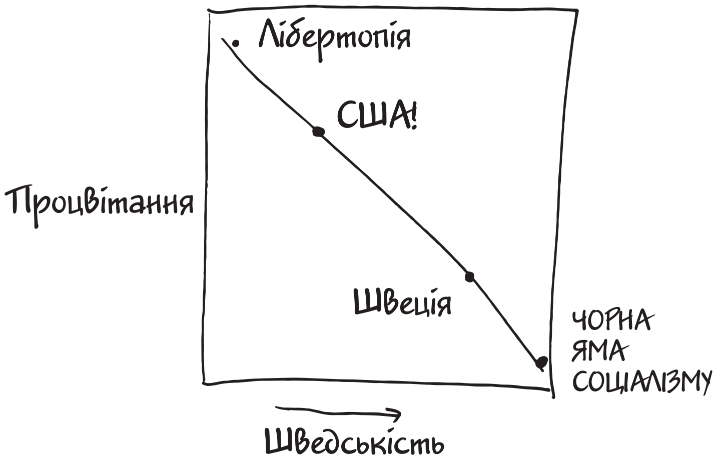
Розділ 1

Менш схожі на Швецію

Кілька років тому, у розпалі дебатів навколо Закону про доступне медичне обслуговування, Деніел Дж. Мітчелл з Інституту Катона помістив у своєму блозі допис із провокативною назвою[13] «Чому Обама намагається зробити Америку більш схожою на Швецію, тоді як шведи намагаються бути менш схожими на Швецію?»

Добре запитання! Коли його так поставити, здається, що все справді вкрай неправильно. Чому, пане президенте, ми йдемо проти потоку історії, коли соціальні держави загального добробуту по всьому світу — навіть маленька багата Швеція! — урізає щедру соціальну допомогу й високі податки? «Якщо шведи чогось навчилися на своїх помилках і тепер намагаються скоротити розміри і повноваження уряду, — пише Мітчелл, — чому ж американські політики приречені раз у раз ці помилки повторювати?»

Щоб відповісти на це запитання, нам знадобиться надзвичайно наукова діаграма. Ось як виглядає світ згідно з Інститутом Катона:

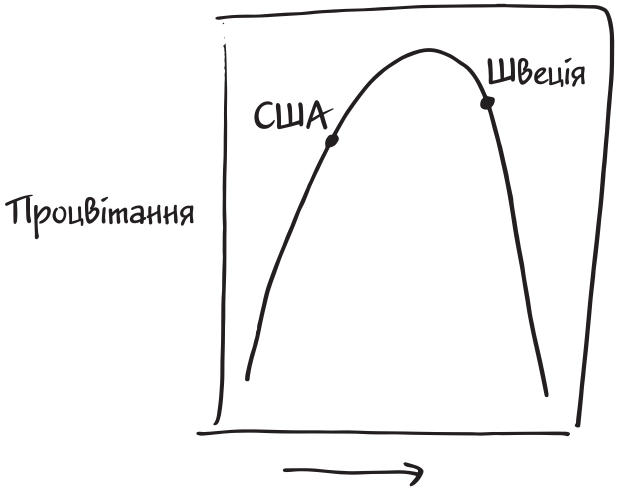


Вісь x — це «шведськість»*, вісь y — певна міра процвітання. Не переймайтеся точністю вимірювання цих речей. Суть тут ось у чому: згідно з діаграмою, що шведськішими ви є, то гірше живеться у вашій країні. Шведи не дурні, вони затямили це і взялися дертися північно-західним схилом до вільноринкового процвітання. А от Обама котиться не туди.

Давайте тепер я змалюю ту саму картину з точки зору людей, чиї економічні погляди ближчі до президента Обами, ніж до Інституту Катона.

Ця картинка дає зовсім іншу пораду стосовно того, скільки шведськості нам потрібно. Де пік процвітання? У точці, де шведськості більше, ніж в Америці, але менше, ніж у Швеції. Якщо картинка правильна, Обама має більш ніж достатньо підстав посилювати нашу соціальну державу, у той час як шведи — скорочувати свою.

Різниця між двома малюнками — це відмінність між лінійністю і нелінійністю, одна з центральних відмінностей у математиці. Лінія Інституту Катона — пряма**; некатонівська лінія, з горбом посередині — ні.



Пряма — це один з видів ліній, але лише один, і прямі можуть мати різноманітні особливі властивості, яких не мають інші лінії. Найвища точка відрізка прямої — максимум процвітання у цьому прикладі — має бути або на

* Під «шведськістю» тут розуміється «обсяг соціальних послуг та оподаткування», а не такі риси Швеції, як «широка доступність оселедців під десятками різних соусів», до чого, поза сумнівом, має прагнути будь-яка країна.

** Чи, якщо наполягатимете, лінійний сегмент. Цій відмінності я не надаватиму великого значення.

одному кінці, або на іншому. Просто така властивість ліній. Якщо скорочення податків — добре для процвітання, то ще більше скорочення — це ще краще. І якщо шведи хочуть дешведуватися, то так і повинно бути. Звісно, опозиційний до Інституту Катона дослідницький центр може сказати, що лінія йде в іншому напрямку, з південного заходу до північного сходу. А якщо так, то соціальних витрат забагато не буває. Оптимальна політика — максимальна шведськість.

Зазвичай, якщо хтось каже, що він «мислить нелінійно», це означає, що він зараз вибачатиметься за те, що загубив річ, яку у вас позичив. Але нелінійність справді існує! І в цьому контексті мислити нелінійно критично важливо, тому що не всі лінії прямі. Якщо трохи подумати, стає зрозуміло, що реальні криві реальної економіки такі, як на другому малюнку, а не на першому. Це криві. Аргументація Мітчелла — приклад *хибної лінійності*. Він припускає, не кажучи цього прямо й відверто, що шлях до процвітання описується лінійним сегментом з першої картинки, за якою скорочення соціальної інфраструктури у Швеції означає, що ми маємо діяти так само.

Але якщо ви вважаєте, що соціальної держави може бути забагато чи замало, то знаєте, що лінійна картина хибна. Тут діє принцип, складніший за просто «більше держави — погано, менше — добре». Генерали, що радилися з Абрагамом Вальдом, були в тому самому становищі: замало броні означало, що літак зіб'ють, забагато — що він не полетить. Питання не в тому, добре чи погано поставити більше броні; може бути і так і так, залежно від того, скільки броні на літаку вже є. Якщо є оптимальна відповідь, то вона десь посередині, і відхилення у будь-який бік буде поганим.

Нелінійне мислення каже, що *вибір напрямку руху залежить від того, де ви вже знаходитесь*.

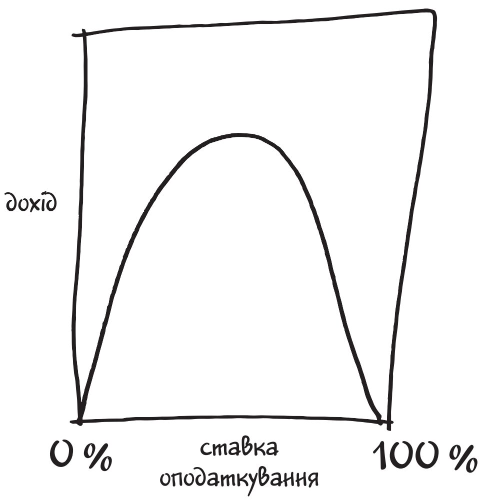
Ідея ця не нова. Ще Горацій стверджував: «Est modus in rebus, sunt certi denique fines, quos ultra citraque nequit consistere rectum» («Міра повинна бути в усьому, й усьому є певні межі, за якими не може бути добра на світі»). Ще раніше Арістотель в «Нікомаховій етиці» зауважує, що їсти забагато і замало — погано для комплекції. Оптимум десь посередині — оскільки залежність між харчуванням і здоров'ям не пряма, а описується кривою, обидва кінці якої позначають небажаний результат.

Вуду-економіка

Іронія в тому, що економісти-консерватори, такі як хлопці з Інституту Катона, давно розуміють це краще за будь-кого іншого. Та друга картинка, яку я тут малював? Та, надзвичайно наукова, з горбом посередині? Не я перший її намалював. Вона має назву *крива Лаффера,* і упродовж майже сорока років вона відігравала центральну роль в економічній політиці республіканців. У середній період президенства Рейґана ця крива стала таким загальником економічної риторики, що Бен Стайн згадав її у своєму знаменитому нудотному уроці у фільмі «Вихідний день Ферріса Б'юлера»:

> Хтось знає, що це? Клас?... Хтось? Хтось це раніше бачив? Крива Лаффера. Хтось знає, про що йдеться? Ідеться про те, що в цій точці кривої доходів ви отримаєте точно ті самі доходи, що й у цій точці. Це дуже суперечливо. Хтось пам'ятає, як віце-президент Буш назвав це 1980 року? Хтось? Якась там «ду»-економіка. Вуду-економіка.

Про криву Лаффера існує така легенда: Артур Лаффер, який був тоді професором економіки Чиказького університету, одного вечора 1974 року обідав з Діком Чейні, Дональдом Рамсфельдом та редактором «Вол-Стріт Джорнел» Джудом Ваннiскі у ресторані розкішного вашингтонського готелю. Вони сперечалися про податковий план президента Форда і зрештою, як-то вчиняють інтелектуали, коли суперечка загострюється, Лаффер схопив серветку* і намалював картинку. Десь таку:



Горизонтальна вісь — рівень оподаткування, вертикальна — обсяг коштів, які уряд забирає у платників. На лівому краю графіка ставка податку становить 0 %; у такому разі, за визначенням, уряд податкових надходжень не отримує. Праворуч ставка податку дорівнює 100 %; усі ваші доходи, чи то від бізнесу, чи то зарплата, ідуть прямісінько до кишені Дядька Сема.

---

* Лаффер заперечує епізод із серветкою, згадуючи, що в тому ресторані серветки були з чудової тканини, яку б він ніколи не наважився сплюндрувати економічними карлючками.

Яка порожня. Бо якщо держава відбирає кожну копійку, яку вам заплатили за вчителювання, чи продаж госптоварів, чи конторську службу, то навіщо взагалі така робота? На правому краї графіка люди не працюють взагалі. Або ж якщо працюють, то роблять це у неформальних нішах, куди не дотягується лапа податківця. Доходи держави — знову нуль.

У середній частині кривої, де суми оподаткування лежать у проміжку між нулем і 100 % наших доходів — тобто в реальному світі, — уряд справді отримує певні надходження[14].

Це означає, що лінія, яка описує відношення між ставкою податку і податковими надходженнями, не може бути прямою. Якби вона такою була, надходження сягали б максимуму або у правій, або в лівій частині графіка; але і там і там маємо нуль. Якщо поточна ставка податку на доходи справді близька до нуля (зліва на графіку), то підвищення податків збільшує обсяг коштів, які держава може спрямувати на фінансування послуг і програм, як цього й можна інтуїтивно очікувати. Але якщо ставка наближається до 100 %, подальше її підвищення насправді *зменшує* податкові надходження. Якщо ви знаходитеся праворуч від піка кривої Лаффера і бажаєте зменшити бюджетний дефіцит без скорочення витрат, існує просте й гарне з політичного погляду рішення: знизити податки і таким чином збільшити обсяг отримуваних надходжень. *Куди рухатися, залежить від того, де ви знаходитеся*.

То де ж ми? Отут-то і починається складність. 1974 року найвища ставка податку на доходи становила 70 %, а ідея, що Америка перебуває у правій, спадній частині кривої Лаффера, виглядала доволі привабливо — особливо для невеликої групи людей, які мали щастя сплачувати податок за цією ставкою, якою не обкладалися перші 200 тисяч доларів* річного доходу. Крива Лаффера отримала потужного прихильника в особі Ванніскі, який представив 1978 року ідею Лаффера широкій громадськості у своїй книжці з доволі самовпевненою назвою «Так влаштований світ»**. Ванніскі палко обстоював цю ідею. Йому вдалося правильно поєднати енергію й політичну хитрість для того, щоб люди дослухалися до теорії, яку навіть прихильники скорочення податків вважали дивною. Його не турбувало, що хтось називає його схибленим. «Ну то що ж таке “схиблений”? — запитував він в інтерв’юера. — Томас Едісон був схиблений[15], Лейбніц був схиблений, Галілей схиблений і так далі, і так далі. Кожного, хто приходить з новою ідеєю, яка не вкладається у звичне, кожного, хто виходить далеко за межі загальноприйнятого, — ось такого і вважають “схибленим”».

* Як на сьогодні, десь півмільйона — мільйон доларів на рік.

** «*Я* тут говорю».

(Відступ: тут варто відзначити, що люди, які мають незвичайні ідеї й порівнюють себе з Едісоном і Галілеєм, *насправді ніколи не мають рації*. Я щонайменше раз на місяць отримую такі листи, зазвичай від людей, які мають «доведення» математичних тверджень, які, як уже багато сотень років відомо, є хибними. Даю гарантію, що Ейнштейн не казав на кожному кроці: «Послухайте, я знаю, що оця загальна теорія відносності виглядає дико, але те саме вони казали і про Галілея!»)

Криву Лаффера, з її компактним візуальним представленням і приємним контрінтуїтивним присмаком, виявилося легко продавати політикам, які й до того бажали зниження податків. За словами економіста Гела Веріана, «конгресмену можна її пояснити за шість хвилин, і він говоритиме про неї шість місяців»[16]. Ванніскі став радником спочатку Джека Кемпа, а потім Рональда Рейґана, який у 1940-х роках був заможною кінозіркою — і цей особистий досвід сформував його економічні погляди на сорок років уперед. Керівник адміністративно-бюджетного управління за президентства Рейґана, Девід Стокман, згадує:

> Рейґан завжди розповідав, що прийшов у світ великобюджетного кіно[17] під час Другої світової війни. Підвищені ставки податку воєнного періоду доходили до 90 %. «Можна було зняти тільки чотири картини, а потім потрапляєш під найвищий податок, — продовжував Рейґан. — Тому ми кидали роботу десь після чотирьох картин, і їхали в село». Якщо податки високі, працюють менше. Низькі — більше. Його досвід це підтверджував.

Нині тяжко знайти економіста, переконаного, що ми знаходимося у спадній частині кривої Лаффера. Воно, напевно, і не дивно, беручи до уваги, що найвищі ставки зараз становлять усього 35 %, які для переважної частини XX століття видавалися б абсурдно низькими. Та навіть в епоху Рейґана ми, ймовірно, були у лівій частині кривої. Ґреґ Менк'ю, гарвардський економіст і республіканець — керівник Групи економічних радників при президентові США за Буша-молодшого, пише у своєму підручнику з мікроекономіки:

> Подальша історія не підтвердила гіпотези Лаффера[18] про те, що зниження податкових ставок збільшить податкові надходження. Коли Рейґан після обрання скоротив податки, результатом стало зменшення податкових надходжень — і все. Надходження від оподаткування індивідуальних доходів (на одну особу з урахуванням інфляції) протягом 1980–1984 років впали на 9 %, незважаючи на те, що середні доходи (на одну особу з урахуванням інфляції) за цей період зросли на 4 %. Проте, коли цю політику було впроваджено, зупинити її дію вже було тяжко.

Тут доречно висловити певну симпатію прихильникам економіки пропозиції. Найперше: максимізація надходжень державного бюджету не обов'язково має бути метою податкової політики. Мілтон Фрідман, якого ми востаннє зустрічали під час Другої світової війни за секретною військовою роботою у Групі статистичних досліджень, згодом став нобелівським лауреатом з економіки, радником президентів і потужним пропагандистом зниження податків і ліберальних принципів. Знамените гасло Фрідмана про оподаткування звучить так: «Я за скорочення податків за будь-яких умов, з будь-якого приводу і причини, за найпершої можливості». Він не вважав, що мета полягає в тому, щоб досягнути найвищої точки кривої Лаффера, у якій податкові надходження сягають максимуму. За Фрідманом, гроші, отримані державою, зрештою стануть грошами, витраченими державою, і ці гроші, на його думку, частіше витрачаються погано, а не добре.

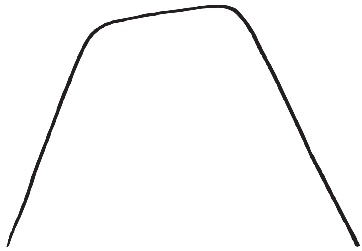
Поміркніші прихильники економіки пропозиції, як-от Менк'ю, вважають, що зниження податків здатне підвищити мотивацію для напруженішої праці і створення підприємств, що матиме наслідком зростання і зміцнення економіки, навіть якщо безпосереднім результатом скорочення податків буде зниження бюджетних надходжень і зростання дефіциту. Більший прихильник державного перерозподілу зауважить, що скоротиться і те і те; зменшення державних видатків може вести до того, що будуватиметься менше об'єктів інфраструктури, буде менше можливостей боротися з шахрайством, і загалом буде менше чинників, що уможливлюють процвітання вільного підприємництва.

Менк'ю також звертає увагу, що найбагатші — ті, хто сплачує 70 % доходів, що перевищують певну суму, — і справді забезпечили більше податкових надходжень після рейґанівського скорочення податків*. Це веде до дещо тривожної можливості: для того щоб збільшити бюджетні надходження, потрібно підняти податки середньому класу, представники якого не мають жодної іншої можливості, крім працювати далі, водночас зрізавши податки багатим; ці хлопці запасли вдосталь грошей для того, щоб припинення або переведення до інших країн їхньої економічної діяльності становили серйозну загрозу, — якщо держава скаже їм платити податки за ставками, на їхню думку, зависокими. Якщо ж так, то багато хто з лібералів почуватиметься незатишно в одному човні з Мілтоном Фрідманом: зрештою може виявитися, що максимізація податкових надходжень — не така-то вже й чудова річ.

Остаточна оцінка Менк'ю досить тактовна: «Думка Лаффера не зовсім позбавлена переваг». Я оцінив Лаффера вище! Його малюнок з фундаментальністю й незаперечністю, притаманними математиці, показує, що відношення між оподаткуванням і надходженнями обов'язково має нелінійний характер.

* Складно цілком певно сказати, що так сталося, бо багаті почали працювати більше, оскільки знизився тягар податку на доходи.

Звичайно, ця лінія не обов'язково має бути гладеньким горбом, який намалював Лаффер; вона може виглядати, як трапецоїд,



або спина верблюда,

або просто безладно коливатися. Або ж, ще ймовірніше, вона може взагалі не бути однією лінією, як показав Мартін Ґарднер своєю петлювато-вузлуватою «кривою нео-Лаффера» у в'їдливій відповіді прихильникам економіки пропозиції в статті[19] «Крива Лаффера».

Але якщо вона десь піднімається, то в іншому місці обов'язково йтиме донизу. Є така річ, як надмірна шведськість. Цього твердження не заперечуватиме жоден економіст. Сам Лаффер зауважував, що це розуміло багато соціологів до нього. Але для більшості людей це зовсім не очевидно — принаймні поки не побачиш малюнка на серветці. Лаффер якнайкраще розумів, що ця крива не здатна показати, чи є надмірними податкові ставки у певній економіці у певний момент часу. Саме тому на картинці він не написав жодної цифри. Коли Лаффер давав свідчення у Конгресі[20] і його запитали, яким саме є оптимальний показник ставки податків, він визнав: «Я не можу його точно виміряти, але я можу назвати його характеристики; так, сер». Усе, що каже крива Лаффера, — це те, що зниження податків за певних умов збільшує податкові надходження; але щоб визначити, що це за умови, потрібна глибока й тяжка робота з реальними даними, — робота, яку не зробиш на серветці.

Із кривою Лаффера все гаразд; помилки роблять люди, які до неї звертаються. Ванніскі й політики, які пішли у нього на повідку, стали жертвою найстарішого у цій книжці хибного силогізму:

Зниження податків *може* вести до зростання бюджетних надходжень;
Я *хочу*, щоб зниження податків вело до зростання бюджетних надходжень;
Отже, зниження податків *веде* до зростання бюджетних надходжень.

Розділ 2

Пряма локально, крива глобально

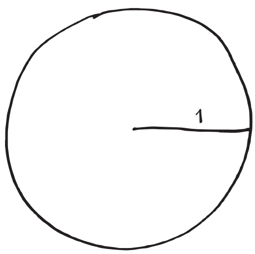
Ви, можливо, не думали, що потрібен професійний математик, щоб довести вам, що не всі лінії — прямі. Проте лінійне мислення — повсюди. Ви дієте саме так щоразу, коли кажете, що якщо добре мати щось, то що більше цього щось, то краще. Лінійне мислення — добра опора політичних крикунів: «Ви підтримуєте воєнні дії проти Ірану? Гадаю, ви хотіли б *вторгнутися* у будь-яку країну, що з нас *насміхається*!» Або, з іншого боку: «Замирення з Іраном? Та ви, напевно, *теж* думаєте, що Адольфа Гітлера просто *не так зрозуміли*».

Чому цей спосіб мислення такий популярний, коли, якщо лиш секунду подумати, стає ясною його хибність? Чому можна хоч на секунду подумати, що усі лінії — прямі, коли вони, ясна річ, не прямі?

Одна з причин у тому, що вони таки певним чином прямі. Ця історія починається з Архімеда.

Вичерпання

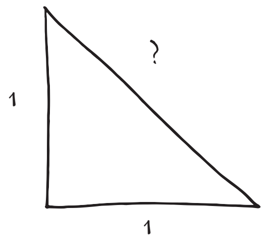
Яка площа цього круга?



У сучасному світі це така звичайна задача, що її можна давати на будь-якому стандартному іспиті. Площа круга становить πr^2. У нашому випадку радіус r дорівнює 1, тож площа круга — π. Але дві тисячі років тому це було прикре нерозв'язне питання, достатньо важливе, щоб за нього взявся сам Архімед.

Чому воно було таким складним? Почати з того, що греки насправді не вважали, як ми зараз, π числом. Числа, у їхньому розумінні, — це цілі числа, числа, якими можна лічити речі: 1, 2, 3, 4... Однак перший великий успіх грецької геометрії — теорема Піфагора*, — як виявилося, їхню систему чисел зруйнував.

Ось картинка:



Теорема Піфагора стверджує, що квадрат *гіпотенузи* — сторони, намальованої діагонально навпроти прямого кута, — дорівнює сумі квадратів інших двох сторін, або *катетів*. На цій картинці квадрат гіпотенузи дорівнює $1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. У нашому випадку гіпотенуза довша за 1 і коротша за 2 (можна перевірити на око, без теореми). Те, що довжина тут — не ціле число, саме по собі для греків проблеми не становило. Можливо, ми просто міряємо неправильними одиницями. Якщо взяти одиницю вимірювання так, щоб довжина кожного катета становила 5 одиниць, можна поміряти лінійкою, і виявиться, що довжина гіпотенузи — близько 7 одиниць. Близько — але трошки довша. Тому що квадрат гіпотенузи тут дорівнює

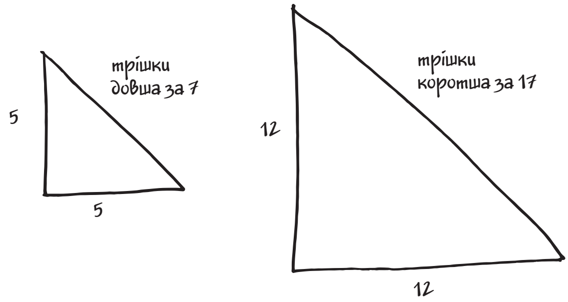
$5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$,

а якби гіпотенуза була 7, то квадрат був би $7 \times 7 = 49$.

Або ж коли зробити катети довжиною 12 одиниць, гіпотенуза майже точно дорівнюватиме 17 одиницям, але буде вже зовсім трохи меншою, тому що $12^2 + 12^2$ буде 288, а $17^2 = 289$.

---

* Між іншим, ми не знаємо, хто першим довів теорему Піфагора, але фахівці майже певні, що це не був сам Піфагор. Насправді, крім факту, засвідченого сучасниками, що вчений чоловік з таким іменем жив і зажив слави у VI ст. до н. е., ми майже нічого про Піфагора не знаємо. Відомі нам основні джерела про його життя й діяльність з'являються майже через вісім століть по його смерті. На той час Піфагора — реальну особу майже повністю витіснив Піфагор міфічний — своєрідна збірна постать, уособлення філософії вчених, що називали себе піфагорійцями.



І от у якийсь момент близько V ст. до н. е. хтось із членів піфагорійської школи зробив приголомшливе відкриття: *жодним чином не можна* побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник так, щоб довжини усіх його сторін були цілими числами. Сучасна людина скаже, що «квадратний корінь з 2 — ірраціональне число», тобто воно не є дробом цілих чисел. Але піфагорійці так би не сказали. А як їм було сказати? Поняття кількості спиралося на ідеї відношень між цілими числами. Для греків довжина гіпотенузи, як виявилося, *взагалі не була числом*.

Зчинилася колотнеча. Піфагорійці, треба пам'ятати, були люди вкрай незвичайні. Їхня філософія являла собою грудкувату кашу з того, що ми зараз назвали б математикою й релігією, — і того, що сьогодні вважалося б психічною недугою. Вони вірили, що непарні числа добрі, а парні — злі, що планета, точно така сама, як наша, Антихтон, знаходиться по той бік Сонця, і що не можна їсти бобів, бо, за переказами, вони є вмістищами душ померлих. Кажуть, що сам Піфагор міг говорити з тваринами (казав їм не їсти бобів) і був одним з дуже небагатьох давніх греків, які носили штани[21].

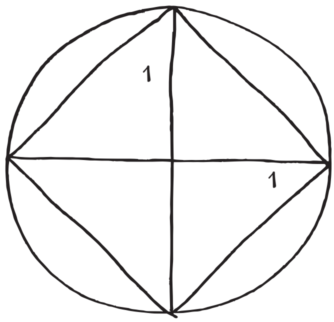
Математика піфагорійців була нерозривно пов'язана з їхньою ідеологією. Деякі давні джерела стверджують (це, ймовірно, неправда, але легенда дає добре уявлення про піфагорійський стиль), що ірраціональність квадратного кореня з 2 довів піфагорієць на ім'я Гіппас, й у винагороду за доведення такої гидкої теореми колеги кинули його у море, де він, сіромаха, й потонув.

Та теорему не втопиш. Наступники піфагорійців, як-от Евклід і Архімед, розуміли, що треба засукати рукави і міряти, навіть якщо для цього потрібно буде вийти із золотої клітки цілих чисел. Ніхто не знав, чи можна виразити самими лише цілими числами площу круга*. Але колеса мають крутитися, а комори наповнюватися — тож треба якось і міряти**.

* Не можна; але ніхто не спромігся це довести аж до XVIII ст.

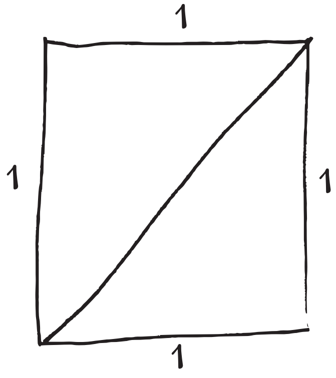
** Насправді зерносховища не були круглими до початку XX ст., коли професор Вісконсинського університету Ф. Х. Кінг винайшов нині загальноприйняту циліндричну конструкцію елеватора з метою запобігання псуванню збіжжя у кутках.

Ідея походить від Евдокса Кнідського, а Евклід далі розробив її у XII книзі своїх «Начал». Але повністю розкрив потенціал ідеї тільки Архімед. Сьогодні ми знаємо його підхід як *метод вичерпання*. Починається це так.



Квадрат на малюнку зветься вписаним квадратом; кожен з його кутів лише дотикається до кола, але за нього не виходить. Навіщо це робити? Тому що круги таємничі й бентежні, а з квадратами просто. Якщо перед вами квадрат зі стороною *X*, то його площа буде *X* разів по *X*, тому-то ми й називаємо дію множення числа на самого себе піднесенням до квадрата! Основне правило математичного життя: якщо всесвіт підносить вам тяжку задачу, спробуйте розв'язати замість неї легшу, сподіваючись, що простіша версія буде достатньо близькою до початкової, і всесвіт не заперечуватиме.

Вписаний квадрат можна поділити на чотири трикутники, кожен з яких є саме таким рівнобедреним трикутником, який ми щойно малювали*. Тож площа квадрата становить чотири площі трикутника. Цей трикутник, у свою чергу, отримуємо, коли поділити квадрат зі стороною 1 надвоє по діагоналі, як бутерброд з тунцем.



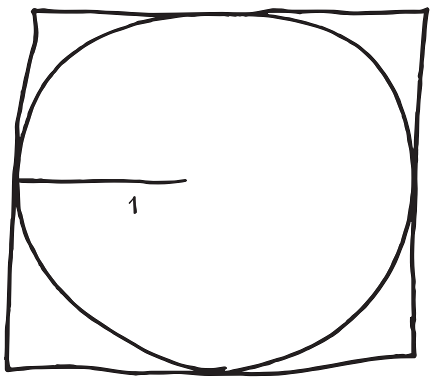
* Точніше, кожну з чотирьох трикутних частин можна отримати з початкового рівнобедреного прямокутного трикутника шляхом ковзання і обертання його на площині; ми приймаємо, що ці дії не змінюють площі фігури.

Площа бутерброда з тунцем становить $1 \times 1 = 1$, тому площа кожної трикутної половинки бутерброда становить $1/2$, а площа вписаного квадрата — 4 рази по $1/2$, тобто 2.

До речі, уявіть-но, що ви *не знаєте* теореми Піфагора. Так ось — таки знаєте! Або ж принаймні знаєте, що вона стверджує про ось цей конкретний прямокутний трикутник. Тому що прямокутний трикутник, який становить нижню половину бутерброда, точно такий самий, як той, що знаходиться у північно-західному куті вписаного квадрата. А його гіпотенуза — це сторона вписаного квадрата. Тож якщо піднести гіпотенузу до квадрата, то отримуємо площу вписаного квадрата, яка становить 2. Тобто гіпотенуза — це таке число, яке, коли піднести його до квадрата, дає 2; говорячи більш звично і стисло, квадратний корінь з 2.

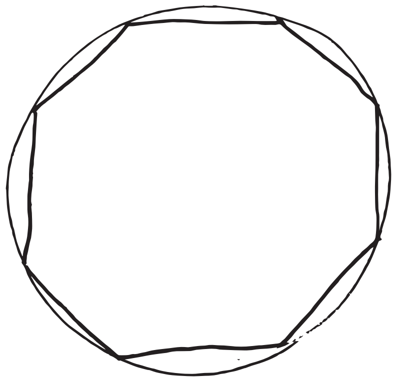
Вписаний квадрат повністю міститься у крузі. Якщо площа квадрата 2, то площа круга мусить бути *щонайменше* 2.

Тепер малюємо ще один квадрат.



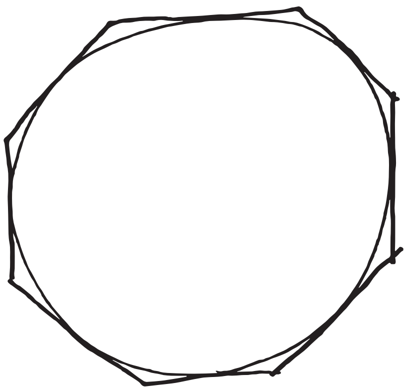
Цей називається *описаним* квадратом; він теж дотикається до кола у чотирьох точках. Але цей квадрат містить круг у собі. Його сторони становлять 2, тож його площа 4; отже, ми знаємо, що площа круга не більша за 4.

Демонстрація того, що π — це десь між 2 і 4, напевно, справляє не таке вже й велике враження. Але Архімед тільки почав. Візьмімо чотири вершини нашого вписаного квадрата і позначмо нові точки на колі на половині відстані між кожними двома сусідніми парами вершин. Маємо вісім точок, що знаходяться на однаковій відстані, а коли їх поєднати, отримаємо вписаний восьмикутник, або, технічною мовою, «знак стоп»:



Обчислити площу вписаного восьмикутника трохи складніше, і я не буду вас вантажити тригонометрією. Важливо те, що тут є тільки прямі лінії й кути, а не криві, і що це можна було зробити методами, доступними Архімеду. І ця площа становить два квадратних корені 2, близько 2,83.

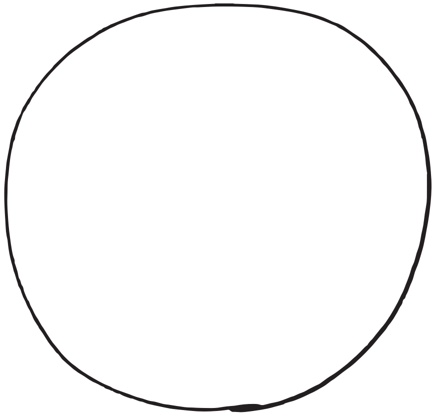
Те саме можна зробити з восьмикутником описаним:



Його площа — $8(\sqrt{2} - 1)$, трохи більше за 3,31.

Тож площа круга — між 2,83 і 3,31.

А чому на цьому зупинятися? Можна позначити точки між вершинами восьмикутника (і вписаного, і описаного) і зробити шістнадцятикутники; після деяких тригонометричних вправ отримаємо площу круга між 3,06 і 3,18. Вчинимо так ще раз, щоб отримати 32-кутник; і ще раз, і ще раз, і доволі швидко так дійдемо до чогось такого:

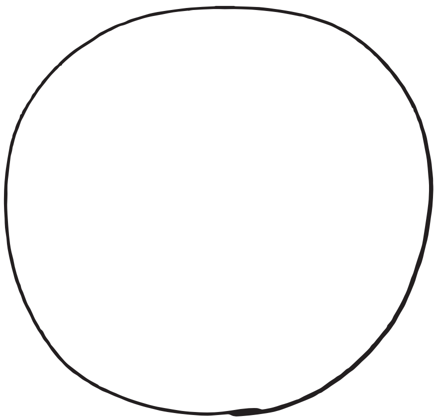


Чекайте, хіба це не круг? Звісно, ні! Це правильний многокутник, що має 65 536 сторін. А відразу й не скажеш...

Велике осяяння Евдокса й Архімеда полягає в тому, що *байдуже*, чи це круг, чи многокутник з дуже багатьма короткими сторонами. Площі цих фігур будуть достатньою мірою близькими для будь-якої можливої мети. Площа маленької кромки між кругом і многокутником «вичерпується» невблаганним постійним повторенням наших операцій. Так, коло — це крива. Але кожну його частинку можна наблизити до прямої лінії, точно так само, як клаптик земної поверхні, на якій ми стоїмо, наближається до ідеально рівної площини*.

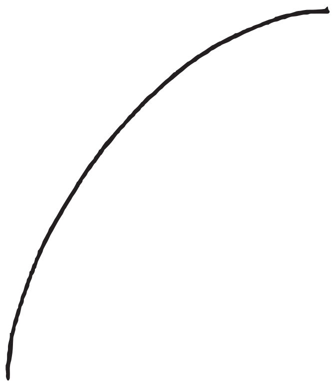
Отже, гасло, яке потрібно пам'ятати: пряма локально, крива глобально.

Або подумайте про це таким чином: ви начебто падаєте з великої висоти на коло. Спочатку ви бачите його повністю:

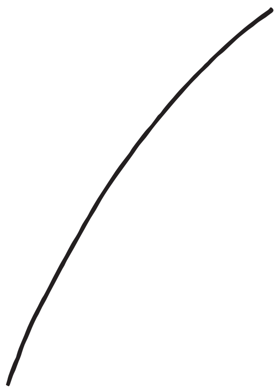


* Ну, принаймні, якщо ви, як і я, (мешкаєте) в рівнинній місцевості.

Потім тільки сегмент дуги:



Ще коротший сегмент:

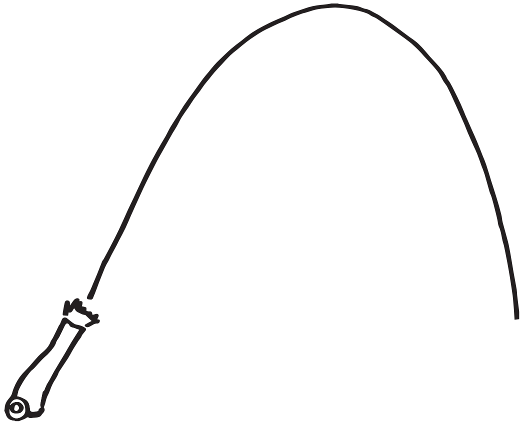


Доки, мірою наближення, частину кола, яку ви бачите, вже зовсім не можна відрізнити від прямої лінії. Мурашка на колі, знаючи тільки про те, що її безпосередньо оточує, могла б вважати, що вона знаходиться на прямій лінії; так само людина на поверхні Землі (якщо тільки вона не така розумна, щоб спостерігати за появою предметів, що наближаються з-за горизонту) вважає, що вона знаходиться на площині.

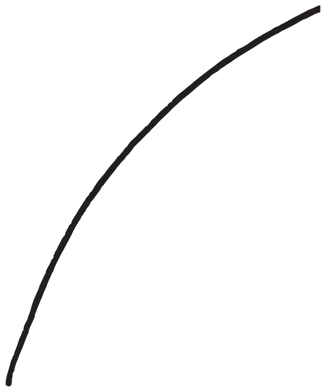
Сторінка, на якій я навчу вас математичного аналізу

Тепер я навчу вас матаналізу. Готові? Ідея, якою ми завдячуємо Ісааку Ньютону, полягала в тому, що у колі немає нічого особливого. Будь-яка гладка крива, якщо її достатньо збільшити, виглядає як пряма. Звиви і петлі не мають значення — головне, щоб не було гострих кутів.

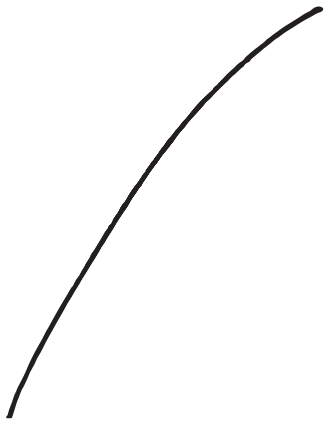
Вилетівши з гармати, снаряд проходить траєкторію на зразок такої:



Снаряд піднімається догори, а потім падає вниз по параболічній дузі. Сила тяжіння загинає криву руху донизу; це один з фундаментальних фактів нашої фізики. Але якщо наближатися до дуже короткого відрізка лінії, крива починає виглядати так:



А потім так:



Так само, як коло, простим оком шлях снаряда сприймається як пряма лінія, що піднімається догори під певним кутом. Відхилення від прямолінійності, спричинюване тяжінням, надто мале, щоб його побачити, — але воно, звичайно, нікуди не дівається. Якщо наблизитися до ще коротшого відрізка кривої, то він виглядатиме відрізком прямої ще більше. Ближче — пряміше, ближче — пряміше…

І тут відбувається концептуальний стрибок. Ньютон сказав: ну, йдемо до кінця. Скоротимо поле зору доти, доки воно стане *нескінченно малим* — меншим за будь-який розмір, який можна назвати, але відмінним від нуля. Будемо дивитися на дугу, описувану снарядом, але не на дуже короткому відтинку часу, а в певний момент. Те, що було *майже* прямою, стає *зовсім* прямою. Нахил цієї лінії Ньютон назвав *флюксією*, а ми тепер називаємо *похідною*.

Архімед не був готовий зробити такий стрибок. Він розумів, що багатокутники з дедалі коротшими сторонами дедалі більше наближаються до кола — але він би ніколи не сказав, що коло насправді *є* многокутником з нескінченно багатьма нескінченно короткими сторонами.

Деякі сучасники Ньютона теж не були схильними пристати на цю ідею. Найвідомішим критиком був Джордж Берклі, який викривав Ньютонові нескінченно малі у дусі високого глузування, якого, на жаль, бракує сучасній математичній літературі: «І що ж це за флюксії? Швидкості наближених до нуля прирощень. А що таке самі ці зникомі прирощення? Вони не є ні скінченними величинами, ні величинами нескінченно малими, але вони не є і нічим. То чи не можемо ми називати їх привидами померлих величин?[22]

Незважаючи на це, математичний аналіз *працює*. Коли розкрутити над головою камінь на мотузці, а потім її відпустити, він полетить по лінійній траєкторії з постійною швидкістю*, саме в тому напрямку, яким він був у момент часу, коли мотузку відпустили, як це і стверджує матаналіз. Тут маємо ще одне відкриття Ньютона: рухомі предмети переміщуються по прямій, якщо жодна інша сила не штовхає їх у той чи той бік. Це ще одна причина того, що лінійне мислення є для нас таким природним: наше інтуїтивне сприйняття часу і руху формується явищами, які ми спостерігаємо у світі. Ще до того, як ми знайомимося з укладеними Ньютоном законами, щось нам підказує, що предмети схильні рухатися по прямій, якщо немає причини поводитися інакше.

Зникомі прирощення і непотрібні складнощі

Критики Ньютона теж мали рацію: його конструкція похідної не відповідає вимогам сучасної строгої математики. Проблема у понятті нескінченно малого, що викликало певне замішання у математиків протягом тисячоліть. Неприємності почалися з грецького філософа Елейської школи V ст. до н. е. Зенона, який спеціалізувався на нібито безвинних питаннях, що стосувалися фізичного світу, які неминуче розросталися у справжні філософські скандали.

Найвідоміший його парадокс такий. Я вирішив піти до магазину по морозиво. Звісно, я не зможу туди дістатися, доки не пройду половини шляху. Пройшовши ж половину шляху, я знову не зможу дістатися до магазину, доки не пройду половину решти шляху. І так далі, і так далі. Я можу підходити як завгодно близько — але незалежно від того, скільки кроків у цьому процесі я зроблю, я насправді ніколи *не дістануся* до того магазину. Від омріяного морозива мене завжди відділятиме дуже мала, але не нульова відстань. Отже, висновує Зенон, дістатися до магазину з морозивом неможливо. Так само аргумент має силу і щодо будь-чого іншого: однаково неможливо перейти вулицю, зробити один крок чи змахнути рукою. Руху немає.

Кажуть, що Діоген-кінік заперечив аргумент Зенона так: він встав і почав ходити по кімнаті. Це дуже добрий аргумент на користь можливості руху, тож щось в аргументі Зенона не так. Але де помилка?

Подамо наш шлях у числах. Спочатку проходимо його половину. Потім половину решти, що становить 1/4 усієї відстані, і ще 1/4 залишиться пройти. Половина того, що залишається, становить 1/8, потім 1/16, потім 1/32. Шлях до магазину виглядатиме так:

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$$

* З поправками на тяжіння, опір повітря і т. д. і т. п. Проте на короткому проміжку часу лінійне наближення є достатньо прийнятним.

Якщо додати десять членів цієї послідовності, отримаємо близько 0,999. Якщо додати двадцять, буде вже близько 0,999999. Іншими словами, ми діставатимемося усе ближче, ближче і ближче до магазину. Але незалежно від того, скільки членів послідовності додавати, ми ніколи не отримаємо 1.

Парадокс Зенона дуже схожий на іншу головоломку: чи дорівнює нескінченний періодичний десятковий дріб 0,99999...... одиниці?

Я був свідком, як люди мало не побилися через це питання*. Питання викликає запеклі сутички в інтернеті — від фанатського сайту «Ворлд ов Воркрафт» до форумів, присвячених обговоренню книжок Айн Ренд. Природним чином щодо парадоксу Зенона ми відчуваємо, що «звісно ж, зрештою до морозива доберемося». Але у випадку числового представлення інтуїція підказує інше. Більшість людей, якщо їх притиснути[23], скажуть, що 0,9999... не дорівнює 1. Поза сумнівом, воно на 1 *не схоже*. Виглядає меншим. Але ж і меншим ненабагато! Як і Зенонів мандрівник до магазину, воно підходить усе ближче до мети, але ніколи, здається, так її й не досягає.

А ось викладачі математики, хай там де вони викладають, і я зокрема, скажуть: «Ні, це 1».

Як мені переконати когось пристати на мій бік? Ось один добрий фокус. Усі знають, що

$$0{,}33333\ldots = 1/3.$$

Помножимо обидві частини на 3, і вийде, що

$$0{,}99999\ldots = 3/3 = 1.$$

Якщо це вас не переконало, спробуйте помножити 0,99999... на 10. Це просто — перенесемо кому на один знак праворуч.

$$10 \times (0{,}99999\ldots) = 9{,}99999\ldots$$

Тепер віднімемо від обох частин осоружний десятковий дріб:

$$10 \times (0{,}99999\ldots) - 1 \times (0{,}99999\ldots) = 9{,}99999\ldots - 0{,}99999\ldots$$

Ліва частина рівності — це просто $9 \times (0{,}99999\ldots)$, тому що 10 разів по щось мінус це щось — це дев'ять разів по щойно згадане щось. А у правій час-

* Маємо визнати, що ці люди були школярами у літньому математичному таборі.

тині нам вдалося вилучити той жахливий нескінченний дріб, і залишилося просто 9. Тож зрештою отримуємо:

$$9 \times (0{,}99999\ldots) = 9.$$

Якщо щось узяти 9 разів, і виходить 9, то це щось мусить бути 1 — хіба ні?

Часто цих аргументів вистачає для переконання. Але давайте по-чесному: їм чогось бракує. Насправді вони не стосуються тривожної невизначеності, викликаної твердженням, що 0,99999... = 1; натомість вони — таке собі алгебраїчне залякування. Ви вірите, що 1/3 — це 0,3 у періоді — хіба ні? *Хіба це не так?*»

Чи гірше: можливо, вас переконав аргумент з множенням на 10. Але що скажете про таке: скільки буде

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots?$$

Тут «...» означає «продовжуй нескінченно додавати удвічі більше, ніж попереднього разу». Звичайно ж, сума мусить бути нескінченною! Але аргумент, дуже схожий на очевидно правильний про 0,9999..., здається, каже інше. Помножмо записану щойно суму на 2. Отримаємо

$$2 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots) = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots,$$

що дуже схоже на початкову суму; справді, це просто початкова сума (1 + 2 + 4 + 8 + 16 +...) без початкової 1, що означає, що 2 × (1 + 2 + 4 + 8 + 16 +...) на 1 менше, ніж (1 + 2 + 4 + 8 + 16 +...). Інакше кажучи,

$$2 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots) - 1 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots) = -1.$$

Але ліва частина спрощується до суми, з якої ми починали, а залишилися ми з

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = -1.$$

Ви в *це* хотіли повірити? (Щоб не залишати вас у непевності: існує контекст, 2-адичні числа[24], в якому цей позірно божевільний аргумент цілковито правильний. Більше про це у примітках в кінці, для ентузіастів теорії чисел). У те, що додавання усе більших і більших чисел, до нескінченності, закидає до від'ємного світу?

Ще божевілля. Яким буде значення нескінченної суми

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots?$$

Хтось спочатку помітить, що

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots,$$

і скаже, що сума безлічі нулів, нехай і в нескінченній кількості, має дорівнювати нулю. З іншого боку, $1 - 1 + 1$ — це те саме, що $1 - (1 - 1)$, оскільки мінус на мінус дає плюс; застосовуючи це знову і знову, ми можемо переписати нашу суму як

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1)\ldots = 1 - 0 - 0 - 0\ldots,$$

що так само каже нам, що сума дорівнює 1!

То 1 чи 0? Чи якось так, що наполовину 0, а наполовину 1? Здається, це залежить від того, де зупинитися — але ж нескінченна сума не зупиняється ніде!

Не поспішайте робити висновків, далі буде гірше. Припустимо, що T — це значення нашої таємничої суми:

$$T = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Зробимо обидві частини рівності від'ємними:

$$-T = -1 + 1 - 1 + 1\ldots$$

Але ж сума праворуч — це те саме, що ви отримаєте, взявши початкову суму, яка дорівнює T, і забравши оту першу одиницю, тобто віднімете 1; інакше кажучи:

$$-T = -1 + 1 - 1 + 1\ldots = T - 1.$$

Отже, $-T = T - 1$, а ця рівність виконується тільки в тому разі, якщо $T = 1/2$. Чи може сума нескінченно багатьох цілих чисел якимось чарівним чином перетворитися на дріб? Якщо ви скажете, що не може, то маєте право принаймні на невелику підозру щодо хитрих аргументів на зразок цього. Але зауважте, що дехто казав, що може, — зокрема, й італійський математик і богослов Луїджі Ґвідо Ґранді[25], на честь якого названо ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$; у статті 1703 року він доводив, що сума цього ряду становить $1/2$, а крім того, що цей дивовижний висновок підтверджує творення Всесвіту з нічого. (Не хвилюйтеся, про це я розповідати не буду). Інші тогочасні провідні математики, як-от Лейбніц і Ейлер, погоджувалися з дивним результатом обчислення Ґранді, а то й з розширеними висновками.

Але насправді розгадка головоломки про 0,999... (як і парадокса Зенона й ряду Гранді) лежить дещо глибше. Ви не повинні поступатися перед моїм важким алгебраїчним озброєнням. Наприклад, ви могли б наполягати, що 0,999... не дорівнює 1, а що воно є 1 мінус якесь крихітне нескінченно мале число. А заразом могли б наполягати, що 0,333... не є *точно* 1/3, що цей періодичний дріб теж менший на нескінченно малу величину. Щоб дійти цим шляхом до кінця, потрібна певна стійкість, але зробити це можна. Колись на курсі матаналізу в мене був студент, якого звали Браян. Стандартні визначення його не влаштовували, тому він розробив добрячий шмат теорії самотужки, а нескінченно малі величини звалися у нього «числами Браяна».

Насправді Браян не був першим, хто добувся до цієї теорії. Існує ціла галузь математики, що спеціалізується на дослідженні таких чисел і має назву *нестандартний аналіз*. Теорія, розроблена Абрагамом Робінсоном у середині XX ст., зрештою дала раду «нескінченно малим прирощенням» — таким сміхотворним, на думку Берклі. Ціна, яку потрібно за це заплатити (або, якщо дивитися з іншого боку, винагорода, яку належить отримати), — це ряснота нових видів чисел; тут не тільки нескінченно малі, а й нескінченно великі, цілий величезний букет чисел усіх форм і розмірів*.

Так вийшло, що Браяну поталанило — я мав колегу у Принстоні, Едварда Нельсона, експерта в галузі нестандартного аналізу. Я організував зустріч, щоб Браян міг дізнатися більше. Як розповів мені Ед, вона вийшла не надто доброю. Щойно Ед пояснив, що нескінченно малі величини насправді назву чисел Браяна не отримають, той втратив до теми будь-який інтерес.

(Моральний урок: той, хто йде у математику по гучну славу, надовго там не залишається).

Але ми не наблизилися до вирішення нашої суперечки. Що таке 0,999... *насправді*? 1? Чи це якесь число, на нескінченно малу величину менше за 1, число божевільного типу, який навіть не відкрили століття тому?

Правильна відповідь у тому, щоб це питання не порушувати. Що таке 0,999... насправді? Виглядає на те, що ним позначається сума:

0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 +...

* Особливо чарівний і дивовижний приклад, як підказує їхня назва, становлять *сюрреальні числа*, розроблювані Джоном Конвеєм; це — дивні гібриди чисел і стратегічних ігор; їхні глибини ще повністю не досліджені. Книжка «Виграшні стратегії у математичних іграх», написана Берлекемпом, Конвеєм і Гаєм, — добрий спосіб знайомства із цими незвичайними числами, а крім того — багате джерело знань про математику в іграх.

Але що це значить? Насправді проблема в оцих обридливих трьох крапках. Не може бути різних думок з приводу того, що значить додати два, три чи сто чисел. Це просто математичний запис дуже добре зрозумілого нам фізичного процесу: візьмімо сто куп чогось, складімо разом та подивімося, скільки буде. Але нескінченно багато? Це вже інша річ. У реальному світі не можна мати нескінченно багато куп. Яким є числове значення нескінченної суми? Його немає — *доки ми його не дамо*. У цьому полягала велика новаторська ідея Огюстена Луї Коші, який у 1820-х роках ввів у математичний аналіз поняття *границі**.

Найкраще це пояснює британський фахівець теорії чисел Ґ. Г. Гарді у своїй книжці «Розбіжні ряди» (1949):

> Сучасному математику й на думку не спаде, що будь-яке поєднання математичних символів може мати «значення» до того, як йому буде надано значення за допомогою визначення. Проте це було тривіальністю навіть для найвидатніших математиків XVIII ст. Вони не мали звички давати визначення; для них не було природним прямо говорити: «під *X* ми розуміємо *Y*»... Загалом, правильним буде сказати, що математики до Коші запитували не «Як *визначити* 1 − 1 + 1 − 1 +...?», а «*Що є* 1 − 1 + 1 − 1 +...?», і такий підхід приводив їх до непотрібних непорозумінь, зрештою суто словесного характеру.

Це не абстрактний математичний релятивізм. Просто те, що ми *можемо* надати будь-яке значення групі математичних символів, не значить, що ми маємо це робити. У математиці, як і в житті, є добрі і погані варіанти вибору. У математичному контексті добрими є ті варіанти, які дають змогу залагодити непотрібні непорозуміння, не створюючи нових.

Сума 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 +... дедалі більше наближається до 1 мірою появи нових доданків. І ніколи не віддаляється. Байдуже, як близько від 1 ми проведемо межу, сума, зрештою, після певної скінченної кількості кроків, її перетне і не повернеться назад. За таких умов, каже Коші, ми маємо просто *визначити*, що значення нескінченної суми дорівнює 1. І після цього він взявся до напруженої роботи, щоб довести, що, поклавшись на таке визначення, ми не опинимося у пастці безлічі нових жахливих суперечностей. Завершенням цієї роботи став метод, що зробив ньютонівський аналіз повністю строгим. Коли ми кажемо, що крива локально виглядає як пряма, нахилена під певним кутом, то тепер це означає приблизно таке: що більше до неї наближатися, то крива стає дедалі більше схожою на цю пряму. За формулю-

* Як усі прориви у математиці, теорія Коші мала своїх попередників — наприклад, визначення Коші дуже суголосне д'аламберовим границям похибки біноміальних рядів. Але, поза сумнівом, поворотним пунктом виступив Коші, після нього аналіз став сучасним.

ванням Коші, немає потреби у нескінченно малих числах чи у чомусь іншому, що може нажахати скептика.

Звісно, цьому є своя ціна. Причина складності питання про значення 0,999... в тому, що воно заганяє в безвихідь нашу інтуїцію. Нам би хотілося, щоб сума нескінченного ряду піддавалася арифметичним маніпуляціям, продемонстрованим на попередніх сторінках, а вони, здається, вказують, що ця сума дорівнює 1. З іншого боку, нам подобається, коли кожне число представляється унікальним набором десяткових цифр, що суперечить твердженню, що одне й те саме число може бути виражене і як 1, і як 0,999..., на наш розсуд. Обидва ці бажання одночасно задовольнити не можна; одне з них треба відкинути. За підходом Коші, який за двісті років достатньою мірою довів свою цінність, викинути треба саме унікальність розкладення на десяткові дроби. Нас же не турбує те, що у мові часом використовуються різні групи символів (тобто різні слова) для синонімічного позначення одного й того самого у світі; схожим чином, не так уже й погано, що дві різні групи цифр можуть позначати одне й те саме число.

Щодо ряду Гранді $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, то це один з випадків, що виходять за межі теорії Коші: він є прикладом *розбіжних рядів*, яким присвячена згадувана робота Гарді. Норвезький математик Нільс Генрік Абель, один з перших прихильників підходу Коші, писав 1828 року: «Розбіжні ряди — винахід диявола; ґрунтувати на них будь-які доведення — ганьба». Погляд Гарді, прийнятий сучасною математикою, більш вибачливий; якимось розбіжним рядам ми маємо надавати значення, якимось — ні, а ще іншим — або так, або ні, залежно від умов, за яких ці ряди виникають. Сучасні математики кажуть, що якби нам було потрібно надати ряду Гранді певного значення, то це має бути 1/2, оскільки, як виявляється, усі цікаві теорії нескінченних сум або надають цьому ряду значення 1/2, або ж, як теорія Коші, не надають жодного*.

Щоб строго описати визначення Коші, потрібно трохи більше роботи. Особливо це стосується самого Коші, форма викладу якого не зовсім відповідає вимогам сучасної математики**. (У математиці дуже рідко буває так, що найчіткіший виклад ідеї подає сам її винахідник). Коші відомий як непохитний консерватор і рояліст, та в математиці він був революціонером і справжньою мукою для академічної влади. Щойно він зрозумів, як обходитися без небезпечних нескінченно малих величин, ні з ким не радячись, він переписав свій курс у Політехнічній школі відповідно до нових ідей. Це доводило до сказу всіх, хто його оточував: студентів вводило в оману, бо вони записували-

* За знаменитим висловом Ліндсі Логан, «Границі не існує!».

** Якщо ви вчили ті розділи математики, де використовуються епсилони й дельти, то нащадків формальних визначень Коші вже бачили.

ся на початковий курс математичного аналізу, а потрапили на семінар з новітніх досягнень чистої математики; його колег, які вважали, що майбутнім інженерам у Політехнічній школі рівень строгості Коші ні до чого; керівництво, вказівками якого про дотримання вимог до курсів він повністю знехтував. Школа вольовим рішенням запровадила новий навчальний план з наголосом на традиційному підході й посадила в аудиторії Коші стенографістів, що мало забезпечити відповідність його занять новому навчальному плану. Коші відповідності не забезпечував. Потреби майбутніх інженерів його не цікавили. Його цікавила істина[26].

У педагогічному плані позицію Коші захищати тяжко. Але хай там як, а я його розумію. Одна з найбільших радостей у математиці — це невідпорне відчуття, що ти щось зрозумів правильно, до самого кінця; такого я не відчував ніде, крім математики. А коли знаєш, як щось робити правильно, тяжко — для деяких упертих людей неможливо, — змусити себе пояснювати це неправильно.

Розділ 3

У всіх ожиріння

В естрадного коміка Юджина Мірмана є такий жарт про статистику. Він каже, що полюбляє говорити людям: «Я читав, що 100 % американців — азіати».

«Але, Юджине, — протестує співрозмовник, — *ти* не азіат».

І тут ударна репліка, проголошувана з пишною самовпевненістю: «Та я ж читав, що азіат!».

Я згадав жарт Мірмана, натрапивши на статтю в журналі «Ожиріння»[27], від заголовка якої стає ніяково: «Чи всі американці матимуть надмірну вагу або ожиріння?». Риторичним запитанням автори не вдовольнилися, у статті подається і відповідь: «Так — до 2048 року».

2048-го мені буде сімдесят сім, і я сподіваюся не мати надмірної ваги. Та я ж читав, що матиму!

Як і варто було очікувати, стаття в «Ожирінні» викликала гучний резонанс у пресі. «Ей-бі-сі Ньюз» пророкувало «апокаліпсис через ожиріння»[28]. Газета «Лонґ-Біч Прес-Телеґрам» надрукувала статтю, що називалася просто: «Ми гладшаємо»[29]. Результати дослідження виявилися суголосними останньому прояву гарячкової й мінливої тривожності, з якою американці завжди ставляться до морального клімату в суспільстві. До мого народження хлопці відрощували довге волосся, і через те ми прирікали себе на поразку від комуністів. Коли я був малим, ми забагато грали на автоматах, через що були приречені на фатальне відставання від невтомних японців. Тепер ми їмо забагато фаст-фуду, а тому всіх нас викосить неміч і знерухомлення: тепер ми приречені кабаніти серед порожніх відерець від курячих крилець, уже давно не в змозі підвестися з диванів. Як запевняють автори статті, усе це — науково доведений факт.

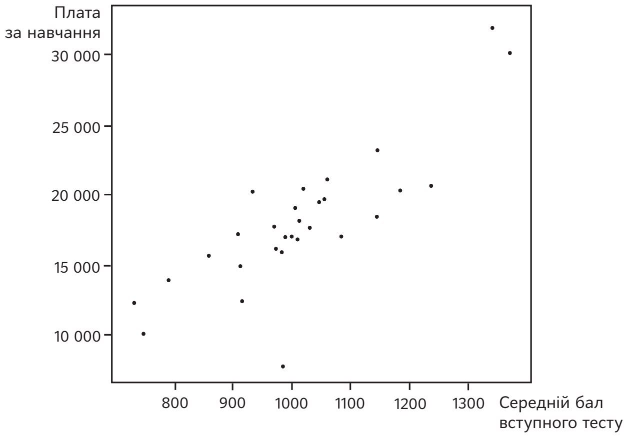
У мене добра новина. Не всі ми 2048 року ожиріємо[30]. Чому? Тому що не всі лінії прямі.

Та всі лінії, як того щойно навчив нас Ньютон, дуже близькі до прямих. На цій ідеї ґрунтується *лінійна регресія,* — статистичний метод, який у суспільних науках застосовується так само широко, як викрутка у дрібному ремонті. Це інструмент, який використовується практично завжди при вирішенні будь-яких завдань. Щоразу, коли ви читаєте, що люди, які мають більше двоюрідних братів і сестер, щасливіші, або що у країнах, у яких більше фаст-фудів «Бурґер-Кінґ», знижується рівень моралі, чи що вживання вітаміну B3 подвоює ризик грибка на ногах, чи що кожні наступні 10 тисяч доларів річного доходу на 3 % збільшують ймовірність, що ви голосуватимете за республіканців*, ви зустрічаєтеся з результатами застосування лінійної регресії.

Ось як це працює. Маємо дві речі, які хочемо пов'язати; скажімо, вартість навчання в університеті і середній бал тестування абітурієнтів. Можна подумати, що навчання в університетах, абітурієнти яких мають вищі бали, коштує дорожче; проте статистика каже, що це не завжди так. В Ілонському університеті, розташованому поряд з Берлінґтоном, що у штаті Північна Кароліна, середній бал за тести з математики й мови становить 1217, а річна плата за навчання 20 441 долар. Сусідній Гілфордський коледж у Ґрінсборо трохи дорожчий, 23 420 доларів, але відповідний середній показник абітурієнтів тут 1131.

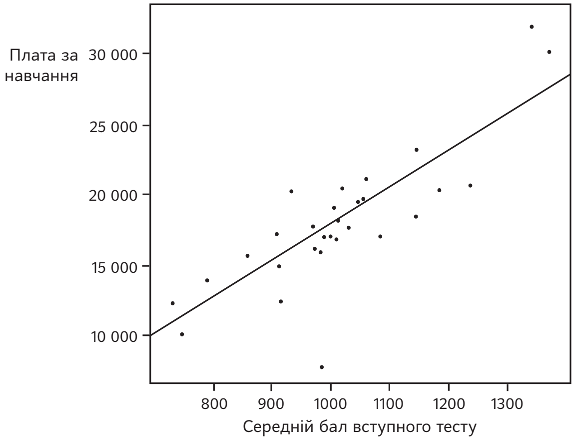
Разом з тим, якщо дивитися на весь список навчальних закладів — скажімо, тридцять чотири приватні університети, що подали дані щодо плати і вступних балів до довідника ресурсів для побудови кар'єри штату Північна Кароліна[31] за 2007 рік, — бачимо чітку тенденцію.

Точки на діаграмі відповідають коледжам. А оті дві, що набагато вище за інші, у правому верхньому кутку, з космічними балами абітурієнтів і відповідними цінниками? Це коледжі Вейк Форест і Девідсона. Самотня точка на самому низу — єдиний приватний коледж, плата в якому нижча за 10 тисяч на рік — медичний коледж Кабарус.



* Більше про це можна дізнатися у «Журналі штук, які я повністю вигадав для ілюстрації».

Діаграма чітко показує, що заклади з вищими балами вступників правлять вищу ціну — в цілому. Але *наскільки* вищу? Тут-то на сцену і виходить лінійна регресія. Очевидно, що точки на діаграмі не знаходяться на одній лінії. Але видно й те, що вони недалеко від такої лінії відходять. Напевно, ви від руки можете провести пряму, що проходитиме практично посередині хмарки наших точок. Лінійна регресія бере на себе роботу у визначенні лінії, яка проходитиме найближче* до всіх точок. Лінію для коледжів штату Північна Кароліна подано на наступному рисунку.



Лінія на рисунку має нахил 28. Це означає, що якби плата за навчання повністю визначалася балами вступників, відповідно до лінії на діаграмі, кожен додатковий бал тестування відповідав би додатковим 28 доларам плати. Якби можна було підняти середній бал ваших вступників на 50, то ви могли б брати за навчання на 1 400 доларів більше. (Або, з погляду батьків, зростання на 100 балів результатів тестування вашої дитини означатиме підвищення рівня плати за навчання в університеті на 2 800 доларів. Курси підготовки до тестування дорожчі, ніж ви думали!)

---

* У цьому контексті «найближче» вимірюється так: якщо замінити реальну плату кожного закладу на оцінку, яку дає лінія, а потім взяти різницю між цими сумами для кожного закладу, а потім піднести до квадрата ці показники, а потім усе це додати, то отримаємо певне загальне число, що показує, наскільки лінія відхиляється від точок, і таким чином можна знайти ту, відхилення якої буде найменшим. Ця процедура додавання квадратів нагадує теорему Піфагора, і насправді базова геометрія лінійної регресії — це не що інше, як теорема Піфагора, перенесена й модифікована для набагато складнішого завдання; але щоб про це все розповісти, довелося б звертатися до більшого обсягу алгебри і тригонометрії, ніж хотів би у цьому разі. Трохи докладніше про кореляції і тригонометрію йтиметься у розділі 15.

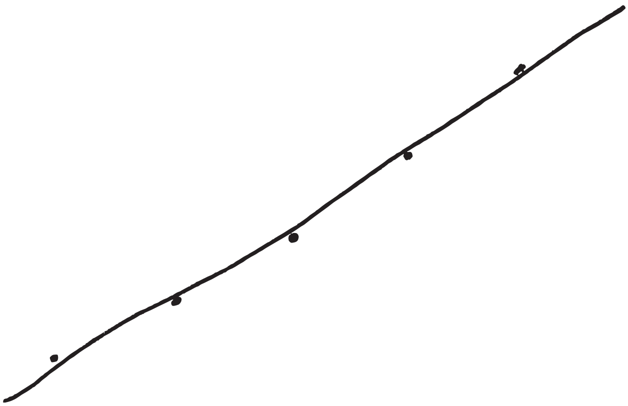
Лінійна регресія — це чудовий інструмент, він багатофункціональний, масштабований, його легко застосовувати, просто натискаючи на відповідну кнопку в електронній таблиці. Він працює для даних з двома змінними, як ті, що описано вище, але так само легко і з трьома, і з тисячею. Коли ви хочете зрозуміти, як і в якому напрямі на якусь змінну впливають інші, лінійна регресія — це перше, до чого тягнеться рука. І цей інструмент працює з абсолютно будь-якими даними.

І в цьому — її слабкість, так само, як і сила. Лінійну регресію можна застосовувати, не думаючи про те, наскільки модельоване явище насправді є лінійним. *Але думати треба*. Я порівняв лінійну регресію з викруткою, і таке порівняння правильне; проте у певному сенсі вона більше схожа на циркулярну пилку. Якщо застосовувати її, не приділяючи належної уваги тому, що робиш, результати можуть виявитися моторошними.

Візьмімо, приміром, снаряд, яким ми стріляли в попередньому розділі. Можливо, ви — зовсім не той, хто стріляв. Можливо, навпаки, вам цей снаряд призначався. У цьому разі ви матимете більш ніж достатні підстави зацікавитися якомога точнішим аналізом траєкторії снаряда.

Можливо, ви позначили на діаграмі вертикального положення снаряда п’ять точок у різні моменти часу, і вони виглядають так:

Тут ви швидко застосовуєте лінійну регресію, — результати чудові. Ось лінія, що майже точно проходить через усі позначені точки:



(Саме тут ваша рука мимохіть починає сповзати до леза циркулярки).

Ваша лінія представляє дуже точну модель руху снаряда: щохвилини висота снаряда збільшується на певну постійну величину: скажімо, 400 метрів. За годину він буде на висоті 24 кілометри над земною поверхнею. А коли він почне падати? Ніколи не почне! Висхідна пряма залишається висхідною. Так поводяться прямі лінії.

(Кров, кишки, крики).

Не всі лінії прямі. А крива шляху снаряда *якнайрішучішим чином* не пряма; це парабола. Так само, як круг Архімеда, вона виглядає прямою, якщо до неї наблизитися; і саме тому лінійна регресія чудово впорається з визначенням того, де буде снаряд через п'ять секунд після того, як ви останній раз стежили за ним. Але якщо через годину? У жодному разі. Ваша модель скаже, що снаряд знаходитиметься у нижньому шарі стратосфери, коли насправді він, імовірно, наближатиметься до вашого дому.

Наймальовничіше з відомих мені застережень проти бездумного використання лінійної екстраполяції зробив не статистик, а Марк Твен у «Житті на Міссісіпі»:

> Довжина Міссісіпі між Каїром і Новим Орлеаном сто сімдесят шість років тому становила тисячу двісті п'ятнадцять миль. Після прориву русла 1722 року довжина стала тисяча сто вісімдесят миль. Коли утворився рукав біля Американської вилучини, довжина стала тисяча сорок миль. Відтоді ця ділянка річки покоротшала ще на шістдесят сім миль. Отже, зараз її довжина між Каїром і Новим Орлеаном становить усього дев'ятсот сімдесят три милі... За сто сімдесят шість років Нижня Міссісіпі покоротшала на двісті сорок дві милі, тобто в середньому приблизно на милю і одну третину на рік. Звідси кожна спокійна й розсудлива людина, якщо тільки вона не сліпа і не зовсім

ідіот, може побачити, що в давню силурійську епоху — а їй у листопаді наступного року виповниться рівно мільйон років — Нижня Міссісіпі мала понад мільйон триста тисяч миль у довжину і висіла над Мексиканською затокою на кшталт вудки. Виходячи з тих самих даних, кожен легко зрозуміє, що через сімсот сорок два роки Нижня Міссісіпі буде тільки миля й три чверті завдовжки, а вулиці Каїра й Нового Орлеана зіллються, і будуть ці два міста жити у злагоді, керовані одним мером і обираючи спільну міську раду. Усе ж таки є в науці щось захопливе. Вкладаєш сущий мізер фактів і за допомогою припущення отримуєш колосальний результат.

Відступ: як отримати півкредиту в мене на іспиті з матаналізу

Методи математичного аналізу дуже схожі на лінійну регресію: вони суто механічні, усі операції може виконати калькулятор, і дуже небезпечно застосовувати їх неуважно. На іспиті з матаналізу вам можуть запропонувати обчислити масу води, що залишиться в кухлі після того, як у ньому пробили дірку і вода якийсь час витікала, ну й усяке таке. Розв'язуючи такі задачі, ще й в умовах обмеженого часу, легко зробити арифметичні помилки. Буває, якийсь студент отримує сміховинний результат, наприклад, що вода в кухлі важить −4 грами.

Якщо студент отримує −4 г і поспіхом пише у відчаї «Я десь схибив, а помилки знайти не можу», я зараховую йому півкредиту.

Якщо ж просто пише «Відповідь: −4 г» і обводить її кружечком, він отримує нуль — навіть коли весь хід роботи був правильним, а дурниця у відповіді вийшла через одну-єдину пропущену в обчисленнях цифру.

Обчислити інтеграл чи виконати лінійну регресію — це те, на що цілком здатний комп'ютер. Розуміння ж того, чи має сенс результат — або ж, передусім, рішення, чи можна використовувати метод, — потребує людського керівництва. Передбачається, що у процесі навчання математики ми маємо пояснювати, як стати таким керівником. Навчання математики, яке цього не робить, — це, по суті, підготовка студентів до ролі повільної і глючної версії «Майкрософт Іксел».

І давайте відверто: саме це насправді і робиться у навчанні математики. Якщо довгу і сповнену конфліктів історію викладання математики переповісти коротко (спокійнішою вона від цього не стане), то воно протягом десятків років було ареною так званих математичних війн. По один бік — викладачі, які роблять наголос на запам'ятовуванні, швидкості, традиційних алгоритмах і точних відповідях; по інший — викладачі, які вважають, що навчання математики має бути опануванням змісту, розвитком способів мислення, керованим відкриттям, а відповіді можуть бути й наближеними. Перший підхід іноді називають *традиційним*, другий — *реформаторським*, хоча, здавалося б, різноманітні форми нетрадиційного методу навчання шляхом відкриття відомі вже десятки років, а навколо того, чи справді можна вважати «реформу» реформою, якраз і точаться суперечки. *Запеклі* суперечки. На званому математичному вечорі цілком нормально говорити про політику і релігію, але якщо починається суперечка навколо математичної освіти, то закінчиться вона, ймовірно, тим, що хтось гучно грюкне дверима через образу традиціоналізму або реформізму.

Себе я не зараховую до жодного табору. Я не можу погодитися з тими реформістами, які прагнуть відкинути запам'ятовування таблиці множення. У серйозній математичній роботі часом доводиться множити шість на вісім, і якщо для цього щоразу вам потрібно буде відволікатися на калькулятор, ви ніколи не досягнете тієї зосередженості, якої вимагає справжня математична робота. Ви не напишете сонет, якщо по кожне слово лізтимете до словника.

Деякі реформісти заходять так далеко, що кажуть, що класичні алгоритми (як-от додавання багатозначних чисел у стовпчик) потрібно забрати зі школи, тому що вони заважають процесу самостійного відкриття учнями властивостей математичних об'єктів*.

Ідея видається мені жахливою: ці алгоритми — корисні інструменти, над якими люди тяжко працювали, і немає причин для того, що ми все мусимо починати з нуля.

З іншого боку, деякі алгоритми, на мою думку, можна безболісно прибрати із сучасного світу. Не потрібно вчити дітей, як добувати квадратні корені на папері чи в думці (хоча друге з названих умінь, можу засвідчити з тривалого особистого досвіду, у достатньо схиблених колах викликає справжній захват). Над калькуляторами люди теж тяжко працювали, і ми їх теж маємо використовувати, коли цього вимагає ситуація! Мені навіть все одно, чи можуть мої студенти поділити у стовпчик 430 на 12 — хоча *не все одно*, чи мають вони достатнє відчуття чисел, щоб в умі прикинути, що це буде трохи більше за 35.

Небезпека надмірного наголошування на алгоритмах і точності обчислень у тому, що алгоритми і точність обчислень легкодосяжні. Якщо ми зупиня-

* Це трохи нагадує оповідання Орсона Скотта Карда «Соната без супроводу» про музичного вундеркінда, якого пильно тримають у самотності й незнанні про будь-яку іншу музику у світі, щоб не зіпсувати його оригінальність, але потім один хлопець пробирається до нього і грає щось із Баха, і, звісно, про це дізнається музична поліція, і вундеркінда зрештою відлучають від музики, а потім, наскільки пам'ятаю, відрубують руки й осліплюють чи щось таке, бо Орсон Скотт Кард має отой вроджений пунктик про покарання й умертвлення плоті; хай там як, а штука в тому, що не варто не давати молодим музикантам слухати Баха, тому що Бах — це чудово.

ємося на розумінні математики як способу «отримати правильну відповідь» і не більше — і перевірятимемо саме це, ми наражаємося на ризик підготовки студентів, які добре здають тести, але не знають математики взагалі. Це, можливо, задовольнить тих, кому потрібні виключно результати тестів і іспитів, але мене це не влаштовує.

Звичайно, не краще (насправді набагато гірше), коли учні мають певне примарне розуміння математичного змісту, але при цьому не здатні швидко і правильно розв'язувати приклади. Найгірше, що може почути викладач математики від учня чи студента, це «я зрозумів ідею, але задачі розв'язувати не можу». Хоча студент цього не знає, але це тільки евфемізм для «ідеї не зрозумів». Математичні ідеї можуть виглядати абстрактно, але тільки стосовно конкретних обчислень вони набувають зміст. Виразно це висловив Вільям Карлос Вільямс: *немає ідей поза речами*.

Найнаочніше ця битва виявляється у планіметрії. Чимало фахівців вбачають у планіметрії останній прихисток «справжньої математики». Проте неясно, наскільки саме ми навчаємо краси, сили й дивовижності доведення у процесі вивчення геометрії. Заняття математикою легко перетворити на виконання тренувальних вправ — нудних, як список тридцяти визначених інтегралів. Становище таке складне, що лауреат премії Філдса Девід Мамфорд запропонував зовсім вилучити планіметрію з навчальних планів, замінивши її основами програмування. Зрештою, комп'ютерна програма має багато спільного з геометричним доведенням: і те і те вимагає від учня поєднання кількох дуже простих компонентів з невеликого набору варіантів, один за одним, для того, щоб послідовність у цілому виконувала певне важливе завдання.

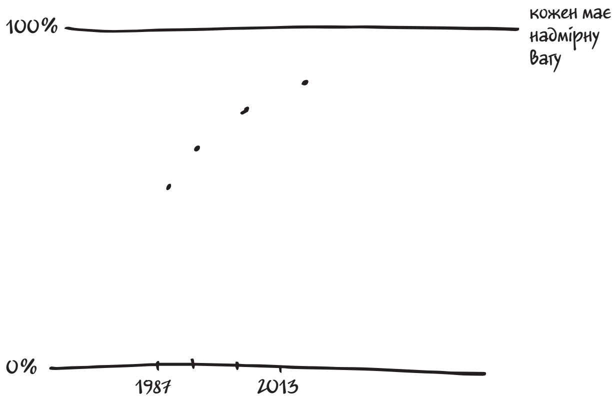
Я не такий радикальний у цьому питанні. Насправді я зовсім не радикальний. Хоч яким це буде розчаруванням для твердих прихильників обох підходів, на мою думку, ми маємо навчати математики, яка цінує точні відповіді, але також і розумні наближення, яка вимагає уміння легко застосовувати відомі алгоритми, але також і простий здоровий глузд миттєво розуміти речі, у якій поєднується строгість з відчуттям гри. Якщо не так, то ми зовсім не навчаємо математики.

Це непросте завдання — але, зрештою, саме це і роблять найкращі вчителі математики, тимчасом як начальство десь нагорі веде математичні війни.

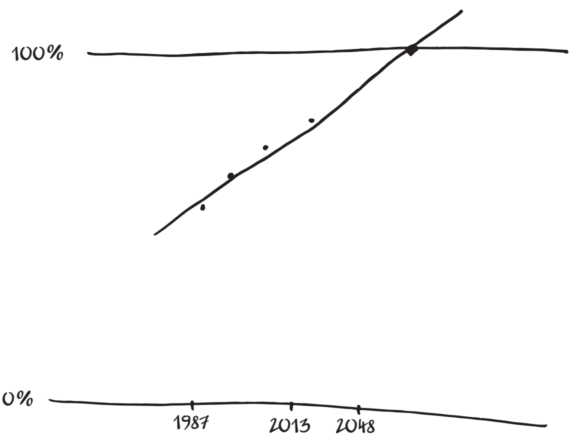
Назад до апокаліптичного ожиріння

То який відсоток американців 2048 року потерпатиме від ожиріння? Зараз ви вже уявляєте, як Юфа Ванґ зі своїми співавторами у журналі «Ожиріння» отримали цей прогноз. Національна програма перевірки стану здоров'я та харчування отримує свої дані за великими репрезентативними вибірка-ми американців, враховуючи все — від втрати слуху до інфекцій, що передаються статевим шляхом. Зокрема, вона має дуже добрі дані про частку американців із зайвою вагою, що в нашому разі визначається як індекс маси тіла 25 або більше*. Немає сумніву, що кількість осіб з надмірною вагою за останні десятиліття зросла. На початку 1970-х років менш ніж половина американців мала високий ІМТ. На середину 1990-х їхня частка збільшилася майже до 60 %, а 2008 року майже три чверті населення США мали зайву вагу.

Поширення ожиріння можна показати у часі, як ми це робили, розглядаючи політ нашого снаряда:



Тепер можна побудувати лінійну регресію, яка виглядатиме десь так:

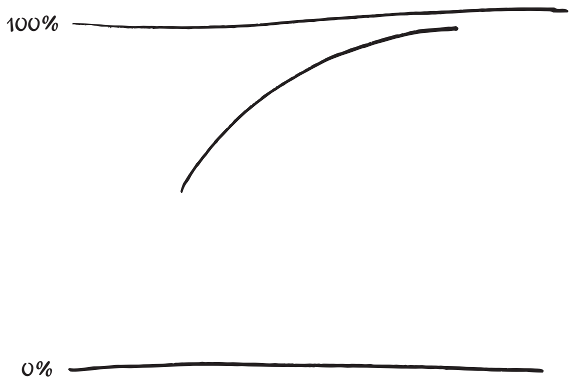


* У науковій літературі «надмірна вага» означає «ІМТ вищий за 25, однак менший за 30», а «ожиріння» — «ІМТ 30 і вищий», але я об'єдную обидві групи в одну, «що мають надмірну вагу», щоб не писати стонадцять разів «мають надмірну вагу або ожиріння».

2048 року лінія перетне 100 %. Тому-то Ванґ і пише, що всі американці 2048 року матимуть надмірну вагу, якщо зберігатимуться поточні тенденції.

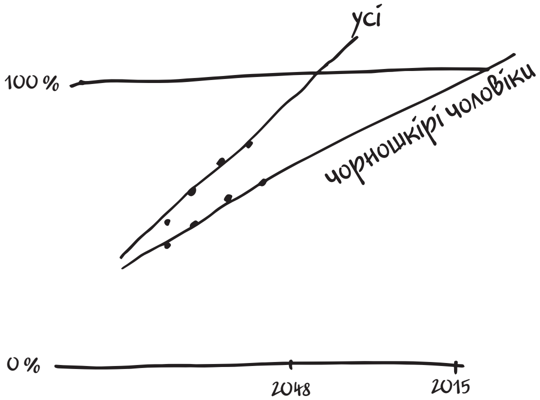
Але поточні тенденції не збережуться. Вони не можуть зберегтися! Якби це було можливим, 2060 року приголомшлива більшість американців — 109 % — потерпали б від зайвої ваги.

Насправді графік зростання частки загинається до 100 % таким чином:



Це не залізний закон, як-от тяжіння, що згинає траєкторію снаряда у параболу, але (якби такі закони в медицині існували) він близький до цього. Що вищою є частка людей з надмірною вагою, то менше залишається худих для навернення, і то повільніше частка наближається до 100 %. Насправді крива, ймовірно, стане горизонтальною у якійсь точці, нижчій за 100 %. Худі будуть з нами завжди! І справді, усього через чотири роки Національна програма відзначила уповільнення поширення зайвої ваги[32].

Проте стаття в журналі «Ожиріння» приховує і тяжчий злочин проти математики і здорового глузду. Лінійну регресію легко побудувати — а побудувавши, продовжувати справу далі. Отож, Ванґ з товариством відфільтрували дані за ознаками етнічного походження і статі. Чорношкірі чоловіки, наприклад, мали нижчі шанси отримати зайву вагу, ніж у середньому по Америці; та, що важливіше, частка осіб з надмірною вагою серед них зростала наполовину повільніше. Накладемо частку товстих чорношкірих чоловіків на частку товстих американців у цілому, і все це разом — на лінійну регресію, побудовану групою Ванґа. Отримаємо таку картину:



Молодці, чорні хлопці! До 2095 року не всі з вас будуть товстими. 2048-го ожиріє лише 80 %.

Бачите проблему? Якщо передбачається, що *всі* американці 2048 року матимуть зайву вагу, куди поділася та одна п'ята чорношкірих чоловіків без прогнозованих проблем із зайвою вагою? Повиїжджали?

Стаття жодним словом не згадує цю фундаментальну суперечність. А саме — медичний еквівалент −4 г води, що залишаються у кухлі. Кредит не зараховано. Нуль балів.

Розділ 4

Скільки це буде у мертвих американцях?

Наскільки серйозним є конфлікт на Близькому Сході? Фахівець із боротьби з тероризмом Деніел Байман із Джорджтаунського університету в журналі «Форін Ефеарс» подає деякі холодні й невблаганні цифри: «Ізраїльські військові повідомляють[33], що від початку Другої інтифади [2000 р.] до кінця жовтня 2005 року палестинці вбили 1074 і завдали поранень 7 520 ізраїльтянам — вражаючі цифри для такої маленької країни, це відсотковий еквівалент понад 50 тисяч загиблих і 300 тисяч поранених для Сполучених Штатів». У тому, що говориться і пишеться про Близький Схід, такі обчислення трапляються на кожному кроці. У грудні 2001 року Палата представників Конгресу США заявила, що 26 осіб, які загинули в результаті низки терористичних нападів в Ізраїлі, це «еквівалент, за пропорційною часткою[34], смертей 1200 американців». Ньют Ґінґріч[35] 2006 року: «Пам'ятаймо, що, коли Ізраїль втрачає восьмеро людей[36], це еквівалентно загибелі майже 500 американців». Тією самою монетою в газеті «Лос-Анджелес Таймс» відплачує опонентам Ахмед Мур: «Коли Ізраїль убив 1400 палестинців у Газі — пропорційно це еквівалент 300 тисяч американців — в операції "Литий свинець", майбутній президент Обама жодного слова не сказав».

Риторика пропорцій і еквівалентів не обмежується Святою Землею. 1998 року Джеральд Каплан писав у «Торонто Стар»: «Близько 45 тисяч нікарагуанців[37] з обох боків конфлікту загинуло, дістало поранення чи було викрадено за останні вісім років; об'єктивно це еквівалент 300 тисяч канадців або 3 мільйони американців». Міністр оборони часів В'єтнамської війни Роберт Макнамара 1997 року сказав, що майже 4 мільйони загиблих під час війни в'єтнамців були «еквівалентом 27 мільйонів американців»[38]. Щоразу, коли гине багато мешканців маленької країни, автори редакційних статей тягнуться за логарифмічними лінійками і беруться за підрахунки: а скільки воно буде в мертвих американцях?

Ось як отримуються ці цифри. 1074 ізраїльтянина, убитих терористами, становлять близько 0,015 % населення Ізраїлю (яке у період 2000–2005 років становило 6–7 мільйонів осіб). Тож мудреці вираховують, що загибель

0,015 % набагато більшого населення Сполучених Штатів, що і справді становить близько 50 тисяч осіб, приблизно так само вплине на США.

Це — лінеоцентризм у найчистішій своїй формі. На поданому нижче графіку можна знайти пропорційний еквівалент 1074 ізраїльтян у різних країнах світу:

1074 ізраїльських загиблих — це еквівалент 7700 іспанців або 223 000 китайців, однак лише 300 словенців і одного або двох представників народу Тувалу.

Поступово (чи відразу?) такий хід міркувань починає розсипатися. Коли у барі на час закриття залишається двоє чоловіків, і один з них топить у пику іншому, то це не є еквівалентом того, що 150 мільйонів американців одномоментно отримують такий самий удар.

Або: коли 1994 року було винищено 11 % населення Руанди, усі погодилися, що це один з найжахливіших злочинів століття. Але ми не описуємо цю різанину, кажучи: «У контексті Європи 1940-х років це було у дев’ять разів нищівнішим за Голокост». Такі слова цілком закономірно викликали б роздратування.

Важливе правило математичної гігієни: коли ви перевіряєте в реальних умовах математичний метод, намагайтеся обчислити те саме кількома різними способами. Якщо отримуєте кілька різних відповідей, щось із вашим методом не те.

Наприклад: 2004 року на мадридському залізничному вокзалі Аточа бомба терориста вбила майже 200 людей. Яким би був еквівалент цього теракту на Центральному вокзалі у Нью-Йорку?

Населення США майже у сім разів перевищує населення Іспанії. Тож якщо ви берете 200 осіб як 0,0004 % населення Іспанії, то у вас вийде, що еквівалентний терористичний акт призвів би до загибелі 1300 осіб у Сполучених Штатах. З іншого боку, 200 осіб — це 0,006 % населення Мадрида; якщо масштабувати цю кількість на Нью-Йорк, більший від Мадрида у два з половиною рази, отримаємо 463 жертви. Чи, може, ми маємо порівнювати провінцію Мадрид зі штатом Нью-Йорк? Це дасть кількість, ближчу до 600. Цей різнобій у результатах має бути сигналом тривоги. Щось з методом пропорцій не те.

Зовсім відкидати пропорції, звісно, не можна. Пропорції — річ важлива! Якщо потрібно дізнатися, які регіони Америки найбільше потерпають від раку мозку, не матиме особливого сенсу розглядати штати з найвищими показниками смертності від раку мозку: це Каліфорнія, Техас, Нью-Йорк і Флорида, у яких найбільше випадків захворювання через те, що й населення там найбільше[39]. Стівен Пінкер обстоює схожий аргумент у своїй новій книжці «Найкраще в нас», стверджуючи, що упродовж історії людства стає дедалі менше насильства. XX століття незаслужено зажило поганої слави через величезну кількість людей, що потрапили в жорна великої політики. Але нацисти, більшовики, Комуністична партія Китаю та колоніальні правителі насправді, якщо зважати на пропорції, не були особливо ефективними душогубами, як стверджує Пінкер — просто зараз є кого убивати, і набагато більше, ніж раніше! Нині ми не надаємо великого значення давнім бійням на зразок Тридцятилітньої війни. Але та війна вирувала у меншому світі, і, за оцінкою Пінкера, вона знищила кожну соту людину на Землі. Зараз би це означало загибель 70 мільйонів людей — більше, ніж загинуло у двох світових війнах.

Тож краще розглядати частки: кількість смертей по відношенню до загальної кількості населення. Наприклад, замість того, щоб рахувати абсолютні показники смертей від раку мозку по штатах, можна обчислити, яку частку населення того чи того штату кожного року становлять померлі від раку мозку. У такому разі лідери будуть зовсім іншими. Сумне перше місце посідає Південна Дакота, 5,7 померлих від раку мозку за рік на 100 тисяч населення, що набагато вище від середнього по країні показника 3,4. За Південною Дакотою у списку йдуть Небраска, Аляска, Делавар і Мен. Здається, цих місць варто уникати, якщо не хочеш захворіти на рак мозку. А куди їхати? Прокрутивши список донизу, бачимо Вайомінґ, Вермонт, Північну Дакоту, Гаваї та округ Колумбія.

І це дивно. Як може вийти, що Південна Дакота — лідер за показниками раку мозку, а у Дакоті Північній його майже немає? Чому ви в безпеці у Вермонті і наражаєтеся на ризик у сусідньому Мені?

Відповідь: Південна Дакота не обов'язково спричиняє рак мозку, а Північна — не обов'язково запобігає йому. П'ять штатів-лідерів мають спільну рису, як і п'ять штатів, що посідають останні місця у списку. І це — *одна й та сама* спільна риса: у цих штатах мало хто живе. З дев'яти штатів (і одного округу), які отримали перші й останні місця, найбільшим за населенням є Небраска, яка сьогодні бореться із Західною Вірджинією за 37-ме місце за кількістю населення. Очевидно, життя у маленькому штаті або набагато збільшує, або набагато зменшує ймовірність захворіти на рак мозку[40].

Оскільки в цьому немає сенсу, пошукаємо якесь краще пояснення.

Щоб зрозуміти, що відбувається, пограємо в уявну гру. Гра зветься *хто найкраще кидає монети*. Вона зовсім проста. Гравці кидають жменю монет, і виграє той, у кого випадає більше гербів. Однак, щоб зробити гру трішки цікавішою, уявімо, що не в усіх гравців кількість монет однакова. Дехто — Мала команда — має лише десять монет, тоді як кожен член Великої команди має сто.

Якщо рахувати абсолютну кількість гербів, майже напевно можна сказати, що переможцем у грі буде хтось з Великої команди. Типовий гравець Великих отримає близько 50 гербів — результат, якого неможливо досягнути жодному гравцеві з Малої команди. Навіть якби у Малій команді було сто гравців, найвищими, ймовірно, будуть результати 8 або 9*.

Здається, це нечесно! Велика команда має величезну закладену від початку перевагу. Тож є краща ідея. Замість того щоб рахувати абсолютні результати, будемо рахувати частки. Це має вирівняти умови для двох команд.

Але не вирівнює. Як я вже відзначав, якщо є сто «малих», принаймні в одного з них, імовірно, випаде 8 гербів. Отже, результат цього гравця буде щонайменше 80 %. А «великі»? Жоден з «великих» не отримає 80 %. Звичайно, фізично це можливо. Утім так не буде. Насправді потрібно, щоб у Великій команді було два *мільярди* гравців, щоб з'явився реальний шанс отримати щось схоже. Що більше монет кидаєш, то більшими є шанси наблизитися до результату 50-50.

Можете спробувати самі! Я спробував, і ось що вийшло. Кидаючи по 10 монет за раз, як гравці Малої команди, я отримав таку послідовність випадання гербів:

4, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 3, 4, 5, 5, 9, 3, 5, 7, 4, 5, 7, 7, 9…

Зі ста монетами, як у «великих», послідовність виявилася така:

46, 54, 48, 45, 45, 52, 49, 47, 58, 40, 57, 46, 46, 51, 52, 51,
50, 60, 43, 45…

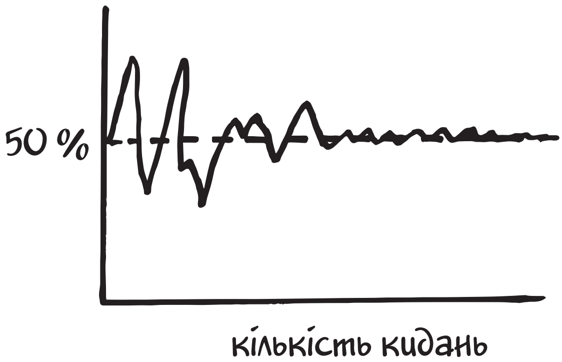
* Я не подаватиму розрахунків, але, якщо ви захочете перевірити мою роботу, ключовий термін — «теорема бінома Ньютона».

І з тисячею монет:

486, 501, 489, 472, 537, 474, 508, 510, 478, 508, 493, 511,
489, 510, 530, 490, 503, 462, 500, 494...

Гаразд, якщо чесно, то я тисячу монет не кидав. Я попросив комп'ютер змоделювати кидання. Хто має час кидати тисячу монет?

Один чоловік, Дж. Е. Керріч, мав таку нагоду. 1939 року цей південноафриканський математик необачно приїхав до Європи. Його семестр роботи за кордоном швидко обернувся на ув'язнення в таборі для інтернованих у Данії. Можливо, інший в'язень, не такий перейнятий проблемами статистики, на його місці позначав би термін рисками на стіні камери. А от Керріч кидав монету, усього 10 тисяч разів[41], записуючи кількість отриманих гербів. Результати виглядали десь так:



Як бачимо, частка гербів невблаганно прямує до 50 % мірою зростання кількості кидань монети — графік немовби стискується невидимими лещатами. Те саме відбувається при моделюванні. Частка гербів у першій групі кидань — Мала команда — становить від 30 до 90 %. Коли кидається сто монет за раз, діапазон звужується — лише від 40 до 60 %. А з тисячею монет діапазон часток уже становить усього від 46,2 до 53,7 %. Щось притискає результати дедалі ближче до 50 %. Це «щось» — холодна і дужа рука Закону великих чисел. Не буду наводити точного формулювання теореми (хоча воно дивовижно красиве!). По-іншому про цей закон можна сказати так: що більше монет кидається, то меншою буде ймовірність отримання 80 % гербів. Насправді за достатньо великої кількості монет надзвичайно малим стає шанс отримати навіть 51 %! В отриманні великого відхилення від 50 % при десяти киданнях немає нічого дивного; отримання такого самого перекосу на ста киданнях є таким неймовірним, що це змусить підозрювати, що щось не так з монетами.

Розуміння того, що результати експерименту тяжіють до певного середнього показника, якщо експеримент повторювати знову і знову, не нове. Воно майже так само давнє, як і саме математичне дослідження ймовірності; цей принцип неформальним чином у XVI ст. сформулював Джироламо Кардано, хоча свою яскраву назву, *la loi des grands nombres,* він отримав тільки на початку 1800-х, коли таким чином цей закон описав французький математик Сімеон Дені Пуассон.

Шолом жандарма

На початку XVIII ст. Якоб Бернуллі розробив точне формулювання і математичне доведення закону великих чисел. Тепер це вже було не спостереження, а теорема.

І теорема каже, що гра між Великими і Малими нечесна. Закон великих чисел завжди притискатиме результати гравців Великої команди до 50 %, тоді як гравці Малої матимуть можливість отримувати набагато різноманітніші результати. Але божевільним був би висновок, що Мала команда «краща» у киданні монет, незважаючи на те, що ця команда завжди виграє. Бо якщо взяти середню частку гербів, що випадають в *усіх* гравців Малої команди, а не тільки в найкращого, ймовірно, вона буде так само близькою до 50 %, як і у Великої команди. А якщо ми будемо шукати гравця, який отримав не найбільше, а найменше гербів, раптом виявиться, що з викиданням гербів у Малої команди кепсько: дуже ймовірно, що один з її членів отримає лише 20 % гербів, а жоден з гравців Великої команди ніколи не матиме такого поганого результату. Зарахування абсолютної кількості гербів дає Великій команді нездоланну перевагу; але використання як результату процентних часток перевертає ситуацію так само рішуче на користь Малої команди. Що менша кількість монет — у статистиці це називається *розміром вибірки,* — то більші відхилення у частці гербів.

Це той самий ефект, який робить політичні соціологічні опитування менш надійними зі зменшенням кількості опитаних. Те саме відбувається з показниками раку мозку. Малі штати мають малі розміри вибірок. Вони — тонкий очерет, що гнеться в усі боки під вітром випадковості, тоді як великі штати — це старі могутні дуби, які цей вітер ледь колише. Вимірювання абсолютної кількості смертей від раку мозку є упередженим щодо великих штатів; але вимірювання найвищих *часток* — або найнижчих! — віддає лідерство малим штатам. Ось як Південна Дакота може мати один з найвищих показників смертності від раку мозку, тоді як Північна Дакота — один з найнижчих.

Це не тому, що гора Рашмор чи знаменитий магазин «Вол Драг» якимось чином отруюють мізки; це тому, що менше населення обов'язково буде більш різноманітним.

Це математичний факт, який ви вже знаєте, навіть якщо не здогадуєтеся, що знаєте. Хто найрезультативніший снайпер у Національній баскетбольній асоціації? Через місяць після початку сезону 2011/2012 років п'ятеро гравців мали дуже близькі найвищі процентні результати в Лізі: Армон Джонсон, Деандре Ліґґінс, Раян Рейд, Хашім Табіт і Ронні Туріаф.

Хто?

У тому-то й річ. Це не п'ять найкращих снайперів НБА. Вони взагалі майже не грали. Приміром, Армон Джонсон у складі «Портленд Трейл Блейзерс» вийшов на майданчик один раз. Він зробив кидок. Влучив. П'ятеро гравців у списку зробили тринадцять кидків — і тринадцять разів влучили. Малі вибірки різноманітніші, тому найкращим снайпером НБА завжди буде той, хто робить небагато кидків і кому щоразу таланить. Ви б ніколи не заявили, що Армон Джонсон кидає точніше за найрезультативнішого постійного гравця Тайсона Чандлера з «Нікс», який закинув 141 з 202 м'ячів за той самий період. (І так, відсоток результативності є однаковою мірою функцією[42] від вибору м'яча (якою саме нагодою скористатися), як і від здібності влучати в кільце; майстер, кидки якого переважно з-під кільця та згори, від самого початку має велику перевагу. Але це не стосується обговорюваної тут теми. Будь-який сумнів зникає, коли подивитися на результати Джонсона сезону 2010/2011 років, у якому він з гри отримав міцний середній показник 45,5 %.) Саме тому у звичні списки найкращих не потрапляють такі гравці, як Армон Джонсон. Щоб цього не відбувалося, НБА обмежує свої рейтинги гравцями, які досягають певного ігрового часу; в іншому разі невідомі гравці, які виходять на короткий період і мають малі вибірки, будуть лідерами.

Але не всі рейтингові системи роблять поправки, яких вимагає дія закону великих чисел. Штат Північна Кароліна, як і багато інших в нашу добу підзвітності освіти, запровадив програму заохочень для шкіл з високими результатами стандартизованих тестів. Кожна школа отримує оцінку на базі середнього поліпшення результатів тестування учнів порівняно з минулим роком; найкращі 25 шкіл штату в цьому рейтингу отримують банери, які вивішують у спортзалі, і право вихвалятися перед сусідніми містечками.

Хто виграє у такому змаганні?[43] Переможцем 1999 року виявилася початкова школа імені Райта з Норт Вілксборо — з «підсумковим показником успішності» 91,5. Школа невелика, 418 учнів, тоді як у середньому по штату початкові школи мають 500. Недалеко від школи Райта відстали початкова школа Кінґсвуда з показником 90,9 та початкова школа Ріверсайда з балом 90,4. У Кінґсвуді навчається лише 315 дітей, а в геть маленькій школі Ріверсайда, що в гірському містечку Ньюленді в Аппалачах, усього 161 учень.

Насправді невеликі школи в цілому виграли змагання у штаті Північна Кароліна. За висновками дослідження Томаса Кейна і Дуґласа Стайґера[44], 28 % найменших шкіл у штаті у якийсь момент семирічного періоду, протягом якого проводилося дослідження, входили до списку 25 лідерів; серед усіх шкіл тільки 7 % коли-небудь вивішували банер у спортзалі.

Виглядає на те, що маленькі школи, у яких вчителі справді знають своїх учнів і їхні родини та мають час на індивідуальний підхід, демонструють більші успіхи у поліпшенні результатів тестування.

Але, напевно, треба згадати, що дослідження Кейна і Стайґера має назву «Перспективи і небезпеки застосування неточних показників успішності шкіл». Як, напевно, маю сказати і те, що менші школи не показують у середньому жодної тенденції до значущих кращих результатів у тестуванні. І що школи, яким штат призначив «допоміжні групи» (тобто ті, які отримали від посадовців штату прочуханку за низькі показники), *також* були переважно невеликі.

Іншими словами: наскільки ми знаємо, початкова школа Ріверсайда не є однією з найкращих шкіл у Північній Кароліні — як і Армон Джонсон — найвлучнішими гравцем у НБА. У списку найкращих 25 шкіл переважають невеликі школи, але відбувається так не тому, що невеликі школи кращі, а тому, що результати тестування у них різноманітніші. Кілька вундеркіндів або кілька ледарів у третьому класі можуть сильно змінити середні показники маленької школи; у великій школі ефект кількох крайніх показників просто розчиниться у великій кількості середніх, майже не впливаючи на загальний результат.

То як нам дізнатися, яка школа найкраща або який штат найбільше потерпає від раку мозку, якщо не можна просто брати середні показники? Якщо ви керівник, як вам точно оцінити результати діяльності підрозділів, коли менші групи з більшою імовірністю переважатимуть як серед найкращих, так і серед найгірших у рейтингу?

На жаль, простої відповіді не існує. Якщо маленький штат, як-от Південна Дакота, потерпає від незвичайно високої захворюваності на рак мозку, можна припустити, що пікові показники — це великою мірою випадковість, і що у майбутньому показники захворюваності, ймовірно, наблизяться до середніх по всій країні. Щоб виконати таку оцінку, потрібно взяти середньозважені дані по Південній Дакоті і по країні в цілому. Але як саме порівнювати ці показники? Це — почасти мистецтво, що вимагає добрячого обсягу технічної праці, якою я не буду вас вантажити[45].

Першим один значущий факт зауважив Абрагам де Муавр, один з ранніх творців сучасної теорії ймовірності. Книжка де Муавра 1756 року «Вчення про випадки» є однією з основоположних праць у цій царині. (Навіть у ту епоху популяризація новітніх досягнень математики являла собою процвітаючу індустрію; Едмонд Гойл, авторитет якого у картярських іграх був таким великим, що люди досі вживають вираз «за Гойлом...», написав книжку, покликану допомогти гравцям опанувати нову теорію, під назвою «Есе, написане з тим, щоб зробити вчення про випадки легким для тих, хто розуміється тільки на вульгарній арифметиці, з деякими корисними таблицями»).

Де Муавр не задовольнився законом великих чисел, який проголошує, що у тривалій перспективі частка гербів при послідовному киданні монети буде дедалі ближчою до 50 %. Він хотів знати, *наскільки* ближчою. Для того щоб зрозуміти його відкриття, повернімося назад і ще раз погляньмо на наші результати кидання монет. Але тепер замість того, щоб записувати загальну кількість гербів, будемо записувати *різницю* між кількістю гербів, що випали насправді, і очікуваною часткою, тобто 50 %. Інакше кажучи, вимірюватимемо, наскільки наші результати відхиляються від цілковитого паритету герб-копійка.

Кидаючи десять монет, отримуємо:

1, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 4, 2, 0, 2, 1, 0, 2, 2, 4...

Для ста монет:

4, 4, 2, 5, 2, 1, 3, 8, 10, 7, 4, 4, 1, 2, 1, 0, 10, 7, 5...

Для тисячі:

14, 1, 11, 28, 37, 26, 8, 10, 22, 8, 7, 11, 11, 10, 30, 10, 3, 38, 0, 6...

Бачимо, що відхилення від результату 50-50 зростає в абсолютному вимірі мірою того, як зростає кількість кинутих монет, незважаючи на те (як того вимагає закон великих чисел), що вони зменшуються пропорційно кількості кидань. Ідея де Муавра полягала в тому, що типове відхилення* визначається *квадратним коренем* кількості кинутих монет. Киньте сто разів ту саму кількість монет, і ви отримаєте типове відхилення, більше у десять разів — принаймні в абсолютному вимірі. У пропорції до загальної кількості кидань відхилення *скорочується* мірою зростання кількості монет, тому що квадратний

* Експерти помітять, що я ретельно уникаю виразу «середньоквадратичне відхилення». Неексперти, які хочуть дізнатися більше, можуть пошукати додаткову інформацію за цим ключовим терміном.

корінь кількості монет зростає набагато повільніше, ніж сама кількість монет. Якщо кидати тисячу монет, абсолютне відхилення від рівномірного розподілу може іноді сягати 38 гербів; але як частка від загальної кількості кидань це становить лише 3,8 % відхилення від 50-50.

Ідея де Муавра — та сама, що лежить в основі обчислення стандартної похибки в соціологічних опитуваннях. Якщо потрібно зменшити похибку удвічі, кількість опитаних має збільшитися в чотири рази. А якщо потрібно зрозуміти, наскільки добрим є той чи той результат кидання монет, потрібно визначити, на квадратний корінь якого числа він відхиляється від 50 %. Корінь квадратний зі 100 дорівнює 10. Тож якщо у мене за 100 спроб випадає 60 гербів, це точно один квадратний корінь від рівного розподілу 50-50. Корінь квадратний з 1000 — близько 31; тож коли я отримую в 1000-му киданні 538 гербів, цей результат буде ще менш імовірним, незважаючи на те, що в останньому випадку я отримав 53,8 % гербів, а у першому 60 %.

Але де Муавр на цьому не зупинився. Він відкрив, що відхилення від 50-50 у тривалій перспективі завжди формують досконалу дзвоноподібну криву, або, як це називається у бізнесі, криву нормального розподілу. (Піонер статистики Френсіс Ісидор Еджворт пропонував назвати криву «шолом жандарма»[46], і маю сказати, що мені дуже шкода, що ця назва не прижилася).

Дзвоноподібна крива/шолом жандарма висока посередині і дуже пласка по краях. Це каже нам, що чим більше показник відхилення відрізняється від нуля, тим менш імовірним він є. Це можна строгим чином представити кількісно. При киданні *N* монет імовірність отримання результату, відмінного від 50 %, становить не більше ніж квадратний корінь *N*, близько 95,45 %. Квадратний корінь 1000 — це приблизно 31; і справді, вісімнадцять з наших двадцяти описаних вище кидань тисячі монет, або 90 %, знаходяться у межах 31 герба з 500. Якщо я й далі кидатиму монети, частка кидань, у яких я отримаю результати між 469 і 531 гербом, буде дедалі ближчою до показника 95,45 %*.

Виглядає на те, що щось *скеровує,* щоб відбувалося саме так.

* Якщо точніше, то трошки менше, ближче до 95,37 %, оскільки 31 — це не *точно* квадратний корінь 1 000, а дещо менше.

Справді, сам де Муавр міг так вважати. За численними свідченнями, у регулярності результатів кидання монет (або у будь-якому іншому експерименті, де діє ймовірність) він вбачав руку самого Бога, який перетворює короткотермінові нерегулярності монет, гральних костей і людських життів на передбачувану у тривалій перспективі поведінку, якою керують непохитні закони й обчислювані формули[47].

Вважати так небезпечно. Бо якщо вважаєш, що чиясь трансцендентна рука — Бога, Пані Удачі, Лакшмі, немає різниці — підштовхує монети випасти половиною гербів, починаєш вірити у так званий закон середніх величин: якщо цього разу випало п'ять гербів, то наступного, майже напевно, будуть копійки. Маєш трьох синів, то наступна, поза сумнівом, буде дочка. Зрештою, хіба де Муавр не казав нам, що крайні випадки, як-от чотири сини поспіль, дуже малоймовірні? Так, казав, і це так і є. Але *якщо ви вже маєте трьох синів*, то у четвертому не буде зовсім нічого неймовірного. Насправді, ймовірність та сама, що й випадку першого сина.

Спочатку здається, що це суперечить закону великих чисел, який має ділити нащадків на хлопчиків і дівчаток порівну*. Але ця суперечність ілюзорна. Легше зрозуміти, що відбувається з монетами. Можливо, монета 10 разів поспіль випадала гербом. Що відбуватиметься далі? Ну, по-перше, можна почати підозрювати, що щось не те з монетою. У другій частині ми повернемося до цього питання, а зараз давайте приймемо, що з монетою все гаразд. Тож закон вимагає, щоб частка гербів наближалася до 50 % мірою зростання кількості кидань монети.

Здоровий глузд підказує, що у цей момент імовірність отримати копійки повинна бути дещо вищою, щоб виправити наявний дисбаланс.

Але здоровий глузд набагато наполегливіше каже, що монета не може пам'ятати, що відбувалося перші десять разів, коли я її кидав!

Я не триматиму вас у невизначеності — рацію має другий здоровий глузд. Закон середніх величин — назва не надто вдала, тому що закони мають бути правильні, а цей — хибний. Монети не мають пам'яті. Тож наступна монета, яку ви кидаєте, має однакові шанси випасти гербом, так само, як і будь-яка інша. Те, що загальна частка тяжіє до 50 %, не значить, що доля обирає копійку, щоб компенсувати герби, які вже випали; це означає, що ті перші десять кидань, коли робляться нові, стають дедалі менш важливими. Якщо я кину монету ще тисячу разів і отримаю близько половини гербів, то частка гербів у перших 1010 кидань теж буде близькою до 50 %. *Так* працює закон великих чисел: він не компенсує те, що вже сталося, а розчиняє те, що вже

* Насправді ближче до 51,5 % хлопчиків і 48,5 % дівчаток, але хто ж рахує?

сталося, у нових даних, доки минуле не стає таким пропорційно незначним, що його можна спокійно забути.

Уцілілі

Застосовне до монет і результатів шкільних іспитів є також застосовним і до масових убивств та геноцидів. Якщо вимірювати кровопролиття за часткою загиблих до населення в цілому, найстрашніші злочини будуть тяжіти до найменших країн. Автор похмурої «Великої книги жахливих речей» Метью Вайт таким чином склав рейтинг кровопролить XX століття. За його висновком, три перших місця посідають геноцид племені гереро у Намібії, вчинений німецькими колонізаторами, винищення камбоджійців Пол Потом і війна короля Леопольда в Конго[48]. Гітлер, Сталін та Мао — і величезна кількість населення, яке вони винищили, до списку не потрапили.

Цей перекіс у бік країн, що мають менше населення, становить проблему — яким буде наше математично вивірене правило для точного визначення, скільки потрібно співчуття, коли читаємо про загибель людей в Ізраїлі, Палестині, Нікарагуа, Іспанії?

Ось моє особисте правило: якщо масштаб катастрофи такий великий, що правомірно говорити про «уцілілих», то є сенс вимірювати її через частку до населення в цілому. Коли ви говорите про уцілілого у руандійському геноциді, то це стосуватиметься будь-якого представника народу тутсі — мешканця Руанди; тож є сенс сказати, що в результаті геноциду було винищено 75 % усього населення тутсі. І, напевно, можна було б правомірно сказати, що катастрофа, яка б винищила 75 % населення Швейцарії, є «швейцарським еквівалентом» того, що випало на долю тутсі.

Але абсурдним було б називати когось у Сієтлі «уцілілим» у терористичному нападі на Всесвітній торговий центр. Тож, напевно, не має сенсу розглядати загиблих у результаті нападу на Всесвітній торговий центр у вигляді процента від усього населення США. Лише приблизно один на сто тисяч американців, або 0,001 %, загинув того дня у Всесвітньому торговому центрі. Це число надто близьке до нуля, щоб інтуїтивно його зрозуміти; ви не маєте жодного почуття щодо значення такої частки. Так само ризиковано було б сказати, що швейцарським еквівалентом теракту 11 вересня було б масове убивство, в результаті якого загинуло б 0,001 % населення Швейцарії, тобто вісімдесят осіб.

Тож як нам вимірювати масову загибель, якщо це не вимірюється ні абсолютними цифрами, ні частками? Самі по собі напрошуються деякі порівняння. Геноцид у Руанді був жахливішим за 11 вересня, 11 вересня — жахливішим за напад на школу «Колумбайн», а напад на школу «Колумбайн» — за загибель однієї людини в результаті керування автомобілем у нетверезому стані. Інші події, розділені великими часовими і просторовими відстанями, порівняти тяжче. Чи справді Тридцятилітня війна була більш убивчою за Першу світову? А як приголомшливо швидкий руандійський геноцид виглядає у порівнянні з довгою жорстокою Ірано-іракською війною?

Більшість математиків скаже, що, в остаточному підсумку, історичні катастрофи і масові вбивства формують те, що має назву частково впорядкованої множини. Це такий химерний спосіб сказати, що деякі катастрофи можна осмислено порівнювати, тоді як інші не можна. Це не тому, що в нас немає точних даних про загиблих чи здатності порівняти смерть від бомби і викликаного війною голоду. Це тому, що питання, чи є одна війна гірша за іншу, докорінно відрізняється від питання, чи є одне число більшим за інше. На останнє запитання завжди є відповідь. На перше ні. І якщо ви хочете уявити, що значить для двадцяти шести людей бути вбитими бомбою терориста, уявіть двадцять шестеро людей, убитих вибухом бомби — не на іншому кінці світу, а у вашому власному місті. Таке обчислення буде математично й морально бездоганним, і калькулятор тут не знадобиться.

Розділ 5

Пирога більше, ніж тарілки

Співвідношення можуть вводити в оману у ще простіших — менш двозначних випадках.

У своїй недавній статті економісти Майкл Спенс і Санділ Глатшвайо[49] зображують вражаючу картину зростання кількості робочих місць у Сполучених Штатах. За приємною традицією Америка вважається промисловим гігантом: американські заводи і фабрики день і ніч працюють з несамовитим напруженням, виробляючи товари для всього світу. Сучасна дійсність виглядає дещо по-іншому. У період 1990–2008 років в економіці США було загалом створено 27,7 млн робочих місць. З них 26,7 млн, або 98 %, припадає на «незовнішньоторговий сектор»: частину економіки, що включає у себе такі речі, як уряд, медицина, роздрібна торгівля, заклади харчування, які не можна передати підрядникам і які не виробляють товарів на експорт.

Згадані цифри яскраво показують, що відбувається протягом останніх десятиліть в американській промисловості. Цю історію ми чуємо знову і знову, від тижневика «Економіст»[50] до останньої книжки Білла Клінтона[51]. Однак треба бути пильним. 98 % — це справді дуже й дуже близько до 100 %. Тож автори дослідження доходять висновку, що зростання максимально зосереджене в неекспортному секторі? Так воно виглядає — але це не зовсім так. За період 1990–2008 років кількість робочих місць в експортному секторі зросла лише на 620 тисяч — це правда. Але могло бути гірше — ця кількість могла скоротитися! Саме це й відбувалося у 2000–2008 роках; тоді експортний сектор втратив близько 3 млн робочих місць, тим часом як неекспортний на 7 млн зріс. Тож на неекспортний сектор припадає 7 млн нових робочих місць із загальної кількості 4 млн, тобто 175 %!

Тут потрібно покладатися на такий принцип:

Не говори про відсотки від числа, яке може бути від'ємним.

Це може здатися занадто обережним. Від'ємні числа залишаються числами, а тому їх можна множити і ділити, як будь-які інші. Але навіть це не так просто, як може здатися на перший погляд. Для наших попередників у математиці навіть не було ясно, чи є від'ємні числа числами взагалі — зрештою, вони не представляють кількості точно тим самим чином, як це роблять додатні. У мене в руках може бути сім яблук, але не може бути мінус сім. Великі алгебраїсти XVI ст., такі як Кардано і Франсуа Вієт, запекло сперечалися щодо того, чи буде результат множення двох від'ємних чисел додатним; точніше, вони розуміли, що принцип послідовності, здається, вимагає, щоб було саме так, але реально існував поділ на тих, хто вважав, що саме так є насправді, і тих, для кого такий результат диктувався лише формальною доцільністю. Кардано, коли рівняння серед інших мало від'ємний корінь, зазвичай називав таке вразливе розв'язання *ficta*[52] — підробкою.

Аргументи математиків доби італійського Відродження часом можуть здаватися так само малозрозумілими і незначущими для нас, як і їхня теологія. Але вони не помилялися в тому, що щось у поєднанні від'ємних кількостей і арифметичних дій, таких як знаходження відсоткової частки, викликає «коротке замикання» у нашій інтуїції. Коли не виконується поданий вище принцип, починають виникати найдивніші невідповідності.

Наприклад, я маю кав'ярню. Хоч як це прикро визнавати, але люди моєї кави не п'ють; минулого місяця я втратив на цьому 500 доларів. На щастя, я завбачливо поставив ятку з випічкою і стійку з компакт-дисками, і кожен з цих видів діяльності приніс мені по 750 доларів прибутку.

У підсумку цього місяця я заробив 1000 доларів, і 75 % цього обсягу припадає на ятку з випічкою. Може здатися, що з цього випливає, що зараз мій бізнес тримається саме на ній; майже всім прибутком я завдячую круасанам. За винятком того, що так само правильним буде сказати, що 75 % мого прибутку дає стійка з дисками. А якщо уявити, що я втратив на каві ще 1000 доларів, то тоді мій загальний прибуток дорівнював би нулю, нескінченно великий відсоток від якого припадав би на випічку*. «75 %» начебто означає «майже все», але коли маєш справу з числами, що можуть бути і додатними, і від'ємними, як прибуток, це може означати щось зовсім інше.

Така проблема ніколи не виникає, коли числа тільки додатні, як-от витрати, доходи, населення. Якщо 75 % американців вважають найчарівнішим бітлом Пола Маккартні, то не може бути так, що інші 75 % обирають Рінґо Старра; він, Джордж** і Джон мають розділити між собою решту 25 % народної прихильності.

Це явище також спостерігається і у даних щодо кількості робочих місць. Спенс і Глатшвайо могли б відзначати, що 600 тисяч робочих місць було створено у фінансовій і страховій галузях; це становить майже 100 % усьо-

* Попередження з техніки безпеки: ділити на нуль дозволяється тільки під наглядом математика, що має диплом державного зразка.

** Насправді найчарівнішим був саме він.

го зростання кількості робочих місць в усьому експортному секторі. Вони цього не зробили, тому що не намагалися хитрістю переконати вас у тому, що жодна інша галузь економіки у цей період не зростала. Як ви, можливо, пам'ятаєте, є принаймні одна галузь американської економіки, у якій з 1990 року створюється багато робочих місць: цей сектор класифікується як «розробка комп'ютерних систем і пов'язані послуги». Кількість робочих місць у цій галузі зросла втричі; абсолютний приріст кількості робочих місць перевищив мільйон. Разом фінансовий та комп'ютерний сектори набагато перевищили показник зростання експортного сектора в цілому, 620 тисяч робочих місць; це зростання компенсувалося великими втратами у виробничому секторі. Поєднання додатних і від'ємних показників дозволяє, якщо діяти необережно, показати неправдиву картину, у якій усіма робочими місцями, створеними в експортному секторі, слід завдячувати фінансовій галузі.

Те, що написали Спенс і Глатшвайо, не викликає особливих заперечень. Це правда, що загальне зростання кількості робочих місць у сотнях галузей *може* бути від'ємним, однак у нормальних економічних умовах, на більш-менш тривалому часовому проміжку, надзвичайно ймовірно, що цей показник буде додатним. Зрештою, населення зростає, і, за відсутності всеосяжної катастрофи, ця тенденція схильна тягнути абсолютну кількість робочих місць за собою.

Але інші жонглери процентами не такі уважні. У червні 2011 року відділення Республіканської партії у штаті Вісконсин опублікувало прес-реліз, що вихваляв діяльність губернатора Скотта Вокера, спрямовану на створення робочих місць. Це був один з невдалих місяців для американської економіки в цілому: робочих місць у країні було створено лише 18 тисяч. Однак показники зайнятості штату виглядали набагато краще: чистий приріст 9,5 тисяч. «Сьогодні, — йшлося у релізі, — ми дізналися, що понад 50 % робочих місць у США створюється саме у нашому штаті»[53]. Цю тезу підхопили і поширили політики-республіканці, як-от конгресмен Джим Сенсенбреннер, який заявив на зібранні у передмісті Мілуокі: «Дані про зайнятість, оприлюднені минулого тижня, свідчать, що в нашій країні створено нещасні 18 тисяч робочих місць, але половину з них створено тут, у Вісконсині. Те, що ми тут робимо, поза сумнівом, дає результат»[54].

Це — чудовий приклад того, у яку халепу можна потрапити, почавши повідомляти відсотки від чисел на зразок чистого приросту кількості робочих місць, які можуть бути як додатними, так і від'ємними. У Вісконсині було створено 9,5 тисяч робочих місць, і це добре; але в сусідній Міннесоті за губернатора-демократа Марка Дейтона того самого місяця — понад 13 тисяч[55]. Техас, Каліфорнія, Мічиґан і Массачусетс також обігнали Вісконсин за показниками створення нових робочих місць. У Вісконсині випав добрий місяць — але у цьому штаті не було створено такої самої кількості робочих місць, як у решті штатів, разом узятих, як на це вказує Республіканська партія. Насправді відбувалося те, що скорочення робочих місць в інших штатах майже повністю компенсувало кількість робочих місць, створених у таких штатах, як Вісконсин, Массачусетс і Техас. Ось як губернатор Вісконсина отримав можливість заявити, що його штат створив половину робочих місць у країні, а губернатор Міннесоти, якби потурбувався про це, міг би сказати, що його штату потрібно завдячувати 70 %, і обидва вони, у цих формально бездоганних та змістовно хибних заявах, мали б рацію.

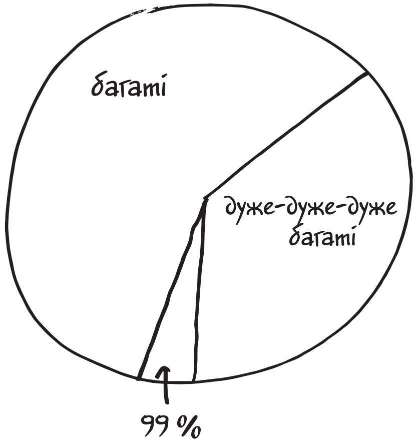
Або візьмімо недавню статтю Стівена Раттнера у «Нью-Йорк Таймс»[56], де він використовує працю економістів Томаса Пікетті та Еммануеля Саеза для обґрунтування свого висновку про те, що поточне відновлення економіки нерівномірно позначається на житті американців:

> Нова статистика свідчить про дедалі більше наростання вражаючої* нерівномірності у статках багатих і решти інших — і нагальну потребу вирішення цієї болючої проблеми. Навіть у країні, яка, як часом здається, звикла до нерівності у доходах, ці дані справді приголомшують.
>
> 2010 року, коли країна продовжувала одужувати від рецесії, карколомні 93 % додаткових доходів, створених у країні того року, порівняно з 2009-м — 288 млрд доларів — пішло до найбагатшого 1 відсотка платників податків, які мають щонайменше 352 тисячі доларів річного доходу… Нижні 99 % отримали мікроскопічні 80 доларів зростання доходів на людину 2010 року, після індексування інфляції. Найбагатший 1 відсоток, представники якого мають у середньому 1 019 089 доларів річного доходу, отримав на 11,6 % більше доходів.

Стаття супроводжується красивою інфографікою, яка показує ще глибший розподіл зростання доходів: 37 % зростання пішло супербагатим 0,01 %, 56 % — решті багатого 1 %, тим часом як мізерні 7 % отримали решта 99 % населення. Можемо намалювати невеличку кругову діаграму (див. с. 84).

Тепер давайте розріжемо пиріг ще раз і запитаємо про людей, що входять до верхніх 10 %, але не до верхнього 1 %. Тут будуть сімейні лікарі, не-елітні правники, інженери, управлінці вищого прошарку середнього класу. Наскільки великий цей шматок? Дані можна взяти у Пікетті і Саеза, які вони люб'язно виклали в інтернеті[57]. І виявляється дещо цікаве. Американці цієї групи мали 2009 року в середньому близько 159 тисяч доларів доходів, які 2010-го трохи збільшилися — до 161 тисячі. Це скромне зростання порівняно з тим, що за-

* Математичне занудство: для того щоб стверджувати наявність «дедалі більшого наростання вражаючого» характеру якогось явища, потрібно більше, ніж просто довести, його разючість; необхідно показати, що разючість *посилюється*. До цього питання автор у статті не звертається.



гріб найбагатший 1 %, але на нього, попри це, припадає 17 % загального доходу, отриманого з 2010 по 2011 рік.

Спробуйте об'єднати шматок 17 % та 93 % частки одного відсотка найбагатших. Пиріг у вас не поміститься на тарілці.

93 % і 17 % разом — більше за 100 %; як таке може бути? Може, бо нижні 90 % насправді в середньому отримали *менше* доходів — безвідносно до відновлення економіки. Включення до розрахунків від'ємних чисел змушує відсотки поводитися дивно.

Якщо взяти дані Пікетті і Саеза за різні роки, знову і знову натрапляємо на те саме. 1992 року 131 % зростання доходів у країні отримав 1 % найбагатших! Цифра, поза сумнівом, справляє враження, але вона вказує, що тут відсотки означають не зовсім те, до чого ми звикли. 131 % на круговій діаграмі не покажеш. У 1982–1983 роках (ще одна рецесія) 91 % загального зростання доходів знову припав на групу, що входить до верхніх 10 %, але не входить до найбагатшого 1 %. Чи означає це, що економічне відновлення присвоїли доволі заможні професіонали, відтиснувши середній клас і найбагатших? У жодному разі — доходи найбагатшого 1 % того року теж добряче зросли; на цю групу припадає 63 % загального зростання доходів усього населення. Що насправді відбувалося тоді і відбувається тепер: 90 % і далі біднішають, тоді як в інших становище поліпшується.

Ніхто не буде заперечувати того, що для найбагатших американців сонце нового дня сходить трохи раніше, ніж для середнього класу. Але це проливає на всю цю історію нове світло. Не йдеться про те, що 1 % наживається на тому, що решта Америки животіє. Люди, що входять до верхніх 10 %, але не входять до найбагатшого 1 %, — група, що включає в себе, не будемо показувати аж надто точно, багатьох читачів дискусійних матеріалів у «Нью-Йорк

Таймс», — теж живуть непогано, отримуючи вдвічі більше від семивідсоткової частки, яку, здається, віддає їм наша діаграма. Світло в кінці тунелю не зажевріло для *інших* 90 % країни.

Навіть коли числа, *на щастя,* виявляються додатними, для крутіїв залишається достатньо простору, щоб розповісти оманливу історію з відсотками. У квітні 2012 року виборчий штаб кандидата у президенти Мітта Ромні, виявивши низьку його підтримку серед жінок, випустив заяву, у якій стверджувалося[58]: «Адміністрація Обами принесла американським жінкам тяжкі часи. За президента Обами намагалися знайти роботу більше жінок, ніж у будь-який інший момент нашої історії. За Обами на жінок припадає 92,3 % загальної втрати робочих місць».

Твердження у деякому сенсі правильне. За даними Бюро статистики праці, загальна зайнятість у січні 2009 року становила 133 561 000, а в березні 2012-го — лише 132 821 000 — загальне скорочення 740 тисяч робочих місць. Для жінок відзначалися такі показники: 66 122 000 і 65 439 000; отже, у березні 2012-го мали роботу на 683 000 менше, ніж у січні 2009 року, коли Обама вступив на пост президента. Поділивши друге число на перше, отримуємо 92 %. Ситуація виглядає майже так, що Обама їздить по країні і видає підприємствам накази звільняти жінок.

Та ні. Ці цифри — *загальне* скорочення робочих місць. Ми не маємо уявлення, скільки робочих місць було створено, а скільки скорочено за ці три роки; знаємо лише те, що різниця становить 740 тисяч. Часом загальний показник скорочення робочих місць буває додатним, часом — від'ємним, і тому вираховувати проценти тут — справа небезпечна. Лише уявіть, що було б, якби виборчий штаб Ромні почав рахувати на місяць пізніше, у лютому 2009 року[*59]. У той момент, ще один жорстокий місць рецесії, загальна зайнятість скоротилася до 132 837 000 робочих місць. Від цього моменту до березня 2012 року кількість робочих місць в цілому скоротилася усього на 16 тисяч. Серед жінок скорочення сягнуло 484 тисяч (воно, звичайно, компенсувалося відповідним зростанням зайнятості серед чоловіків). Яка втрачена можливість для штабу Ромні — якби вони почали рахувати з лютого, першого повного місяця президентства Обами, то могли б заявити, що на скорочення зайнятості серед жінок припадає *3000 %* загального скорочення робочих місць за Обами!

Але для всіх, крім найдрімучіших, було б ясно, що щось у цьому проценті неправильно.

* Аналіз, поданий нижче, запозичений зі статті Ґленна Кесслера, який писав про рекламу Ромні у газеті «Вашингтон Пост» від 10 квітня 2012 року.

Що ж насправді відбувалося із зайнятістю чоловіків і жінок у період від інавгурації Обами до березня 2012 року? Дві речі. З січня 2009 по лютий 2010 року зайнятість швидко скорочувалася як серед чоловіків, так і серед жінок — рецесія та її наслідки пожинали свій сумний урожай.

Січень 2009-го — лютий 2010-го:
Загальне скорочення робочих місць — чоловіки: 2 971 000
Загальне скорочення робочих місць — жінки: 1 546 000

А після цього, коли рецесія припинилася, показники зайнятості починають поволі поліпшуватися:

Лютий 2010-го — березень 2012-го:
Загальне зростання робочих місць — чоловіки: 2 714 000
Загальне зростання робочих місць — жінки: 863 000

Під час стрімкого спаду основний удар припав на чоловіків, показники втрати роботи серед яких були вдвічі більшими, ніж серед жінок. А у період відновлення економіки 75 % зростання кількості робочих місць припало на чоловіків. Коли скласти разом обидва періоди, цифри для чоловіків майже повністю компенсуються — на початку і в кінці періоду показники зайнятості чоловіків майже однакові. Але ідея, що поточний економічний період був майже виключно поганим для жінок, — груба помилка.

«Вашингтон Пост» оцінила цифру штабу Ромні 92,3 % як «правдиву, але брехливу»[60]. Така оцінка викликала насмішки серед прихильників Ромні, але, на мою думку, вона цілковито правильна, і вона нам показує важливу річ про те, як числа використовуються у політиці. Питання не в точності числа. Ділимо загальне скорочення робочих місць серед жінок на загальне скорочення всіх робочих місць і отримуємо 92,3 %.

Але це робить твердження «правдивим» тільки в дуже слабкому сенсі. Так само, якби штаб Обами оприлюднив заяву: «Мітт Ромні ніколи не заперечував звинувачень у тому, що він тривалий час керував міжконтинентальним каналом контрабанди кокаїну Колумбія — Солт-Лейк-Сіті».

Це твердження теж на 100 % правдиве. Але воно розраховане на створення хибного враження. Тому «правдиве, але брехливе» — цілком справедлива оцінка. Це правильна відповідь на неправильне запитання. Що, у певному сенсі, гірше, ніж помилка у розрахунках. Легко вважати кількісний аналіз політики чимось, що робиться за допомогою калькулятора. Але робота калькулятора починається тоді, коли ви зрозуміли, які розрахунки потрібні.

Винні тут «сюжетні задачі», що намагаються наблизити математику до «реального світу». Насправді вони дають жахливо помилкове враження про відношення математики і реальності. «Боббі має триста кульок. 30 % з них він віддав Дженні. Джиммі він віддав половину з того, що віддав Дженні. Скільки кульок залишилося у Боббі?» *Здається,* задача про реальний світ, однак насправді це арифметична задача, не дуже переконливо замаскована. Ця сюжетна задача не має нічого спільного з кульками. Так само можна було б просто сказати: наберіть на калькуляторі «300 − (0,30 × 300) − (0,30 × 300)/2 =» і скопіюйте відповідь!

Але питання реального світу на сюжетні задачі не схожі. Задачі реального світу — це щось на зразок «Чи була рецесія та її наслідки особливо тяжкими для працюючих жінок, і якщо так, то до якої міри у цьому винна політика адміністрації Обами?» Для такого на калькуляторі клавіші немає. Тому що для розумної відповіді потрібно знати більше за просто цифри. Якою є форма кривої втрати робочих місць для чоловіків і жінок в умовах типової рецесії? Чи мала поточна рецесія якісь відмітні особливості у цьому відношенні? Яка праця є непропорційно жіночою і які рішення Обами позначилися на цьому секторі економіки? Калькулятор знадобиться тільки після того, як ці питання сформульовано. Але на цей момент справжня розумова робота вже виконана. Ділення одного числа на інше — це просто обчислення; з'ясування того, *що* на *що* ділити, — *це* математика.

Частина друга

ВИСНОВКИ

У цій частині: приховані повідомлення у Торі, небезпеки свободи вибору, перевірка достовірності нульової гіпотези, Б. Ф. Скіннер проти Вільяма Шекспіра, «Турбосексофоннна насолода», скупчення простих чисел, мордування даних, поки не зізнаються, правильний спосіб навчання креаціонізму у державних школах

Розділ 6

Балтиморський біржовий брокер і біблійний код

За допомогою математики люди вирішують різні проблеми — від повсякденних («Скільки мені доведеться чекати наступного автобуса?») до космічних («Яким був усесвіт через три трильйонних секунди після Великого вибуху?»).

Але існує сфера питань, які виходять за межі космосу, це питання про Сенс і Походження Усього, — питання, якими, як ви могли подумати, математика не займається і впливу на які не має.

Ніколи не применшуйте територіальних претензій математики! Хочете знати про Бога? Є математики, що досліджують це питання.

Ідея, що земні люди можуть дізнатися про божественний світ шляхом раціонального спостереження, — дуже давня, така давня, як вважає єврейський учений XII століття Маймонід, як і саме єдинобожжя. У головній праці Маймоніда, «Мішне Тора», про одкровення Авраама розповідається так:

> Після відлучення від грудей[61], але ще у самому ранньому дитинстві Авраам почав міркувати. Він думав день і ніч, дивуючись: «Як можливо, що ця [небесна] сфера перебуває в русі, ведучи світ, а немає нікого, хто спрямовує її і приводить у рух; бо неможливо, щоб вона оберталася сама?»... Він постійно працював і думав, аж ось зрозумів шлях істини, збагнув правильну лінію думки і дізнався, що є один Бог, що Він веде небесну сферу і створив усе, і що з усього сущого немає бога, крім Нього... Потім він почав проголошувати всьому світу і настановляти людей, що весь усесвіт має тільки одного Творця і що Йому потрібно поклонятися... Коли люди збиралися навколо нього і запитували його про те, що він стверджував, він настановляв кожного по його розумінню, доки не ставав той на путь істини, і так тисячі й десятки тисяч приєдналися до нього.

Таке бачення релігійної віри є дуже спорідненим з математичним способом мислення. Ви вірите у Бога не тому, що відчули дотик ангела, не тому, що одного дня серце ваше відкрилося і впустило світло, і певно, що не через щось, що розповіли вам батьки, а тому, що Бог — це щось, що *мусить* бути — з тією самою певністю, як 8 по 6 мусить бути тим самим, що й 6 по 8.

Нині Авраамів аргумент — лиш *погляньте* на все, як таке можливо, щоб не було того, хто все це задумав? — оцінюється як недостатній, принаймні у більшості наукових кіл. Але знову ж таки: нині ми маємо мікроскопи, телескопи й комп'ютери. Ми не обмежені тим, щоб дивитися на Місяць, виглядаючи з колиски. Ми маємо дані, дуже багато даних, і маємо засоби, щоб упоратися з ними.

Улюблений масив даних для вчених рабинів — Тора, яка, зрештою, є послідовно упорядкованим набором символів, взятих зі скінченного алфавіту, який ми намагаємося передавати без помилок від синагоги до синагоги. Незважаючи на те, що вона була написана на пергаменті, це вихідний цифровий сигнал.

І коли група дослідників з Єврейського університету в Єрусалимі почала у середині 1990-х років аналізувати цей сигнал, виявилося дещо дуже дивне; або, залежно від ваших теологічних позицій, зовсім не дивне. Дослідники прийшли з різних галузей: Ельягу Ріпс був старшим викладачем математики, відомим фахівцем з теорії груп; Йогав Розенберґ — магістрантом, що вивчав інформатику; а Дорон Вітцтум мав магістерський ступінь з фізики. Та всі вони захоплювалися тим напрямком вивчення Тори, що шукав таємничі тексти, приховані за оповідями, родоводами та напучуваннями, які лежать на поверхні Тори. Як інструмент вони обрали «еквідистантну послідовність літер», далі ЕПЛ, — текст, що отримується шляхом відмічання символів у Торі, які знаходяться на однаковій відстані один від одного. Наприклад, у словосполученні

КРУГЛИЙ ДРІТ

можна брати кожну п'яту літеру, починаючи з першої. Отримаємо

(КруглИй дріТ) — КИТ.

Що це — попередження про грізного Левіафана чи просто згадування мирного мешканця глибин — залежить від контексту.

Більшість ЕПЛ не містять значущих слів; якщо взяти, наприклад, кожну третю літеру в нашому словосполученні, виходитиме нісенітниця, так найчастіше і відбувається. Проте Тора документ довгий, і якщо шукаєш закономірності, то обов'язково їх знайдеш.

Спершу такий метод релігійного дослідження може видатися дивним. Чи насправді є Бог Старого Заповіту божеством, яке позначає свою присутність, виявляючись у результатах пошуку слів? У Торі, якщо Бог хоче, щоб ми знали, що він тут, ви *знаєте* — дев'яносторічна жінка вагітніє, кущі загоряються й говорять, обід падає з неба.

Однак Ріпс, Вітцтум і Розенберґ не першими взялися за пошук повідомлень, прихованих в ЕПЛ Тори. Певні епізодичні прецеденти є у класичних рабинів, але справжнім піонером методу став Міхаель Дов Вайсмендл, рабин зі Словаччини, який під час Другої світової війни намагався, переважно марно, зібрати на Заході достатньо грошей, щоб купити у нацистських посадовців-хабарників[62] відтермінування вироку для словацьких євреїв. Вайсмендл знайшов у Торі кілька цікавих ЕПЛ. Найвідомішим із зауваженого ним стало те, що, починаючи від певної літери «мем» (літера алфавіту івриту, що позначає звук «м») у Торі і рухаючись уперед з кроком 50 літер, отримується послідовність *mem shin nun hay*, у якій можна розібрати *Mishneh* — перше слово назви Маймонідового коментаря Тори. Тепер перескочимо на 613 літер уперед (чому 613? тому що це точне число заповідей у Торі, прошу пам'ятати) і знову почнемо відзначати кожну 50-ту літеру. Виявляється, що літери складаються у *Torah* — іншими словами, що назва Маймонідової праці міститься у формі ЕПЛ у самій Торі, документі, записаному більш як за тисячу років до його народження.

Як я вже казав, Тора — документ довгий, за одним з підрахунків, у ній 304 805 літер. Тож неясно, що робити, якщо робити взагалі, із закономірностями на зразок знайдених Вайсмендлом — способів ділити текст Тори може бути багато, і якісь з них обов'язково дадуть осмислені слова.

Вітцтум, Ріпс і Розенберґ, що мали і математичну, і релігійну підготовку, поставили перед собою більш системне завдання. Вони відібрали 32 відомих рабинів з усієї новітньої єврейської історії — від Авраама ХаМалаха до Яабеца. На івриті числа можна записувати за допомогою літер, тому дати народження і смерті рабинів дають додаткові можливості для послідовностей символів. Тож питання стоїть так: чи з'являються імена рабинів в еквідистантних послідовностях літер незвичайно близько до дат їх народження і смерті?

Або провокативніше: чи знала Тора майбутнє?

Вітцтум з колегами[63] підійшли до перевірки гіпотези винахідливо. Спершу вони шукали у Книзі Буття ЕПЛ, які складалися в імена рабинів і дати, і обчислювали, наскільки близько в тексті послідовності, що дають імена, знаходяться до тих, що можна прочитати як відповідні дати. Потім вони перетасували 32 дати, так що кожна з них відповідала тепер випадковому рабину, а потім провели експеримент ще раз. Так вони робили мільйон разів*. Якби у тексті Тори імена рабинів і відповідні дати не були пов'язаними, слід було б очікувати, що правильна відповідність між іменем рабина і його датами буде

* Що становить тільки дуже малу частку можливих *перестановок* 32 дат, яких 263 130 836 933 693 530 167 218 012 160 000 000.

з'являтися приблизно однаково часто з випадковими, отриманими в результаті тасування. Цього дослідники не виявили. Правильна відповідність опинилася близько до вершини рейтингу, посівши 453-тє місце серед мільйона конкурентів.

Вони спробували робити те саме з іншими текстами — «Війною і миром», Книгою Ісаї (частина Святого Письма, яка, однак, не входить до тієї, що вважається написаною самим Богом), і версією Книги Буття, у якій літери було випадковим чином перемішано. В усіх цих випадках реальні дні народження рабинів виявлялися в середині списку.

Висновок авторів, сформульований з характерною математичною обачністю: «Ми дійшли висновку, що близькість ЕПЛ до відповідних значень у Книзі Буття не є наслідком випадковості».

Попри обережність у словах, це сприйняли як приголомшливе відкриття, яке ще більше посилювали математичні титули авторів, особливо Ріпса. Стаття пройшла рецензування і була опублікована 1994 року в журналі «Статистична наука» з незвичайною передмовою його редактора Роберта Касса, в якій ішлося:

> Наших рецензентів стаття збентежила[64]: їхні раніші уявлення змушували вважати, що Книга Буття не могла містити значущих вказівок на сучасних осіб, проте автори статті виконали додатковий аналіз і перевірили збереження результатів. Таким чином, стаття пропонується читачам «Статистичної науки» як загадка-виклик.

Незважаючи на приголомшливі результати, стаття Вітцтума і його колег не викликала негайної зацікавленості широкої громадськості. Становище докорінно змінилося, коли про статтю почув американський журналіст Майкл Дрознін. Дрознін сам узявся полювати на ЕПЛ, відкинувши наукові обмеження і враховуючи всі послідовності, які, на його думку, містили божественне провіщення майбутніх подій. 1997 року він опублікував книжку «Біблійний код», на обкладинці якої було зображено розмитий, давній на вигляд сувій Тори в оточенні обведених послідовностей літер, що читалися як слова на івриті «Іцхак Рабин» і «убивця, що уб'є». Твердження Дрозніна, що він за рік попереджував Рабина про вбивство 1995 року, зробило потужну рекламу його книжці, у якій також розповідалося про передбачення Торою Війни у Перській затоці та зіткнення комети Шумейкера — Леві 9 з Юпітером. Вітцтум, Ріпс і Розенберґ засудили метод Дрозніна як підігнаний під вирішення конкретного завдання, однак смерть і пророцтво — потужна сила: «Біблійний код» став бестселером. Дрозніна було запрошено на «Шоу Опри Вінфрі» на «Сі-Ен-Ен»; він мав особисті зустрічі з Ясером Арафатом, Шимоном Пересом та керівником апарату Клінтона Джоном Подестою, під час яких ділився своїми теоріями про настання Кінця Світу*. Мільйони людей побачили те, що начебто було математичним доведенням божественної природи Біблії; сучасним людям з науковим світоглядом показали несподіваний шлях до навернення в релігійну віру, і багато хто цим шляхом пішов. З достовірних джерел я знаю про одного молодого єврейського татуся з нерелігійної єврейської родини, який чекав офіційного прийняття статті Вітцтума редакцією «Статистичної науки», щоб вирішити, чи робити синові обрізання. (Заради дитини я сподіваюся, що процес рецензування не затягнувся).

Але якщо публіка прихильно сприймала біблійні коди, то математичний світ заперечував їхні підстави. Особливо запеклими були суперечки у великій спільноті ортодоксальних єврейських математиків. На математичному факультеті Гарвардського університету, аспірантом якого я на той час був, працювали і Давид Каждан, який виявляв до кодів певну прихильність, і Шломо Штернберґ, їх відвертий опонент, який вважав, що, пропагуючи коди, ортодоксальні євреї шиються у дурні. Штернберґ надрукував у «Записках американського математичного товариства» статтю, у якій він назвав публікацію Вітцтума—Ріпса—Розенберґа «брехнею» і заявив, що Каждан та інші, хто поділяє його погляди, «не тільки ганьблять себе, вони безчестять математику»[65].

У день виходу статті Штернберґа післяобідній чай на факультеті вийшов дещо напруженим — прошу мені повірити.

Релігійні вчені теж опиралися спокусі кодів. Дехто, як-от керівництво єшиви «Еш Ха-Тора», радо прийняв коди як засіб повернути євреїв, що не дотримуються Закону, до більш суворого варіанта праведної віри. Інші поставилися із сумнівом до механізму, що різко відрізнявся від узвичаєних методів дослідження Тори. Я чув про одного відомого рабина, який наприкінці довгого і традиційно супроводжуваного добрячою випивкою святкового обіду на Пурім запитав гостя, прихильника кодів: «Так скажіть же ж мені, щоб ви зробили, якби знайшли у Торі такий код, що каже, що Шабат має бути в неділю?».

«Такого коду не буде, — відповів колега, — тому що Бог заповів, щоб Шабат був у суботу».

Старий рабин не здавався. «Гаразд, — сказав він, — але ж якби був?»

Молодий колега якусь хвилину мовчав, а потім сказав: «Тоді, гадаю, я мав би подумати про це».

У цей момент наш рабин остаточно зрозумів, що коди потрібно відкинути; бо хоча в іудаїзмі справді існує традиція, особливо серед схильних до містики рабинів, чисельного аналізу літер Тори, цей процес має на меті винятково сприяти кращому розумінню і поцінуванню святої книги. Якщо ж метод можна застосувати, навіть гіпотетично, щоб посіяти сумнів у фундаменталь-

* Який очікувався — ну, це ж треба! — 2006 року.

них законах віри, то він так само відповідає вимогам іудаїзму, як бутерброд з беконом.

Чому математики заперечували проти, здавалося б, наочного підтвердження богонатхненності Тори? Щоб пояснити це, нам потрібен новий персонаж: балтиморський біржовий брокер.

Балтиморський біржовий брокер

Ось вам притча. Одного дня ви отримуєте лист розсилки, на яку не підписувалися, від біржового брокера з Балтимора, з порадою щодо певних акцій, ціна яких має значно зрости. Минає тиждень, і, точно як балтиморський брокер передбачав, ці акції йдуть угору. Наступного тижня ви отримуєте нову розсилку, і цього разу, на думку брокера, ціна на певні інші акції має впасти. І справді, ці акції летять у прірву. Минає десять тижнів, кожен з яких приносить новий випуск таємничої розсилки з новими передбаченнями, і щоразу вони справджуються.

На одинадцятий тиждень ви отримуєте запрошення інвестувати гроші через балтиморського брокера, природно, з великою комісією за точність оцінок, наочно продемонстровану десятьма щотижневими порадами.

Виглядає як вірна справа, так? Поза сумнівом, цей балтиморський брокер таки щось знає — здається неймовірним, щоб повний профан, який не має професійних знань ринку, правильно передбачив десять поспіль коливань цін на акції. Справді, це зовсім легко порахувати: якщо профан дає правильну пораду із 50 %-ю ймовірністю, то ймовірність правильно зробити перші *два* прогнози — це половина половини, тобто чверть; шанс дати перші три правильні — половина чверті, тобто одна восьма. Продовжимо розрахунок: шанс влучити десять разів поспіль* — це

$$(1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times$$
$$\times (1/2) \times (1/2) = (1/1024).$$

Іншими словами, ймовірність того, що профан може так добре передбачати, майже нульова.

Але історія виглядає інакше, якщо переказати її з погляду балтиморського біржового брокера. Ось, що ви не бачили з першого разу. Того першого тиж-

* Існує корисний принцип, *правило множення ймовірностей*, що ховається у цьому обчисленні. Якщо ймовірність того, що трапиться x, дорівнює p, а ймовірність події y — q, а x та y незалежні одна від одної, тобто настання x не робить подію y більш чи менш імовірною, — тоді ймовірність того, що стануться і x, і y, дорівнює $p \times q$.

ня ви були не єдиним, хто отримав листа від брокера; таких листів він розіслав 10 240*. Але листи не були однакові. Половина з них, як-от ваш, містила прогноз підвищення акцій. Інші — прямо протилежне. 5120 людей, які отримали від брокера неправильний прогноз, більше про нього не чули. Але ви і ще 5119 осіб, які отримали ваш варіант листа, отримали наступного тижня нову пораду. З цих 5120 листів у половині була така порада, як у вашому, а в іншій половині — протилежна. І після цього тижня залишається 2 560 людей, які отримали два правильних прогнози поспіль.

І так далі.

Після десятого тижня буде десять (щасливих) людей, які отримали десять виграшних порад від балтиморського брокера — *незалежно від того, що* відбувалося на біржі. Брокер міг знати все про ринок, а міг добирати акції для своїх листів, кидаючи курячими кишками об стіну і вивчаючи плями, — у кожному разі десь є десять отримувачів, для яких він виглядає генієм. Десятеро людей, з яких він може очікувати взяти добру плату. Десятеро людей, для яких минулі результати не є гарантією майбутніх.

Я часто чув, як притчу про балтиморського біржового брокера переповідали як реальну, однак мені не вдалося знайти жодного підтвердження тому, що вона дійсно мала місце. Найближче з того, що я знайшов, — телевізійне реаліті-шоу 2008 року (до реаліті-шоу сьогодні ми звертаємося по притчі), у якому британський ілюзіоніст Деррен Браун робив схожу штуку, розсилаючи різні поради щодо перегонів тисячам британців, у результаті чого переконав одну особу в тому, що він винайшов цілковито надійну систему передбачення. (Браун, який більше полюбляє викривати таємничі претензії, ніж їх обстоювати, в кінці шоу розкрив механізм трюку, напевно, зробивши більше для британської математичної освіти, ніж десяток поважних фахівців з «Бі-Бі-Сі»).

Якщо ж удосконалити гру, зробивши її не такою відверто ошуканською, але залишаючи незмінним потенціал для обману, виявиться, що балтиморський брокер і досі живий та добре почувається у фінансовій галузі. Коли якась компанія створює фонд взаємного інвестування, часто вона певний час працює з ним у закритому режимі — така практика отримала назву *інкубації*[66]. Життя у такому фонді зовсім не тепле й безпечне, як того можна очікувати з назви. Як правило, компанії ведуть інкубацію відразу багатьох фондів, експериментуючи з різноманітними інвестиційними стратегіями і напрямами. Фонди товчуться і конкурують, так би мовити, внутрішньоутробно. Деякі

* Певно, ця історія походить від тих давніх днів, коли цей процес вимагав друкування і скріплення десяти тисяч паперових документів, але зараз таке було б ще реалістичнішим, бо всю цю купу повідомлень тепер можна розсилати електронною поштою фактично безкоштовно.

демонструють добрі прибутки, і їх швидко роблять відкритими для публічного інвестування, супроводжуючи це докладними звітами про успіхи. Але слабких милосердно вбивають, часто без жодного публічного повідомлення про те, що вони взагалі колись існували.

Ну, може бути й таке, що взаємні фонди, які виходять з інкубаторів, роблять це саме через свою розумну інвестиційну політику. Компанії, які продають взаємні фонди, можливо, навіть самі у це вірять. А хто не вірить, коли карта йде, що це певним чином завдяки власним мудрим ходам і знанням? Але дані свідчать про інше: фонди з інкубаторів, щойно вони стають доступними для публіки, не зберігають своїх чудових внутрішньоутробних успіхів, замість цього демонструючи приблизно ту саму прибутковість, що й середній фонд[67].

Що це значить для вас, якщо ви достатньо грошовиті, щоб мати можливість інвестувати якісь кошти? Це значить, що найкращим для вас буде не піддаватися на спокуси отого цікавого нового фонду, який за останні дванадцять місяців приніс 10 %. Краще піти глибоко непоказним шляхом і прислухатися до поради, від якої вас, напевно, вже нудить — «їсти овочі й не розкочувати губи»: замість напружених пошуків чарівної системи чи «золотого» консультанта вкладіть свої гроші у великий нудний низькодохідний пайовий фонд і не згадуйте про них. Коли ви спускаєте свої заощадження у фонд з інкубатора із запаморочливими відсотками, ви дієте, як отримувач листів з передбаченнями, який інвестує все, що ціле життя відкладав, прислухавшись до поради балтиморського біржового брокера; вас вразили результати, які вам показують, але ви не знаєте, *скільки можливостей* брокер мав для їх отримання.

Це дуже схоже на гру в слова з моїм восьмирічним сином. Коли його не задовольняють літери, які він витягує з торбинки, він кидає їх назад і витягує знову, повторюючи процес, доки не витягне ті, що подобаються. На його погляд, це цілком чесно; зрештою, він же заплющує очі й не бачить, які літери витягне! Але якщо дати собі достатню кількість шансів, то зрештою отримаєш оте «Я», на яке чекаєш. І не тому, що поталанило, а тому, що махлюєш.

Шахрайство балтиморського брокера працює тому, що воно, як усі добрі фокуси, не намагається відверто пошити вас у дурні. Тобто тут вам не намагаються збрехати — натомість говорять вам правду, з якої ви, імовірно, зробите неправильні висновки. Це справді *є* неймовірним — що десять прогнозів поспіль виявляються правильними, або що ілюзіоніст, який робить ставки на шести перегонах, жодного разу не помиляється, або що взаємний фонд вражає десятьма відсотками прибутку. Помилка в тому, щоб дивуватися такій зустрічі з неймовірним. Усесвіт великий, і, якщо добре готуватися до неймовірних подій, обов'язково їх знайдеш. *Неймовірне відбувається на кожному кроці*.

Дуже неймовірно бути ураженим блискавкою або виграти у лотерею; однак це стається з людьми постійно, тому що у світі є багато людей, і багато з них купують лотерейні білети, або ходять грати в гольф у грозу, або роблять і те і те. Більшість випадкових збігів втрачають свою магію, коли дивитися на них із правильної відстані. 9 липня 2007 року у лотереї «Кеш 5», що проводиться у штаті Північна Кароліна, випали числа 4, 21, 23, 34 і 39. Через два дні ті самі п’ять чисел випали знову. Це здається дуже неймовірним — так воно і є. Шанс збігу таких двох результатів розіграшу лотереї крихітний, менший ніж два на мільйон. Але неправильно так ставити питання, коли вирішуєш, наскільки тут варто дивуватися. Зрештою, лотерея «Кеш 5» уже проводилася протягом майже року, даючи багато можливостей для збігу; виявляється, що шанс, що у *якийсь* триденний період у «Кеш 5» випадуть однакові виграшні числа, вражає набагато менше — це один на тисячу[68]. А «Кеш 5» — не єдина така лотерея. По всій країні проводяться сотні лотерей з п’ятьма виграшними числами, і проводяться вони вже не один рік; коли взяти їх усі, то вже зовсім не дивно, що за три дні може випасти два однакових набори виграшних чисел. Це не робить кожен окремий збіг імовірнішим. Але тут знову вступає хор: *Неймовірне відбувається на кожному кроці*.

Як водиться, першим тут був Арістотель: незважаючи на повну відсутність будь-якого формального поняття ймовірності, він був здатний зрозуміти, що «ймовірно, що неймовірні речі стануться. Якщо прийняти це, можна стверджувати, що *неймовірне є ймовірним*»[69].

Якщо ви вповні освоїте цю фундаментальну істину, балтиморський біржовий брокер не матиме над вами влади. Те, що брокер дав вам десять поспіль правильних порад, при десяти тисячах шансів, і близько не є неймовірним. За знаменитим висловлюванням британського статистика Р. Е. Фішера, «“один шанс на мільйон”, безперечно, стається[70], — з не меншою і не більшою за належну частотою, — хоч яким дивним це є, коли стається з *нами*».

Простір для маневру й імена рабинів

Дешифрувальники Біблії не писали десяти тисяч варіантів своєї статті й не розсилали їх у десять тисяч статистичних журналів. Тож спочатку тяжко зрозуміти, чому цей випадок схожий на шахрайство балтиморського біржового брокера.

Але коли математики прийняли «виклик», про який Касс писав у журналі, і заходилися шукати якихось пояснень «біблійних кодів», відмінних від «це зробив Бог», вони виявили, що справа не така проста, як Вітцтум з колегами подавали. Першими в цьому пошуку були австралійський фахівець з інформатики Брендан Маккей та Дрор Бар-Натан, ізраїльський математик, який тоді працював у Єврейському університеті. Вони зробили надзвичайно важливе зауваження: середньовічні рабини не мали паспортів чи свідоцтв про народження, у яких зазначалися їхні офіційні імена. Їх знали за звертаннями, і різні автори могли називати одного й того самого рабина по-різному. Якби, наприклад, рестлер Двейн «Скеля» Джонсон був знаменитим рабином, як би слід було шукати його в Торі: як Двейна Джонсона, Скелю, Двейна «Скелю» Джонсона, Д. С. Джонсона чи за всіма цими варіантами?

Така неоднозначність створює мисливцям за кодами певний простір для маневру. Візьмімо рабина Авраама бен Дов Бер Фрідмана, хасида-містика XVIII століття, що жив і працював у містечку Фастові в Україні. Вітцтум, Ріпс і Розенберґ шукали за звертаннями «Рабин Авраам» і «Ха Малах» («ангел»). Але чому, запитують Маккей і Бар-Натан, вони використовують тільки «Ха Малах», а не «Рабин Авраам Ха Малах», ім'я, яким також часто називали цього рабина.

Маккей і Бар-Натан виявили[71], що простір для маневру у виборі імен зумовлює докорінні зміни в якості результатів. Вони розробили власний набір варіантів імен-звертань рабинів; їхні варіанти, на думку вчених, були так само правомірні, як і варіанти групи Вітцтума (один рабин назвав обидва списки «однаково жахливими»[72]). З новим набором імен виявилося дещо геть дивовижне. Тепер здавалося, що Тора більше не відкриває дат народження і смерті видатних рабинів. А переклад на іврит «Війни і миру» їх показує — приблизно з такою самою якістю, з якою імена рабинів з правильними датами поєднувала Книга Буття у статті Вітцтума.

Що це могло означати? Не те, звісно, що Лев Толстой писав свій роман, приховуючи в ньому імена рабинів і розраховуючи, що їх відкриють тільки після створення сучасного івриту і перекладу на нього світової класики. Швидше Маккей і Бар-Натан знайшли сильний доказ того, які можливості дає простір для маневру у виборі варіантів. Саме простір для маневру використовував балтиморський брокер, коли давав собі достатньо шансів на виграш; саме простір для маневру використовує фонд взаємного інвестування, вирішуючи, які із закритих фондів — переможці, а які — сміття. Саме простором для маневру скористалися Маккей і Бар-Натан, щоб скласти список імен рабинів, який добре підійшов до тексту «Війни і миру». Коли намагаєшся робити надійні висновки стосовно неймовірних подій, простір для маневру — ворог.

Для опублікованої пізніше статті[73] Маккей і Бар-Натан попросили професора-талмудиста Сімху Емануеля, який на той момент працював у Тель-Авівському університеті, скласти ще один список імен-звертань, цього разу — наперед не налаштований на відповідність ні Торі, ні «Війні і миру». На основі цього списку Тора дала результат, близький до чистої випадковості. (Як упорався із завданням Толстой, не повідомляється).

Дуже малоймовірно, щоб будь-який конкретний список імен-звертань рабинів відповідав датам їхнього народження і смерті у Книзі Буття. Але коли існує так багато способів відбору цих імен, цілком імовірно, що серед усіх варіантів буде *один*, за яким Тора виглядатиме надприродно прозорливою. Коли маєш достатньо можливостей, виявити у чомусь код — тільки справа часу. Особливо легко це з використанням менш наукових підходів, як-от це робить Майкл Дрознін. Дрознін відповів скептикам: «Коли мої критики знайдуть повідомлення про вбивство прем'єр-міністра у "Мобі Діку", я їм повірю». Маккей швидко знайшов еквідистантні послідовності літер у «Мобі Діку», що вказують на вбивства Джона Кеннеді, Індіри Ганді, Льва Троцького — і ще й самого Дрозніна. Коли я пишу цю книжку, Дрознін є живим-здоровим, незважаючи на пророцтво. Він працює над своєю третьою книжкою про біблійні коди. Попередню він рекламував у грудні 2010 року цілою сторінкою[74] у «Нью-Йорк Таймс», попереджаючи президента Обаму: за прихованими у Святому Письмі послідовностями літер, в Усами бін Ладена може бути атомна бомба.

Вітцтум, Ріпс і Розенберґ наполягають[75], що вони не схожі на господарів інкубаційних фондів, які показують публіці тільки експерименти з максимально позитивними результатами; вони кажуть, що точний список імен було складено до проведення будь-яких тестів. І це дуже може бути чистою правдою. Але навіть якщо так, це виставляє дивовижний успіх біблійних кодів у зовсім іншому світлі. Те, що у Торі, як і у «Війні і мирі», можна знайти *деякі* варіанти імен рабинів, зовсім не дивно. Диво, якщо воно тут є, в тому, що Вітцтум з колегами вибрали саме ті варіанти імен, у яких Тора набирає найбільше очок.

Є одна невирішена проблема. Маккей і Бар-Натан переконливо показали, що простір для маневру в експерименті Вітцтума був достатнім для пояснення біблійних кодів. Але стаття Вітцтума була підготовлена з використанням стандартних статистичних тестів, тих самих, які застосовують науковці для оцінювання усього, від ліків до економічної політики. Інакше до журналу «Статистична наука» її б просто не взяли. Якщо стаття витримала перевірку, чи не повинні ми прийняти і її висновків, хоч якими потойбічними вони здаються? Або сформулюємо по-іншому: якщо зараз ми, анітрохи не вагаючись, заперечуємо дослідження Вітцтума, що це каже про надійність наших стандартних статистичних тестів?

Це каже, що варто занепокоїтися. І виявляється, що, безвідносно до Тори, учені і статистики вже тривалий час з цього приводу непокояться.

Розділ 7

Мертва риба не читає думок

Бо річ ось у чому: галас навколо біблійного коду не єдиний випадок, у якому стандартні методи статистики застосовуються для отримання дивовижних результатів. Один з найрезонансніших напрямів медичної науки — функціональна нейровізуалізація, яка дасть науковцям можливість побачити за допомогою дедалі точніших сенсорів, як блимають у синапсах ваші думки і почуття. На конференції Організації картографування людського мозку, що проводилася 2009 року у Сан-Франциско, нейрофізіолог Крейґ Беннетт з Університету штату Каліфорнія в Санта-Барбарі представив стендову доповідь «Нейронні кореляти[76] міжвидового сприйняття на прикладі посмертного дослідження атлантичного лосося: аргумент на користь поправки на множинне порівняння». Потрібна якась секунда, щоб продертися крізь ці терміни, але після цього стає зрозуміло, що доповідь цілком ясно анонсує незвичайні наукові результати. Мертвій рибі, яка сканувалася функціональним магнітно-резонансним томографом, показували серію фотографій людей; виявилося, що риба має дивовижно потужну здатність правильно оцінювати емоції людей на фото, що їй демонструвалися. Це було б гідним подиву, навіть якби йшлося про мертву людину чи живу рибу, а вже якщо риба мертва, то відкриття тягне на Нобелівську премію!

Звісно, ця доповідь належить до розряду майстерних розіграшів. (Особливо мені подобається підрозділ «Методи дослідження», що починається так: «У дослідженні з використанням магнітно-резонансного томографа брала участь одна доросла особина атлантичного лосося[77] (*Salmo salar*). Лосось був приблизно 18 дюймів завдовжки, важив 3,8 фунта і був неживий під час сканування… Як засіб обмеження рухомості лосося під час сканування до котушки для голови було поміщено пінопластовий ущільнювач, що, втім, виявилося переважно непотрібним, оскільки рухомість піддослідного суб'єкта була вкрай низькою»). Як усі жарти, цей розіграш[78] був прихованим нападом: у цьому разі нападом на безладну методологію нейровізуалізації, представники якої роблять помилку, ігноруючи ту фундаментальну істину, що неймовірне стається постійно. Нейрофізіологи ділять зображення, отримані на томографі, на десятки тисяч маленьких шматочків, *вокселів*, кожен з яких відповідає маленькій ділянці мозку. У процесі сканування мозку, навіть холодного мозку мертвої риби, існує певний обсяг випадкового шуму, що пробивається на кожному вокселі. Дуже малоймовірно, щоб пік цього шуму припав точно на той момент, коли перед рибою виставляють знімок людини, що переживає сильні почуття. Але нервова система велика, вибирати можна з десятків тисяч вокселів. Імовірність того, що один з цих вокселів дасть результат, що добре відповідає картинці, достатньо висока. Саме це Беннетт з колегами і виявили; насправді вони виявили дві групи вокселів, які чудово впоралися із завданням співпереживання людським емоціям — одна у серединній мозковій борозні, а інша у верхній частині хребта. Беннетт своєю статтею попереджає, що в нашу епоху великих масивів даних, що отримуються без жодних зусиль, стандартні методи оцінювання результатів, методи, за допомогою яких ми проводимо межу між реальним явищем і випадковою грою статичної електрики, зазнають небезпечного тиску. Потрібно дуже ретельно зважувати, чи достатніми є наші стандарти доведення, якщо їх проходить наша співчутлива риба.

Що більше ви даєте собі шансів на здивування, то вищим має бути його поріг. Якщо випадковий незнайомець з інтернету, який виключив зі свого раціону всі північноамериканські зернові продукти, повідомляє, що схуд на 7 кілограмів і позбувся екземи, це не варто вважати сильним доказом на користь дієти, вільної від кукурудзи. Хтось продає книжку про таку дієту, цю книжку купують і випробовують її приписи на собі тисячі людей, і є велика ймовірність того, що, цілком випадково, один із цих людей наступного тижня схудне і позбудеться проблем зі шкірою. І саме цей хлопець, що на форумі має нік skazhyni2kukurudza452, помістить схвильований пост, а ті, для кого дієта не спрацювала, мовчатимуть.

Справді гідний подиву результат статті Беннетта — не те, що один чи два вокселі у мозку мертвої риби пройшли тест; цей результат — у тому, що у значній частині статей з нейровізуалізації, які він розглядає, не застосовуються методи статистичного страхування («поправка на множинне порівняння»). Без таких поправок науковці серйозно ризикують зробити те саме, що балтиморський брокер, — причому ще й стати жертвами власного шахрайства. Хвилюватися через поведінку риб'ячих вокселів та ігнорувати все інше так само небезпечно, як хвилюватися через низку листів з правильними прогнозами й одночасно ігнорувати набагато більшу кількість повідомлень із хибними прогнозами, що гинуть у кошику для сміття.

Зворотна інженерія, або Чому алгебра — це тяжко

Під час навчання є два моменти, коли чимало дітей опиняються за бортом математики. Перший — у початкових класах, знайомство з дробами. До цього моменту число було *числом натуральним*, — 0*, 1, 2, 3... Це — відповідь на запитання «скільки?». Відійти від цього поняття (такого примітивного, що, як кажуть, його розуміє багато тварин[79]) до докорінно ширшої ідеї, що число може означати «яка це частина від...», — це радикальний філософський переворот. (За знаменитим висловом алгебраїста XIX століття Леопольда Кронекера, «Бог створив натуральні числа, а решта — справа рук людських»).

Другий небезпечний поворот на шляху — алгебра. Чому вона така тяжка? Тому що, поки алгебри немає, ви виконуєте обчислення повністю алгоритмічним шляхом. Ставимо числа у стовпчик для додавання, множення чи навіть, якщо ми у більш традиційній школі, для ділення, натискаємо на важіль, і повідомляємо, що виходить.

Інша річ алгебра. Коли ви маєте розв'язати

$$x + 8 = 15,$$

ви знаєте, що у вас *вийшло* (а саме 15), і вас просять здійснити зворотну інженерію і з'ясувати, що додавалося до 8.

У такому випадку, як, поза сумнівом, колись у сьомому класі вам розповідав учитель, можна перенести відоме у праву частину:

$$x = 15 - 8,$$

і в цей момент уже можна виконувати просте віднімання (потрібно тільки уважно стежити, що і від чого будемо віднімати), та з'ясувати, що x повинен дорівнювати 7.

Але це не завжди легко. Можливо, вам потрібно розв'язати *квадратне рівняння*, наприклад:

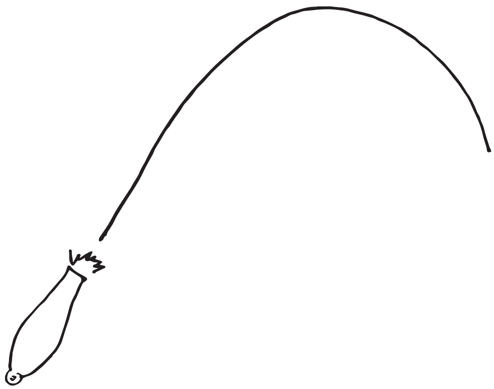
$$x^2 - x = 1.$$

Невже? (Чую ваші вигуки). Таке *можливо*? Навіщо? Хіба таке може задавати хтось, крім учителя?

Згадаймо про снаряд з розділу 2, який досі несамовито на вас летить:

---

* Уже доволі довго триває марна суперечка навколо того, чи мають натуральні числа включати число 0. Зробіть вигляд, що я не сказав «0», якщо ви належите до запеклих супротивників цього числа як натурального.



Можливо, ви знаєте, що снаряд було випущено на висоті 100 метрів над поверхнею Землі з вертикальною швидкістю 200 м/с. Якби такої штуки, як тяжіння, не було, снаряд просто летів би по прямій, відповідно до закону Ньютона, піднімаючись щосекунди ще на 200 метрів, а його висота через *x* секунд польоту описувалася б лінійною функцією:

висота $= 100 + 200x$.

Але така річ, як тяжіння, *є*, воно загинає траєкторію дугою і змушує снаряд повертатися по криволінійній траєкторії до землі. Виявляється, що дія тяжіння описується квадратичним членом:

висота $= 100 + 200x - 5x^2$;

квадратичний член від'ємний тому, що тяжіння штовхає снаряд донизу, а не догори.

Є багато запитань, які ви можете поставити стосовно снаряда, що на вас летить, проте особливо важливе одне: коли він впаде? Для того щоб відповісти, потрібно знайти відповідь на запитання: коли висота снаряда дорівнюватиме нулю? Тобто за якого значення *x* виконується

$100 + 200x - 5x^2 = 0$?

Далеко не ясно, що тут і куди переносити, щоб знайти *x*. Але, можливо, цього й не потрібно. Метод підбору — зброя дуже потужна. Якщо підставити замість *x* 10, щоб подивитися, де буде снаряд через 10 секунд, отримаємо 1600 метрів. Підставимо 20, отримаємо 2100 метрів, — снаряд нібито продовжує підніматися. Коли $x = 30$, знову отримуємо 1600: вже щось; напевно, найвищу точку пройдено. При $x = 40$ снаряд знову всього за 100 метрів над землею. Можна додати ще 10 секунд, але коли ми так близько до вибуху, то це буде, без сумніву, забагато. Якщо підставити $x = 41$, отримуємо -105 метрів; це не означає, що снаряд справді почав зариватися в землю — просто вибух уже стався, тож ваша красива модель руху снаряда, як то кажуть у нас, балістиків, більше не діє.

Та якщо 41 секунда — забагато, може, 40,5 буде якраз? Це значення дає $-1{,}25$ метра, лише трішки менше від 0. Відсунемо час ще трішки назад, до 40,4, отримаємо 19,2 метра, тож вибух ще не стався. 40,49? Дуже близько, 0,8 метра над землею…

Як бачимо, методом підбору, обережно повертаючи туди і сюди стрілки годинника, можливо отримати наближене значення часу вибуху з якою завгодно точністю.

Але чи «розв'язали» ми рівняння? Напевно, ви маєте сумніви — зрештою, навіть якщо продовжувати наші обережні спроби аж до того, що отримаємо

40,4939015319…

секунди після пострілу, ви не дізнаєтеся *відповіді*, це буде лише *наближення* до неї. Однак на практиці розрахунок часу до мільйонної долі секунди не допоможе, так? Напевно, просто сказати «близько 40 секунд» буде достатньо. Спробуйте знайти відповідь, точнішу за цю, і це буде марнування часу. До того ж ви, напевно, помилитесь, тому що ваша проста модель руху снаряда не враховує багатьох інших чинників, як-от опір повітря, зміни опору повітря, пов'язані зі зміною погоди, обертанням самого снаряда і таке інше. Ці впливи можуть бути малими, але вони однозначно будуть достатньо великими для того, щоб не дати вам вирахувати до мікросекунди моменту, коли снаряд з'явиться на побачення із землею.

Якщо потрібно достатньо точне рішення, не бійтеся — на допомогу приходить формула коренів квадратного рівняння. Можливо, ви її запам'ятали на все життя, але якщо у вас не надзвичайно чіпка пам'ять або вам не 12 років, просто зараз ви її не згадаєте. Тому ось вона: якщо x є коренем рівняння

$$c + bx + ax^2 = 0,$$

де a, b і c — будь-які числа, то

$$x = -\frac{1}{2a}\left(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right).$$

У випадку зі снарядом $c = 100$, $b = 200$, а $a = -5$. Тож відповідно до формули коренів квадратного рівняння

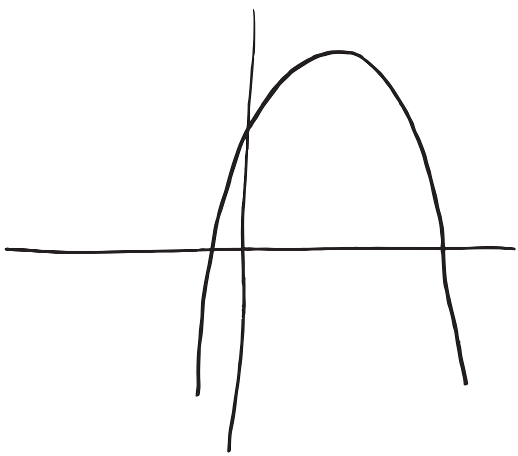
$$x = \frac{1}{10}\left(200 \pm \sqrt{200^2 + 4 \cdot 5 \cdot 100}\right).$$

Більшість із цих символів можна вбити в калькулятор, але тут є і дещо особливе, знак $\pm$. Виглядає він так, наче знаки плюса і мінуса дуже люблять одне одного, і це не так уже й далеко від правди. Знак показує, що, хоча ми починали наш математичний вираз у цілковитій певності, що

$x =$

ми приходимо до стану невизначеності. Знак $\pm$, дещо схожий на порожню фішку для гри в слова, може означати або $+$, або $-$, на ваш розсуд. Будь-який із цих варіантів дає значення x, за якого рівняння $100 + 200x - 5x^2 = 0$ виконується. Це рівняння не має єдиного кореня. Їх два.

Те, що існує два значення x, які задовольняють рівняння, можна показати наочно — навіть якщо ви давно забули формулу коренів квадратного рівняння. Можна намалювати графік рівняння $y = 100 + 200x - 5x^2$ — отримуємо красиву перевернуту параболу, десь таку:



Горизонтальна лінія — вісь x. Це ті точки на площині, ордината яких дорівнює 0. Коли крива $y = 100 + 200x - 5x^2$ зустрічається з віссю x, мають одночасно виконуватися дві умови: що y дорівнює $100 + 200x - 5x^{2\text{ і}}$ і що $y = 0$; тож $100 + 200x - 5x^2$, саме те рівняння, яке ми намагаємося розв'язати, тепер має геометричну форму, ставши питанням про перетин кривої з горизонтальною лінією.

А геометрична інтуїція вимагає, щоб, якщо така парабола взагалі піднімається над віссю x, вона обов'язково перетинала цю вісь точно у двох місцях, не більше і не менше. Іншими словами, є два значення x, за яких $100 + 200x - 5x^2 = 0$.

Які ж це значення?

Якщо ми обираємо, що $\pm$ — це $+$, отримуємо

$$x = 20 + 2\sqrt{105},$$

що дорівнює 40,4939015319..., саме та відповідь, якої ми дійшли методом підбору. Але якщо ми обираємо –, то отримуємо

$$x = 20 - 2\sqrt{105},$$

а це $-0{,}4939015319...$

Як відповідь на наше початкове запитання це виглядає дещо безглуздо. Відповідь на запитання «Коли снаряд влучить у мене?» не може бути «Півсекунди тому».

Разом з тим від'ємне значення x — абсолютно правильний корінь рівняння, а коли математика щось нам каже, то ми маємо принаймні спробувати почути. Що означає від'ємне число? Ось один зі способів це зрозуміти. Ми сказали, що снаряд було випущено на висоті 100 метрів над землею зі швидкістю 200 метрів на секунду. Але все, що ми насправді використали, — це те, що в момент 0 снаряд рухався вгору з цією швидкістю з цієї позиції. А якщо це не був справжній постріл? Можливо, постріл відбувся не у момент 0, з висоти 100 метрів над землею, а у певний раніший момент, прямо з поверхні. У який момент це відбулося?

Обчислення каже нам: є точно два моменти, коли снаряд перебуває на рівні землі. Один — 0,4939... секунд тому. Це момент, коли снаряд випустили. Інший момент — 40,4939... секунд від поточного моменту. У цей момент снаряд упав на землю.

Можливо, немає нічого страшного в тому, що ви отримали дві відповіді на одне запитання, особливо якщо ви знайомі з формулою коренів квадратного рівняння. Але коли вам 12 років, це справжній філософський переворот. Шість довгих років у школі ви знаходили *єдину відповідь*, і ось раптом тепер такого немає.

А це ж лише квадратні рівняння! Що, коли потрібно розв'язати

$$x^3 + 2x^2 - 11x = 12?$$

Це рівняння *кубічне*, що значить, що тут є x, піднесений до третього степеня. На щастя, *існує* формула коренів кубічного рівняння, яка дозволяє знайти шляхом безпосереднього обчислення, що потрібно підставити на місце x, щоб на виході отримати 12. Але у школі ви формулу коренів кубічного рівняння не вчили, а не вчили ви її у школі через те, що вона — справжній жах. Формулу знайшли тільки наприкінці доби Відродження, коли мандрівні алгебраїсти бродили Італією, викликаючи один одного на запеклі змагання — призами за розв'язування рівнянь були гроші та статус. Ті нечисленні люди, що знали формулу коренів квадратного рівняння, тримали її у таємниці або записували римованим тайнописом*.

Довга історія. Суть у тому, що зворотна інженерія — річ тяжка.

Проблема висновування, з якою боролися дешифрувальники біблійного коду, тяжка тому, що це і є зворотна інженерія. Коли ми науковці, чи дослідники Тори, чи малюки, що позирають на хмари, ми виконуємо *спостереження*, а нам потрібно побудувати *теорії* — що підставити на місце x, щоб отримати світ, який ми бачимо. Висновки — річ тяжка, можливо, найтяжча. За формою хмар і їхнім рухом ми намагаємося повернутися назад, знайти значення x, — систему, що їх створила.

Перемога над нулем

Ми кружляємо навколо фундаментального питання: наскільки здивованим я маю бути тим, що я бачу у світі? Це книжка про математику, і ви, звісно, підозрюєте, що є якийсь числовий спосіб дати відповідь на це питання. Він є. Але він сповнений небезпек. Нам потрібно поговорити про *p-значення*.

Але спочатку треба поговорити про неймовірність, щодо якої досі не було належної ясності. На це є причина. Існують розділи математики, як-от геометрія й арифметика, яких ми навчаємо дітей і яких діти, до певної міри, навчаються самі. Ці розділи найближчі до нашої вродженої інтуїції. Ми народжує-

* Ви, можливо, заперечите: методи Фішера — це *статистика*, а не *математика*. Як людина, чиї мати й батько статистики, я знаю, що існують справжні міждисциплінарні межі між цими двома сферами. Однак тут я буду розглядати статистичний спосіб мислення як різновид математичного і обстоюватиму обидва.

мося, майже вміючи рахувати і групувати предмети за місцезнаходженням і формою, і формальні математичні тлумачення цих понять не надто відрізняються від того, з чого ми починаємо.

Імовірність — інша річ. Звісно, ми інтуїтивно сприймаємо невизначені речі, але з формулюванням тут набагато тяжче. Є причина того, що математична теорія ймовірностей з'являється в історії математики надзвичайно пізно і надзвичайно пізно з'являється у навчальних планах — якщо з'являється взагалі. Коли намагаєшся ретельно думати про те, що *значить* імовірність, голова трохи йде обертом. Коли ми говоримо, «ймовірність того, що монета випаде гербом, становить 1/2», ми згадуємо закон великих чисел з розділу 4, який каже, що, коли кидати монету дуже й дуже багато разів, частка гербів майже неминуче наближатиметься до 1/2, начебто рухаючись тунелем, що звужується. Це називається *частотним підходом до ймовірності*.

Але що ми маємо на увазі, коли кажемо: «Ймовірність дощу завтра становить 20 %»? Завтра буває тільки один раз; це не експеримент, який можна повторювати, як кидання монети, знову і знову. З певним зусиллям погоду можна втиснути у частотну модель; можливо, ми маємо на увазі, що серед великої кількості днів з погодними умовами, схожими на цей, наступний дощовий день наставав у 20 % випадків. Але наступне запитання заганяє у безвихідь: «Яка ймовірність того, що людство вимре у наступні тисячу років?» Це, майже за визначенням, експеримент, який не повториш. Ми застосовуємо ймовірність навіть говорячи про події, які неможливо помислити як випадковість. Яка ймовірність того, що споживання оливкової олії запобігає захворюванню на рак? Яка ймовірність того, що Шекспір був автором п'єс Шекспіра? Яка ймовірність того, що Бог написав Біблію і створив Землю? Тяжко визнати правомірним говорити про ці речі так само, як про результати кидання монети і гральних костей. І — незважаючи на це — виявляється, що ми здатні сказати про такі запитання «Здається ймовірним» чи «Виглядає неймовірним». Оскільки ми це сказали, то як опиратися спокусі запитати: «*Наскільки* ймовірно?».

Одна річ — запитати, інша — відповісти. Я не можу придумати жодного експерименту, щоб безпосередньо оцінити ймовірність того, що всевишній справді є на небесах. Тому ми маємо працювати з найкращим із того, що залишається — або принаймні тим, що традиційна статистика вважає найкращим з решти. (Як побачимо далі, тут немає одностайності).

Нам видається неймовірним, що імена середньовічних рабинів можуть приховуватися у літерах Тори. Чи це так? Для багатьох релігійних євреїв вихідним пунктом є переконання, що все знання так чи так міститься у словах Тори. Якщо так, то наявність там імен та дат народження рабинів, — річ зовсім не неймовірна; насправді це майже необхідність.

Можна розповісти схожу історію про лотерею у штаті Північна Кароліна. Здається неймовірним, щоб однаковий набір виграшних номерів випав двічі в один тиждень. І це правда, якщо ви погоджуєтеся з гіпотезою, що числа випадають абсолютно випадково. Але, можливо, ви з цим не погоджуєтеся. Можливо, ви вважаєте, що система забезпечення випадковості працює неправильно, і номери 4, 21, 23, 34, 39 мають більшу за інші ймовірність випасти. Або ви вважаєте, що корумпований працівник лотереї підбирає номери відповідно до свого білета. За кожною з цих гіпотез дивовижний збіг неймовірним не буде зовсім. Як було показано вище, ймовірність — поняття *відносне*, а не абсолютне; коли ми кажемо, що якийсь результат є неймовірним, ми завжди кажемо, прямо або опосередковано, що цей результат є неймовірним за певного набору гіпотез, які ми прийняли для пояснення механізмів, що лежать в основі світу.

Багато наукових питань зводяться до простого «так» або «ні»: відбувається щось чи ні? Чи впливають нові ліки на хворобу, яку вони мають лікувати, чи ні? Чи робить вас психолог щасливішим /бадьорішим/сексуальнішим чи ні? Варіант «ні» має назву *нульова гіпотеза*. Тобто нульова гіпотеза — це гіпотеза, що втручання, яке ви розглядаєте, не має ефекту. Якщо ви дослідник, що розробив нові ліки, нульова гіпотеза — це річ, яка не дає вам спати вночі. Доки її не спростовано, ви не знаєте, чи то ви на порозі прориву у медицині, чи ж просто пішли хибним метаболічним шляхом.

То як же її спростувати? Стандартний механізм, що має назву *перевірки значущості нульової гіпотези*, розробив у його найпоширенішій формі на початку XX століття основоположник сучасної статистики Р. Е. Фішер.

Механізм такий. Спочатку вам потрібно провести дослід. Можна почати зі ста піддослідних, потім випадковим чином відібрати половину, яка отримуватиме ваші диво-ліки, тоді як інша — плацебо. Зрозуміло, ви сподіваєтеся, що пацієнти, які отримують ліки, матимуть меншу ймовірність померти, ніж ті, що отримують плацебо.

Відтак алгоритм може здаватися простим: якщо відзначається менше смертей серед пацієнтів, що отримують ліки, ніж серед плацебо-пацієнтів, проголошуємо перемогу і подаємо документи на реєстрацію. Але це неправильно. Недостатньо того, щоб дані узгоджувалися з вашою теорією; вони мусять *не узгоджуватися із* запереченням вашої теорії, страхітливою нульовою гіпотезою. Я можу стверджувати, що маю такі потужні телекінетичні здібності, що здатен витягувати з-за горизонту сонце. Хочете доказів — вийдіть на вулицю десь о п’ятій ранку і подивіться на результати моєї роботи! Але такий доказ — зовсім не доказ, тому що за нульовою гіпотезою, яка стверджує, що я не маю паранормальних здібностей, сонце зійде так само.

Інтерпретація результатів клінічних випробувань вимагає схожої ретельності. Переведімо це у числа. Припустимо, ми на території нуль-гіпотези, де шанси на смертельний випадок однакові (скажімо, 10 %) і для 50 пацієнтів, які отримують ваші ліки, і для тих 50, хто приймає плацебо. Але це не означає, що помруть точно по п'ятеро з кожної групи. Насправді ймовірність того, що з групи, яка приймає ліки, помре точно п'ять осіб, становить близько 18,5 %; не дуже велика ймовірність — так само, як не дуже ймовірним є те, що в результаті багаторазового кидання монети ви отримаєте цілковито однакові кількості гербів і копійок. Так само не надто ймовірно, що в ході випробувань помре однакова кількість пацієнтів, що належать до кожної з груп. Я обчислив:

13,3 % — імовірність, що помре однакова кількість пацієнтів;
43,3 % —імовірність, що помре менше пацієнтів групи плацебо, ніж тих, які приймають ліки;
43,3 % — імовірність, що помре менше пацієнтів, які приймають ліки, ніж плацебо.

Кращі результати для групи, що приймає ліки, ніж тих, хто отримують плацебо, дуже мало про що кажуть, оскільки зовсім не є неймовірним, навіть за нульовою гіпотезою, що ваші ліки не діють.

Але становище змінюється, якщо смертність серед пацієнтів, які отримують в ході випробувань ліки, є *набагато* нижчою. Припустимо, що в ході дослідження померло п'ятеро з групи плацебо, а у групі, що отримувала ліки, не помер ніхто. Якщо нульова гіпотеза правильна, то пацієнти обох груп мають 90 %-ві шанси на виживання. Але в нашому випадку надзвичайно малоймовірно, що всі 50 пацієнтів з групи, що отримує ліки, виживають. Імовірність виживання першого пацієнта з цієї групи становить 90 %; далі ймовірність виживання не тільки першого, а й другого пацієнта групи становить 90 % від 90 %, тобто 81 % — а якщо ви хочете, щоб вижив і третій пацієнт, то ймовірність такого розвитку подій становить лише 90 % вже від 81 %, тобто 72,9 %. Кожен новий пацієнт з цього ряду має дещо нижчий шанс на виживання: ймовірність того, що виживуть усі 50, дуже низька:

$$(0{,}9) \times (0{,}9) \times (0{,}9) \times \ldots \text{ і так п'ятдесят разів!} \ldots \times (0{,}9) \times (0{,}9) = \\ = 0{,}00515\ldots$$

Відповідно до нульової гіпотези, шанс отримати такий добрий результат — лише один з двохсот. Це набагато переконливіше. Якби я заявив, що змушую сходити сонце розумовим зусиллям, і воно зійшло, не варто було б захоплюватися моїми здібностями; але якби я заявив, що змушу сонце *не зійти*, і воно б не зійшло, то я продемонстрував би результат, дуже малоймовірний за нульовою гіпотезою, і тут уже було б краще звернути на таке увагу.

Отже, задокументуємо процедуру спростування нульової гіпотези (у формі з «кулями»):

- Провести дослідження.
- Припустити, що нульова гіпотеза істинна, і p — ймовірність отримання вкрай малоймовірних (за цією гіпотезою) результатів, що відповідають реально отриманим.
- Число p називається *p-значенням*. Якщо воно дуже мале, радійте; тоді можете сказати, що ваші результати є *статистично значущими*. Якщо велике — визнайте, що нульову гіпотезу не спростовано.

Наскільки малим має бути «дуже мале»? Чіткої відповіді, де пролягає межа між значущим і незначущим, немає; але є традиція, що починається із самого Фішера — і її підтримують до сьогодні, — за якою порогове значення $p = 0{,}05$ або $1/20$.

Перевірка статистичної значущості нульової гіпотези набула поширення, оскільки відповідає нашим інтуїтивним уявленням про невизначеність. Чому біблійні коди здаються нам переконливими, принаймні спочатку? Тому що коди, на зразок виявлених Вітцтумом, є дуже малоймовірними за нульовою гіпотезою, згідно з якою Тора не передбачає майбутнього. Значення p — ймовірність знаходження такої великої кількості еквідистантних послідовностей літер, що точно відтворюють особові справи відомих рабинів, — дуже близьке до 0.

Протягом тривалого часу розробці Фішера передували різні варіанти цього аргументу на користь божественного творення. Світ так складно структурований і так досконало упорядкований — наскільки ж неймовірно, щоб існував такий світ, як наш, — якщо, за нульовою гіпотезою, немає того, хто його на початку задумав, а потім усе це поєднав!

Першим, хто відзначився математичним обґрунтуванням цього аргументу, був Джон Арбетнот, королівський лейб-медик, сатирик, кореспондент Александра Поупа, який займався ще й математикою[81]. Арбетнот дослідив метричні записи дітей, що народилися в Лондоні у 1629–1710 роках, і виявив відмітну закономірність: кожного з цих вісімдесяти двох років народжувалося більше хлопчиків, ніж дівчаток. Яка ймовірність такого збігу, запитав Арбетнот, за нульової гіпотези, що Бога немає, і все це чиста випадковість? Тоді ймовірність того, що Лондон щороку привітніший до хлопчиків, ніж до дівчаток, становитиме 1/2; а *p*-значення, ймовірність того, що хлопчики виграватимуть 82 рази поспіль, становить

$$(1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times \ldots \text{ 82 рази} \ldots \times (1/2)$$

або трохи менше за 1 на 4 септильйони. Іншими словами, близько нуля. Арбетнот опублікував результати свого дослідження у статті «Аргумент на користь божественного провидіння, отриманий з постійної закономірності, що спостерігається у народженні немовлят обох статей».

Аргумент Арбетнота підхопили церковні достойники, проте інші математики невдовзі вказали на недоліки у міркуванні. Головним з них була необґрунтована точність його нульової гіпотези. Отримані Арбетнотом дані, поза сумнівом, заперечують гіпотезу, що стать дитини визначається випадково, при цьому кожна дитина має однакові шанси народитися хлопчиком або дівчинкою. Але чому ці шанси мають бути однаковими? Микола Бернуллі висунув альтернативну нульову гіпотезу: стать дитини визначається випадково, при цьому 18/35 становить імовірність народитися хлопчиком і 17/35 — дівчинкою. Нульова гіпотеза Бернуллі так само атеїстична, як і Арбетнота, і реальні дані її повністю підтверджують. Коли кидаєш монету 82 рази, і 82 рази випадає герб, потрібно думати: «Щось не те у монеті», а не «Бог любить герби»[*].

Сам аргумент Арбертнота не прижився, та дух його живий. Арбетнот виступає інтелектуальним батьком не тільки дешифрувальників Біблії, а й «креаціоністів», які навіть сьогодні стверджують, що математика вимагає існування якогось бога на тій підставі, що світ без бога мав би дуже мало шансів бути таким, яким він є[**82].

Але перевірка статистичної значущості не обмежується богословською апологетикою. У певному сенсі Дарвін, безбожний кудлатий бабай креаціоністів, висуває по суті такі самі аргументи на користь своєї позиції:

> Неможливо допустити[83], щоб хибна теорія пояснювала так задовільно, як теорія природного добору, різноманітні великі групи фактів, які було щойно перелічено. Нещодавно з'явилося твердження, що такий спосіб аргументації ненадійний, але це — метод, що постійно застосовується при судженні про звичайні явища життя і часто застосовується найвизначнішими дослідниками природи.

* Арбетнот вбачав у дещо більшій кількості народжень хлопчиків ще один аргумент на користь Провидіння: щось або Хтось саме так встановили позначку на шкалі, щоб компенсувати більшу кількість чоловіків — жертв війн і нещасних випадків.

** До цього аргументу ми ще звернемося в розділі 9.

Іншими словами: якби закон природного добору був хибний, — лише подумайте, наскільки малоймовірним був би біологічний світ, що так добре відповідає його положенням!

Заслуга Р. Е. Фішера полягала у формалізації перевірки статистичної значущості, розробці системи, за якої значущість (чи незначущість) експериментального результату набувала об'єктивності. Перевірка статистичної значущості нульової гіпотези у фішерівській формі протягом майже століття є стандартним методом оцінювання результатів наукових досліджень. В одному визнаному підручнику з психології цей метод характеризується як «становий хребет психологічного дослідження»[84]. Це стандарт, за допомогою якого ми розділяємо експерименти на успішні й невдалі. Практично всі результати медичного, психологічного чи економічного дослідження ретельно перевіряються на статистичну значущість.

Але тривога, з якою Дарвін писав про цей «ненадійний спосіб аргументації», нікуди не поділася. Майже протягом усього періоду широкого застосування методу знаходяться люди, що таврують його як колосальну помилку. 1966 року психолог Девід Бекан писав про «кризу психології», що, на його переконання, була «кризою статистичної теорії»:

> Перевірка статистичної значущості не має жодного стосунку до змісту психологічних досліджень... застосування цього методу спричиняється до великої шкоди... Сказати про це — означає взяти на себе роль дитини, яка вголос сказала, що імператор насправді голий[85].

І так триває вже майже п'ятдесят років: імператор досі на троні, викидає коники в чому мати народила, а дедалі більша й галасливіша юрба дітей навсібіч поширює новину, що король голісінький.

Незначущість значущості

Що не так зі значущістю? По-перше, існує саме слово. У математики з мовою кумедні стосунки. Наукові математичні статті, часом на подив стороннім, — це переважно не числа і не символи; математика — це слова. Однак те, що цими словами позначається, часто залишається поза увагою укладачів словників. Для нових речей потрібні нові слова. Діяти можна двома способами. Можна накроїти нових слів з нової тканини, як це робиться, коли ми говоримо про когомологію, сизигію, монодромію і таке інше; в результаті застосування такого підходу наша робота виглядає недоступною й незрозумілою. Проте частіше ми адаптуємо існуючі слова до наших цілей на основі певної схожості між математичним об'єктом і річчю у так званому реальному світі. Так, «група» для математика — це і справді група якихось речей, але група дуже особливого *типу*, як-от група цілих чисел чи група симетрій геометричної фігури; ми розуміємо під групою не просто довільний набір речей (наприклад, ОПЕК чи «АББА»), а набір речей, який має таку властивість, що будь-яка їх пара може поєднуватися ще в одну, — так, як пару чисел можна додавати або пару симетрій можна виконувати одну за одною*. Те саме стосується схем, вузлів, кілець, пучків — математичних об'єктів, що дуже віддалено схожі на звичайні речі, що позначаються цими словами. Часто слова, які ми обираємо, мають пасторальний присмак: приміром, сучасна алгебраїчна геометрія займається полями, пучками і ядрами. В інших випадках вибір агресивніший — зовсім нічого незвичайного немає у тому, що оператор щось убиває чи, трохи модерніше, анігілює. Часом повсякденна математична термінологія у певних контекстах стороннім може видаватися навіть небезпечною.

Отже, значущість. Це слово означає щось «важливе» або таке, що має велике значення. Але тест оцінювання значущості, який використовують учені, не вимірює важливості. Коли ми тестуємо новий препарат, нульова гіпотеза полягає в тому, що жодного ефекту немає; тому заперечити нульову гіпотезу — це просто показати, що ефект препарату не дорівнює нулю. Однак ефект все одно може бути дуже малим — настільки малим, що препарат не ефективний у жодному значенні, яке б не-математик міг назвати значущим. Наслідком лексичної неоднозначності терміна «значущість» є не лише ускладнення розуміння наукових статей. 18 жовтня 1995 року британський Комітет з безпеки лікарських засобів розіслав майже 200 тисячам медиків офіційного листа з тривожним попередженням про безпечність певних марок оральних контрацептивів «третього покоління». «Стали відомі нові дані[86], — йшлося у листі, — що вказують на те, що ймовірність тромбозу вен збільшується приблизно удвічі для певних типів таблеток порівняно з іншими». Тромбоз вен — не жарти; це означає, що згусток крові перекриває вену і не дає крові рухатися. Якщо згусток відірветься, потік крові може донести його до легені, що призводить до емболії легеневої артерії, яка може вас убити.

Далі в листі містилося запевнення, що оральна контрацепція є безпечною для більшості жінок, і припиняти прийом таблеток без рекомендації лікаря не потрібно. Але такі подробиці легко губляться, коли заголовок повідомлення проголошує, що «Таблетки вбивають». Агентство «Ассошіейтед Прес» 19 жовтня поширило статтю, що починалася так: «У четвер уряд попередив[87], що нові контрацептивні таблетки, які вживають півтора мільйона британських жінок, може викликати тромбоз вен... Розглядалося питання про від-

* Це ще не повне математичне визначення групи — але, на жаль, це ще одна чудова історія, яку тут не буде розказано до кінця.

кликання таблеток, але рішення ухвалене не було, почасти через те, що деяким жінкам підходять тільки ці таблетки».

Громадськість, ясна річ, шокована. Один сімейний лікар повідомив, що 12 % його пацієнток, що приймали таблетки, припинили прийом відразу після урядового попередження[88]. Напевно, чимало жінок перейшли на інші таблетки, з приводу яких не було попереджень, однак будь-яка перерва у прийомі робить контрацепцію менш ефективною. А зменшення ефективності контролю народжуваності означає збільшення кількості вагітностей. (Що? Ви думали, що я розповім про хвилю утримання від сексу?) Після кількох поспіль років спаду рівень кількості зачать у Британії наступного року підскочив на кілька процентних пунктів. В Англії і Уельсі 1996 року кількість зачать зросла на 26 тисяч проти попереднього. Оскільки багато вагітностей були незапланованими, це також призвело до зростання кількості переривань вагітності: абортів 1996-го було на 13 600 більше, ніж 1995-го[89].

Може здатися, що це невелика ціна за уникнення небезпеки потенційно смертельного відриву тромбу. Подумайте про всіх жінок, урятованих від емболії попередженням Комітету!

Але про яку кількість жінок ідеться? З певністю сказати не можна. Але один науковець, прихильник рішення Комітету опублікувати попередження, заявив, що загальна кількість відвернених смертельних випадків унаслідок емболії становить «можливо, один»[90]. Зростання ризику, спричинене оральними контрацептивами третього покоління, незважаючи на свою значущість по Фішеру, було незначущим у сенсі охорони здоров'я.

Ще більше посилила плутанину форма подачі історії. Комітет з безпеки лікарських засобів повідомив коефіцієнт ризику: таблетки третього покоління подвоюють ризик тромбозу. Виглядає дуже загрозливо — доки не згадати, що тромбоз — явище дуже й дуже рідкісне. Серед жінок репродуктивного віку, що користувалися оральними контрацептивами першого і другого поколінь, одна на 70 тисяч могла мати тромбоз; ризик для жінок, що користувалися таблетками третього покоління, справді зріс удвічі — 2 на 70 тисяч. Але навіть так ризик залишається дуже малим через доконаний математичний факт: *маленьке число, збільшене вдвічі, залишиться маленьким числом*. Наскільки добре чи погано — подвоїти щось, залежить від величини цього «чогось»!

Коефіцієнти ризиків набагато легші для сприйняття, ніж крихітні ймовірності на зразок 1 на 70 тисяч. Але ризики, що належать до малих ймовірностей, можуть легко завести у пастку. За даними дослідження соціологів з Міського університету Нью-Йорка[91], смертність маленьких дітей у домашніх яслах та під доглядом нянь у сім разів перевищувала той самий показник для дітей у великих дитячих садках. Але перед тим, як звільняти вашу няню, хвилинку подумайте про те, що нині маленькі діти в Америці майже не вмирають, а коли таке стається, то майже ніколи не є наслідком дій нянь чи когось іншого. Річний показник смертності немовлят під домашнім наглядом становить 1,6 на 100 тисяч: справді, це набагато більше за 0,23 на 100 тисяч у дитячих садках*. Обидва числа — близькі до нуля. За даними дослідження, тільки щось близько десятка немовлят за рік померло внаслідок нещасних випадків у сімейних дитячих садках. Це маленька частка із загальної кількості 1110 дитячих смертей внаслідок нещасних випадків у цілому по США 2010 року (більшість з них — у результаті задушення постільною білизною) чи 2 063 смертельних випадки внаслідок синдрому раптової смерті немовляти[92]. За всіх інших однакових умов соціологічне дослідження Міського університету Нью-Йорка дає підстави обирати дитячий садок, а не сімейний; але всі інші умови зазвичай однаковими *не бувають*, і деякі з цих неоднаковостей важать більше за інші. Що, коли сертифікований великий дитячий садок, що сяє чистотою, знаходиться удвічі далі від вашого дому, ніж трохи сумнівний сімейний маленький? 2010 року в автомобільних аваріях у США загинуло 79 маленьких дітей; якщо ваша дитина проводить на 20 % часу на рік у дорозі внаслідок довшого маршруту, то це може нівелювати будь-які переваги у безпечності моднішого дитячого садка.

Перевірка статистичної значущості — науковий інструмент; як і будь-який інший інструмент, він має свій ступінь точності. Якщо робити тест чутливішим — збільшуючи, наприклад, кількість учасників дослідження чи обстежених, — можна побачити дедалі слабкіші ефекти. У цьому — сила методу, але також і його слабкість. Це правда, що нульова гіпотеза, якщо брати її буквально, імовірно, майже завжди буде хибною. Коли у кровоносну систему пацієнта потрапляє потужний лікарський засіб, тяжко повірити, що таке втручання матиме *точно* нульовий ефект на ймовірність розвитку у цього пацієнта раку стравоходу, чи тромбозу, чи запаху з рота. Кожна частина організму спілкується з іншими у складній системі зворотного зв'язку, впливу й контролю. Усе, що ви робите, або викликає рак, або захищає від нього. У принципі, якщо провести достатньо точне дослідження, усі ці чинники можна виявити. Але зазвичай ці ефекти такі мікроскопічні, що на них без жодних сумнівів можна не зважати. Одне лише те, що їх можна виявити, не завжди означає, що вони мають значення.

Якби можна було повернутися у минуле, до епохи зародження статистичної термінології, і проголосити, що результат проходження тесту Фішера з *p*-значенням, меншим за 0,05, є «статистично помітним» чи «статистично

* Автори статті не звертаються до цікавого питання про відповідні показники для дітей під наглядом власних батьків.

розпізнаваним», а не «статистично значущим»! Це була б правильніша назва для методу, який лише говорить нам про існування ефекту і мовчить про його обсяг чи важливість. Але вже запізно. Маємо мову, яку маємо*.

Міф про міф про смугу удач

Ми знаємо Б. Ф. Скіннера як психолога, значною мірою як уособлення сучасної психології. Йому вдалося перемогти фройдистів і очолити альтернативний напрям у психології — біхевіоризм, що займається тільки тим, що можна спостерігати й вимірювати, що не вимагає гіпотез про несвідомі мотивації (та й про свідомі теж). За Скіннером, теорія свідомості просто *є* теорією поведінки, а тому психологи зовсім не цікавляться думками й почуттями, віддаючи беззастережну перевагу маніпулюванню поведінкою за допомогою підкріплення.

Менш відома історія Скіннера — невдалого письменника[93]. Скіннер вивчав англійську мову й літературу в коледжі Гамільтона, багато часу проводячи з Персі Сандерсом, професором-хіміком і естетом, який влаштував у своєму помешканні своєрідний літературний салон. Скіннер читав Езру Паунда, слухав Шуберта і складав піднесені юнацькі вірші (Вночі він зупиняється[94], і, знеможений, / Шепоче своєму земному супутнику / «Любов виснажує мене!») для літературного журналу коледжу. Він не вивчав жодної психологічної дисципліни. Після навчання в коледжі він відвідував відомі курси письменницької майстерності «Бред Лоф», на яких написав «одноактну п'єсу про шарлатана[95], який гормонами змінював людські особистості». Також йому вдалося домогтися, щоб кілька його оповідань прочитав Роберт Фрост. Той написав Скіннеру дуже коректного листа зі схвальною оцінкою оповідань і порадою: «Письменником робить здатність[96] писати сильно і прямо на основі певної непоясненної і майже непохитної особистої позиції... Переконаний, що кожен має таку позицію і певний час віддає тому, щоб знайти спосіб виразити її словами. Але більшість людей залишаються на самому початку, зображуючи позиції інших».

Наснажений таким чином, Скіннер влітку 1926 року переїхав до горішнього поверху батьківського будинку у Скрентоні і заходився писати. Але виявилося, що цю особисту позицію не так-то й легко знайти, та навіть знайшов-

* Звичайно, все залежить від мови. Китайські статистики для позначення значущості у статистичному сенсі вживають термін «сян чжу», ближчий до «помітного» — однак мої знайомі китайці розповідали, що цей термін також має додаткове значення важливості, так само, як і англійське слово significance. Російським відповідником статистичного терміна significance є «значимость», проте, щоб передати сенс загальновживаного англійського слова significant, використовують слово «значительный».

ши — втілити у літературну форму. Час, проведений у Скрентоні, не привів ні до чого; він спромігся на кілька оповідань і сонет, присвячений робітничому лідеру Джону Мітчеллу, але переважно складав моделі кораблів і ловив сигнали далеких Піттсбурґа і Нью-Йорка за допомогою радіо — новітнього тоді пристрою для ухиляння від роботи.

«У мене формувалася люта неприязнь до всього, пов'язаного з літературою[97], — писав він пізніше про той період. — Я не зміг стати письменником, тому що не мав сказати нічого важливого, але не міг змиритися з цим поясненням. Звинувачувати потрібно було саме літературу». Або, з більшою прямотою: «Література має бути знищена»[98].

Скіннер був постійним читачем літературного журналу «Даєл»; на його сторінках він познайомився з філософськими працями Бертрана Рассела, а Рассел привів його до Джона Вотсона, першого великого пропагандиста біхевіоризму, чиє ім'я невдовзі стане майже синонімом імені самого Скіннера. Вотсон твердив, що науковці мають займатися спостереженням за результатами експериментів, і тільки цим; місця гіпотезам про свідомість чи душу немає. «Ніхто ніколи не торкався душі[99] і не бачив її в пробірці», — писав він, відкидаючи це поняття. Ці безкомпромісні слова, мабуть, так схвилювали Скіннера, що він приїхав до Гарварда вивчати психологію й готуватися до вигнання туманного й непокірного «я» з наукового дослідження поведінки.

Велике враження на Скіннера справив досвід спонтанного говоріння, що трапилося з ним у лабораторії; якийсь пристрій видавав повторювані ритмічні звуки, і Скіннер зрозумів, що говорить у такт з ними, повторюючи про себе фразу «Ніколи не вийдеш, ніколи не вийдеш, ніколи не вийдеш»[100]. Те, що нагадувало осмислені слова, навіть деякою мірою поезію, насправді було результатом певного спонтанного процесу, для якого не був потрібен жоден свідомий автор*. Це дало Скіннеру ідею, потрібну йому, щоб звести рахунки з літературою. Що, коли мова, навіть мова великих поетів, — це просто ще один вид поведінки під дією стимулів, який можна відтворити в лабораторії?

У коледжі Скіннер писав сонети, намагаючись робити їх схожими на Шекспірові; пізніше він писав про це в дусі суворого біхевіоризму: «дивне задоволення видавати цілі рядки[101] — закінчені, з потрібним метром і римою». Тепер, молодий професор у Міннесоті, він переосмислює самого Шекспіра, вже більше як несвідомого генератора, а не автора. Тоді його підхід видавався не таким божевільним, як зараз; панівним методом літературної критики у той

* Кажуть, що Девід Бірн дуже схожим чином написав слова до «Спалити будинок дощенту»: він викрикував безглузді склади у ритмі інструментальної партії, а потім записав осмислені слова, близькі за звучанням до початкових складів.

час було «уважне читання», яке відзначалося рисами філософії Вотсона, як і біхевіористський підхід Скіннера, що віддавав перевагу словам на сторінці, а не намірам автора, які неможливо спостерігати.

Шекспір знаменитий своєю майстерністю початкової алітерації — повторення у близько розташованих словах одних і тих самих початкових приголосних звуків (Full fathom five thy father lies...). Для Скіннера такий аргумент на основі прикладів був ненауковим. Чи є у Шекспіра початкові алітерації? Якщо так, тоді це може довести математика. «Доведення того, що існує процес, відповідальний за алітераційне компонування, — пише він, — можливо отримати тільки за допомогою статистичного аналізу всіх поєднань початкових приголосних на достатньо великій вибірці»[102]. А за допомогою якого саме статистичного аналізу? Жодного іншого, як фішерівської перевірки *p*-значення. Тож нульова гіпотеза полягає в тому, що Шекспір зовсім не зважає на звуки, якими починаються слова в його віршах, а тому перший звук в одному слові вірша не впливає на інші слова того самого рядка. Хід досліду дуже схожий на клінічне випробування, але є одна суттєва відмінність: дослідник-медик, який перевіряє дію ліків, усім серцем сподівається, що нульову гіпотезу буде спростовано і таким чином продемонстровано дієвість ліків. Для Скіннера ж, який прагнув скинути літературу з п'єдесталу, бажаним результатом було підтвердження нульової гіпотези.

За нульовою гіпотезою, частота, з якою початкові звуки кілька разів з'являються в одному рядку, не зміниться, якщо покласти ці слова у мішок, струсонути його і викласти знову у випадковому порядку. І саме це й виявив Скіннер на вибірці у сотню сонетів. Тест на статистичну значущість Шекспір завалив. Скіннер пише:

«Незважаючи на позірне багатство алітерації в сонетах, не існує значущих доказів свідомого добору звуків поетом, що заслуговували б на серйозну увагу. Якщо йдеться про цей аспект поезії, Шекспір міг добирати слова цілком випадково»[103].

«Позірне багатство» — ну й нахабність! Воно чудово передає дух психології, яку прагнув розробити Скіннер. Там, де Фройд твердив, що бачить раніше приховане, витіснене чи затемнене, Скіннер прагнув протилежного: заперечення існування наочно видимого.

Та Скіннер помилявся: він не довів, що Шекспір не застосовував алітерації. Перевірка статистичної значущості — це інструмент, він схожий на телескоп. І одні інструменти потужніші за інші. Якщо дивитися на Марс у науковий телескоп, його супутники видно; якщо у бінокль — не видно. Але супутники є! Так само є й алітерація у Шекспіра. Як продемонстровано історикалми літератури[104], вона була стандартним прийомом у той час, відомим і свідомо застосовуваним майже кожним, хто писав вірші англійською мовою.

Що Скіннер справді довів, то це те, що Шекспір не вдається до алітерацій надмірно — аж так, щоб цей надмір повторюваних звуків проявився в його досліді. Але чому він мав проявлятися? Застосування алітерації у поезії може бути як позитивним, так і негативним; десь алітерацією досягається певний ефект, тоді як в інших місцях алітерації свідомо уникають, щоб не створити небажаного враження. Можливо, загальна тенденція полягає у збільшенні кількості рядків з алітерацією, але навіть якщо так, це збільшення має бути незначним. Додайте до сонету одну чи дві зайві алітерації, і ви станете одним з незграбних поетів, яких висміює сучасник Шекспіра Джордж Ґаскойн: «Чимало поетів захоплюються[105] повторенням різних слів, що починаються однією літерою, — це (за помірного використання) добре для вірша; але вони чинять так, заганяючи літеру до смерті, роблять Crambe, а Crambe bis positum mors est».

Латинський вислів перекладається як «Капуста, подана двічі, — смерть». Шекспірова поезія багата на прийоми, але вони завжди застосовуються доцільно. Він ніколи не напхав би у вірші так багато капусти, щоб грубий дослід Скіннера зміг її виявити.

Статистичне дослідження, недостатньо досконале для виявлення явища очікуваного обсягу, має назву *недостатньо потужного* — те саме, що дивитися на планети у бінокль. Є супутники чи немає — результат буде той самий, так що взагалі можна не дивитися. За допомогою бінокля не спостерігають те, для чого потрібен телескоп. Проблема недостатньої потужності — це зворотний бік проблеми британських контрацептивів. Дослідження з високою потужністю, як те, що застосовувалося щодо протизаплідних таблеток, може призводити до перебільшення малого ефекту, насправді не значущого. Дослідження, потужність якого замала, може призводити до відкидання ефекту, якого ваш метод через свою слабкість просто не бачить.

Візьмімо Спайка Альбрехта. Ніхто не чекав, що новачок мічиґанської чоловічої баскетбольної команди, зростом усього метр вісімдесят, який переважну частину сезону провів на лаві запасних, відіграє важливу роль у матчі «Росомах» з луїсвільцями у фіналі чемпіонату Національної асоціації студентського спорту 2013 року. Але Альбрехт зробив п'ять прямих результативних кидків, чотири з них триочкових, за десять хвилин у першій половині гри, давши Мічиґану перевагу у десять очок над «Кардиналами», які перед матчем вважалися фаворитами з великим відривом. Він показав те, що уболівальники баскетболу називають «смугою удач», коли здається, що гравець не може схибити, незалежно від того, з якої відстані він кидає і якою сильною є оборона.

Крім того, вважається, що жодної «смуги удач» немає. 1985 року в одній з найвідоміших статей[106] сучасної когнітивної психології Томас Ґілович, Роберт Валлон і Амос Тверський (далі — ҐВТ) зробили з уболівальниками баскетболу те, що Б. Ф. Скіннер — з шанувальниками Шекспіра. Вони вивчили дані про всі кидки, зроблені у сезоні 1980/1981 філадельфійською командою «Севенті Сиксерс» у 84 домашніх іграх і виконали їх статистичний аналіз. Якщо існує тенденція до вдалих і невдалих смуг, можна очікувати, що гравець, який щойно влучив у кошик, зробить ще один результативний кидок, а той, що не влучив, не влучить знову. І коли ҐВТ опитали баскетбольних уболівальників, виявилося, що таку думку широко підтримують; дев'ять з десяти уболівальників погодилися, що гравець, який щойно закинув два чи три м'ячі поспіль, має більшу ймовірність влучити знову.

Але нічого подібного у філадельфійській команді не спостерігалося. Джуліус Ірвінґ, великий «Доктор Джей», мав загальний показник результативності 52 %. Після трьох влучань, коли можна було б подумати, що у гравця настала «смуга удач», показник результативності знизився до 48 %. А після трьох поспіль промахів загальна результативність не впала, а залишилася точно тією самою, 52 %. Для інших гравців, як-от Дерріл «Шоколадний Грім» Докінз, ефект був ще разючішим. Після влучання загальний показник результативності 62 % знизився до 57 %; після промаху — злетів до 73 %, що суперечило очікуванням уболівальників. (Одне можливе пояснення: промах свідчив про те, що Докінз зустрівся із сильною обороною на периметрі, і це спонукало його рватися до кошика, щоб зробити один зі своїх фірмових кидків згори, яким він давав мальовничі назви, як-от «Шокуюча ганьба» та «Турбосексофонна насолода»).

Чи означає це, що ніякої «смуги удач» немає? Не зовсім. Зрештою, «смуга удач» загалом не вважається універсальним правилом, за яким за влучаннями ідуть влучання, а за промахами — промахи. Це щось недовговічне, короткий період, коли баскетбольне божество заволодіває тілом гравця (не попереджаючи, ні коли прийде, ні коли піде). На десять хвилин Спайк Альбрехт стає Реєм Алленом, демонструючи зливу результативних кидків, а потім це знову Спайк Альбрехт. Чи здатний статистичний тест це виявити? У принципі, чому ні? ҐВТ придумали винахідливий спосіб виявлення таких коротких періодів нестримності. Вони поділили гру кожного баскетболіста за сезон на послідовності чотирьох кидків; тож якщо загальна послідовність влучань і промахів для Доктора Джея виглядає так:

ВПВВВПВППВВВВППВ,

то короткі будуть

ВПВВ, ВПВП, ПВВВ, ВППВ…

Після цього ҐВТ порахували, скільки послідовностей «добрі» (3 або 4 влучання), «посередні» (2 влучання) або «погані» (0 або 1 влучання) для кожного з дев'яти гравців, дані яких вивчалися. А потім, як віддані послідовники Фішера, вони розглянули нульову гіпотезу, — що ніякої «смуги удач» немає.

Існує шістнадцять можливих послідовностей для результатів чотирьох кидків: перший може бути або влучанням, або промахом, і для кожного з цих варіантів є у свою чергу ще два для другого кидка, що дає разом чотири варіанти для перших двох кидків (ось вони: ВВ, ВП, ПВ, ПП), а для кожного з *цих* чотирьох є два можливих варіанти для третього кидка, що дає вісім можливих варіантів для послідовності трьох кидків, а четвертий кидок подвоює це число, що дає для всіх чотирьох 16 можливих варіантів. Ось вони всі, поділені на добрі, посередні і погані:

Добрі: ВВВВ, ПВВВ, ВПВВ, ВВПВ, ВВВП
Посередні: ВВПП, ВПВП, ВППВ, ПВВП, ПВПВ, ППВВ
Погані: ВППП, ПВПП, ППВП, ПППВ, ПППП

Для гравця, результативність якого, як у Доктора Джея, становить 50 %, усі 16 послідовностей, очевидно, мають мати однакову ймовірність, тому що кожен кидок має однакову ймовірність бути В або П. Тож можна очікувати, що близько 5/16, або 31,25 %, послідовностей із чотирьох кидків Доктора Джея будуть добрими, 37,5 % посередніми і 31,25 % поганими.

Але якщо у Доктора Джея часом трапляється смуга удач, можна очікувати, що частка добрих послідовностей буде вищою, — через ті ігри, у яких він, здається, не може схибити. Що більше ви будете схильні до вдалих і невдалих смуг, то частіше бачитимете послідовності ВВВВ та ПППП і рідше ВПВП.

Перевірка статистичної значущості спонукає нас звернутися до питання: якби нульова гіпотеза була правильною і смуг удач не було, наскільки неймовірним було б спостерігати результати, які ми маємо насправді. Частка добрих, поганих і посередніх послідовностей у реальних даних є близькою до передбачуваної, і будь-яке відхилення виходить за межі статистичної значущості.

«Якщо ці результати когось дивують, — пишуть ҐВТ, — то це через поширеність хибного уявлення про "смугу удачі" серед досвідчених і компетентних спостерігачів». І справді, хоча результати дослідження швидко стали загальником для психологів і економістів, у баскетбольному світі вони завойовували прихильність повільно. Це не засмутило Тверського, який полюбляв добру бійку незалежно від того, чим вона скінчиться. «Я тисячу разів сперечався з цього питання, — говорить він. — Щоразу я вигравав, але не переконав нікого».

Утім ҐВТ, як до них Скіннер, відповіли тільки на половину запитання, а саме: що коли нульова гіпотеза істинна і смуги удач немає? Тоді, як вони показали, результати виглядатимуть дуже схоже на ті, які ми спостерігаємо в реальності.

Але що коли нульова гіпотеза хибна? Смуга удач, якщо вона існує, коротка, і її ефект, у строгому числовому вираженні, малий. Найгірший гравець у Лізі має результативність 40 %, найкращий — 60 %; це велика різниця у баскетболі, проте у статистичному сенсі вона не така вже й велика. Як би виглядали послідовності результатів, якби смуги удач існували?

Саме до цього питання звертаються фахівці з інформатики Кевін Корб і Майкл Стітвелл[107] у своїй статті 2003 року. Вони розробили модель з урахуванням смуги удач: у модельованому випадку результативність гравця зростає до 90 % протягом двох смуг удач по десять кидків кожна. У більш як трьох чвертях результатів моделювання перевірка статистичної значущості, використовувана ҐВТ, засвідчила відсутність підстав відкидати нульову гіпотезу — *незважаючи на те, що нульова гіпотеза була цілковито хибною*. Перевірка ҐВТ мала недостатню потужність — вона показувала відсутність смуг удач, навіть якщо вони існували насправді.

Якщо не подобаються моделі, звернімося до реального життя. Не всі команди однаково грають в обороні; у сезоні 2012/2013 року вперті гравці «Індіана Пейсерс» у цілому дозволили супротивникам зробити лише 42 % кидків, однак у матчах проти «Клівленд Кавальєрс» цей показник становив 47,6 %. Тож у гравців справді є доволі передбачувані «гарячі періоди», а саме: вони мають більшу ймовірність зробити кидок, коли грають за «Кавальєрів». Але період виходить не таким уже й гарячим, швидше, «теплим», — таким, що перевірка Ґіловіча, Валлона і Тверського виявити його не може.

Правильне питання звучить не так: «Чи трапляються у баскетболістів тимчасові періоди зростання або зниження результативності кидків?» — це питання передбачає відповідь «так» або «ні», отримувану в результаті перевірки статистичної значущості. Правильне питання таке: «*Наскільки* результативність змінюється із часом і до якої міри спостерігачі можуть виявляти у реальному часі вдалі смуги у гравців?» Тут відповідь, поза сумнівом, буде: «Не настільки, як люди вважають, якщо це взагалі можливо». За даними недавнього дослідження, гравці, які закидають два перші штрафні, мають трохи більші шанси закинути наступного м'яча[108], однак переконливих доказів існування «смуг удач» під час гри в реальному часі немає, якщо тільки не зважати на суб'єктивні враження гравців і тренерів. Коротке життя смуги удач, яке не дає спростувати її існування, так само не дає змоги і достовірно її виявити. Ґіловіч, Валлон і Тверський повністю мають рацію у своєму центральному дискусійному твердженні — що люди швидко знаходять закономірності там, де їх немає, і переоцінюють їхню силу там, де вони є. Кожен уболівальник на баскетбольних матчах постійно стає свідком того, як той чи той гравець закидає п'ять м'ячів поспіль. Поза сумнівом, у більшості випадків це — наслідок певного поєднання поганої оборони, розумного розпорядження м'ячем або, що найімовірніше, чистого везіння, а не раптового втручання баскетбольного провидіння. Це означає: немає підстав очікувати, що гравець, який тільки-но закинув п'ять м'ячів, має якісь особливо великі шанси закинути шостий. Аналіз діяльності інвестиційних консультантів, по суті, та сама проблема. Чи існують такі речі, як інвестиційний талант і досвід, чи відмінності у результатах діяльності різних фондів є винятково наслідком випадковості — це питання вже довгі роки залишається тривожним й непроясненим[109]. Але якщо є інвестори, що мають постійні чи тимчасові смуги удач, — їх мало, так мало, що вони слабко позначаються, або й зовсім не позначаються, на статистиці, яку досліджують ҐВТ. Фонд, який демонструє високі показники п'ять років поспіль, набагато, набагато ймовірніше робить це в результаті везіння, а не особливих здібностей. Минулі результати не є гарантією майбутніх доходів. Якщо мічиґанські вболівальники розраховували, що Спайк Альбрехт приведе команду до чемпіонства, їх чекало гірке розчарування; Альбрехт схибив в усіх кидках, які він робив у другій половині зустрічі, і «Росомахи» поступилися з розривом у 6 очок.

Дослідження Джона Гейзінґи та Сенді Вейла[110] 2009 року вказує на те, що гравцям краще не вірити у смугу удач, навіть якщо вона реально існує! Із залученням набагато більшого масиву даних, ніж у дослідженні ҐВТ, вони виявили схожий ефект; після влучення у кільце гравці мають менше шансів на успішний наступний кидок. Але Гейзінґа і Вейл досліджували дані не тільки про самі кидки, а й місця, з яких вони робилися. І *ці* дані вказують на сильне потенційне пояснення: гравці, які щойно зробили влучний кидок, для наступного кидка з більшою імовірністю обирають складнішу позицію. 2013 року Ігал Атталі дійшов ще цікавіших висновків[111]. Гравець, який щойно закинув м'яч з-під кільця, має не більше шансів закинути з далекої відстані, ніж гравець, який не закинув з-під кільця. Кидки з-під кільця легкі, і не дають гравцю відчуття смуги удач. Але гравець з набагато більшою ймовірністю спробує далекий кидок після того, як щойно зробив триочковий, ніж після того, як схибив у такому кидку. Іншими словами, смуга удач може «зводити себе нанівець» — гравці, вважаючи, що настала смуга удач, переоцінюють себе і роблять кидки, які робити не варто.

Розгляд аналогічного явища в інвестуванні залишаю читачам для самостійного опрацювання.

Розділ 8

Доведення від неймовірного

Найнеприємніше філософське питання, що стосується перевірки статистичної значущості, постає на самому початку, до того, як у хід ідуть хитромудрі алгоритми, розроблені Фішером і відшліфовані його наступниками. Воно — на початку кроку 2:

«Припустимо, що нульова гіпотеза істинна».

Але ж у більшості випадків ми намагаємося довести, що нульова гіпотеза *не* істинна. Ліки діють, Шекспір вдається до алітерації, Тора знає майбутнє. З погляду логіки сумнівно приймати те, що планується спростувати — так можна потрапити у пастку порочного кола.

Щодо цього можна бути спокійним. Припускати істинність того, що ми тихенько вважаємо хибним, — це заслужений, перевірений часом метод аргументації, відомий ще в часи Арістотеля; це — доведення від супротивного або приведення до абсурду. Приведення до абсурду — це своєрідне математичне дзюдо, у якому ми спочатку стверджуємо те, що зрештою хочемо спростувати, плануючи виконати кидок через плече і перемогти це твердження, застосувавши його власну силу. Якщо гіпотеза приводить до хибного твердження*, тоді й сама гіпотеза має бути хибною. Тож план такий:

- Припустимо, гіпотеза *H* істинна.
- З *H* випливає, що певний факт *F* не може мати місця.
- Але *F* має місце.
- Отже, *H* хибна.

Скажімо, хтось кричить, що в окрузі Колумбія 2012 року зі стрілецької зброї було вбито двісті дітей. Це гіпотеза. Проте її може бути дещо тяжко перевірити (під цим я розумію, що, набравши у рядку пошуку «Ґуґла» «кількість ді-

* Дехто наполягатиме на проведенні відмінності: певне судження є доведенням до абсурду (від супротивного) тільки тоді, коли висновки з гіпотези є самосуперечливими; якщо ж висновки просто хибні, то такий аргумент буде стверджувально-заперечним модусом.

тей, убитих зі стрілецької зброї в окрузі Колумбія 2012 року», миттєвої відповіді я не отримаю). З іншого боку, якщо ми приймаємо, що гіпотеза істинна, то в такому разі в окрузі Колумбія 2012 року загалом не могло бути менше вбивств за цю кількість. Але їх *було* менше; насправді лише 88[112]. Тож гіпотеза нашого крикуна мусить бути хибною. Порочного кола тут немає; ми «прийняли» хибну гіпотезу — тимчасово, з дослідницькою метою, створивши уявний світ, що суперечить фактам, у якому H — істинна, а потім побачили, як вона руйнується під тиском реальності.

Якщо дивитися так, то доведення від супротивного виглядає майже тривіальним, й у певному сенсі так воно і є; але, напевно, точніше буде сказати, що ми так звикли до застосування цього інструмента, що забуваємо про те, який він потужний. Насправді найпростіше доведення від супротивного лежить в основі піфагорійського доведення ірраціональності квадратного кореня з 2; саме воно виявилося таким руйнівним для існуючих шаблонів, що призвело до вбивства свого автора; доведення таке просте, красиве і компактне, що я можу вмістити його повністю на одній сторінці.

Припустимо:

H: квадратний корінь з 2 є раціональним числом,

тобто $\sqrt{2}$ є дробом m/n, де m і n — цілі числа. Ми можемо записати цей дріб у вигляді нескорочуваного; якщо чисельник і знаменник мають спільні множники, то ми ділимо обидві частини дробу на них, від чого дріб не змінюється: немає підстав писати 10/14 замість простішого 5/7. Тож перефразуємо нашу гіпотезу:

H: квадратний корінь з 2 дорівнює m/n, де m і n — цілі числа, що не мають спільних множників.

Насправді це значить, що ми можемо бути певними, що обидва числа m і n не є парними; бо сказати, що обидва числа парні, — це точно те саме, що сказати, що вони мають спільний множник 2. У такому разі, як у випадку з дробом 10/14, і чисельник, і знаменник можна поділити на 2, не змінивши дробу, що зрештою означає, що дріб не був нескорочуваним. Тож твердження

F: і m, і n — парні

хибне.

Тепер, оскільки $\sqrt{2} = m/n$, піднісши обидві частини рівності до квадрата, отримуємо $2 = m^2/n^2$, або, що те саме: $2n^2 = m^2$. Тож m^2 — парне число, що означає, що й саме m — парне. Число є парним, якщо його можна представити у вигляді подвоєного іншого цілого числа; тож ми можемо записати і записуємо m як $2k$, де k — якесь ціле число. Що означає, що $2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Поділивши обидві частини на 2, отримуємо $n^2 = 2k^2$.

У чому сенс усієї цієї алгебри? Просто в тому, щоб показати, що n^2 — це двічі k^2, а тому є парним числом. Але якщо n^2 — парне число, то й саме n мусить бути парним, так само, як m. Але це означає, що наше хибне припущення F істинне! Припустивши H, ми прийшли до хибного твердження, навіть до абсурду — що F є істинним і хибним одночасно. Тому H мусить бути хибним. Квадратний корінь з 2 — *не* раціональне число. Припустивши, що воно раціональне, ми довели, що воно таким насправді не є. Дивний трюк, але він працює.

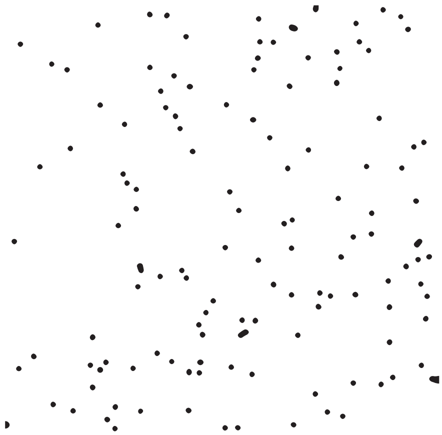
Перевірку статистичної значущості нульової гіпотези можна розглядати як своєрідний «нечіткий варіант» доведення від супротивного:

- Припустимо, що нульова гіпотеза H істинна.
- З H випливає, що певний результат O є дуже малоймовірним (скажімо, його ймовірність менша від фішерівського порога 0,05).
- Але O спостерігали в реальності.
- Отже, H є дуже малоймовірною.

Іншими словами, не доведення від супротивного, але доведення від неймовірного.

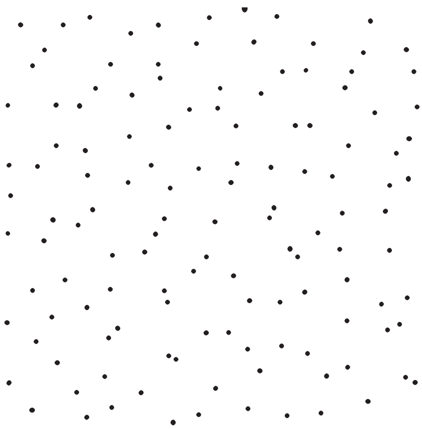
Класичний приклад наводить англійський астроном і священик XVIII століття Джон Мічелл, який одним із перших застосував статистичний підхід до дослідження небесних тіл[113]. Скупчення туманних зір у кутку сузір'я Тельця відзначали майже всі цивілізації. Індіанці навахо називають ці зорі «Ділейхе», «іскриста постать»; маорі називають їх «Матарікі» — «очі бога». Давні римляни бачили в них гроно винограду, а японською мовою вони звуться «Субару» (на той випадок, якщо ви коли-небудь задумувалися, звідки походить логотип компанії з шістьма зірками). Ми називаємо їх Стожари, або Плеяди.

Усі ці довгі століття спостережень і міфотворчості не змогли дати відповіді на фундаментальне наукове запитання про Стожари: чи є це скупчення скупченням насправді? Чи ці шість зірок розділяють невимовні відстані, а разом ми бачимо їх тільки випадково, тому що вони опинилися в одному напрямку від Землі? Світні точки, випадковим чином розташовані в полі нашого зору, виглядатимуть десь так[114]:



У деяких місцях бачимо скупчення, так? Цього варто було очікувати: неминуче будуть якісь групи зірок, які опиняться майже одна на одній, просто випадково. Як можна бути певним, що зі Стожарами не відбувається те саме? Це те саме явище, на яке вказують Ґіловіч, Валлон і Тверський: стабільний баскетболіст, у якого немає ні вдалих, ні невдалих смуг, часом закидає п'ять м'ячів поспіль.

Насправді, якби великих скупчень зірок не було, як-от на цій картинці[115]:



то *саме це* було б свідченням дії певного невипадкового процесу. Для неозброєного ока друга картинка виглядає «випадковішою», але це не так; у ній точки мають задану несхильність до скупчення.

Тож чиста видимість скупчення не повинна слугувати надійним свідченням того, що якась група зірок є скупченням насправді. З іншого боку, зірки у групі можуть виглядати достатньо близькими одна до одної, щоб викликати сумніви в чистій випадковості цього. Мічелл показав, що якби видимі зірки розподілялися у просторі випадково, ймовірність того, що шість зірок вишикуються так близько одна від одної, як це ми бачимо у Стожарах, насправді дуже мала; близько 1 на 500 000, за його підрахунками. Але вони — над нами, таке собі тісно збите гроно винограду. Мічелл виснував, що тільки дурень міг би повірити, що це випадковість.

Фішер схвально оцінив роботу Мічелла, провівши явну паралель між аргументацією Мічелла і класичним доведенням до абсурду:

«Сила, з якою цей висновок обґрунтовується[116], з погляду логіки — це сила простої диз'юнкції: або відбувається надзвичайно рідкісна подія, або теорія випадкового розподілу не є істинною».

Аргумент переконливий, і висновок правильний; Стожари — це справді не оптичний збіг, а реальне зоряне скупчення — кількох сотень молодих зірок, а не тільки шести, видимих оком. Той факт, що ми бачимо багато дуже щільних скупчень зірок, таких як Стожари, набагато щільніших, ніж це було б імовірним за випадкового збігу, є добрим свідченням на користь того, що зірки не розташовані випадково, а скупчені через певне реальне явище у космічному просторі.

Але є й погана новина: доведення до неймовірного, на відміну від свого Арістотелевого попередника, в цілому не є логічно бездоганним. Воно заводить нас до власних логічних абсурдів. Джозеф Берксон, багаторічний керівник статистичного підрозділу клініки Майо, який не приховував скептичного погляду на методику, яку він вважав ненадійною, запропонував знаменитий приклад, що демонструє пастки цього методу. Припустимо, ви маєте групу з 50 піддослідних осіб, які за вашою гіпотезою (H) є людьми. За вашим спостереженням (O), одна з осіб — альбінос. Однак альбінізм є дуже рідкісним явищем, що проявляється в одного з двадцяти тисяч людей. Отже, якщо H істинна, шанси на те, що серед 50 ваших піддослідних знайдеться альбінос, дуже малі — менші ніж 1 на 400*, або 0,0025. Тож p-значення, ймовірність спостереження O за H, набагато менше за 0,05.

Ми неухильно прямуємо до висновку, з високим ступенем статистичної достовірності, що H хибна: учасники нашого досліду не є людьми.

Існує спокуса вважати «дуже малоймовірне» таким, що означає «по суті неможливе», і вимовляти про себе слова «по суті» дедалі тихіше — доки ми

* Можна припустити, що кожен з 50 піддослідних дає 1/20 000 шанс на появу у вибірці альбіноса, що разом становитиме 1/400; підрахунок не точний, але, як правило, достатній для подібних випадків, у яких результат є дуже близьким до нуля.

не перестанемо звертати на них увагу*. Але неможливе і малоймовірне — не одне й те саме. Неможливі речі не стаються ніколи. Але малоймовірні речі трапляються постійно. Це означає, що ми перебуваємо на хиткому логічному ґрунті, коли намагаємося робити висновки з малоймовірних спостережень, що закликає нас робити доведення від малоймовірного. Той випадок, коли у північнокаролінській лотереї двічі за один тиждень випав набір 4, 21, 23, 34, 39, викликав купу запитань; чи було щось не так з лотереєю? Але кожен набір виграшних номерів має точно таку саму ймовірність випасти, як і будь-який інший. Бо виграшні номери 4, 21, 23, 34, 39 у вівторок і 16, 17, 18, 22, 39 у четвер — точно так само малоймовірні, як те, що насправді відбулося, — це лише один шанс на 300 мільярдів чи щось таке — отримати ці два виграшні набори у ці два дні. Насправді *будь-який* конкретний результат розіграшів у вівторок і четвер — один на 300 мільярдів. Якщо ви схильні вбачати у цьому надзвичайно малоймовірному результаті підставу для сумнівів у чесності гри, ви будете людиною, що надсилає організаторам лотереї гнівні листи кожного четверга, незалежно від того, кулі з якими номерами випадуть з барабана.

Не будьте цією людиною.

Кластери простих чисел і структура безструктурності

Критично важлива ідея Мічелла, — що скупчення зірок можуть з'являтися в полі нашого зору, навіть якщо зірки випадково розподілені по небу, — застосовна не тільки для небесної сфери. Це явище лягло в основу сюжету пілотної серії математичного поліцейського серіалу «Числа»**. Низка жахливих нападів, позначених прапорцями на карті, не мала скупчень; отже, єдиний хитрий серійний убивця навмисно залишає простір між жертвами, — це не справа рук різних, не пов'язаних між собою психопатів. Це було дещо штучним як для поліцейської історії, та з математичного погляду цілком коректним.

Поява кластерів у випадкових даних здатна пояснити навіть ситуації, де справжньої випадковості немає зовсім, наприклад поведінку простих чисел. 2013 року популярний викладач з Нью-Гемпширського університету Ітан «Том» Чжан приголомшив світ теоретичної математики, оголосивши, що він довів гі-

* Насправді, загальний принцип риторики полягає в тому, що, коли хтось каже «*X* — це по суті *Y*», він, як правило, має на увазі, що «*X* — це не *Y*, але для мене було б простіше, якби *X* було *Y*, тож було б чудово, якби ти просто не зважав, а вдав, що *X* — це *Y*, добре?».

** Розкрию інформацію: я читав сценарії «Чисел» до зйомок, щоб перевірити їх математичну коректність і надати зауваження. Із запропонованого мною до екранів дійшла лише частина однієї репліки: «...намагаючись знайти проекцію афінного тривимірного простору на сферу з певними відкритими обмеженнями».

потезу «обмежених проміжків» про розподіл простих чисел[117]. Чжан був одним з найкращих студентів у Пекінському університеті, але після переїзду до США для навчання в аспірантурі у 1980-х роках спочатку успіху не мав. З 2001 року він не опублікував жодної статті. Він навіть закинув науку і почав продавати бутерброди в метро. Так тривало, доки його не знайшов ще один колишній студент Пекінського університету, який допоміг йому отримати роботу викладача в Нью-Гемпширі. Здавалося, Чжан повністю втратив професіоналізм. То ж яким було здивування, коли він опублікував статтю з доведенням теореми, з якою так і не впорались найвидатніші постаті в теорії чисел.

Проте факт, що ця гіпотеза істинна, не став несподіванкою. Математиків уважають такими хлопцями, які повірять у щось лише тоді, коли це встановлено і доведено. Це не зовсім так. Усі ми вірили в те, що гіпотеза про обмежені проміжки істинна, ще до великого відкриття Чжана, і ми всі віримо в істинність пов'язаної гіпотези про числа-близнюки, хоча її досі не довели. Чому?

Почнемо з того, що стверджують ці дві гіпотези. Прості числа — це числа, більші за 1, які не діляться на жодне число, менше за себе і більше за 1; так, 7 — просте число, а 9 — ні, тому що воно ділиться на 3. Першими простими числами є 2, 3, 5, 7, 11 і 13.

Кожне додатне число можна представити як добуток простих чисел, причому єдиним способом. Наприклад, 60 — це дві двійки, одна трійка і одна п'ятірка, тому що $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$. (Ось чому я не зараховую до простих чисел 1, хоча деякі математики минулого це робили; таке зарахування 1 порушує унікальність добутку, тому що коли 1 вважається простим, 60 можна представити як $2 \times 2 \times 3 \times 5$, і як $1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$, і як $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$...). А що з самими простими числами? З ними все гаразд; просте число, наприклад 13, це добуток *одного* простого числа, самого 13.

А як бути з 1? Ми виключили 1 зі списку простих, то як 1 може бути добутком простих, кожне з яких більше за 1? Просто: 1 *є* добутком *ніяких* простих чисел.

На цьому місці мене іноді запитують: «Чому добуток *ніяких* простих чисел дорівнює 1, а не 0?». Ось одне, трохи заплутане пояснення: якщо ви візьмете добуток якихось простих чисел, наприклад 2 і 3, а потім поділите його на ті самі прості числа, які множили, у вас залишиться добуток з нічого взагалі; і якщо 6 поділити на 6, то буде 1, а не 0. (*Сума* ніяких чисел, з іншого боку, і справді буде 0).

Прості числа — атоми теорії чисел, фундаментальні неподільні частинки, з яких складаються всі числа. Через це вони привертали до себе пильну увагу від самого зародження теорії чисел. Одна з перших доведених теорем теорії чисел — це теорема Евкліда, яка стверджує що кількість простих чисел нескінченна; вони ніколи не закінчаться, хай як далеко ми зайдемо по числовій прямій.

Але математики — загребущі типи, не схильні задовольнятися простим ствердженням нескінченності. Зрештою, є нескінченність, а за нею ще *нескінченність*. Є нескінченно багато степенів числа 2, але ці числа дуже рідкісні. У першій тисячі чисел їх тільки десять:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 і 512.

Також існує нескінченно багато парних чисел, але вони поширені набагато більше: якщо точно, то 500 серед перших 1000. Насправді цілком очевидно, що з перших N чисел десь $(1/2)N$ будуть парними.

Виявляється, що прості числа за поширеністю десь посередині — вони більш поширені за степені 2, але трапляються рідше за парні. Серед перших N чисел близько $N/\log N$ будуть простими; це — теорема про кількість простих чисел, доведена наприкінці XIX століття Жаком Адамаром та Шарлем Жаном де ла Валле-Пуссеном.

Зауваження про логарифм і плогарифм

Цікаво, що майже ніхто не знає, що таке логарифм. Дозвольте хоча б почасти виправити цю ситуацію. Логарифм додатного числа N, що записується як $\log N$, це кількість цифр цього числа.

Чекайте, справді? Хіба так?

Ні. *Насправді,* ні. Ми можемо назвати кількість цифр «псевдологарифмом», або *плогарифмом*. Це достатньо близько до того, що є насправді, щоб дати загальне уявлення про те, що таке логарифм, у даному контексті. Плогарифм (а отже, і логарифм) — це дуже повільно зростаюча функція: плогарифм тисячі буде 4, плогарифм мільйона, більшого у тисячу разів, — 7, а плогарифм мільярда — тільки 10*.

Знову до кластерів простих чисел

Теорема про кількість простих чисел стверджує, що частка простих чисел серед перших N цілих чисел становить близько $1/\log N$. Так, простих чисел стає

* Тут, унизу сторінки, я можу спокійно навести справжнє визначення $\log N$; це таке число x, що $e^x = N$. Тут e — число Ейлера, що дорівнює 2,71828… Я кажу «e», а не «10», оскільки логарифм, про який ми говоримо, це *натуральний логарифм*, а не *десятковий*, за основою 10. Саме натуральний логарифм ви завжди використовуєте, якщо ви математик, або якщо у вас e пальців (на руках).

дедалі менше зі зростанням кількості чисел, хоча це зменшення відбувається дуже повільно; випадкове двадцятицифрове число може бути простим з удвічі меншою ймовірністю, ніж десятицифрове.

Природно, можна подумати: що частіше трапляється число якогось виду, то меншими є проміжки між такими числами. Якщо взяти парне число, то по наступне не потрібно йти далі, ніж за два числа від нього; справді, проміжки між парними числами завжди становлять точно 2. Зі степенями 2 справа — історія інша. Проміжки між наступними степенями зростають по експоненті, стаючи дедалі більшими без жодних винятків; наприклад, коли ви пройдете 16, вам більше ніколи не трапиться проміжок розміром 15 між двома наступними степенями 2.

Ці два випадки прості, але питання проміжків між простими числами складніше. Воно таке складне, що навіть після прориву Чжана багато в чому залишається таємницею.

Усе ж таки ми знаємо, чого чекати, завдяки дивовижно плідному підходу: ми думаємо про прості числа як про числа випадкові. Причина того, чому плідність такого підходу гідна захоплення, полягає в тому, що цей підхід дуже й дуже хибний. Прості числа — не випадкові! Ніщо у них не є довільним чи мінливим. Абсолютно навпаки: ми вбачаємо у простих числах непохитні елементи Всесвіту, ми викарбували їх на золотій пластинці, яку запустили в космос, щоб довести інопланетянам, що ми не ідіоти.

Прості числа не є випадковими, але виявляється, що багато в чому *вони поводяться, як випадкові*. Наприклад, коли ми ділимо випадкове ціле число на 3, остача може дорівнювати 0, 1 або 2, і кожен з цих випадків виникає з однаковою частотою. Коли ділити велике просте число на 3, частка не може бути цілим числом, — інакше так зване просте число ділилося б на 3, що означало б, що воно зовсім не просте. Але стара теорема Діріхле каже нам, що остача 1 отримується так само часто, як і остача 2, — так само, як з випадковими числами. Тож коли йдеться про остачу при діленні на 3, прості числа, крім того, що вони на 3 не діляться, виглядають випадковими.

А що з проміжками між послідовними простими числами? Ви, можливо, вважаєте, що вони віддаляються одне від одного — через те, що трапляються дедалі рідше зі зростанням чисел. У середньому це і справді так. Але Чжан довів саме те, що існує нескінченна кількість пар простих чисел, відстань між якими не перевищує 70 мільйонів. Іншими словами, що проміжок між одним простим числом і наступним, обмежений 70 мільйонами, буде траплятися нескінченну кількість разів — тому і гіпотеза про «обмежені проміжки».

Чому 70 мільйонів? Тому що саме це Чжан зміг довести. Публікація його статті викликала вибух активності: математики з усього світу з несамовитим завзяттям працювали разом у своєрідному математичному кібуці «Полімат», щоб скоротити проміжок за допомогою модифікацій методу Чжана. У липні 2013 року колектив показав, що існує нескінченно багато проміжків між простими числами максимального розміру 5414. У листопаді математик з Монреаля Джеймс Мейнард, який щойно захистив дисертацію, ще більше скоротив розмір проміжку, до 600, і «Полімат» взявся до роботи з метою колективного освоєння його ідей. На момент, коли ви читаєте цю книжку, поза сумнівом, обмеження скоротиться ще більше.

На перший погляд, обмежені проміжки можуть здатися явищем дивовижним. Якщо прості числа дедалі більше віддаляються одне від одного, що є причиною існування такої великої кількості пар, які знаходяться відносно близько? Якесь тяжіння між простими числами?

Нічого подібного. Якщо розкидати числа навмання, дуже ймовірно, що якісь пари чисел просто волею випадку опиняться дуже близько одне від одного — так само, як точки, довільно розкидані по площині, утворюють видимі скупчення.

Неважко вирахувати, що, якби прості числа поводилися, як випадкові, ви б побачили точно те, що продемонстрував Чжан. Більше того: можна було б очікувати, що існує нескінченна кількість пар простих чисел, що відрізняються лише на 2, як-от 3 і 5 та 11 і 13. Це так звані прості числа-близнюки, нескінченна кількість яких досі залишається гіпотетичною.

(Далі буде трохи обчислень. Тож якщо ви не готові, відведіть очі й повертайтеся знову до книжки на словах «А дуже багато простих чисел-близнюків...»).

Пам’ятайте: серед перших N чисел, як стверджує теорема про розподіл простих чисел, близько $N/\log N$ будуть простими. Якби вони розподілялися випадково, кожне число n із ймовірністю $1/\log N$ було б простим. Отже, ймовірність того, що обидва n і $n+2$ прості, буде близько $(1/\log N) \times (1/\log N) = (1/\log N)^2$. Тож скільки пар простих чисел, що відрізняються на 2, ми маємо очікувати знайти? У нашому діапазоні є N пар $(n, n+2)$, і кожна з них має ймовірність $(1/\log N)^2$ виявитися парою простих близнюків, тож маємо очікувати в нашому інтервалі близько $N/(\log N)^2$ пар простих чисел-близнюків.

Існують деякі відхилення від чистої випадковості, з незначними ефектами яких математики знають, як упоратися. Головне те, що просте n і просте $n+1$ — не незалежні явища; просте n дещо *збільшує ймовірність* того, що $n+2$ теж є простим, що означає, що наше звернення до добутку $(1/\log N) \times (1/\log N)$ не зовсім правильне. (Один з моментів: якщо n просте і більше за 2, то воно непарне, це означає, що $n+2$ теж непарне, що збільшує ймовірність того, що $n+2$ буде простим). Ґ. Г. Гарді, (згадайте «непотрібні непорозуміння») разом зі своїм постійним співавтором Дж. І. Літлвудом розробив точніший спосіб передбачення, що враховує ці залежності, і стверджує, що кількість простих чисел-близнюків насправді повинна бути на близько 32 % більша за $N/(\log N)^2$. За цим кращим наближенням кількість простих чисел-близнюків, менших за квадрильйон, має становити близько 1,1 трильйона — що є дуже доброю математичною оцінкою для точної кількості 1 177 209 242 304. Це дуже багато простих чисел-близнюків.

А дуже багато простих чисел-близнюків — це саме те, що й очікували знайти фахівці з теорії чисел, незалежно від того, якими великими є числа — не тому, що ми вважаємо, що існує якась глибинна дивовижна структура, прихована у простих числах, а *якраз тому, що ми так не вважаємо*. Ми очікуємо, що прості числа розкидані навмання, як сміття. Якби гіпотеза про прості числа-близнюки була хибною, *оце* було б диво — воно справді вимагало б того, що якась досі не відома сила, відтягує прості числа одне від одного.

Не будемо тут забагато говорити, але чимало знаменитих гіпотез і проблем у теорії чисел використовують цей підхід. Проблема Ґольдбаха — що всі парні числа, більші за 2, можна представити як суму двох простих чисел, — ще одна з таких, які мають бути істинними, якщо прості числа поводяться, як випадкові. Так само і гіпотеза, яка стала теоремою, що послідовності простих чисел містять у собі арифметичні прогресії будь-якої довжини, доведення якої Беном Ґріном і Террі Тао 2004 року допомогло останньому отримати Філдсівську премію.

Найзнаменитішою є теорема, сформульована 1637 року П'єром Ферма, яка стверджує, що рівняння

$$A^n + B^n = C^n$$

не має розв'язків, якщо A, B, C та n — додатні цілі числа, а n більше від 2. (Коли n *дорівнює* 2, розв'язків дуже багато, наприклад $3^2 + 4^2 = 5^2$).

Усі були цілковито переконані, що теорема Ферма істинна, так само, як зараз ми віримо у гіпотезу про прості числа-близнюки; але ніхто не знав, як її довести*, доки математик з Принстонського університету Ендрю Вайлз не зробив цього 1990 року. Ми вірили в це, тому що n-ні степені цілих чисел трапляються дуже рідко, а ймовірність знайти два числа, сума яких дає третє у цьому степені у *випадковому* наборі чисел, які самі надзвичайно рідкісні, практично нульова. Крім того, більшість людей вважає, що не має розв'язків і *узагальнене рівняння Ферма*:

$$A^p + B^q = C^r$$

* Ферма занотував на полях книжки, що має доведення, але воно завелике для полів; сьогодні ніхто в це не вірить.

Для достатньо великих степенів p, q і r. Банкір з Далласа Ендрю Біл дасть вам мільйон доларів, якщо ви зможете довести, що це рівняння не має розв'язків, якщо степені p, q і r більші за 3, а A, B і C не мають спільних простих множників*. Я цілковито переконаний в істинності цього твердження, тому що воно правильне, якщо досконалі степені трапляються рідко; однак, на мою думку, щоб це довести, ми маємо зрозуміти щось справді нове про числа. Кілька років я з групою колег присвятив доведенню того, що узагальнене рівняння Ферма не має розв'язків при $p = 4$, $q = 2$, і r, більшому за 4. Тільки для цього конкретного випадку ми мусили розробити нові методи, і вони, ясна річ, не є достатніми для того, щоб розв'язати всю задачу на мільйон доларів.

Незважаючи на позірну простоту формулювання гіпотези про обмежені проміжки, доведення Чжана вимагає застосування деяких найскладніших теорем сучасної математики**. Спираючись на досягнення численних попередників, Чжан зміг довести, що прості числа поводяться, як випадкові у першому сенсі, який ми згадували вище, розглядаючи остачі від ділення на цілі числа. Далі*** Чжану вдалося показати, що прості числа виглядають, як випадкові у цілковито іншому сенсі, пов'язаному з розмірами проміжків між ними. Ну, випадкове є випадковим!

Успіх Чжана, поряд з пов'язаними працями інших провідних математиків сучасності, як-от Бена Ґріна і Террі Тао, відкривають перспективу, навіть більш захопливу, ніж будь-який окремий результат щодо простих чисел: що ми, можливо, зрештою просуваємося вперед у розвитку повнішої теорії випадковості. Скажімо, способу точного визначення того, що ми маємо на увазі, коли говоримо, що числа поводяться так, начебто вони випадково розсіяні без жодної структури, незважаючи на те, що вони постають у результаті цілковито детермінованих процесів. Який чудовий парадокс: математичні ідеї, що допомагають нам відкривати останні таємниці простих чисел, можливо, допоможуть нам і в розумінні структури безструктурності.

---

* Ця умова може здатися трохи несподіваною, але, як виявляється, існує простий спосіб знаходження численних «нецікавих» розв'язків, якщо A, B і C мають спільні множники.

** У першу чергу результати П'єра Деліня щодо зв'язку середніх значень числових функцій з геометрією просторів високої розмірності.

*** Ідучи шляхом, прокладеним Ґолдстоном, Пінтцем і Їлдиримом, — останніми, кому вдалося піти вперед у дослідженні проміжків між простими числами.

Розділ 9

Міжнародний журнал гадання по нутрощах

Ось притча, яку мені розповів статистик Косма Шалізі[118].

Уявіть, що ви — гаруспік; тобто ваша професія — передбачати майбутнє, приносячи в жертву овець, а потім вивчаючи їхні нутрощі, особливо печінку. Звичайно, ви не вважаєте свої пророцтва надійними виключно тому, що точно виконуєте заповідане божествами етрусків. Це було б смішно. Вам потрібні докази. І тому ви з вашими колегами подаєте всі свої результати до рецензованого «Міжнародного журналу гадання по нутрощах», який суворо вимагає проходження перевірки на статистичну значущість усіх пророцтв, що в ньому публікуються.

Гадання по нутрощах, особливо ж строге, доказове гадання по нутрощах, це вам не казна-що! По-перше, ви постійно брудні, в крові і жовчі. По-друге, багато експериментів виявляються невдалими. Ви намагаєтеся за допомогою овечих кишок прогнозувати ціну акцій «Епл» — а воно не виходить; намагаєтеся передбачити, як іспаномовні виборці голосуватимуть за Демократичну партію, — не виходить; намагаєтеся оцінити перспективи світового виробництва нафти — не виходить знову. Боги дуже вередливі, і не завжди достеменно ясно, яка конфігурація тельбухів з якими саме чарівними примовами надійно покаже майбутнє. Іноді різні ворожбити проводять один експеримент, і в одних виходить, а в інших ні — і хтозна чому. Сумно. Часом так сумно, що хоч кидай усе та йди в юристи.

Але все можна стерпіти за ті моменти відкриття, коли все виходить, і розумієш, що рельєф і випини печінки справді передбачають тяжкість сезонного грипу наступного року, і, з німою вдячністю богам, публікуєш статтю.

Напевно, таких вдалих дослідів буває один на двадцять.

Взагалі-то, я так і думав. Бо я, на відміну від вас, не вірю у ворожіння по нутрощах. Я думаю, що овечі кишки нічого не знають про епідемію грипу, і, коли їхні передбачення виявляються правильними, це стається суто випадково. Іншими словами, в усьому, що стосується ворожіння по тельбухах, я стою за нульову гіпотезу. Тож у моєму світі є дуже малоймовірним, щоб будь-яке окреме ворожіння по нутрощах справджувалося.

Наскільки малоймовірним? Стандартний поріг статистичної значущості, який через те також є і бар'єром для публікації в «МЖГН», *p*-значення, за традицією, становить 0,05 або 1 на 20. Згадаймо визначення *p*-значення: воно чітко встановлює, що *якщо* нульова істинна гіпотеза для деякого конкретного експерименту, то шанси на те, що цей експеримент, попри це, дасть статистично значущий результат, становлять тільки 1 на 20. Якщо нульова гіпотеза істинна завжди — тобто якщо ворожіння по нутрощах є чистісіньким обманом, — тоді результати тільки одного з двадцяти експериментів можна буде опублікувати.

Однак ворожбитів — сотні, а розчленованих овець — тисячі, і навіть одне з двадцяти ворожінь дає більш ніж досить матеріалу для наповнення кожного номера новими результатами, демонструючи ефективність методів і мудрість богів. Алгоритм, який працює в одному випадку і публікується, зазвичай не працює, коли його намагається застосувати інший ворожбит; але експерименти без статистично значущих результатів не публікуються, тож ніхто й ніколи не дізнається про невдале відтворення. Та навіть якщо починається поголос, завжди є невеликі відмінності, на які експерти вкажуть як на пояснення невдачі повторного експерименту; зрештою, ми *знаємо*, що алгоритм працює, тому що ми його перевіряли, і він дав статистично значущий результат!

Сучасна медицина і соціологія не ворожіння по нутрощах. Але дедалі чутніший барабанний круг науковців-дисидентів в останні роки вибиває незручну думку: ймовірно, в науці є набагато більше гадання по нутрощах, ніж нам би хотілося визнавати.

Найгучніше б'є у свій барабан Джон Йоаннідіс[119], колишній грецький вундеркінд-математик, а нині дослідник у галузі біомедицини, стаття якого «Чому більшість опублікованих наукових результатів — обман» (2005) спричинилася до потужної хвилі самокритики (як і другої — самозахисту) у царині медичних наук. Автори деяких статей намагаються привернути увагу заголовками, що перебільшують драматизм основного викладу, але тут не той випадок. Йоаннідіс цілком серйозно обстоює ідею, що цілі галузі медичної науки являють собою «нульові поля», на зразок ворожіння по нутрощах, у яких просто немає реальних дієвих результатів. «Можна довести, — пише він, — що більшість заявлених результатів медичних досліджень — хибні».

«Довести» — це трохи більше, ніж готовий проковтнути математик, автор цієї книжки, однак Йоаннідіс, поза сумнівом, наводить сильні аргументи на користь того, що його радикальна заява не є неправдоподібною. Історія тут така. У медичній науці більшість втручань, щодо яких проводяться дослідження, не діють, а наявність більшості досліджуваних зв'язків не підтверджується. Візьмімо перевірку зв'язку генів із захворюваннями: у геномі є багато генів, і більшість з них не призводять до розвитку раку, депресії чи ожиріння, та взагалі не викликають жодних ефектів, які можна виявити. Йоаннідіс наводить приклад генетичного впливу на шизофренію. Такий вплив майже напевно існує, — ми точно знаємо про спадковий характер захворювання. Але де це в геномі? Науковці широко закидають сіті — у нас епоха Великих Даних, як-не-як, — переглядають сотні тисяч генів (точніше: генетичних поліморфізмів) у пошуку пов'язаних із шизофренією. Йоаннідіс припускає, що клінічно значущий ефект насправді має десь десяток з них.

А решта 99 990? Вони не мають жодного стосунку до шизофренії. Але одна двадцята з них, або близько п'яти тисяч, пройдуть перевірку *p*-значення на статистичну значущість. Іншими словами, серед результатів «Боже, я знайшов ген шизофренії!», які можуть бути опубліковані, фальшивих результатів у *п'ятсот разів більше* за реальні.

І це ще при тому, що всі гени, які справді пов'язані із шизофренією, пройдуть тест! Як ми бачили на прикладах Шекспіра й баскетболістів, дуже може статися так, що реальний ефект буде відкинуто як статистично незначущий, якщо наше дослідження не матиме достатньої потужності, щоб його виявити. Якщо дослідження не достатньо потужні, гени, що справді щось роблять, можуть проходити перевірку на статистичну значущість тільки у половині випадків; але це означає, що з генів, хвороботворність яких засвідчено *p*-значенням, такими насправді є тільки *п'ять*, — проти п'яти тисяч симулянтів, які пройшли перевірку суто випадково.

Відповідні кількості можна наочно представити кружечками у квадраті:

Розмір кожного кружечка представляє кількість генів у кожній категорії. У лівій частині квадрата показано негативні результати — гени, що не пройшли перевірку на статистичну значущість, а у правій частині — гени, що перевірку пройшли. Верхні квадратики показують невелику частину генів, які справді впливають на шизофренію, тож гени у правому верхньому кутку — справжні (гени, що справляють вплив, і це засвідчено тестом), тоді як лівий верхній кут показує помилково-негативні результати (гени, що справляють вплив, про які перевірка каже, що не справляють). У нижньому рядку маємо гени, які не мають значення; справжні негативні результати показано у великому колі у нижньому лівому кутку, помилково-позитивні — у нижньому правому.

З картинки видно, що перевірка статистичної значущості не становить проблеми. Вона робить саме те, для чого призначена. Гени, які не впливають на шизофренію, дуже рідко проходять перевірку, тоді як гени, які справді становлять цікавість, проходять її у половині випадків. Але неактивні гени мають таку кількісну перевагу, що коло помилково позитивних результатів, незважаючи на те, що воно мале порівняно з істинно негативними, набагато більше за коло істинно позитивних.

Лікарю, мені боляче, коли я *p*

Далі — гірше. Недостатньо потужне дослідження буде здатним виявляти тільки великий ефект. Але іноді ви знаєте, що ефект, якщо він взагалі є, малий. Іншими словами, дослідження, яке точно вимірює ефект якогось гена, ймовірно, буде відкинуте як статистично незначуще, тоді як будь-який результат, що проходить тест $p < 0,05$, буде або помилково позитивним, або істинно позитивним, але таким, що дуже значною мірою перебільшує ефект цього гена. Низька потужність дослідження становить особливу небезпеку там, де обсяги досліджень невеликі, а розміри ефектів зазвичай помірні[120]. Недавня стаття у провідному психологічному журналі «Психологічна наука»[121] містить дані, за якими заміжні жінки з набагато більшою імовірністю підтримують республіканського кандидата у президенти Мітта Ромні у фертильний період овуляційного циклу: серед жінок, опитаних у цей піковий період, 40,4 % висловили підтримку Ромні, тоді як тільки 23,4 % заміжніх жінок, опитаних у нефертильний період, сказали, що голосуватимуть за цього кандидата*. Вибірка мала, усього 228 жінок, але різниця велика — достатньо велика для того, щоб результати пройшли перевірку *p*-значення з показником 0,03.

У тому-то й проблема — різниця *надто* велика. Чи можливо, щоб серед заміжніх жінок, які підтримують Мітта Ромні, майже *половина* переважну частину кожного місяця переходить до табору прихильниць Барака Обами? Хіба б такого не помітили?

---

* Я був розчарований, зрозумівши, що це дослідження не стало основою відео про змову, у якому б ішлося, що обамівське страхове фінансування контролю народжуваності, спрямоване на пригнічення фізіологічних мотивів жінок голосувати за республіканця у період овуляції. Тож до роботи, відеопродюсери!

Якби політичне поправішання справді наставало з початком овуляції, ефект, здається, мав би бути значно меншим. Але порівняно незначний обсяг дослідження означає, що реалістичніша оцінка потужності ефекту, парадоксальним чином, не пройде через фільтр *p*-значення. Іншими словами, можна бути цілком певним, що великий ефект, про який повідомляє дослідження, великою мірою або повністю — шум, а не сигнал.

Але шум несе у собі однакову ймовірність *відводити від* реального ефекту[122], як і вести до нього. Тож незаперечно статистично значущий, але так само непевний результат не каже нам нічого.

Науковці називають цю проблему «прокляттям переможця», і це одна з причин, чому начебто переконливі й гучно пропаговані експериментальні результати часто перетворюються на безглузде шумовиння при повторенні досліду. В одному показовому дослідженні група вчених, очолювана психологом Крістофером Шабрі*, досліджувала тринадцять однонуклеотидних поліморфізмів (ОНП)[123] у геномі, які, за результатами попередніх досліджень, мали статистично значущу кореляцію з IQ. Ми знаємо, що здатність набирати високі показники у тесті IQ мають певний зв'язок зі спадковістю, тож немає нічого дивного в тому, щоб пошукати його на генетичному рівні. Але коли група Шабрі зіставила ОНП з показниками IQ із залученням великого масиву даних, зокрема десяти тисяч осіб, що брали участь у лонгітюдному демографічному дослідженні у штаті Вісконсин, кожний окремий такий зв'язок опинився за порогом статистичної значущості; якщо такі зв'язки взагалі існують, вони майже напевно надто незначні навіть для виявлення у великому дослідженні. Нині дослідники геному вважають, що спадковість IQ, імовірно, не зосереджена у кількох «мудрованих» генах, а складається із численних характеристик різних генів, кожна з яких має свій невеликий ефект. Що означає, що великі ефекти індивідуальних поліморфізмів ви обов'язково знайдете — на тому самому рівні 1 до 20, що й ворожбити по нутрощах.

Навіть Йоаннідіс насправді не вважає, що тільки одна на тисячу опублікованих статей не містить помилок. Більшість наукових досліджень не складаються із суцільних випадкових помилок; у них перевіряються гіпотези, які науковці мають певні підстави вважати істинними, тож нижній рядок нашого квадрата має не таку кричущу перевагу над верхнім. Але криза відтворюваності досліджень — реальна. В одному дослідженні, що проводилося 2012 року каліфорнійською біотехнологічною компанією «Амґен», науков-

---

* Шабрі, напевно, найвідоміший своїм надзвичайно популярним відео на «ЮТубі», у якому демонструється дія принципу вибіркового сприйняття: глядачів просять простежити за групою студентів, які перекидають між собою баскетбольний м'яч; як правило, глядачі не помічають убраного горилою актора, який то з'являється у кадрі, то зникає.

ці спробували відтворити деякі з найвідоміших результатів у біології раку[124], усього — результати п'ятдесяти трьох досліджень. У своєму незалежному дослідженні їм вдалося відтворити лише шість.

Як могло так статися? Сталося так не тому, що генетики і вчені-медики — ідіоти. Почасти криза відтворюваності просто віддзеркалює той факт, що наука — річ тяжка і що більшість наших ідей — неправильні, навіть більшість з тих, які витримують перше коло перевірки.

Утім у науці існують прийоми і методи, які поглиблюють кризу,

і їх потрібно змінювати. По-перше, неправильним є процес публікації. Розгляньте комікс на попередній сторінці. Припустимо, ви перевірили двадцять генетичних маркерів з метою виявлення їхнього зв'язку з певним захворюванням і виявили тільки один результат, що проходить бар'єр статистичної значущості $p < 0{,}05$. Знаючись на математиці, ви розумієте, що один успішний результат з двадцяти — це саме те, чого слід очікувати, якщо ефекту не має жоден маркер, і ви кепкуєте з безглуздого заголовка, як того і хотів автор коміксу.

Тим більше для цього буде підстав, якщо ви перевіряли той самий ген, зелене мармеладне драже, двадцять разів і лише одного разу отримали статистично значущий ефект.

Але що буде, коли зелене мармеладне драже перевірятимуть двадцять разів двадцять різних груп дослідників у двадцяти різних лабораторіях? Дев'ятнадцять лабораторій статистично значущого ефекту не виявлять. Про свої результати вони не напишуть — хто публікуватиме статтю-бомбу «зелені мармеладні драже не впливають на ваше обличчя»? Науковці з двадцятої лабораторії, яким поталанило, виявляють статистично значущий ефект, тому що їм поталанило, — але *вони не знають*, що їм поталанило. Бо все, що вони можуть сказати, — це те, що їхня гіпотеза про зв'язок зелених мармеладних драже і вугрів перевірялася лише раз і підтвердилася.

Якщо ви вирішуєте, якого кольору драже їсти, тільки на підставі опублікованих статей, ви робите ту саму помилку, яку робили військові, коли рахували кульові пробоїни в літаках, що поверталися із завдань. Як довів Абрагам Вальд, якщо вам потрібен чесний погляд на те, що відбувається, ви також маєте враховувати літаки, які *не* повертаються.

Це так звана проблема картотеки — певна галузь науки має надзвичайно спотворений погляд на докази якоїсь гіпотези, коли обмежувальним чинником публікації виступає статична значущість. Але ми вже дали цій проблемі іншу назву. Це — балтиморський брокер. Щасливий науковець, який схвильовано готує прес-реліз про дерматологічні кореляти харчового барвника № 16 — це той самий наївний інвестор, що переказує усе нажите тяжкою працею брокерові-шахраю. Інвестор, як і науковець, бачить лише один експеримент, який випадково виявляється вдалим, і не бачить набагато більшої групи таких експериментів, результати яких негативні.

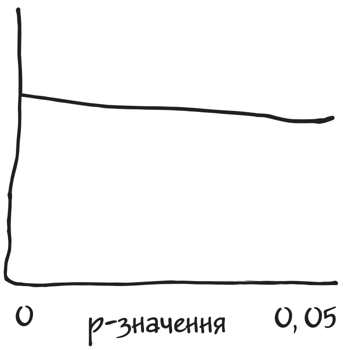
Проте одна велика відмінність. У науці немає підступного шахрая і невинної жертви. Коли наукова спільнота ховає до шухляд результати своїх невдалих експериментів, вона заразом грає обидві ролі. *Науковці ошукують самі себе*.

І все це в тому разі, якщо наші науковці діють чесно. Але так воно не завжди. Пам'ятаєте проблему простору для маневру, яка спокусила шукачів біблійних кодів? Науковці зазнають потужного впливу принципу «публікуйся або загинь», і вони теж вразливі до тієї самої спокуси. Якщо в результаті експерименту ви отримуєте *p*-значення 0,06, прийнято, щоб ви визнали такий результат статистично незначущим. Але щоб поховати в картотеці роки роботи, потрібна мужність. Зрештою, числа в оцьому експерименті, вони ж виглядають, ну, якось так трішки дикувато? Показники сильно відхиляються. То, може, оцей рядок у таблиці прибрати? Вік враховували? Погоду враховували? А вік і погоду враховували? Дайте собі право трішки коригувати статистичні перевірки результатів експериментів, і 0,06 часто ставатиме 0,04. Професор Пенсильванського університету Урі Сімонсон, який очолює дослідження відтворюваності експериментів, називає такі прийоми «*p*-хакінгом»[125]. *P*-значення зазвичай «хакається» не так грубо, як я щойно описав, і рідко коли буває зловмисним. *P*-хакери щиро вірять у свої гіпотези, як вірили і шукачі кодів у Біблії. А коли у щось справді віриш, легко придумати, як зробити, щоб саме той варіант експерименту, який дає придатне для публікації *p*-значення, проводився першим.

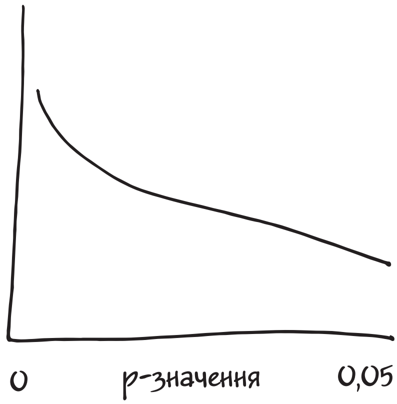
Але всі знають, що це неправильно. Коли науковці думають, що їх ніхто не бачить, вони називають цей прийом «мордувати дані, доки не зізнаються». І достовірність результатів приблизно така, яку можна очікувати від зізнань, отриманих із застосуванням тортур.

Оцінити масштаби проблеми *p*-хакінгу не так вже й легко — неможливо поглянути на статті, сховані у шухлядах або просто ненаписані, — точно так само, як неможливо поглянути на збиті літаки, щоб визначити місця влучень. Однак можна, як це зробив Абрагам Вальд, зробити певні висновки, що стосуються даних, які неможливо виміряти безпосередньо.

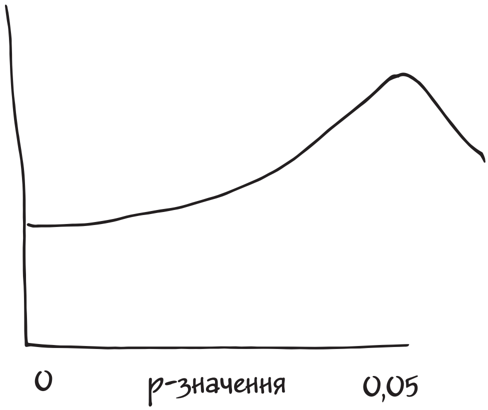
Подумаймо ще раз про «Міжнародний журнал гадання по нутрощах». Щоб б ви побачили, якби проглядали кожну статтю, коли-небудь там опубліковану, і записували *p*-значення? Пам’ятаймо, у цьому випадку нульова гіпотеза завжди істинна, бо ворожіння не працює; тож 5 % експериментів матиме *p*-значення 0,05 або менше; 4 % — 0,04 або менше; 3 % — 0,03 або менше і так далі. Тобто можна сказати, що кількість експериментів із *p*-значенням між 0,04 і 0,05 має бути приблизно такою самою, як кількість із *p*-значенням між 0,03 і 0,04, між 0,02 і 0,03 і так далі. Якщо показати *p*-значення з усіх статей, які ви побачили, на графіку, він мав би бути плоским, десь таким:



А якщо подивитися на реальний журнал? Сподіваємося, переважна частина досліджуваних явищ справді мають місце, що робить імовірнішим отримання добрих (тобто низьких) *p*-значень. Тож графік *p*-значень має спрямовуватися донизу:



Усе так, за винятком того, що в реальному житті не зовсім так. У різних сферах науки — від політології й економіки до психології і соціології[126] — статистичні детективи виявляють чітку спрямованість графіків догори біля порогового значення 0,05:



Кривизна на графіку — це форма *p*-хакінгу. Крива показує, що велику частину результатів, що виходять за межу публікації 0,05, умовляють, задобрюють, підправляють або ж просто мордують, доки зрештою вони не опиняються по вдалий бік лінії. Це добре для науковців, яким потрібні публікації, але погано для науки.

Що, якщо автор відмовляється катувати дані або тортури не приносять бажаного результату, і *p*-значення застрягає трішечки вище від вирішальної позначки 0,05?

Виходи є. Науковці в'яжуть тугі словесні вузли, намагаючись опублікувати результат, який не дотягує до статистичної значущості: кажуть, що результат «майже статистично значущий», або «схиляється до статичної значущості», або «практично значущий», або «на межі значущості», або навіть так болісно-напружено: результат «балансує на межі значущості»*. Легко кепкувати зі стражденних дослідників, які вдаються до таких виразів, але ми повинні ненавидіти гру, а не гравців — не *вони* винні в тому, що публікації залежать від цієї однозначної категоричної умови. Значення 0,05 — як питання життя і смерті — це фундаментальна категоріальна помилка: неперервна змінна (скільки у нас доказів того, що ліки діють, ген передбачає IQ, жінки фертильного віку підтримують республіканців?) заміняється бінарною (істинно чи хибно, так чи ні?). Науковці *повинні* мати можливість публікувати статистично незначущі дані.

За певних умов це навіть може бути обов'язковим. 2010 року своїм рішенням Верховний Суд США одностайно постановив[127], що компанія «Матрикс», виробник протизастудного препарату «Зікам», мусила повідомити, що у деяких пацієнтів, які приймали препарат, розвивалася аносмія, втрата нюху. В ухвалі суду, складеній Сонею Сотомайор, ішлося: незважаючи на те, що дані про аносмію не пройшли тесту на статистичну значущість, вони є частиною «загального цілого», і доступність цієї інформації компанія мала забезпечити.

Результат зі слабким *p*-значенням може бути слабким доказом, але мало — краще, ніж нічого; результат із сильним *p*-значенням може забезпечувати кращі докази, однак, як ми бачили, це далеко не рівнозначно підтвердженню заявленого ефекту.

Зрештою, у значенні 0,05 нічого особливого немає. Воно абсолютно довільне — обрана Фішером умовність. Є загальноприйняте значення; єдиний поріг, з яким усі погоджуються, гарантує, що ми знаємо, про що йдеться, коли вживається слово «значущий». Я колись натрапив на статтю Роберта Ректора та Кірка Джонсона[128] з консервативного Фонду «Спадщина». Автори скаржаться, що група науковців-конкурентів необґрунтовано заявила, що обіцянка утримання від сексу не впливає на показники захворювань, які передаються статевим шляхом, серед підлітків. Насправді дослідження свідчить, що молоді люди, які обіцяють утримуватися від сексу до шлюбу, *таки мали*

* Усі ці приклади запозичені з гігантського зібрання у блозі фахівця з психології здоров'я Метью Генкінса, поціновувача незначущих результатів.

дещо нижчі показники венеричних захворювань, ніж решта вибірки, однак ця різниця не була статистично значущою. «Спадщинці» мали рацію; свідчення на користь утримання були слабкими, але вони були.

З іншого боку, Ректор і Джонсон в іншій статті — про статистично незначущий зв'язок між расою і бідністю, який вони прагнуть заперечити, — пишуть: «Якщо змінна не є статистично значущою[129], це означає, що змінна не має статистично розпізнаваної відмінності між отриманим значенням і нулем, тож ефекту немає». Стандарти однакові для всіх! Цінність згоди в тому, що вона забезпечує певний рівень дисципліни серед дослідників, оберігаючи їх від спокуси вирішувати на підставі власних уподобань, які результати враховувати, а які — ні.

Однак певну конвенційну межу, якщо її достатньо довго дотримуватися, легко можна помилково прийняти за реальну річ. Уявімо, що ми таким чином говоримо про економіку! Економісти мають формальне визначення рецесії, яке залежить від певного довільного порогового значення — так само, як і статистична значущість. Ніхто не каже: «Мене не турбує рівень безробіття, обсяги будівництва житла, загальний рівень заборгованості за студентськими позиками чи дефіцит держбюджету; якщо це не рецесія, ми про це не говоримо». Сказати так було б дурницею. Критики — щороку їх стає дедалі більше, а їхні голоси звучать дедалі гучніше — стверджують, що наукові прийоми і методи значною мірою є саме такими дурницями.

Детектив, а не суддя

Зрозуміло, що неправильно використовувати «$p<0{,}05$» як синонім «істинного», а «$p>0{,}05$» — «хибного». Доведення від малоймовірного, хоч яким інтуїтивно привабливим воно є, просто не працює як принцип встановлення наукової істини на основі певних даних.

Яка ж альтернатива? Якщо ви коли-небудь проводили експеримент, то знаєте, що наукова істина не сходить з хмар у супроводі урочистої музики. Дані — річ неохайна й безладна, а робити висновки тяжко.

Одна з простих і популярних стратегій полягає в тому, щоб крім *p*-значень повідомляти також і *довірчі інтервали*. Це вимагає певного розширення «концептуального охоплення»: за такого підходу розглядається не тільки нульова гіпотеза, а й ціла низка альтернатив. Уявіть, що ви маєте інтернет-магазин, де продаєте філірувальні ножиці ручної роботи. Людина ви сучасна (за винятком випадків, коли власноруч робите філірувальні ножиці), тож влаштовуєте спліт-тест: половина відвідувачів вашого сайту бачить його поточну версію (A), а друга половина — версію модернізовану (B), на якій анімовані ножиці трохи співають і танцюють на кнопці «Купити зараз». І виявляється, що на оновленій версії сайту (B) ножиць продається на 10 % більше. Чудово! Тепер, якщо ви людина грамотна, то можете зацікавитися питанням: оце зростання продажу, чи воно не просто випадкове? Тож ви обчислюєте *p*-значення, і воно показує, що ймовірність отримання такого доброго результату, якби модернізація сайту не діяла (тобто у разі істинності нульової гіпотези), становить лише 0,03*.

Чи варто на цьому зупинятися? Якщо я заплачу хлопцеві з коледжу, і у мене на кожній сторінці танцюватимуть ножичні вироби, то мені потрібно не просто дізнатися, чи це працює, а наскільки добре воно працює. Чи відповідає спостережений ефект гіпотезі, що редизайн, у тривалій перспективі, насправді збільшує продаж тільки на 5 %? Перевіряючи цю гіпотезу, ви виявляєте, що зростання продажу на 10 % набагато ймовірніше, скажімо 0,2. Іншими словами, гіпотеза, що редизайн на 5 % підвищить продаж, *не виключається* доведенням від малоймовірного. З іншого боку, ви можете оптимістично поцікавитися: якщо ж вам *не поталанило*, а редизайн насправді робить ваші ножиці привабливішими на 25 %? Ви обчислюєте інше *p*-значення, і отримуєте 0,01 — достатньо неймовірно для того, щоб цю гіпотезу відкинути.

Довірчий інтервал — це діапазон гіпотез, які доведення від малоймовірного не виключає і які відповідають результатам, що реально спостерігаються. У нашому випадку довірчий інтервал може становити від 3 % до 17 %. Той факт, що нуль, нульова гіпотеза, *не включається* до довірчого інтервалу — це просто інший спосіб сказати, що результати є статистично значущими у сенсі, про який ішлося вище у цьому розділі.

Проте довірчий інтервал каже нам набагато більше. Інтервал [+3 %, +17 %] засвідчує правильність вашої впевненості в тому, що ефект позитивний, але не надто великий. З іншого боку, інтервал [+9 %, +11 %] набагато сильніше вказує на те, що ефект не тільки позитивний, а й значний.

Довірчий інтервал також є інформативним у випадках, у яких статистично значущі результати не отримуються — тобто там, де інтервал включає нуль. Якщо довірчий інтервал становить [−0,5 %, 0,5 %], то причина неотримання статистично значущого результату в тому, що, дуже ймовірно, втручання не має жодного ефекту. Якщо довірчий інтервал становить [−20 %, 20 %], то причина неотримання статистичної значущості в тому, що ви не знаєте, чи має ваше втручання якийсь ефект, а якщо має, то в якому напрямку цей ефект працює. Два зазначені результати з погляду статистичної значущості виглядають однаково, але вони цілковито відмінні з погляду того, що робити далі.

---

* Усі числа у цьому прикладі — вигадані, почасти тому, що реальне обчислення довірчих інтервалів є складнішим за те, що я можу продемонструвати в короткому розділі.

Розробку концепції довірчих інтервалів пов'язують зі ще одним гігантом раннього етапу розвитку статистики, Єжи Нейманом. Поляк за національністю, Нейман, як і Абрагам Вальд, починав як математик-теоретик у Східній Європі, а згодом звернувся до нової на той час математичної статистики і переїхав на Захід. У кінці 1920-х років Нейман почав співпрацювати з Еґоном Пірсоном, який успадкував від свого батька Карла як професію науковця, так і запеклу наукову ворожнечу з Р. Е. Фішером. Фішер був чоловік прикрий, завжди готовий до сварки; за словами його доньки, «він виріс нечутливим до звичайних людей, своїх ближніх»[130]. В особі Неймана і Пірсона він отримав опонентів, достатньо затятих для того, щоб конфлікт розтягнувся на кілька десятиліть.

Відмінності у їхніх наукових позиціях, напевно, знайшли своє найяскравіше відбиття у підході Неймана і Пірсона до проблеми висновування*. Як виявити істину на основі спостережуваних даних? Їхня несподівана відповідь полягала в тому, щоб не ставити запитання. За Нейманом і Пірсоном, мета статистики не в тому, щоб сказати нам, у що вірити, а в тому, щоб сказати, що нам *робити*. Статистика — це прийняття рішень, а не відповіді на запитання. Тест на статистичну значущість — не більше і не менше ніж правило, яке каже відповідальним за це людям, схвалювати чи не схвалювати ліки, впроваджувати економічну реформу чи переробляти веб-сайт.

Спершу здається божевіллям заперечувати, що мета науки полягає у знаходженні істини, проте філософія Неймана—Пірсона не надто далеко відходить від того, як ми мислимо в інших сферах. Яку мету має судовий розгляд кримінальної справи? Можна було б наївно сказати, що вона в тому, щоб з'ясувати, чи вчиняв насправді відповідач злочин, у якому його звинувачують. Але це очевидно не так. Існують норми доказового права, що забороняють суду брати до уваги докази, отримані неналежним чином, навіть якщо ці докази можуть допомогти у точному встановленні винуватості чи невинуватості відповідача. Мета суду не істина, а правосуддя. Є правила, їх потрібно дотримуватися, і коли ми кажемо, що відповідач «винний», то маємо на увазі — якщо прагнемо висловлюватися точно, — не те, що він вчинив злочин, у якому його звинувачують, а те, що його засуджено чесно і справедливо, згідно з цими правилами. Хай якими будуть правила, деяких злочинців виправдають, і деяких невинних ув'язнять. Що менше буде перших, то, імовірніше,

* Застереження проти надмірного спрощення: і Фішер, і Нейман, і Пірсон жили і працювали довго, їхні ідеї і позиції з плином часу змінювалися; мій грубий ескіз їхніх філософських розбіжностей не враховує багатьох важливих моментів у позиціях кожного з цих учених. Зокрема, ідея, що статистика передусім займається питаннями ухвалення рішень, більше пов'язана з Нейманом, ніж із Пірсоном.

більше других. Тож ми намагаємося розробити правила так, щоб, на думку суспільства, якнайкраще упоратися з цим фундаментальним компромісом.

За Нейманом і Пірсоном, наука схожа на суд. Коли препарат не проходить перевірки на статистичну значущість, ми не кажемо: «Ми цілком упевнені, що препарат не діє», ми просто кажемо: «Дії препарату не виявлено». А потім відмовляємося від нього, — так само, як відмовилися б від звинувачення відповідача, присутність якого на місці злочину викликає обґрунтовані сумніви, незважаючи на те, що всі й кожен у залі суду вважають його незаперечно винним.

Фішер нічого цього не хотів — для нього позиція Неймана і Пірсона відгонила чистою математикою, адже вони наполягали на суворій раціональності, в жертву якій були готові принести будь-що, що нагадувало наукову практику. Більшості суддів забракло б духу відправити на шибеницю очевидно невинного, навіть коли правила у книжці цього вимагають. А більшість науковців-практиків не зацікавлені виконувати сувору послідовність інструкцій, відмовляючи собі у брудному задоволенні мати думку з приводу того, яка гіпотеза насправді істинна. 1951 року у листі до В. Е. Гіка Фішер писав:

> Мені трохи шкода[131], що ви взагалі переймаєтеся тим безпідставним пихатим підходом до перевірки значущості, який представлений у критичних інтервалах і т. ін. Неймана і Пірсона. Насправді я зі своїми учнями по всьому світу ніколи й не думали все це застосовувати. Якщо мене попросити назвати конкретну причину цього, маю сказати, що вони підходять до проблеми зовсім не з того кінця, тобто не з позиції науковця, не з позицій обґрунтованого фактами знання, з яких постійно досліджується надзвичайно мінливий контингент гіпотез і неузгоджених спостережень. Такий науковець потребує впевненої відповіді на запитання: «Чи повинен я на це зважати?». Звичайно, це запитання може і, з міркувань точності, має формулюватися як: «Чи спростовано цю конкретну гіпотезу, і якщо так, то з яким рівнем значущості, цим конкретним набором спостережуваних фактів?». Його можна так недвозначно сформулювати тільки тому, що справжній експериментатор уже має відповіді на всі запитання, на які послідовники Неймана і Пірсона намагаються (як я думаю, марно) відповісти суто математичними міркуваннями».

Але Фішер, поза сумнівом, розумів, що взяття бар'єру статистичної значущості і знаходження істини не одне й те саме. 1926 року він демонструє багатший і тонший підхід: «Науковий факт має вважатися експериментально підтвердженим[132] лише в тому разі, якщо належним чином проведений експеримент рідко не виявляє цього рівня значущості».

Не «вдалося одного разу виявити», а «рідко не виявляє». Статистично значущий результат дає підказку-ключ, вказує на перспективне місце, на якому варто зосередити дослідницькі зусилля. *Перевірка статистичної значущос-*

ті — детектив, а не суддя. Вам знайома ситуація: читаєте статтю про проривні результати — щось викликає щось, або щось іще чомусь запобігає, а в кінці завжди є банальна цитата якого-небудь поважного науковця, не причетного до дослідження, яка скоромовкою тарабанить десь таку чергову фразу: «Результати вельми цікаві, вони вказують на потребу подальших досліджень у цій царині»? І ви насправді цього навіть не читаєте, бо вважаєте обов'язковим безглуздим елементом?

Тут ось у чому річ: науковці завжди так кажуть, бо це важливо і це правда! Провокативний і ой-такий-статистично-значущий результат — не завершення дослідницького процесу, а самий лише його початок. Якщо результат має новизну й актуальність, інші науковці в інших лабораторіях мають перевірити і пере-перевірити це явище і його варіанти, намагаючись з'ясувати, чи це була одноразова випадковість, чи результат і справді відповідає фішерівській вимозі «рідко не виявляє». Науковці називають це *відтворюваністю*; якщо якийсь ефект не можна відтворити, незважаючи на численні спроби, наука, вибачаючись, дає задній хід. Процес відтворення — це імунна система науки, що кидається на нові об'єкти і вбиває чужих.

Так принаймні в ідеальному випадку. У дійсності імунна система науки трохи пригнічена. Звісно, деякі експерименти повторити тяжко. Якщо ваше дослідження присвячене вимірюванню здатності чотирирічної дитини відкладати винагороду, а потім зіставленню цих даних з життєвими результатами учасника експерименту через тридцять років, то цей дослід ось так просто не візьмеш і не повториш.

Та навіть дослідження, які *можна* повторити, часто не повторюються. Кожен журнал прагне публікувати проривні результати, але хто захоче опублікувати статтю про проведення через рік того самого експерименту з тими самими результатами? Або ще гірше: що відбувається зі статтями, що розповідають про повторення експериментів, які, однак, *не дають* статистично значущих результатів? Щоб система функціонувала, такі експерименти мають бути доступними для широкого загалу. Замість цього вони надто часто знаходять вічний спочинок у лабораторних шафах і шухлядах.

Але культура змінюється. Гучноголосі реформісти, як-от Йоаннідес і Сімонсон, які звертаються і до наукової спільноти, і до широкого загалу, актуалізували проблему небезпеки скочування у широкомасштабне ворожіння по нутрощах. 2013 року Асоціація психологічних наук оголосила про початок публікації нового типу статей — «сертифіковані звіти про відтворення досліджень». Підхід до цих статей, що мають на меті відтворення ефектів, отриманих у широко цитованих дослідженнях, докорінно відрізняється від підходу до інших публікацій: пропонований експеримент приймається до публікації *до* проведення дослідження. Якщо результати збігаються з отриманими раніше — чудово, але якщо ні — вони теж публікуються, щоб наукова спільнота мала доступ до всіх експериментальних даних. Ще один консорціум, проект «Мені Лабс», переглядає дані часто цитованих психологічних публікацій, намагаючись відтворити їх на великих багатонаціональних вибірках. У листопаді 2013 року психологічна спільнота отримала добру новину: 10 із 13 досліджень було успішно відтворено.

Зрештою, звичайно, потрібно робити висновки й підводити риски. Що все ж таки розумів Фішер під «рідко» й «рідко не виявляє»? Обираючи довільний числовий бар'єр («ефект реальний, якщо він виявляється статистично значущим у понад 90 % експериментів»), ми знову можемо наразитися на неприємності.

Хай там як, Фішер не вірив у раз і назавжди встановлені правила, які кажуть нам, що робити. Чистому математичному формалізму він не довіряв. 1956 року, наприкінці життя, він писав, що «жоден науковець не має чітко встановленого рівня значущості, на підставі якого він рік у рік і за будь-яких обставин відхиляє гіпотези; замість цього він розглядає кожен конкретний випадок, спираючись на власні дані та ідеї».

У наступному розділі ми розглянемо один зі шляхів, яким опертя на дані та ідеї можна зробити ґрунтовнішим.

Розділ 10

Чуєш, Боже? Це я, баєсівський висновок

Доба великих даних лякає багатьох людей. Страх цей почасти викликаний думкою, що алгоритми, якщо дати їм достатній обсяг даних, робитимуть висновки краще за людину. Надлюдське лякає: жахають істоти, що можуть змінювати форму, жахають істоти, що воскресають з мертвих, і істоти, здатні робити висновки краще за нас, жахають теж. Було страшно, коли статистична модель, розроблена групою маркетингового аналізу мережі супермаркетів «Тарґет»[133], на основі даних про покупки однієї з клієнток — вибачте, гостей, — дівчини-підлітка з Міннесоти, правильно виснувала, що та вагітна. Підставою для висновку стала таємнича формула, що враховувала зростання у покупках частки неароматизованого лосьйону, мінеральних добавок і ватних кульок. «Тарґет» почав слати їй купони на знижки на дитячі речі, що викликало величезне здивування батька дівчини, який, зі своїми немічними людськими здібностями, до висновків ні про що таке не здогадувався. Це жахливо — жити у світі, в якому і «Ґуґл», і «Фейсбук», і ваш телефон, та навіть «Тарґет», знають про вас більше за ваших рідних батьків.

Можливо, нам варто менше перейматися надпотужними і надточними алгоритмами, а більше — тими, що працюють погано.

По-перше, добрі алгоритми можуть погано робити висновки. Так, алгоритми, що розробляються провідними компаніями Кремнієвої долини, з кожним роком удосконалюються, а дані, що їм згодовуються, зростають в обсягах та поживності. Існує варіант майбутнього, у якому «Ґуґл» *знає* вас; накопичуючи мільйони мікроспостережень («наскільки довго він вагався перед тим, як клацнув *тут*... наскільки довго він зупиняв погляд в окулярах «Ґуґл ґласс» на *цьому*...»), центральний склад може прогнозувати ваші уподобання, бажання, дії, особливо стосовно товарів, які ви хочете придбати або до бажання придбати які вас можна схилити.

Може бути і так! А може й не бути. Існує чимало математичних задач, у яких зі збільшенням обсягу даних точність результату закономірно й передбачувано підвищується. Якщо потрібно передбачити траєкторію астероїда, потрібно виміряти його швидкість і положення, а також гравітаційний вплив інших об'єктів. Що більше вимірювань ви зробите і що точніші вони будуть, то точнішою буде прогнозована траєкторія.

Але деякі задачі більше схожі на прогнозування погоди. Це ще одна ситуація, де багато докладних даних і велика обчислювальна потужність для швидкої їх обробки справді допомагає. 1950 року одному з перших комп'ютерів «ЕНІАК» було потрібно працювати 24 години для моделювання 24 годин погоди, і це було вражаючим досягненням комп'ютерної галузі космічної доби. 2008 року ці обчислення було відтворено на мобільному телефоні «Нокія 6300»[134] — телефон витратив на них менше секунди. Прогнози зараз робляться не просто швидше; вони також далекосяжніші і точніші. 2010 року типовий прогноз на п'ять днів[135] мав точність триденного прогнозу погоди 1986 року.

Спокусливо думати, що прогнози будуть поліпшуватися дедалі більше мірою того, як зростатимуть наші можливості збирати дані; зрештою, напевно, настане день, коли ми зможемо створити модель усієї атмосфери на серверах десь під штаб-квартирою телеканалу «Везер»? Тоді, якби ви хотіли дізнатися, якою буде погода наступного місяця, можна було б просто дати моделі попрацювати трохи довше.

Але так не буде. Енергія в атмосфері змінюється і поширюється дуже швидко від майже непомітного до глобального рівня, внаслідок чого навіть мікроскопічний ефект в одному місці в один момент часу може приводити до цілковито відмінного результату вже через лічені дні. Погода, у технічному сенсі цього слова, є *хаотичною*. Саме проводячи математичне дослідження погоди, Едвард Лоренц взагалі відкрив математичне поняття хаосу. Він пише: «Один метеоролог зауважив[136], що якби теорія була правильною, одного помаху крила чайки було б достатньо для того, щоб змінити погоду назавжди. Дискусія навколо цього досі триває, але видається, що найновіші дані свідчать на користь чайок».

Для прогнозування погоди існує суворе обмеження у часі, незалежно від обсягів зібраних даних. Лоренц вважав, що воно становить близько двох тижнів[137]. Поки що об'єднані зусилля світової метеорологічної спільноти не дають нам підстав сумніватися в цьому обмеженні.

На що більше схожа поведінка людини — на траєкторію астероїда чи на погоду? Це, поза сумнівом, залежить від того, про що саме в людській поведінці ми говоримо. Принаймні в одному відношенні людську поведінку передбачити навіть тяжче, ніж погоду. Ми маємо дуже добру математичну модель погоди, яка дає нам змогу поліпшувати якість принаймні короткотермінових прогнозів при зростанні обсягів даних, хоча зрештою притаманний погоді хаос таки візьме гору. Для людської поведінки такої моделі немає і, можливо, ніколи не буде. Проблема прогнозування через це дуже і дуже ускладнюється.

2006 року сервіс відеопрокату «Нетфлікс» оголосив про конкурс із призом у мільйон доларів[138]. Потрібно було створити алгоритм рекомендацій фільмів для клієнтів, кращий за власний алгоритм компанії. Показник виграшу встановили начебто не такий вже й високий: переможцем мала бути програма, що першою рекомендуватиме фільми на 10 % краще за алгоритм «Нетфлікс».

Учасникам змагання надали величезний файл-реєстр анонімізованих рейтингів — загалом близько мільйона оцінок 17 700 фільмів, які зробили майже півмільйона передплатників сервісу. Завдання полягало в тому, щоб спрогнозуати, як користувачі оцінять фільми, яких вони *не бачили*. Є дані — дуже багато даних. І ці дані безпосередньо пов'язані з поведінкою, яку ви намагаєтеся передбачити. А проблема залишається дуже, дуже складною. Як виявилося, на подолання десятивідсоткового бар'єру знадобилося три роки, і це було зроблено лише після об'єднання кількох груп учасників конкурсу та схрещування їхніх «майже задовільних» алгоритмів у щось достатньо потужне для подолання фінішної лінії. «Нетфлікс» так ніколи і не застосував на практиці алгоритм-переможець; на момент закінчення конкурсу «Нетфлікс» змінював схему своєї діяльності: від надсилання компакт-дисків поштою компанія переходила до потокового мовлення в інтернеті, що робило погану якість рекомендацій не такою вже й великою проблемою[139]. І якщо ви коли-небудь користувалися сервісом «Нетфлікс» (або «Амазон», або «Фейсбук») чи будь-яким іншим, що має на меті рекомендувати вам товари на основі зібраних про вас даних, то знаєте, що якість рекомендацій залишається надзвичайно, сміховинно поганою. Коли до вашого профілю підключать ще більше потоків даних, рекомендації можуть стати набагато кращими. Але немає сумніву в тому, що можуть і не стати.

Як для компаній, що збирають дані, це не така вже й катастрофа. Для «Тарґет» було б чудово з абсолютною певністю знати, вагітні ви чи ні, тільки на основі записів за вашою карткою постійного покупця. Але «Тарґет» цього не знає. Та для нього було б чудово поліпшити точність своїх оцінок навіть на 10 % порівняно з тим, що є зараз. Те саме стосується й «Ґуґл». «Ґуґл» не має знати точно, який товар ви хочете купити; йому лише потрібно знати це краще за конкурентів у рекламній галузі. Як правило, бізнес працює на вузькій маржі. 10 % покращення якості передбачення вашої поведінки насправді не надто страшна для вас річ, але для них це можуть бути великі гроші. Я запитав Джима Беннетта, віце-президента «Нетфлікс», під час проведення конкурсу, чому вони дають такий великий приз. Він мені сказав, що потрібно питати, чому приз такий малий. 10 % поліпшення якості рекомендацій, попри свою позірну неважливість, окупило б той мільйон за менше часу, ніж потрібно для виготовлення чергового продовження «Форсажу».

Чи знає «Фейсбук», що ви терорист?

Тож якщо корпорації, що мають доступ до великих даних, досі доволі обмежені в тому, що вони «знають» про вас, про що турбуватися?

Спробуймо потурбуватися про таке. Уявімо, що команда з «Фейсбуку» вирішила розробити метод визначення того, хто з користувачів, імовірно, залучений до тероризму проти Сполучених Штатів. З точки зору математики це не надто відрізняється від задачі прогнозування того, чи сподобаються певному користувачу «Нетфлікс» «Тринадцять друзів Оушена». «Фейсбук», як правило, знає реальні імена й місцезнаходження своїх користувачів, тому він може використовувати ці дані для створення списку профілів, що належать користувачам, уже засудженим за тероризм чи підтримку терористичних угруповань. Тут починається математика. Терористи частіше чи рідше за звичайних користувачів оновлюють свої статуси? Чи цей показник у них приблизно той самий, що й в усіх інших? Чи є якісь слова, що частіше за інші з'являються у їхніх постах? Чи є якісь музичні групи, спортивні команди чи товари, які їм особливо подобаються чи не подобаються? Звівши всі ці дані разом, ви можете приписати кожному користувачу певний показник*, який відображає *імовірність* того, що цей користувач має зв'язки чи *матиме* зв'язки з терористичними угрупованнями. Це більш-менш те саме, що робить «Тарґет», коли зводить дані про придбання лосьйонів і вітамінів з метою оцінки ймовірності вагітності.

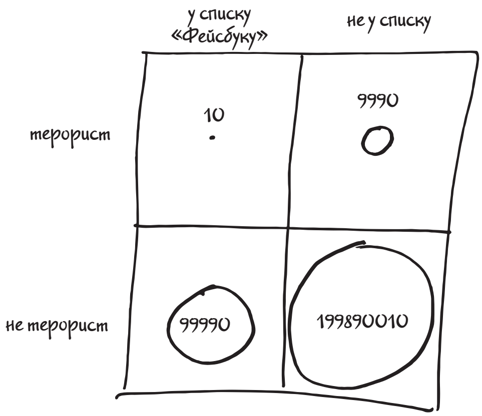
Є одна важлива відмінність: вагітність — річ дуже звичайна, а тероризм — надзвичайно рідкісна. Майже в усіх випадках оцінювана ймовірність того, що конкретний користувач — терорист, буде дуже низькою. Тож результатом проекту не буде центр профілактики злочинів у стилі «Особливої думки», у якому всевидющий алгоритм «Фейсбук» наперед знає, що ви вчините злочин. Уявіть дещо набагато скромніше: скажімо, список із сотні тисяч користувачів, про яких «Фейсбук» може сказати з деякою мірою певності: «Люди, що належать до цієї групи, мають удвічі більшу ймовірність за типових користувачів "Фейсбуку" бути терористами чи підтримувати терористів».

Що б ви зробили, якби дізналися, що хлопець з вашого району фігурує в цьому списку? Подзвонили б до ФБР?

Перед тим як ви це зробите, намалюємо ще один квадрат.

У квадраті близько 200 мільйонів користувачів «Фейсбуку» у США. Лінія між верхньою і нижньою половинами відділяє майбутніх терористів (угорі) від непричетних (унизу). Будь-які терористичні осередки у США, поза сум-

* В основі такого оцінювання лежить метод, що має назву *логістичної регресії* (якщо ви зацікавлені у пошуку подальшої інформації).



нівом, дуже маленькі — скажімо — з усією можливою підозрілістю, — що є десять тисяч осіб, які справді повинні бути предметом уваги ФБР. Це один на двадцять тисяч усієї користувацької бази.

Поділ між лівою і правою частинами робить «Фейсбук»; зліва — сто тисяч осіб, які, за висновками «Фейсбуку», мають вищі шанси бути залученими до терористичної діяльності. Повіримо «Фейсбуку» на слово: його алгоритм справді такий добрий, що люди, внесені до списку, мають удвічі більші шанси виявитися терористами, ніж пересічні користувачі. Тож серед тих, хто належить до цієї групи, один з десяти тисяч, або разом десять осіб, виявляться терористами, тоді як решта 99 990 — ні.

Якщо 10 з 10 000 майбутніх терористів — у верхньому лівому куті, то це залишає 9990 на верхній правий. Міркування таке саме: у користувацькій базі «Фейсбуку» є 199 990 000 добропорядних громадян, 9990 було помічено алгоритмом і потрапило до лівого верхнього кута; це залишає у нижньому правому 199 890 010 осіб. Якщо додати всі чотири частини квадрата, отримаємо 200 000 000 — тобто всіх.

Десь у цих чотирьох менших квадратах є і ваш сусід.

Але де саме? Ви знаєте, що він у лівій частині, тому що «Фейсбук» визнав його підозрілою особою.

Тут потрібно відзначити, що майже ніхто з лівої половини квадрата не є терористом. Насправді з імовірністю 99,9 % ваш сусід не терорист.

У певному сенсі, це повторення історії з контролем народжуваності. Перебування у списку «Фейсбуку» подвоює імовірність бути терористом, що виглядає загрозливо. Але ці шанси від початку дуже низькі, тож якщо їх подвоїти, вони низькими і *залишаться*.

Але є спосіб подивитися на це ще по-іншому, і цей спосіб робить ще яснішим, наскільки оманливим і підступним може бути міркування про невизначене. Поставте собі запитання: якщо людина насправді не майбутній терорист, які шанси є на те, що вона — несправедливо — опиниться у списку «Фейсбуку»?

За нашим квадратом: якщо ви у нижній половині, то яка ймовірність того, що ви будете у ній зліва?

Порахувати це доволі легко; у нижній половині квадрата 199 990 000 осіб, і з них лише 99 990 знаходяться у лівій частині. Тож імовірність того, що невинну особу буде включено алгоритмом «Фейсбуку» до списку потенційних терористів, становить

99 990/199 990 000

тобто близько 0,05 %.

Правильно: невинна особа має тільки 1 шанс з 2000 бути помилково зарахованою алгоритмом до терористів.

А як *тепер* ви ставитеся до того вашого сусіда?

Чіткі вказівки щодо цього дає нам логіка *p*-значень. Нульова гіпотеза полягає в тому, що ваш сусід не терорист. За цією гіпотезою — тобто виходячи з його невинуватості, — шанси на те, що він опиниться у «червоному списку» «Фейсбуку» — усього лише 0,05 %, набагато нижчі за поріг статистичної значущості 1/20. Іншими словами, за правилами, прийнятими у більшості сфер сучасної науки, ви матимете всі підстави визнати нульову гіпотезу хибною й оголосити, що ваш сусід терорист.

Проблема лише в тому, що з імовірністю 99,99 % він не терорист.

З одного боку, немає майже жодного шансу на те, що алгоритм позначить як терориста невинну особу. Водночас особи, на яких вказує алгоритм, майже всі невинні. Виглядає як парадокс, але це не парадокс. Просто так воно є. І якщо ви зробите глибокий вдих і уважно подивитеся на квадрат, ви не помилитеся.

Суть ось у чому. Насправді є два запитання, які ви можете поставити. Можливо, вони здаються однаковими, але вони не однакові.

Запитання 1: Яка ймовірність того, що якась особа потрапить до списку «Фейсбуку», не будучи терористом?

Запитання 2: Яка ймовірність того, що особа, занесена до списку «Фейсбуку», не є терористом?

Ці питання різні вже хоча б тому, що мають різні відповіді. Дуже різні відповіді. Ми вже бачили, що відповідь на перше запитання — близько 1 на 2000, тоді як на друге — 99,99 %. І насправді вам потрібна відповідь на друге запитання.

Числа, про які йдеться у цих запитаннях, називаються *умовними ймовірностями*; «імовірність, що *X*, при тому, що *Y*, становить...». А в нашому випадку ми намагаємося дати раду тому, що ймовірність *X* за умови *Y* не така сама, як імовірність *Y* за умови *X*.

Якщо щось тут здається знайомим, то так і має бути; це — та сама проблема, з якою ми стикалися, коли розглядали доведення від малоймовірного. *P*-значення — це відповідь на запитання:

«Імовірність того, що спостережуваний результат експерименту має місце за умови істинності нульової гіпотези».

Але нам потрібна інша умовна ймовірність:

«Імовірність того, що нульова гіпотеза істинна за умови того, що ми спостерігаємо певний результат експерименту».

Небезпека виникає саме в той момент, коли ми сплутуємо другу величину з першою. І така плутанина є скрізь, не тільки в науці. Коли окружний прокурор, нахиляючись до присяжних, виголошує: «Існує тільки один шанс на п'ять мільйонів, я повторюю, ОДИН ШАНС НА П'ЯТЬ МІЛЛЛЛЛЬЙОНІВ збігу зразка ДНК з місця злочину з ДНК НЕВИННОЇ ОСОБИ», він відповідає на запитання 1: Яка ймовірність того, що невинну особу визнають винною? Але обов'язок присяжних — відповісти на запитання 2: Яка ймовірність того, що цей відповідач, який виглядає винним, винним не є? І тут жодний аналіз ДНК не допоможе*.

Із прикладу з «Фейсбуком» і терористами стає зрозуміло, чому варто перейматися поганими алгоритмами так само, як добрими. Можливо, поганими варто перейматися більше. Огидно і неправильно, коли «Тарґет» знає, що ви вагітні. Але ще огидніше і гірше, коли ви не терорист, а «Фейсбук» вважає інакше.

Цілком можливо, що ви вважаєте, що «Фейсбук» ніколи не складатиме списку потенційних терористів (втікачів від податків чи педофілів), або, якщо і складатиме, то не розголошуватиме його. Навіщо це «Фейсбуку»? Як на цьому можна заробити? Можливо, воно й так. Але АНБ теж збирає в Америці дані про людей — і тих, що є у «Фейсбуку», і про решту. Якщо тільки ви не вважаєте, що вони записують дані ваших дзвінків, щоб найкраще порадити компаніям мобільного зв'язку, де їм ставити нові вежі, відбувається щось схоже

---

* У такому контексті плутанина з питаннями 1 і 2 зазвичай називається *помилка прокурора*. Книжка Коралі Колмец і Лейли Шнепс «Математика в суді» докладно розповідає про кілька реальних прикладів таких помилок.

на складання «червоного списку». Великі дані — не магія, і вони не скажуть «компетентним органам», хто терорист, а хто ні. Але не потрібно жодних чарів, щоб створити довгий список людей «підвищеного ризику», «особливої уваги» чи «зацікавлення». Більшість людей із цих списків не матимуть з тероризмом нічого спільного. Наскільки ви впевнені в тому, що ви не один з них?

Радіотелепатія і правило Баєса

Звідки береться очевидний парадокс списку підозрюваних у тероризмі? Чому механізм *p*-значень, здавалося б, такий надійний, так погано працює в цьому контексті? Ось ключовий момент. Метод *p*-значень бере до уваги, яку частку людей відмічає «Фейсбук» (близько 1 на 2 000), але жодним чином не зважає на частку людей, які є терористами. Коли ви намагаєтеся вирішити, чи є ваш сусід таємним терористом, ви наперед маєте критично важливу інформацію: більшість людей не терористи! Ви ігноруєте цей факт, і наражаєтеся на небезпеку. Саме так, як казав Р. Е. Фішер: ви маєте оцінювати кожну гіпотезу, спираючись на те, що ви вже знаєте.

Але як це зробити?

Питання веде нас до історії радіотелепатії.

1937 року телепатія була надзвичайно модною темою[140]. Книжка психолога Дж. Б. Райна «Нові рубежі розуму», яка розповідала про дивовижні результати його екстрасенсорних експериментів в університеті Дюка — у спокійному тоні і з наведенням числових даних, стала «книжкою місяця», а телепатія й екстрасенси вийшли на чільне місце серед тем для світських бесід. Популярний письменник, автор роману «Джунглі» Ептон Сінклер 1930 року випустив цілу книжку «Мислене радіо», присвячену власним дослідам з психічної комунікації, які він проводив зі своєю дружиною Мері; тема вважалась такою серйозною, що Альберт Ейнштейн написав післямову до німецького видання книжки, у якій лише кроку не дійшов до повного схвалення телепатії; за його словами, робота Сінклера «заслуговує на якнайсерйозніший розгляд» науковців-психологів.

Ясна річ, телепатія стала однією з найгарячіших тем для ЗМІ. 5 вересня 1937 року радіокорпорація «Зеніт» у співпраці з Райном започаткувала амбітний експеримент, можливий лише з використанням новітніх комунікаційних технологій корпорації. Ведучий п’ять разів розкручував колесо рулетки, а група самозваних телепатів спостерігала. Щоразу кулька зупинялася або на чорному, або на червоному, і телепати з усіх своїх паранормальних сил зосереджувалися на відповідному кольорі, передаючи по своїх каналах повідомлення на всю країну. Радіослухачів запрошували, користуючись власними телепатичними здібностями, приймати цю мислену передачу і вже поштою відправляти на радіостанцію прийняту послідовність з п'яти кольорів. На перший заклик відгукнулося понад сорок тисяч слухачів, і навіть подальші програми, після того, як перший ажіотаж вщух, збирали тисячі відгуків щотижня. Це було дослідження телепатичних здібностей такого масштабу, що був абсолютно недоступний для Райна у його університетській лабораторії, — своєрідний прообраз досліджень епохи Великих даних.

Зрештою, результати експерименту виявилися невтішним для телепатії. Однак забрані дані про відповіді слухачів прислужилися психологічній науці зовсім по-іншому. Слухачі намагалися відтворити послідовності чорного і червоного кольорів (Чор і Чер), що виникали в результаті обертання рулетки. Усього можливих послідовностей 32:

ЧорЧорЧорЧорЧор ЧорЧорЧерЧорЧор ЧорЧерЧорЧорЧор ЧорЧерЧерЧорЧор
ЧорЧорЧорЧорЧер ЧорЧорЧерЧорЧер ЧорЧерЧорЧорЧер ЧорЧерЧерЧорЧер
ЧорЧорЧорЧерЧор ЧорЧорЧерЧерЧор ЧорЧерЧорЧерЧор ЧорЧерЧерЧерЧор
ЧорЧорЧорЧерЧер ЧорЧорЧерЧерЧер ЧорЧерЧорЧерЧер ЧорЧерЧерЧерЧер
ЧерЧорЧорЧорЧор ЧерЧорЧерЧорЧор ЧерЧерЧорЧорЧор ЧерЧерЧерЧорЧор
ЧерЧорЧорЧорЧер ЧерЧорЧерЧорЧер ЧерЧерЧорЧорЧер ЧерЧерЧерЧорЧер
ЧерЧорЧорЧерЧор ЧерЧорЧерЧерЧор ЧерЧерЧорЧерЧор ЧерЧерЧерЧерЧор
ЧерЧорЧорЧерЧер ЧерЧорЧерЧерЧер ЧерЧерЧорЧерЧер ЧерЧерЧерЧерЧер,

кожна з яких має однакову ймовірність випасти, оскільки після кожного обертання рулетки кулька з однаковою ймовірністю зупиняється на червоному або на чорному. А оскільки слухачі насправді не отримували жодних психічних хвиль, можна було б очікувати, що і їхні відповіді теж будуть рівномірно розподілені по цих 32 можливих варіантах вибору.

Але сталося не так. Послідовності, які надсилали слухачі, були дуже нерівномірними[141]. Такі послідовності, як ЧорЧорЧерЧорЧер та ЧорЧерЧерЧорЧер траплялися набагато частіше, ніж передбачала Ймовірність, тоді як послідовності на зразок ЧерЧорЧерЧорЧер рідше, ніж мало би бути, а ЧерЧерЧерЧерЧер не з'являлися майже ніколи.

Вас це, напевно, не здивувало. ЧерЧерЧерЧерЧер якось не виглядає випадковою послідовністю, тоді як ЧорЧорЧерЧорЧер — виглядає, хоча обидві вони мають однакову ймовірність випасти після обертання рулетки. Що відбувається? Що насправді ми маємо на увазі, коли кажемо, що одна послідовність літер «менш випадкова» за іншу?

Ще один приклад. Швидко задумайте число від 1 до 20.

17?

Гаразд, цей фокус виходить не завжди — але якщо ви просите людей вибрати число від 1 до 20, 17 обирають найчастіше[142]. А коли просять задумати число від 0 до 9, найчастіше обирають 7[143]. На відміну від цього, числа, що закінчуються на 0 або 5, обирають набагато рідше, ніж можна очікувати на підставі чистої імовірності їхнього вибору, — просто вони людям *здаються* менш випадковими. Тут є іронія. Так само, як учасники радіоконкурсу намагалися вгадати випадкові послідовності червоного і чорного та приходили до очевидно невипадкових результатів, — так і люди, які обирають випадкові числа, роблять вибір, який очевидно відхиляється від випадковості.

2009 року в Ірані відбулися президентські вибори, на яких з великим відривом переміг чинний президент Махмуд Ахмадинеджад. Залунали численні звинувачення у фальсифікаціях. Але як можна перевірити підрахунок голосів у країні, уряд якої майже не дозволяє незалежного спостереження на виборах?

Два аспіранти з Колумбійського університету, Бернд Бебер і Александра Скакко[144] придумали цікавий спосіб: як доказ шахрайства використати самі числа, щоб у підсумку офіційний підрахунок голосів свідчив проти себе. Дослідники розглянули сукупні офіційні результати, отримані чотирма основними кандидатами у кожній з двадцяти дев'яти провінцій Ірану, загалом 116 чисел. Якби підрахунок був чесним, не мало б бути причин на те, щоб останні цифри цих чисел відрізнялися від суто випадкових. Вони мали б розподілятися майже рівномірно по цифрах 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 і 9, кожна з яких з'являлася б у 10 % випадків.

Однак результати виборів в Ірані так не виглядали. Останньою цифрою у них надто часто була 7, яка траплялася майже вдвічі частіше від того, як це мало би бути; у результаті дії випадковості цифри виходять не такі — набагато більше це було схожим на те, як люди обирають цифри, щоб вони *виглядали* випадковими. Саме по собі це не є доказом порушень на виборах, але свідчить на користь такого висновку*.

Люди завжди роблять висновки, завжди використовують спостереження для коригування суджень про різноманітні теорії, що змагаються між собою у нашому уявленні про світ. У деяких наших теоріях ми дуже, майже непохитно впевнені («Сонце завтра зійде», «Коли упустити річ, вона впаде») і менш впевнені в інших («Якщо я робитиму вправи, вночі спатиму краще», «Ніякої телепатії немає»). Ми маємо теорії про велике і мале, про те, з чим зустрічаємося щодня, і про те, з чим стикаємося лише одного разу. Коли ми на-

* Ускладнювальні чинники: Бебер і Скакко виявили, що числа, які закінчуються на 0, траплялися трохи рідше, ніж мало би бути, але далеко не так рідко, як у разі підбору їх людьми; разом з тим у результатах голосувань на виборах у Нігерії, на яких мали місце порушення, кінцеві нулі траплялися набагато частіше, ніж мали б, якби числа були випадковими. Як і більшість форм детективної роботи, від точної науки ця теж далека.

трапляємо на свідчення за і проти цих теорій, наша впевненість у них зростає або падає.

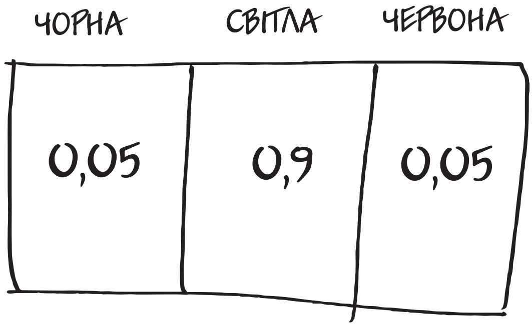
Наша стандартна теорія про рулетки полягає в тому, що червоних і чорних комірок порівну, і кулька з однаковою ймовірністю зупиняється на червоному і на чорному. Але є й інші теорії — скажімо, що комірок одного кольору більше*. Можемо спростити і припустити, що в нас є тільки три теорії:

Червона: Рулетка влаштована так, щоб кулька зупинялася на червоному у 60 % випадків.

Світла: однакова кількість чорних і червоних комірок, і кулька у половині випадків зупиняється на червоному і в половині — на чорному.

Чорна: Рулетка влаштована так, щоб кулька зупинялася на чорному у 60 % випадків.

Наскільки ви довіряєте цим трьом теоріям? Імовірно, ви схильні вважати, що рулетки чесні, якщо не маєте підстав думати інакше. Можливо, ви вважаєте, що з 90 %-ю ймовірністю правильною є світла теорія, і тільки по 5 % шансів є на те, що правильні чорна і червона. Ми можемо намалювати для цього діаграму, як робили це для списку «Фейсбуку»:



Наш малюнок показує те, що професійною мовою називають *апріорними* ймовірностями того, що наші різні теорії є правильними. Різні люди можуть мати різні апріорні теорії; затятий цинік може присудити по 1/3 кожній теорії, тоді як особа, твердо переконана в добросовісності майстрів, що виготовляють рулетки, може дати тільки по 1 % ймовірності червоній і чорній теоріям.

* Певна річ, це не надто переконлива теорія про звичайні колеса рулетки, де комірки почергово мають червоний і чорний кольори. Але з приводу колеса рулетки, якого ви не бачите, можна мати теорію, що на ньому справді більше червоних комірок, ніж чорних.

Ці апріорні теорії не є жорстко закріпленими. Якщо нам надати свідчення переваги однієї теорії над іншою — скажімо, що кулька зупиняється на червоному п'ять разів поспіль, — рівень нашої довіри до різних теорій може змінитися. Що буде в цьому разі? Зрозуміти це нам допоможуть обчислення умовних ймовірностей і більша діаграма.

Наскільки ймовірно в результаті п'яти обертань колеса отримати ЧерЧерЧерЧерЧер? Відповідь залежить від того, яка з теорій істинна. За світлої теорії ймовірність того, що після кожного обертання кулька зупиниться на червоному, становить ½, тож імовірність отримати ЧерЧерЧерЧерЧер становить

$$(1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) = 1/32 = 3{,}125\ \%.$$

Іншими словами, ЧерЧерЧерЧерЧер є точно так само ймовірною, як кожна з 31 інших можливостей.

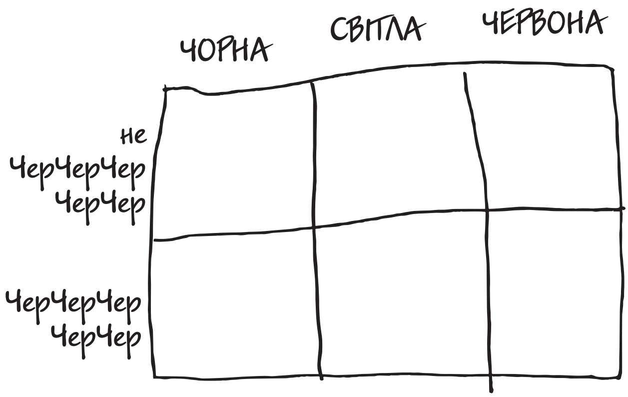
Але коли правильна чорна теорія, є тільки 40 %, або 0,4 шансу, на отримання червоного після кожного обертання рулетки, тож імовірність отримати ЧерЧерЧерЧерЧер становить

$$(0{,}4) \times (0{,}4) \times (0{,}4) \times (0{,}4) \times (0{,}4) = 1{,}024\ \%.$$

А якщо правильна червона, тобто кожне обертання рулетки з 60 %-ю ймовірністю приведе до зупинки кульки на червоному, імовірність отримати ЧерЧерЧерЧерЧер становить:

$$(0{,}6) \times (0{,}6) \times (0{,}6) \times (0{,}6) \times (0{,}6) = 7{,}76\ \%.$$

Тепер розширимо нашу діаграму з трьох частин до шести.



Як і раніше, колонки відповідають нашим трьом теоріям, чорній, світлій і червоній. Але тепер ми поділили кожну колонку на дві частини, одна з яких відповідає отриманню результату ЧерЧерЧерЧерЧер, а інша — *відсутності* такого результату. У нас вже є уся математика, потрібна для того, щоб з'ясувати, які числа ставити у комірки. Наприклад, апріорна ймовірність того, що правильною є світла теорія, становить 0,9. Тоді 3,125 % цієї імовірності, 0,9 × 0,03125, або близько 0,0281, записуємо у квадратик, де перетинаються істинність світлої теорії і результат ЧерЧерЧерЧерЧер. У комірку « світла правильна, а результат не є ЧерЧерЧерЧерЧер» записуємо 0,8719, — щоб сума значень у колонці становила 0,9.

Апріорна ймовірність для колонки червона становить 0,05. Тож шанси на те, що червона правильна, а в результаті п'ятиразового обертання рулетки отримаємо ЧерЧерЧерЧерЧер, становить 7,76 % від 5 %, тобто 0,0039. Для комірки «червона правильна, а результат не є ЧерЧерЧерЧерЧер» залишається 0,0461.

Чорна теорія теж має апріорну ймовірність 0,05. Але ця теорія зовсім не веде до тих самих результатів, що й червона. Шанси на те, що чорна теорія правильна, а результат обертання ЧерЧерЧерЧерЧер — усього 1,024 % від 5%, або 0,0005.

Ось наша заповнена табличка:

	ЧОРНА	СВІТЛА	ЧЕРВОНА
не ЧерЧерЧер ЧерЧер	,0495	,872	,0461
ЧерЧерЧер ЧерЧер	,0005	,028	,0039

(Зауважте, що сума чисел в усіх комірках дорівнює 1; так повинно бути, тому що шість комірок представляють усі можливі ситуації).

Що станеться з нашими теоріями, якщо рулетка *справді* принесе результат ЧерЧерЧерЧерЧер? Напевно, це добра новина для червоної теорії і погана для чорної. І саме це ми і бачимо. П'ять червоних поспіль означає, що ми знаходимося в нижньому ряду нашої таблиці, де чорна, світла та червона теорії мають показники 0,0005, 0,028 та 0,0039 відповідно. Іншими словами, при тому, що ми отримали ЧерЧерЧерЧерЧер, наш новий висновок, що світла теорія правильна, є у сім разів імовірнішим за висновок про істинність червоної теорії, а висновок про правильність червоної має близько восьмикратної імовірності такого самого висновку про чорну.

Якщо ви хочете перевести ці пропорції у ймовірності, просто потрібно пам'ятати, що загальна ймовірність *усіх* можливостей має дорівнювати 1. Сума чисел у нижньому ряду становить близько 0,0325; отже, щоб сума цих чисел дорівнювала 1, а їхні відношення не змінилися, потрібно лише поділити кожне з них на 0,0325. Що дає нам

Імовірність 1,5 %, що правильна чорна
Імовірність 86,5 %, що правильна світла
Імовірність 12 %, що правильна червона

Ступінь вашої довіри до червоної теорії майже подвоївся, тоді як віра у правильність чорної майже зникла. Воно й не дивно! Ви бачили, як кулька п'ять разів поспіль зупинилася на червоному, то чому не почати трохи серйозніше, ніж раніше, підозрювати, що гра нечесна?

Оце «ділення на 0,0325» може здатися фокусом, призначеним спеціально для цього випадку. Але так діяти справді правильно. Якщо ваша інтуїція заважає зрозуміти це відразу, ось інша картинка, яка декому подобається більше. Уявіть, що є десять тисяч рулеток. І є десять тисяч кімнат, у кожній з яких стоїть рулетка, на якій грає людина. Один з цих людей за однією з рулеток — ви. Але ви не знаєте, яка рулетка вам дісталася! Тому становище вашого незнання про справжній характер рулетки можна змоделювати, припускаючи, що серед десяти тисяч рулеток у 500 — більше червоних комірок, у 500 — більше чорних, а 9000 — чесні.

Обчислення, яке ми щойно виконали, підказує вам, що слід очікувати, що результат ЧерЧерЧерЧерЧер дадуть приблизно 281 світла рулетка, 39 червоних рулеток і тільки 5 чорних. Тож якщо ви справді отримаєте ЧерЧерЧерЧерЧер, ви так само не будете знати, на якій з десяти тисяч рулеток ви граєте, однак це вже буде суттєво ясніше; ви — в одній з 325 кімнат, де кулька зупинилися п'ять разів поспіль на червоному. І серед цих кімнат 281 (близько 86,5 % мають світлі рулетки), 39 (12 %) — червоні рулетки і тільки 5 (1,5 %) — чорні.

Що більше кулька зупинятиметься на червоному, то прихильніше ви ставитиметеся до червоної теорії (і менше довірятимете чорній). Якщо у вас випаде не п'ять, а десять червоних поспіль, те саме обчислення підвищить вашу оцінку щодо правильності червоної теорії до 25 %.

Щойно ми обчислили, як має змінюватися наша довіра до різних теорій після того, як п'ять разів поспіль випадає червоне, — ця величина має назву *апостеріорної ймовірності*. Так само, як апріорна описує вашу впевненість до отримання емпіричних даних, апостеріорна ймовірність говорить про ступінь впевненості після їх отримання. Те, що ми тут робимо, має назву *баєсівського висновку*, тому що перехід від апріорних до апостеріорних ймовірностей ґрунтується на одній старій формулі, що в теорії ймовірностей зветься *теорема Баєса*. Ця теорема — короткий алгебраїчний вираз, і я міг би навести його прямо зараз. Але я спробую цього не робити. Тому що часом формула, якщо ви звикли застосовувати її механічно, не думаючи про реальну ситуацію, може завадити розуміти те, що насправді відбувається. А все, що потрібно знати про те, що відбувається, вже наведено у нашій діаграмі*.

На апостеріорній імовірності позначаються емпіричні дані, які ви отримуєте, а також і ймовірності апріорні. Цинік, що починав з апріорного приписування ЧОРНІЙ, СВІТЛІЙ і ЧЕРВОНІЙ теоріям ймовірностей, що становлять 1/3, відреагує на п'ять червоних поспіль апостеріорним висновком, що ЧЕРВОНА з 65 %-ю ймовірністю буде правильною. Довірлива душа, яка спочатку давала ЧЕРВОНІЙ лише 1 % ймовірності, і після цього дасть їй лише 2,5 % шансів бути правильною.

За Баєсовою методикою, те, наскільки ви у щось вірите *після* отримання емпіричних даних, залежить не тільки від самих цих даних, а й від того, наскільки ви у це вірили від початку.

Це може здаватися тривожним. Наука ж має бути об'єктивною? Вам хотілося б сказати, що ваші уявлення ґрунтуються на самих лише емпіричних даних, а не на якихось попередніх уявленнях і теоріях, які ви мали раніше. Якби якийсь експеримент давав статистично значущий результат, що новий різновид ліків уповільнює зростання певного виду ракових пухлин, то, ймовірно, ви були б впевнені в ефективності цих нових ліків. Але якби отримали точно той самий результат, заводячи пацієнтів до пластикової копії Стоунгенджу, чи визнали б ви — знехотя — що форми давніх споруд справді концентрують вібрації енергії Землі на організмі і пригнічують пухлину? Ні, не визнали б, бо це божевілля. Ви б вирішили, що, ймовірно, Стоунгенджу поталанило. Стосовно цих двох теорій ви маєте різні апріорні судження, і в ре-

* Звичайно, якби ми це справді робили, потрібно було б розглядати більше ніж три теорії. Ми б хотіли також включити до нашого розрахунку теорію, за якою рулетка дає 55 % червоного, або 65 %, або 100 %, або 93,756 %. Існує не три, а нескінченна кількість потенційних теорій, і коли вчені проводять Баєсові обчислення, їм потрібно боротися з нескінченними і нескінченно малими величинами, замість простих сум обчислювати інтеграли і таке інше. Але всі ці складнощі чисто технічні; по суті ж процес не глибший за той, який був щойно описаний.

зультаті цього по-різному інтерпретуєте отримані дані, незважаючи на те, що в числовому вимірі вони однакові.

Так само з алгоритмом пошуку терористів «Фейсбуку» і з вашим сусідом. Занесення сусіда до списку певною мірою свідчить на користь того, що він є потенційним терористом. Але ваша оцінка такої імовірності апріорно має бути дуже низькою, тому що більшість людей не терористи. Тож, незважаючи на отримані дані, ваша апостеріорна ймовірність теж залишається низькою, і ви цим не переймаєтеся — принаймні перейматися не маєте.

Покладатися виключно на перевірку статистичної значущості — значить іти врозріз із баєсівськими принципами. Строго кажучи, щоб так діяти, потрібно ставитися до ліків від раку і пластикового Стоунгенджу абсолютно однаково. Чи підважує це фішерівський підхід до статистики? Навпаки. Коли Фішер каже, що «жоден науковець не має чітко встановленого рівня значущості, на підставі якого він рік у рік і за будь-яких обставин відхиляє гіпотези; замість цього він розглядає кожен конкретний випадок, спираючись на власні дані та ідеї», він каже саме те, що процес отримання висновків у науці не може, принаймні не має, бути суто механічним; певна роль обов'язково повинна відводитися нашим ранішим ідеям, уявленням та переконанням.

Ні, Фішер не був баєсіанцем у статистиці. Нині баєсівська статистика — це група методів і підходів у статистичній науці, які колись були немодними, але тепер широко використовуються; до них належить загальне прийняття аргументів, ґрунтованих на теоремі Баєса, але вони не обмежуються простим урахуванням попередніх переконань і нових свідчень. Баєсіанство найбільш популярне у таких процесах, як формування у штучного інтелекту здатності навчатися на основі великих обсягів даних, заснованих на людському досвіді, для яких погано підходять питання з відповідями «так або ні», на які розрахований фішерівський підхід. Статистики-баєсіанці часто зовсім не звертаються до нульової гіпотези; вони не запитують: «Чи мають ці нові ліки якийсь ефект?», вони можуть бути більше зацікавленими у створенні оптимальної моделі, яка передбачає дію ліків у різних дозах на пацієнтів, що належать до різних груп. А коли в них справді йдеться про гіпотези, то вони порівняно легко говорять про ймовірність того, що якась гіпотеза — скажімо, що нові ліки діють краще за ті, що є, — істинна. Для Фішера це легким не було. На його думку, мовою ймовірностей доречно послуговуватися лише там, де йдеться про реальні випадкові процеси.

Тут ми виходимо на берег великого моря філософських проблем, в яке зануримо лише один чи два пальці ніг, не більше.

По-перше: коли ми називаємо теорему Баєса «теоремою», то таким чином стверджуємо, що йдеться про незаперечні істини, що доведені математично. Це і так і ні. Усе зводиться до складного питання, що мається на увазі, коли йдеться про «ймовірність». Коли ми кажемо, що є 5 %-на ймовірність істинності червоної гіпотези, ми *можемо* мати на увазі, що дійсно існує величезна кількість рулеток, серед яких точно одна з двадцяти влаштована так, щоб червоне випадало у 3/5 випадків, і що будь-яка конкретна рулетка, з якою ми стикаємося, вибирається випадковим чином з усієї множини рулеток. Якщо під імовірністю на увазі ми маємо саме це, тоді теорема Баєса — простий факт, схожий на закон великих чисел, про який ми говорили раніше; теорема стверджує, що в підсумку, за умов, установлених у нашому прикладі, 12 % рулеток, які дають результат ЧерЧерЧерЧерЧер, матимуть «червоний ухил».

Але насправді ми говоримо не про це. Коли ми кажемо, що є 5 %-на ймовірність істинності червоної гіпотези, ми робимо заяву не про світовий розподіл «нечесних» рулеток (звідки нам знати?), а про свій психічний стан. П'ять процентів — це *ступінь нашої віри в те,* що ця конкретна рулетка налаштована «віддавати перевагу» червоному.

Між іншим, саме в цьому місці Фішер стає діаметральним опонентом такого підходу. Йому належить нещадна критична стаття з приводу «Трактату про ймовірність» Джона Мейнарда Кейнса, за яким імовірність «вимірює "ступінь раціональної переконаності", яка надається певному твердженню у світлі наявних емпіричних даних». Оцінку Фішером цього підходу добре відбивають останні рядки його сатири: «Якби ідеї останнього розділу книжки пана Кейнса[145] були прийняті студентами-математиками у нашій країні як керівна настанова, це спричинилося б до того, що ці студенти залишили б, хто з відрази, а більшість через незнання, одну з найперспективніших галузей прикладної математики».

Ті, хто готовий прийняти ідею ймовірності як ступеня переконаності, можуть вбачати в теоремі Баєса не просто математичне рівняння, а таку собі пораду у числовій формі. Теорема дає нам правило — яке ми вільні виконувати чи не виконувати — з приводу того, як ми маємо оновлювати наші переконання про речі у світлі нових спостережень. У цій новій, загальнішій формі теорема стає предметом набагато запекліших суперечок. Є тверді баєсіанці, які вважають, що *всі* наші переконання й думки мають формуватися строгими Баєсовими обчисленнями, чи принаймні вони мають бути настільки строгими, наскільки наші обмежені пізнавальні можливості здатні їх зробити; для інших правило Баєса більше являє собою нестрогий кількісний орієнтир.

Огляду Баєсового підходу вже достатньо для пояснення того, чому ЧерЧорЧерЧерЧор виглядає випадковим, а ЧерЧерЧерЧерЧер ні, незважаючи на те, що їхня ймовірність випасти однакова. Коли ми бачимо ЧерЧерЧерЧерЧер, це посилює певну теорію — теорію, що рулетка налаштована так, щоб частіше випадало червоне, — якій ми вже приписали деяку апріорну ймовірність. Але як з ЧерЧорЧерЧерЧор? Можна уявити когось, хто має надзвичайно широкі погляди на рулетки; цей хтось приписує певну незначну ймовірність теорії, що рулетка оснащена прихованим хитромудрим механізмом Руба Ґолдберґа, призначеним видавати послідовність «червоне, чорне, червоне, червоне, чорне». Чому ні? І така особа, побачивши ЧерЧорЧерЧерЧор, вважатиме, що це сильне свідчення на користь такої теорії.

Але реальні люди реагують не так, коли рулетка приносить результат «червоне, чорне, червоне, червоне, чорне». Ми не дозволяємо собі обмірковувати кожну схиблену теорію тільки на тій підставі, що вона логічно можлива. Наші апріорні ймовірності не *плоскі*, а *зазубрені*. Ми надаємо великої ваги кільком теоріям, тоді як інші, як-от теорія ЧерЧорЧерЧерЧор, отримують від нас значення, що майже не відрізняється від нуля. Як ми обираємо наші привілейовані теорії? Нам більше подобаються простіші й менше — складніші; більше подобаються теорії, що ґрунтуються на схожості з речами, які ми вже знаємо, і менше — ті, що стосуються цілковито нових явищ. Це може здаватися своєрідним несправедливим упередженням, проте без деяких упереджень ми наражаємося на небезпеку увесь час перебувати у стані зачудованого заціпеніння. Цей психічний стан яскраво описав Річард Фейнман:

> Знаєте, дивовижна річ сталася зі мною сьогодні увечері[146]. Я йшов сюди, на лекцію, і пішов через автостоянку. І ви не повірите, що сталося. Я побачив машину з номером ARW 357. Лишень уявіть! Який шанс був на те, що з мільйонів автомобільних номерів у штаті сьогодні увечері я побачив саме цей? Дивовижно!

Якщо ви коли-небудь вживали найпопулярнішу в Америці почасти нелегальну психотропну речовину, то знаєте, як воно, коли апріорні ймовірності надто плоскі. Кожен стимул, що ви отримуєте, навіть звичайнісінький, здається *сповненим значення*. Кожне відчуття заполоняє вашу увагу і вимагає, щоб його помітили. Дуже цікавий стан. Але добрим висновкам він не сприяє.

Баєсівська теорія пояснює, чому Фейнман насправді не здивувався; це тому, що він присвоїв дуже низьку апріорну ймовірність гіпотезі, що якась космічна сила забажала, щоб він того вечора побачив на машині номер ARW 357. Баєсівська теорія пояснює, чому п'ять червоних поспіль сприймаються «менш випадковими», ніж ЧерЧорЧерЧерЧор; так відбувається тому, що перше «вмикає» червону теорію, якій ми присвоюємо певну помітну апріорну ймовірність, тоді як останнє цього не робить. І число, що закінчується на 0, сприймається як менш випадкове, ніж число, що закінчується на 7, тому що перше свідчить на користь теорії, що число, яке ми бачимо, — не точна кількість, а приблизна оцінка.

Такий підхід також допомагає розв'язати головоломки, з якими ми вже зустрічалися. Чому ми дивуємося і починаємо щось підозрювати, коли у лотереї двічі поспіль випадає 4, 21, 23, 34, 39, але нічого такого не відбувається, коли одного дня випадає 4, 21, 23, 34, 39, а наступного 16, 17, 18, 22, 39, хоча обидві події однаково малоймовірні? Десь у глибині мозку живе якась теорія — теорія, що лотереї з якоїсь причини з незвичайною ймовірністю видають ті самі числа двічі у близькі моменти часу; можливо, тому, що ви переконані, що власники лотерей нечесні; можливо, тому, що підозрюєте, що втручається космічна сила, яка любить синхронність, — байдуже. Можливо, ви не надто сильно вірите в цю теорію; можливо, насправді ви вважаєте, що шанси такої схильності до повторів — один на сто тисяч. Але це вже набагато більше, ніж апріорна ймовірність, яку ви присвоюєте чудній теорії змови на користь поєднання 4, 21, 23, 34, 39 — 16, 17, 18, 22, 39. *Оця* теорія божевільна, тож і уваги на неї не звертаємо.

Якщо раптом виявиться, що ви трохи вірите в цю божевільну теорію, не переймайтеся — ймовірно, емпіричні дані їй не відповідатимуть, що знижуватиме ступінь вашої віри у маячню, аж поки ваші уявлення і переконання не стануть такими, як в інших. Тобто якщо тільки ваша божевільна теорія спеціально не призначена для того, щоб її можна було відсіяти. Так працюють теорії змови.

Припустимо, ви дізналися від друга, якому довіряєте, що теракт на Бостонському марафоні був влаштований федеральним урядом для того, щоб (ну, я навіть не знаю) переконати людей у необхідності збирання даних Агентством нацбезпеки. Назвемо цю теорію T. Спершу, оскільки ви довіряєте своєму другові, можливо, ви присвоїте цій теорії досить високу ймовірність — скажімо, 0,1. Але потім ви натрапляєте на іншу інформацію — поліція встановила місцезнаходження підозрюваних; підозрюваний, що вижив, зізнався тощо. Кожна така новина, за істинності T, вкрай малоймовірна, і кожна знижує ступінь вашої переконаності у T, доки ви вже майже їй не вірите.

Тому-то ваш друг чистої теорії T вам не розповість; він додасть до неї теорію U, яка полягає в тому, що уряд і ЗМІ змовилися, і газети, і телевізор згодовують людям брехню, що теракти влаштували радикальні ісламісти. Об'єднана теорія, T+U, спочатку має мати меншу апріорну ймовірність; за визначенням, у неї тяжче повірити, бо тут потрібно повірити у дві теорії одночасно. Але мірою надходження фактів, які переважно будуть працювати проти самої лише теорії T*, об'єднана теорія T+U залишатиметься неушкодженою. Джохара Царнаєва засуджено? Так, звичайно, це *саме* те, чого і слід було чекати від федерального суду — у Мін'юсту все під контролем! Теорія U діє як своєрідна баєсівська оболонка теорії T, не даючи новим фактам дістатися до неї і зруйнувати її. Таку спільну рису мають найуспішніші божевіль-

* Точніше, проти поєднання T + не-U.

ні теорії; вони вміщені у «захисний корпус», достатньо міцний для того, щоб відповідати багатьом можливим фактам, що ускладнює їхнє спростування. Вони схожі на стійку до багатьох ліків кишкову паличку інформаційної екосистеми. Хоч як дивно, але в певному сенсі вони гідні захвату.

Кіт у капелюсі, найчистіший хлопець у коледжі та створення світу[147]

У коледжі в мене був друг, хлопець з підприємницькою жилкою, який придумав, як підзаробити грошей на початку навчального року на продажі футболок першокурсникам. У ті часи в трафаретній майстерні можна було купити велику партію футболок десь по чотири долари за штуку, тоді як на кампусі вони зазвичай ішли по десятці. Це було на початку 1990-х: модним тоді було ходити на вечірки у великому смугастому капелюсі, як у Кота д-ра Сьюза*. Тож той мій друг зібрав вісімсот доларів і надрукував на двохстах футболках Кота в капелюсі з кухлем пива. Ішли футболки тільки так.

Мій друг мав підприємницьку жилку, але не *таку, щоб аж дуже*. Насправді він був ледачкуватий. І тільки-но він продав вісімдесят футболок, окупивши початкову інвестицію, то почав втрачати запал до продажу — бо для цього потрібно було цілими днями тинятися по території. Тож коробка з футболками перекочувала йому під ліжко.

Через тиждень настав пральний день. Як я вже відзначав, той мій друг був ледачий. До прання одягу душа йому не лежала. І тоді він згадав, що під ліжком у нього коробка новісіньких, чистісіньких, з Котом і пивом, футболок. Так було вирішено проблему прального дня.

Як виявилося, так само вирішується і проблема дня, наступного після прального.

І наступного.

Тут-то і криється іронія. Усі навколо думали, що мій друг найбрудніший у коледжі, тому що він щодня ходив у тій самій футболці. Але насправді він був *найчистішим* у коледжі, бо кожного дня він надягав новісіньку, щойно з магазину, ніколи не одягану футболку.

Урок щодо висновків: потрібно бути обережним з робочими теоріями. Так само, як квадратне рівняння може мати більше ніж один корінь, можуть існувати і різні теорії щодо спостережуваних фактів, і якщо не брати до уваги їх усі, висновки можуть завести нас далеко на манівці.

Це повертає нас до Творця Світу.

---

* Ні, серйозно, це справді було модно.

Найвідоміший аргумент на користь того, що світ створив Бог, — це так званий аргумент розумного задуму, який у найпростішій своїй формі каже нам: матінко рідна! Та лишень *подивіться навколо* — усе таке складне й дивовижне, а ви думаєте, що воно саме так зробилося через дію дурного випадку і фізичних законів? Або, у формальнішому вираженні ліберального богослова Вільяма Пейлі, який у своїй книжці 1802 року «Природна теологія, або Свідчення існування Бога і Його атрибутів, зібраних із явищ природи» писав:

> Припустимо, що я спіткнувся об *камінь*, і мене запитують, як цей камінь сюди потрапив: я можу сказати, що, оскільки іншого не знаю, цей камінь лежав тут завжди; довести неправильність такої відповіді буде нелегко. Але припустимо, що я знайшов на землі *годинник*, і потрібно з'ясувати, як він сюди потрапив; навряд чи я подумаю про відповідь, яку давав попереднього разу, — що, наскільки я знаю, годинник був тут завжди... На нашу думку, іншого висновку бути не може — годинник мусив хтось зробити: у певний час і в тому чи тому місці мав бути майстер чи майстри, який створив його з метою, для якої він був призначений: який задумав його влаштування і запланував спосіб використання.

Якщо це істинно для годинника, то наскільки більше — для горобця, чи людського ока, чи людського мозку?

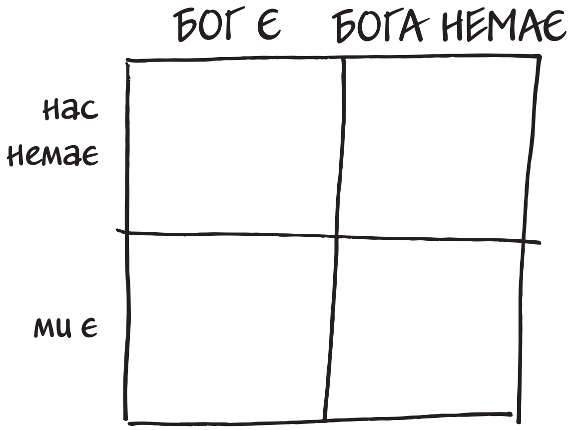
Книжка Пейлі мала неймовірний успіх, витримавши п'ятнадцять видань упродовж п'ятнадцяти років[148]. Навчаючись у коледжі, її уважно читав Дарвін; потім він сказав: «Не думаю, що я коли-небудь захоплювався якоюсь книжкою так, як захоплювався "Природною теологією": раніше я майже знав її напам'ять»[149]. Оновлені версії аргументу Пейлі лежать в основі сучасного руху прихильників теорії розумного задуму.

Це, звичайно, класичне доведення від малоймовірного:

- Якщо Бога немає, то виникнення таких складних речей, як людина, є малоймовірним;
- Люди виникли;
- Тому малоймовірно, що Бога немає.

Це дуже схоже на аргументи шукачів біблійних кодів; якщо Бог не писав Тори, то малоймовірно, щоб у тексті на сувої були так точно записані дні народження рабинів!

Можливо, зараз вам це буде неприємно чути, але маю сказати, що доведення від малоймовірного працює не завжди. Якщо ми *справді* хочемо обчислити, наскільки нам слід бути впевненими в тому, що світ створив Бог, краще намалюємо ще одну Баєсову табличку.



Перша проблема — зрозуміти апріорні ймовірності. Випадок тут складний. Про рулетки ми запитували: наскільки ймовірним, на нашу думку, є те, що рулетка підлаштована, до того, як побачили реальні результати? Зараз ми запитуємо: як би ми оцінювали ймовірність існування Бога, якби не знали, що світ, Земля чи ми самі існуємо?

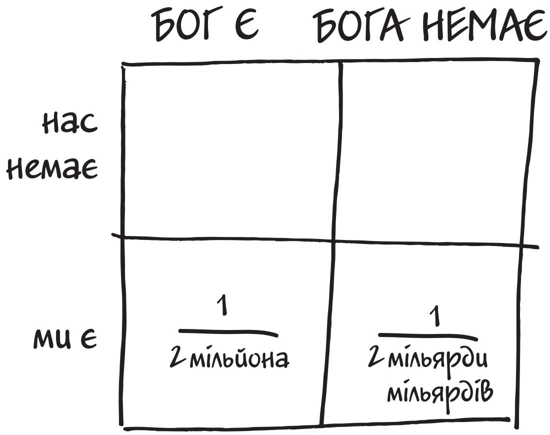
У такій ситуації зазвичай руки опускаються і згадується принцип з чарівною назвою — *принцип байдужості* — оскільки ми в принципі не можемо удати, що не знаємо про власне існування, ми просто ділимо апріорну ймовірність навпіл: 50 % за бог є і 50 % — за бога немає.

Якщо теорія бога немає істинна, то складні істоти, як-от люди, мали б виникнути внаслідок чистої випадковості, можливо, прискореної природним добором. І раніше, і тепер прихильники аргументу розумного задуму погоджуються, що це вкрай малоймовірно; звернімося до чисел і скажемо, що це один шанс на мільярд мільярдів. Тож у нижній правий кут записуємо 50 % від одного на мільярд мільярдів, тобто один на два мільярди мільярдів.

Що коли правильна теорія бог є? Ну, способів існування Бога багато; ми заздалегідь не знаємо, чи Бог, що створив світ, турбувався б сотворенням людини чи взагалі будь-яких мислячих істот, але певно, що Бог, який заслуговує так називатися, буде *здатним* запустити процес розвитку мислячих істот. Можливо, якщо Бог є, то є один шанс на мільйон, що Бог створив таких істот, як ми з вами.

Тож наша табличка виглядатиме так:

На цьому етапі беремо до уваги емпіричний факт, який полягає в тому, що ми існуємо. Тож істина лежить десь у нижньому рядку. А з нашого нижнього рядка чітко видно, що набагато більша ймовірність — у трильйон разів більша! — у комірці колонки бог є, ніж у комірці колонки бога немає.



Це, по суті, твердження Пейлі, «аргумент розумного задуму» в його сучасному баєсівському формулюванні. Існує багато вагомих заперечень аргументу розумного задуму, є і два мільярди мільярдів затятих книжок типу «ви однозначно маєте бути крутим атеїстом, таким як я», у яких можна з цими запереченнями ознайомитися, тож дозвольте зупинитися тут на найближчому серед них до обговорюваної тут математики: запереченні «найчистіша людина в коледжі».

Ви, напевно, знаєте, що Шерлок Голмс говорив про висновування — це найзнаменитіша річ, яку він сказав, за винятком «Елементарно!»:

«Я постійно кажу: коли відкинете неможливе, то те, що залишиться, хай яке воно неймовірне, і буде правдою».

Хіба це не звучить круто, розумно, незаперечно?

Але це не все. Шерлок Голмс *мав* сказати так:

«Я постійно кажу: коли відкинете неможливе, то те, що залишиться, хай яке воно неймовірне, і буде правдою, якщо правдою не буде гіпотеза, яку вам не спало на думку розглянути».

Не так красиво, зате правильніше. Люди, які дійшли висновку, що мій друг — найбрудніший у коледжі, розглядали тільки дві гіпотези:

Чиста: мій друг міняє футболки, пере їх, потім надягає знову, як нормальна людина.

Брудна: мій друг засмальцьований дикун, який носить брудний одяг.

Почнемо з апріорних ймовірностей; наскільки я пам'ятаю коледж, брудній гіпотезі можна доволі спокійно присвоїти 10 %. Але насправді апріорні ймовірності ролі не грають: гіпотеза чиста виключається спостереженням: мій друг щодня носить ту саму футболку. «Коли відкинете неможливе...»

Але стривайте, Голмсе — правильного пояснення, гіпотези ЛЕДАЧИЙ ПІДПРИЄМЕЦЬ, у списку не було.

Аргумент розумного задуму має ту саму проблему. Якщо єдині дві гіпотези, які ви визнаєте, це БОГА НЕМАЄ і БОГ Є, складність і багатство нашого світу цілком годиться як доказ на користь останньої, а не першої.

Є й інші можливості. Як щодо гіпотези БОГИ, за якою світ було поспіхом створено комітетом «заклятих друзів»? Багато визначних цивілізацій вірили саме в таке. І не випадає заперечувати, що у природі існують певні явища — наприклад, панди, — які видаються радше результатом неохочого бюрократичного компромісу, ніж задуму божества-всевіда, що повністю керує процесом. Якщо ми почнемо з присвоєння певних апріорних імовірностей гіпотезам БОГ Є і БОГИ — а чому ні, якщо ми діємо згідно з принципом байдужості? — баєсівський висновок має привести нас до набагато більшої впевненості в істинності гіпотези БОГИ, ніж БОГ Є*.

Навіщо на цьому зупинятися? Версіям походження світу немає кінця. Іншу теорію, що має своїх прихильників, можна назвати МАТРИЦЯ — згідно з нею, насправді ми ніякі не люди, а моделі-симуляції[150] на якомусь ультракомп’ютері, створеному іншими людьми**. Це здається диким, але до такої ідеї багато людей ставиться серйозно (найвідоміший з них — оксфордський філософ Нік Бостром[151]). І згідно з баєсівським підходом, нічого неможливого немає в тому, щоб так вважали і ви. Людям подобається моделювати події реального світу; якщо людський рід себе не знищить, наші можливості моделювання тільки зростатимуть, і зовсім не виглядає божевільним, що такі моделі одного дня зможуть включити в себе мислячі істоти, які вважатимуть себе людьми.

Якщо гіпотеза МАТРИЦІ істинна, і світ — це модель, побудована людьми з реальнішого світу, то доволі ймовірно, щоб у світі були люди, тому що люди найбільше полюбляють моделювати людей! Я сказав би, що це майже певна річ (суто для прикладу, скажімо, що це абсолютна впевненість) — що у модельованому світі, створеному людьми, що мають передові технології, будуть (змодельовані) люди.

Якщо ми присвоїмо кожній з чотирьох гіпотез, які ми маємо на цей момент, апріорну ймовірність 1/4, табличка буде такою:

---

* Пейлі сам, очевидно, знав про цю проблему; зауважте, наскільки обережно він каже — «майстер чи майстри».

** Людьми, які, звичайно ж, самі можуть бути комп’ютерними моделями, створеними людьми ще вищого порядку!

	БОГ	НЕ БОГ	БОГИ	МАТРИЦЯ
нас немає				
ми є	$\frac{1}{4 \text{ мільйона}}$	$\frac{1}{4 \text{ мільярди мільярдів}}$	$\frac{1}{400000}$	$\frac{1}{4}$

При тому, що ми дійсно існуємо, істинні варіанти розташовані у нижньому ряду, і майже вся ймовірність відходить до гіпотези матриці. Так, існування людей є свідченням існування Бога; але це набагато *краще* свідчення на користь того, що наш світ запрограмований людьми, набагато за нас розумнішими.

Прихильники «наукового креаціонізму» стверджують, що у школі ми маємо обстоювати думку про існування Творця світу не тому, що так сказано у Біблії — це було б неприпустимо нахабним, — а на холодних раціональних підставах, ґрунтованих на величезній малоймовірності існування людства, коли істинна гіпотеза бога немає.

Якби ми поставилися до цього підходу серйозно, то мали б сказати нашим десятикласникам щось приблизно таке: «Дехто стверджує, що надзвичайно малоймовірно, що біосфера Землі виникла внаслідок самої лише дії природного добору, без жодного зовнішнього втручання. Найбільш імовірним з таких пояснень є те, що каже, що насправді ми зовсім не люди, а мешканці комп'ютерної моделі, створеної людьми, що мають немислимо високі технології, з достеменно не відомою нам метою. Також можливо, що нас створила група богів, схожа на ту, якій поклонялися давні греки. Є навіть такі люди, що вірять у створення світу єдиним Богом, але ця гіпотеза має розглядатися як менш обґрунтована за альтернативні».

Думаєте, шкільна адміністрація на таке погодиться?

Поспішу застерегти, що *насправді* я не вважаю, що таким чином переконливо обґрунтовується аргумент, що всі ми симуляції; так само, як не вважаю, що аргумент Пейлі добре обґрунтовує існування Бога. Швидше відчуття замішання, викликане цими аргументами, видається мені ознакою того, що ми досягли меж кількісного мислення. Нашу непевність стосовно чогось прийнято виражати числами. Часом у цьому навіть є сенс. Коли синоптик у вечірніх новинах каже: «Ймовірність дощу завтра — 20 %», він має на увазі, що з багатьох минулих днів з умовами, схожими на теперішні, у 20 % випадків наступні дні були дощовими. Але що ми маємо на увазі, коли кажемо: «Ймовірність того, що світ створив Бог, — 20 %»? Це не може означати, що один з п'яти світів створений Богом, а решта взяли й виникли самі. Правду кажучи, я ніколи не зустрічав методу, який видався б мені переконливим для присвоєння числових значень нашій непевності щодо таких найважливіших питань. І хоч я люблю числа, я думаю, що люди мають дотримуватися варіантів «Я не вірю в Бога», «Я вірю в Бога» чи просто «Я точно не впевнений». І хоч я люблю баєсівські висновування, я думаю, що, ймовірно, буде краще прийти до віри чи відкинути її, не звертаючись до чисел. У цьому питанні математиці немає що сказати.

Якщо я для вас не авторитет, то послухайте, що каже про це математик і філософ XVII століття Блез Паскаль у своїх «Думках»: «"Є Бог" чи "Бога немає". До чого нам схилитися? Розум тут нічого вирішити не може».

Це не все, що з цього питання сказав Паскаль. Повернемося до його думок у наступному розділі. Але спочатку — лотерея.

Частина третя

ОЧІКУВАННЯ

У цій частині: хлопці з MIT виграють у лотерею штату Массачусетс, як розбагатів Вольтер, геометрія флорентійського живопису, передачі, що виправляють себе самі, Ґреґ Менк'ю і Фран Лебовіц, «Перепрошую, то bofoc чи bofog?», французькі салонні ігри XVIII століття, де сходяться паралелі, інша причина слави Деніела Еллсберґа, чому потрібно частіше спізнюватися на літаки

Розділ 11

Чого очікувати, сподіваючись на виграш у лотерею

Чи потрібно грати в лотерею?

Загалом розважливою вважається відповідь «ні». Стара приказка вчить нас, що лотерея — це «податок на дурнів», який забезпечує державі дохід коштом людей, достатньо необачних для того, щоб купувати білети. І коли розглядати лотерею як податок, стає зрозуміло, чому вони такі популярні в державних скарбниць. Щоб сплатити цей податок, люди добровільно стоять у чергах до кіосків; скільки ще таких є?

Привабливість лотерей — річ не нова. Історія лотерей починається у XVII столітті в Генуї[152]; лотерея тут виникла випадково з виборчої системи. Кожні шість місяців змінювалися два члени Таємної ради при дожі — *governatori*. Замість виборів у Генуї влаштовувалося жеребкування: з купи клаптиків паперу, на яких були написані імена всіх 120 членів Ради, навмання витягували два. Невдовзі гравці в місті почали робити ставки на результати «виборів». Ставки набули великої популярності, тож гравцям почало не подобатися, що потрібно чекати дня виборів, щоб випробувати долю; вони швидко зрозуміли, що коли ставки робляться на клапті паперу, який витягується з купи таких самих, то зовсім не потрібно влаштовувати вибори. Імена політиків замінили числа, і 1700 року в Генуї вже розігрувалася лотерея, що здалася б дуже знайомою сьогоднішнім учасникам лотереї «Павербол». Учасники лотереї намагалися вгадати п'ять випадкових чисел, розмір виграшу залежав від кількості вгаданих чисел.

Лотереї швидко поширилися у Європі, а потім і в Північній Америці. Під час Війни за незалежність США і Континентальний конгрес, і уряди штатів організовували лотереї для збору коштів на боротьбу проти британців. Гарвард, до того, як у нього з'явився фонд з дев'ятизначних чисел, у 1794 і 1810 роках проводив лотереї, кошти від яких пішли на будівництво двох нових коледжів[153]. (Вони і досі використовуються як гуртожитки для першокурсників).

Поширення лотерей вітали не всі. Моралісти вважали, і небезпідставно, що лотереї — це ті самі азартні ігри. Супротивником лотереї був і Адам Сміт. У «Багатстві народів» він пише:

> Про те, що шанси виграшу природно переоцінюються[154], ми можемо дізнатися із загального успіху лотерей. У світі ніколи не було й не буде повністю чесної лотереї, тобто такої, у якій усі виграші компенсують усі втрати, бо в такому разі організатор лотереї не мав би з неї нічого… Лотерея, в якій жоден виграш не перевищував би двадцяти фунтів, хай ця лотерея в інших відношеннях була б набагато ближчою до повністю чесної, ніж звичайні державні лотереї, не матиме того самого попиту. Щоб отримати кращі шанси на великі виграші, дехто купує по кілька білетів, а інші — дрібні частки ще більшої їх кількості. Проте не існує обґрунтованішого твердження в математиці, ніж те, що чим більше білетів ви наважуєтеся придбати, тим більші у вас шанси програти. Ризикніть на всі білети в лотереї, і ви напевне програєте; і що більше у вас білетів, то ближчі ви до цієї певності.

Пафос Сміта і його гідне захоплення наголошування на кількісних аргументах не мають відвернути вашої уваги від того факту, що його висновок, строго кажучи, неправильний. Більшість гравців у лотерею скажуть, що придбання двох білетів замість одного не збільшує шанси на програш, а навпаки — дає вам удвічі вищий шанс виграти. І це правда! Якщо йдеться про лотереї з простою структурою виграшу, у цьому легко переконатися самому. Припустимо, лотерея має 10 мільйонів числових комбінацій, з яких тільки одна є виграшною. Білети коштують по 1 долару, а джек-пот становить 6 мільйонів доларів.

Людина, що купить усі до єдиного білети, витратить 10 мільйонів доларів і отримає 6 мільйонів призових; іншими словами, саме так, як каже Сміт, ця стратегія — незаперечно програшна, програшна на 4 мільйони доларів. Дрібний гравець, який купує один білет, у кращому становищі — принаймні він має один шанс з 10 мільйонів виграти!

А якщо купити два білети? Тоді шанси на програш зменшуються, хоча, треба визнати, лише з 9 999 999 на 10 мільйонів до 9 999 998 на 10 мільйонів. Якщо купувати білети і далі, імовірність програти також знижуватиметься, поки ви не купите 6 мільйонів білетів. У цьому разі ваші шанси отримати джек-пот, а отже, повернути своє, становлять вагомі 60 %, тоді як програти — лише 40 %. Усупереч твердженню Сміта, купивши більше білетів, ви знизили ймовірність програшу.

Однак купіть ще один білет, і ви *напевне* втратите гроші (але буде це 1 долар чи 6 000 001 залежить від того, чи буде у вас виграшний білет).

Хід думки Сміта відтворити зараз тяжко, але він міг стати жертвою помилки «всі лінії прямі», міркуючи приблизно так: якщо купівля всіх білетів — це однозначний програш, то що більше білетів купуєш, то більшою стає ймовірність втратити гроші.

Придбання 6 мільйонів білетів мінімізує шанси втратити гроші, але це не означає, що так діяти правильно; має значення, *скільки* грошей ви втрачаєте. Покупець одного білета майже напевне втрачає гроші, але він знає, що багато не втратить. Власник 6 мільйонів білетів, незважаючи на нижчі шанси на програш, — у набагато небезпечнішому становищі. І, напевно, ви і далі вважаєте, що жоден з цих варіантів не дуже розумний. Як відзначає Сміт, якщо у лотереї держава має виграшне становище, то грати в будь-якому разі нерозумно.

Сміт у своїй аргументації випускає з уваги одну річ — поняття *очікуваної цінності*. Це формальне математичне поняття передає інтуїтивний здогад, який намагається виразити Сміт. Припустимо, ми маємо предмет, грошова вартість якого невизначена, — скажімо, лотерейний білет:

9 999 999 з 10 000 000 разів: білет не вартує нічого
1 з 10 000 000 разів: білет вартує 6 мільйонів доларів

Незважаючи на таку непевність, ми можемо бажати присвоїти білету певну цінність. Чому? Ну, скажімо, хтось скуповує у людей білети по 1 долару 20 центів. Чи буде розумним продати свій білет і покласти до кишені 20 центів прибутку, чи краще білет залишити собі? Залежатиме від того, яку цінність я присвоїв білету — більше чи менше за 1 долар 20 центів.

Ось як обчислювати очікувану цінність лотерейного білета. Для кожного з можливих результатів множимо ймовірність цього результату на цінність білета при цьому результаті. У нашому спрощеному випадку результатів лише два: виграш або програш. Тож отримуємо:

$9\,999\,999/10\,000\,000 \times 0 = 0$ доларів;
$1/10\,000\,000 \times 6\,000\,000 = 0{,}60$ долара.

Тепер результати додаємо:

$0 + 0{,}60 = 0{,}60.$

Тож очікувана цінність вашого білета становить 60 центів. Якщо лотофіл пропонує за ваш білет 1 долар 20 центів, очікувана цінність каже вам, що потрібно приставати на пропозицію. Ну, насправді очікувана цінність каже, що вам не варто було платити долар спочатку!

Очікувана цінність — не цінність, що очікується

Очікувана цінність — ще одне математичне поняття, що має назву, як-от значущість, яка не точно передає його зміст. Ми не «очікуємо», що лотерейний білет коштуватиме 60 центів: нічого подібного, він коштує 10 мільйонів або не коштує нічого, без варіантів.

Розгляньмо такий випадок: припустимо, я ставлю 10 доларів на пса, який, як я вважаю, з 10 %-ю ймовірністю виграє у собачих перегонах. Якщо пес перемагає, я отримую 100 доларів, якщо програє — не отримую нічого. Очікувана цінність ставки:

$$(10\ \% \times 100\ \text{доларів}) + (90\ \% \times 0\ \text{доларів}) = 10\ \text{доларів}.$$

Звісно, я не очікую, що так станеться. Виграш 10 доларів — це навіть не можливий результат за моєю ставкою, не те, що очікуваний. Кращою назвою була б «середня цінність» — оскільки очікувана цінність ставки — це те, що я очікував би отримати, якби зробив *багато* таких ставок на *багато* таких собак. Скажімо, я зробив тисячу таких ставок по 10 доларів кожна. Ймовірно, я виграв би близько 100 з них (знову закон великих чисел!), щоразу отримуючи по 100 доларів, усього 10 000; таким чином, мої тисяча ставок у середньому приносять 10 доларів на ставку. У підсумку, ймовірно, ви залишилися б приблизно при своєму.

Очікувана цінність — це чудовий спосіб з'ясувати справедливу ціну предмета, на зразок ставки на собачих перегонах, справжня цінність якого не визначена. Якби я платив по 12 доларів за таку ставку, то зрештою, дуже ймовірно, втратив би гроші; з іншого боку, якби вдалося платити по 8 доларів, то, напевно, потрібно було б ставити всі гроші*. Навряд чи хтось у наш час грає на собачих перегонах, проте механізм очікуваної цінності залишається тим самим і для перегонів, і фондових опціонів, і страхування життя.

Закон про мільйон[155]

Поняття очікуваної цінності почало привертати увагу математиків у середині XVII століття, а наприкінці цього століття ідея вже була достатньо розвинутою для того, щоб її застосовували науковці-практики, такі як Едмонд Галлей, Королівський астроном Англії**. Так, отой самий хлопець, чия комета! Але Галлей був також і одним з перших учених, що займалися проблемою правильного ціноутворення у страхуванні, яка у часи короля Вільгельма III була життєво важливим військовим питанням. Англія з ентузіазмом устряла у війну

* Точніший аналіз «справедливої ціни» також враховує оцінку ризику; ми повернемося до цього питання у наступному розділі.

** Ця посада існує досі! Але нині вона переважно почесна, тому що річна платня сто фунтів стерлінгів залишилася незмінною з моменту запровадження посади 1675 року королем Карлом II.

на континенті, а війна потребує грошей. Парламент запропонував зібрати необхідні кошти за допомогою «Закону про мільйон» 1692 року, що мав на меті отримання мільйона фунтів від продажу населенню довічної ренти. Підписка на ренту передбачала сплату Короні чималої одноразової суми, а взамін гарантувала щорічні довічні виплати. Це було своєрідним «страхуванням навиворіт»: покупці такої ренти фактично роблять ставку на те, що ближчим часом вони не помруть. Про зачатковий стан тогочасної страхової науки свідчить те, що вартість ренти встановлювалася безвідносно до віку покупця*[156]! Довічна річна рента для дідуся, який, імовірно, отримуватиме її максимум десяток років, і для малої дитини коштувала однаково.

Галлей був достатньою мірою науковцем, щоб розуміти абсурдність цієї незалежної від віку схеми ціноутворення. Він вирішив розробити раціональніший розрахунок вартості довічної ренти. Складність у тому, що, на відміну від комет, люди приходять і йдуть не за чітким графіком. Однак на основі статистики дат народжень і смертей Галлею вдалося оцінити *ймовірність* тривалості життя для кожного покупця ренти і таким чином обчислити очікувану цінність ренти: «Ясно, що покупець має сплачувати тільки ту частину вартості ренти, яку він отримуватиме протягом свого життя; і це має обчислюватися як річний розрахунок, а суми всіх таких річних вартостей, складені разом, становитимуть вартість ренти для життя певної особи».

Іншими словами: дідусь, що має меншу очікувану тривалість життя, платить за ренту менше, ніж молода людина.

«Це-е-е о-че-видно»

Відступ: коли я розповідаю людям про Едмонда Галлея і ціну ренти, мене часто перебивають: «Та ж *очевидно*, що з молодих людей потрібно брати більше!».

Ні, не очевидно. Точніше, очевидно тоді, коли ви вже це знаєте, як знають сучасні люди. Але той факт, що люди, які роблять регулярні виплати, раз у раз припускаються такої помилки, свідчить про те, що *насправді* не очевидно. У математиці повно ідей, які здаються очевидними зараз — що від'ємні числа можна додавати й віднімати, що корисно представляти точки на площині парою чисел, що ймовірності невизначених подій можна описувати й оперувати ними математично, — але насправді вони зовсім не є очевидними. Якби вони такими були, то не з'явилися б у людській думці так пізно.

Це нагадує мені давній випадок, що стався на математичному факультеті Гарварду, героєм якого був один старий добрий професор з Росії, назвемо

* В інших державах, наприклад ще у Римі III століття, розуміли, що належна ціна ренти має бути тим більшою, чим молодшим є покупець.

його О. Професор О. пише на дошці довгу й заплутану алгебраїчну формулу, коли студент із заднього ряду піднімає руку.

«Професоре О., я збився на останньому кроці. Чому ці два оператори комутують?»

Професор робить круглі очі й каже: «Це-е-е о-че-видно».

Але студент насідає: «Перепрошую, професоре О., але я справді цього не зрозумів».

Тож професор О. повертається до дошки і пише ще кілька рядків пояснення. «Що ми повинні зробити? Гаразд, обидва ці оператори діагоналізовані… гаразд, не те, щоб точно діагоналізовані, але… хвилинку…» Професор О. на якийсь час застигає, пильно вдивляючись у дошку і чухаючи підборіддя. Потім іде з аудиторії до свого кабінету. Минає хвилин десять. Студенти вже мало не починають розходитися, коли професор О. повертається і стає перед дошкою знову.

«Так, — каже він задоволено. — Це-е-е о-че-видно».

Не грайте в «Павербол»

Лотерея «Павербол» сьогодні проводиться у сорока двох штатах, окрузі Колумбія та на американських Віргінських островах. Лотерея надзвичайно популярна, часом кількість проданих білетів на один розіграш доходить до ста мільйонів[157]. У «Павербол» грають і бідні, й багаті. Мій батько, колишній голова Американської статистичної асоціації, грає в «Павербол», а оскільки він зазвичай купує білет і на мене, то, мабуть, граю і я.

Чи розумно це?

3 грудня 2013 року, коли я це пишу, джек-пот становить чудові сто мільйонів доларів. І виграти можна не тільки джек-пот. Як і у багатьох інших лотереях, у «Павербола» є багато рівнів виграшів; менші виграші, що випадають частіше, допомагають створювати у покупців білетів враження, що гра варта грошей.

За допомогою очікуваної цінності можна перевірити це враження математичними фактами. Ось як обчислити очікувану цінність білета, що коштує 2 долари. Купуючи такий білет, ви купуєте:

Шанс 1/175 000 000 на виграш джек-поту 100 мільйонів доларів
Шанс 1/5 000 000 на виграш 1 мільйона доларів
Шанс 1/650 000 на виграш 10 000 доларів
Шанс 1/19 000 на виграш 100 доларів
Шанс 1/12 000 на виграш іншого призу 100 доларів
Шанс 1/700 на виграш 7 доларів
Шанс 1/360 на виграш іншого призу 7 доларів

Шанс 1/110 на виграш 4 доларів
Шанс 1/55 на виграш іншого призу 4 доларів

(Усі подробиці й пояснення можна знайти на сайті лотереї, на якому також є дивовижно веселий розділ «Частих запитань», де повно таких, як-от: «**З.: Чи мають білети «Павербол» термін дії?** В.: Так. Усесвіт сходить на ніщо, і немає нічого вічного»).

Тож очікувана сума виграшу становить:

100 мільйонів / 175 мільйонів + 1 мільйон / 5 мільйонів + 10 000 / 650 000 + + 100 / 19 000 + 100 / 12 000 + 7 / 700 + 7 / 360 + 4 / 110 + 4 / 55,

що дорівнює трохи менше за 94 центи. Іншими словами: за очікуваною цінністю, білет двох доларів не коштує.

Це ще не кінець, тому що не всі лотерейні білети однакові. Коли, як-от сьогодні, джек-пот становить 100 мільйонів, очікувана цінність білета скандально низька. Але щоразу, коли джек-пот не виграє ніхто, до призового фонду надходить більше грошей. І що більшим буде джек-пот, то більше людей куплять білети, а що більше людей куплять білети, то більшою буде ймовірність, що один з цих білетів зробить його власника мультимільйонером. У серпні 2012 року залізничний робітник з Мічиґану Дональд Лоусон забрав додому джек-пот — 337 мільйонів доларів.

Коли найбільший виграш такий великий, очікувана цінність білета теж зростає. Підставляємо джек-пот 337 мільйонів у ті самі обчислення:

337 мільйонів / 175 мільйонів + 1 мільйон / 5 мільйонів + 10 000 / 650 000 + + 100 / 19 000 + 100 / 12 000 + 7 / 700 + 7 / 360 + 4 / 110 + 4 / 55,

що дорівнює 2 долари 29 центів. Несподівано виявляється, що все ж таки лотерея не така вже й погана річ. До якої суми має зрости джек-пот, щоб очікувана цінність білета перевищила його ціну 2 долари? От тут, нарешті, ви можете сказати вашій вчительці з восьмого класу, що зрозуміли, навіщо потрібна алгебра. Якщо ми позначимо суму джек-поту літерою J, очікувана цінність білета становитиме:

J / 175 мільйонів + 1 мільйон / 5 мільйонів + 10 000 / 650 000 + 100 / 19 000 + + 100 / 12 000 + 7 / 700 + 7 / 360 + 4 / 110 + 4 / 55,

або, якщо трохи спростити:

J / 175 мільйонів + 36,7 цента.

А тепер алгебра. Щоб очікувана цінність була більшою за 2 долари, які ви витратили, потрібно, щоб частка J / 175 мільйонів була більшою за близько 1 долар 63 центи. Помноживши обидві частини на 175 мільйонів, отримуємо порогову суму джек-поту, трохи більшу за 285 мільйонів доларів. Таке трапляється не так уже й рідко, тільки 2012 року джек-пот перевищував цю суму тричі[158]. Тож здається, що грати в лотерею не така вже й погана ідея — якщо бути пильним і грати тільки тоді, коли джек-пот стає достатньо великим.

Це ще не кінець. Ви не єдина людина, що знається на алгебрі. І навіть люди, які алгебри не знають, інстинктивно розуміють, що білет привабливіший, коли джек-пот становить 300 мільйонів, а не 80 — як і зазвичай, математичний підхід — це формалізована версія наших природних міркувань, продовження здорового глузду іншими засобами. За звичайного головного призу 80 мільйонів можуть продатися 13 мільйонів білетів. Але коли Дональд Лоусон виграв 337 мільйонів, він змагався за цей виграш із 75 мільйонами білетів інших гравців*.

Що більше людей грає, то більше людей виграють. Але джек-пот тільки один. І якщо двоє людей вгадають усі шість чисел, вони мають поділити великі гроші між собою.

Наскільки ймовірним є те, що ви виграєте джек-пот і не треба буде його ні з ким ділити? Мають статися дві речі. По-перше, ви маєте вгадати всі шість чисел; ваш шанс на це становить 1 на 176 мільйонів. Але для виграшу цього недостатньо — *усі інші мають програти*.

Шанси на те, що будь-який окремий учасник лотереї не виграє джек-пот, дуже добрі — 174 999 999 на 175 мільйонів. Але коли у грі бере участь ще 75 мільйонів людей, шанси на те, що один з них виграє джек-пот, починають бути значними.

Наскільки значними? Скористаємося фактом, з яким ми вже стикалися кілька разів: якщо ми хочемо з'ясувати ймовірність того, що станеться річ номер один, і ми знаємо ймовірність того, що станеться річ номер два, і ці дві речі не залежать одна від одної — настання номера один не впливає на ймовірність настання номера два, — тоді ймовірність настання речі номер один і речі номер два є добутком цих двох ймовірностей.

Надто абстрактно? Звернімося до нашої лотереї.

* Принаймні так мені здається. Я не зміг знайти статистичних даних про продаж білетів, але дуже достовірну оцінку можна зробити на основі даних, які оприлюднює «Павербол», про кількість виграшів нижчих рівнів.

Є імовірність 174 999 999 / 175 000 000 того, що я програю, і ймовірність 174 999 999 / 175 000 000 того, що програє мій тато. Тож імовірність того, що програємо ми *обидва*, становить

174 999 999 / 175 000 000 × 174 999 999 / 175 000 000,

або 99,9999994 %. Іншими словами, як я й кажу татові щоразу, роботи нам краще не кидати.

Яка ймовірність того, що *всі 75 мільйонів* ваших конкурентів програють? Усе, що потрібно зробити, це помножити частку 174 999 999 / 175 000 000 саму на себе 75 мільйонів разів. Звучить як особливо жорстоке покарання. Задачу можна зробити набагато простішою через піднесення до степеня:

$(174\,999\,999 / 175\,000\,000)^{75\text{ мільйонів}} = 0{,}651\ldots$

Тож існує 65 %-ва ймовірність того, що жоден інший учасник лотереї, крім вас, не виграє, що означає 35 %-ву ймовірність, що принаймні один з них виграє. Якщо так станеться, ваша частка з 337 мільйонів доларів зіщулиться до якихось нещасних 168 мільйонів. Це зменшує очікувану вартість джек-поту до

65 % × 337 мільйонів + 35 % × 168 мільйонів = 278 мільйонів доларів,

що менше від нашого порогового розміру джек-поту 285 мільйонів доларів. І це навіть не беручи до уваги, що вгадати шість номерів можуть *більше* ніж два гравці, що означатиме поділ головного призу на ще більше частин. Можливість поділу джек-поту робить очікувану цінність лотерейного білета меншою за ціну, за яку ви його купуєте, навіть тоді, коли джек-пот досягає розміру 300 мільйонів доларів. Якби джек-пот зростав ще більше, очікувана цінність білета могла б вийти у «вигідну» зону — але могла б і не вийти, якщо великий джек-пот залучив би ще більшу кількість гравців, що куплять білети*. Досі найбільший за всю історію лотереї «Павербол» джек-пот, 558 мільйонів доларів, виграли двоє гравців, а найбільший джек-пот в історії США, 688 мільйонів у лотереї «Мега-Мільйони», було розділено натроє.

А ми ще навіть не взяли до уваги податків, які потрібно сплатити з виграшу, як і того, що виграш буде виплачуватися річними траншами, — якби ви

* Читачам, охочим заглибитися в теорію ухвалення рішень ще далі, пораджу чудове джерело — статтю «Правильні ставки в лотереї, і чому не слід їх робити» Аарона Абрамса і Скіпа Ґарібальді («Американський математичний щомісячник», том 117, № 1, січень 2010 року, с. 3–26). Назва статті є і коротким її висновком.

захотіли отримати весь виграш відразу, він виявився б істотно меншим. І ще пам'ятайте: лотерея — річ державна, а держава багато чого про вас знає. У багатьох штатах є закони про обов'язкову сплату податкових заборгованостей та інших фінансових зобов'язань з виграшу в лотерею, які здійснюються до того, як ви побачите хоч цент. Мій знайомий, який працює у державній лотереї, розповідав мені історію про чоловіка, що прийшов зі своєю подругою по виграш 10 тисяч доларів, маючи намір добряче погуляти на них у вихідні. Коли переможець подав свій виграшний білет, працівник лотереї сказав, що все, за винятком кількох сотень, уже пішло на сплату аліментів, які той заборгував своїй попередній подрузі.

Таким чином поточна подруга вперше дізналася про дитину з минулого життя того чоловіка. У результаті вихідні пройшли не так, як планувалося.

Тож якою є найкраща стратегія заробляння грошей на лотереї «Павербол»? Ось математично вивірений план з трьох пунктів:

1. Не грайте в «Павербол».
2. Якщо ви все ж таки граєте в «Павербол», не грайте, доки джек-пот не зросте до справді великих сум.
3. А якщо ви купуєте білети, коли розігрується великий джек-пот, постарайтеся зменшити ймовірність того, що виграш доведеться з кимось ділити; дообирайте числа, які не оберуть інші[159]. Не беріть дату свого народження. Не беріть виграшних номерів з попереднього розіграшу. І, заради Бога, не беріть чисел з печива з передбаченням. (Ви ж знаєте, що в кожному такому печиві числа не різні?)

«Павербол» не єдина лотерея, але всі вони мають одну спільну властивість. Лотерея, як зауважив Адам Сміт, призначена для того, щоб певна частка від продажу білетів надійшла державі; для того щоб це виконувалося, держава має взяти від продажу білетів більше, ніж вона віддасть у виграшах. Якщо дивитися на це з протилежного боку, гравці в лотерею у середньому витрачають більше, ніж виграють. Тож очікувана цінність лотерейного білета *мусить* бути від'ємною.

За винятком тих випадків, коли вона такою не є.

Лотерейне шахрайство, яке шахрайством не було

12 липня 2005 року до відділу контролю лотереї штату Массачусетс надійшло незвичайне телефонне звернення від працівника точки продажу з супермаркету у місті Кембриджі, північного передмістя Бостона, де розташовані Гар-

вардський університет і Массачусетський інститут технологій. До супермаркету прийшов студент коледжу, який хотів купити білети нової лотереї штату «Кеш ВінФол». Нічого дивного в цьому не було. Дивним був розмір замовлення; студент приніс чотирнадцять тисяч заповнених від руки бланків замовлень на придбання лотерейних білетів на загальну суму 28 тисяч доларів.

Немає питань, відповіли з відділу контролю: якщо бланки заповнено правильно, будь-хто може грати, скільки захоче. Точки продажу мали отримувати спеціальний дозвіл з відділу контролю у разі продажу білетів на суму понад 5 тисяч доларів на день, але такі дозволи видавалися легко.

Це було добре, тому що торгівля білетами того тижня виявилася жвавою не в одному супермаркеті на околицях Бостона. До адміністрації лотереї по подібні дозволи на розіграш 14 липня звернулося ще дванадцять точок продажу. Три з них знаходилися недалеко одна від одної у переважно азійському передмісті Квінсі, місті на узбережжі на південь від Бостона. Невелика група покупців скупила у невеликій кількості точок продажу десятки тисяч білетів лотереї «Кеш ВінФол».

Що відбувалося? Відповідь не була таємницею; вона лежала на виду — прямо у правилах «Кеш ВінФол». Нова лотерея, започаткована восени 2004 року, прийшла на заміну лотереї «Мас Мільєнс», закритій після того, як за цілий рік ніхто не виграв джек-поту. Гравці втратили інтерес, білети продавалися погано. Штат потребував оновлення лотереї, і владі спало на думку взяти приклад з мічиґанської лотереї «ВінФол». Джек-пот у «Кеш ВінФол», якщо його ніхто не вигравав, не зростав щотижня далі; замість цього щоразу, коли його сума перевищувала 2 мільйони доларів, джек-пот «розбивався» — гроші розподілялися між гравцями, що виграли менші призи, для чого потрібно було вгадати менше номерів. Для наступного розіграшу джек-пот повертався до мінімальної суми 500 тисяч доларів. На нову лотерею покладали великі сподівання, адже вона давала можливість вигравати серйозні гроші без вгадування номерів джек-поту — начебто справді виграшний варіант.

Адміністратори лотереї впоралися зі своїм завданням надто добре. В лотереї «Кеш ВінФол» штат Массачусетс мимохіть створив гру, яка справді *мала* виграшну стратегію. І влітку 2005 року кілька метикованих гравців зрозуміли, в чому саме вона полягає.

У звичайний день розподіл виграшів у «Кеш ВінФол» виглядав так:

вгадано всі 6 номерів	1 на 9,3 мільйона	джек-пот різного розміру
вгадано 5 з 6	1 на 39 000	4 000 доларів
вгадано 4 з 6	1 на 800	150 доларів
вгадано 3 з 6	1 на 47	5 доларів
вгадано 2 з 6	1 на 6,8	безкоштовний лотерейний білет

Якщо джек-пот становить 1 мільйон доларів, очікувана цінність дводоларового білета дуже низька:

(1 мільйон доларів / 9,3 мільйона) + (4 000 доларів / 39 000) +
+ (150 доларів / 800) + (5 доларів / 47) + (2 долари / 6,8) = 79,8 цента.

Окупність виходить такою жалюгідною, що гравці у «Павербол» на її тлі виглядають бувалими інвесторами. (І це ми щедро оцінюємо безкоштовний білет у два долари замість того, щоб присвоїти йому набагато меншу очікувану цінність).

Картина докорінно змінюється у день «розбивання» джек-поту. 7 лютого 2005 року джек-пот досягнув суми майже 3 мільйони доларів. Його не виграв ніхто — що й не дивно, оскільки в лотерею того дня грали лише 470 тисяч осіб, і ймовірність вгадати всі шість номерів становила близько 1 на 10 мільйонів.

Тож головний приз «розбили». За формулою штату, 600 тисяч доларів припадало на призові фонди для тих, хто вгадав 5 або 3 номери, а 1,4 мільйона доларів — на призовий фонд для виграшних 4 номерів. Ймовірність вгадати чотири з шести виграшних номерів становить близько 1 на 800, отже, гравців, що правильно назвали чотири номери, на 470 тисяч усіх гравців того дня мало бути близько шестисот. Це багато переможців, але 1,4 мільйона доларів — багато грошей. Якщо поділити їх на 600, буде більш як по 2 тисячі на кожного, хто вгадав чотири номери. Насправді очікуваний виграш за чотири правильних номери того дня становив близько 2385 доларів. Це набагато привабливіша пропозиція за жалюгідні 150 доларів, які б ви виграли у звичайний день. Ймовірність 1 з 800 при виграші 2385 доларів — це очікувана цінність білета

2364 долари / 800 = 2,98 долара.

Іншими словами, призовий фонд для чотирьох вгаданих номерів *сам по собі* робить білет вартим його ціни. Коли додати інші виграші, картина стає ще привабливішою:

Виграш	**Імовірність виграшу**	**Очікувана кількість переможців**	**Розподіл «розбивання» джек-поту**	**Сума на виграш (з «розбитим» джек-потом)**
5 з 6	1 з 39 000	12	600 000	50 000
4 з 6	1 з 800	587	1,4 млн	2385
3 з 6	1 з 47	10 000	600 000	60

Тож можна очікувати, що білет у середньому принесе виграш

50 000 доларів / 39 000 + 2385 доларів / 800 + 60 доларів / 47 = 5,53 долара.

Інвестиція, яка приносить три з половиною долари на вкладені два — не та, від якої відмовляються*.

Звичайно, якщо один щасливець виграє джек-пот, усім іншим лотерея підносить гарбуза. Але «Кеш ВінФол» ніколи не була такою популярною, щоб цього досягти. Із сорока п'яти випадків «розбивання» джек-поту за всю історією цієї лотереї лише одного разу було вгадано всі шість номерів, і джек-пот не «розбили»**.

Відразу потрібно сказати: це обчислення не означає, що білет ціною два долари напевне принесе вам виграш. Навпаки, якщо купувати білет «Кеш ВінФол» у день «розбивання» джек-поту, швидше за все, білет не виграє нічого, так само, як і в будь-який інший день. Очікувана цінність — це не цінність, якої ви очікуєте!

Але в день «розбивання» виграші, у тому малоймовірному випадку, якщо ви виграєте, є більшими — набагато більшими. Чари очікуваної цінності в тому, що *середня* віддача зі ста, тисячі чи десяти тисяч білетів дуже ймовірно буде близькою до 5,53 долара на білет. Будь-який окремий білет, ймовірно, нічого не виграє, але якщо у вас їх тисяча, то це фактично гарантія того, що ви повернете свої гроші й отримаєте щось іще понад те.

Хто купує відразу тисячу лотерейних білетів?

Хлопці з MIT, ось хто.

Причина, чому я можу розповісти вам про виграші лотереї «Кеш ВінФол» 7 лютого 2005 року аж до останнього долара, в тому, що всі ці цифри містяться у вичерпному і, відверто кажучи, певним чином захопливому звіті[160], представленому у липні 2012 року генеральним інспектором штату Массачусетс Ґреґорі В. Салліваном. Гадаю, що з певністю можу стверджувати, що це єдиний в історії випадок, коли документ фінансового нагляду штату викликає у читача запитання, чи купив хтось права на його екранізацію.

А причина того, що *конкретна дата*, для якої зроблено всі ці записи, — саме 7 лютого, у тому, що це був перший день «розбивання» джек-поту після того, як старшокурсник MIT Джеймс Гарві, який саме працював над порівняльним дослідженням лотерей у різних штатах, зрозумів, що Массачусетс ви-

---

* Між іншим, п'ять номерів того дня вгадали лише семеро гравців, тож кожен з цих щасливчиків отримав понад 80 тисяч доларів. Але те, що їх було там мало, видається невезінням, а не тим, чого справедливо чекаєш, заздалегідь обчислюючи очікувану цінність білета.

** З огляду на популярність лотереї «Кеш ВінФол» це таки дещо дивно. Існувала ймовірність близько 10 % на кожне «розбивання» джек-поту, що хтось його виграє, тож це мало статися чотири або п'ять разів. Те, що це сталося лише одного разу, наскільки я можу сказати, — чисте невезіння, або, якщо вам так більше подобається, везіння для людей, які розраховували на менші виграші при «розбиванні» джек-поту.

падково створив неймовірно прибутковий механізм, яким міг скористатися будь-хто, достатньо уважний до чисел, щоб його помітити. Гарві зібрав групу друзів (у MIT нескладно зібрати групу друзів, кожен з яких уміє обчислювати очікувану цінність), і вони купили тисячу білетів. Як ви, можливо, й очікували, серед них випав шанс «один на вісімсот», і група Гарві забрала один з виграшів 2 тисячі доларів. Вони також виграли кілька призів «3 з 6»; загалом початкову інвестицію було майже потроєно.

Ви, напевно, не здивуєтеся, дізнавшись, що Гарві та його співінвестори не припинили грати в лотерею «Кеш ВінФол». Як, напевно, не здивуєтеся тому, що ту роботу йому так і не вдалося виконати — принаймні для отримання заліку. Дослідницький проект швидко перетворився на процвітаючий бізнес. Уже влітку Гарві з товаришами купували білети десятками тисяч — саме один з членів цієї групи зробив гігантське замовлення в кембриджському супермаркеті. Групу було названо «Випадкові стратегії»[161], хоча в їхньому підході нічого випадкового не було зовсім; така назва являла собою згадку про «Випадкову будівлю», гуртожиток, у якому Гарві придумав план заробляння грошей на лотереї «ВінФол».

І студенти MIT були тут не єдиними. Було створено принаймні ще два «клуби гравців» для отримання вигоди з лотереї, ненавмисно прихильної до гравців. Ін Чжан, бостонський медик-дослідник, що отримав ступінь у Північно-Східному університеті, створив «Лотерейний клуб доктора Чжана». Саме цей клуб забезпечив пік продажу лотерейних білетів у Квінсі. Невдовзі група щоразу, коли джек-пот «розбивали», скуповувала білети на 300 тисяч доларів. 2006 року доктор Чжан залишив медицину, щоб повністю присвятити себе грі в «Кеш ВінФол».

Ще одну групу гравців очолив Джералд Селбі — пенсіонер, якому вже було за сімдесят, що мав ступінь бакалавра з математики. Селбі жив у Мічиґані, де почалася історія лотереї «ВінФол»; до його групи входило 32 гравці, переважно родичі. Вони грали в лотерею близько двох років — аж до її закриття 2005-го. Коли Селбі почув, що легкі гроші повертаються на Сході, у планах сумнівів не було; у серпні 2005 року він з дружиною Марджорі приїхав до Дірфілда, що у західній частині Массачусетсу, і зробив першу ставку — шістдесят тисяч білетів. Це принесло трохи більше за 50 тисяч доларів чистого прибутку. Селбі, що вже мав досвід гри у Мічиґані, винайшов додатковий спосіб заробити на білетах «Кеш ВінФол». Пункти продажу в Массачусетсі мали 5 % комісійних з продажу лотерейних білетів. Селбі домовився напряму з одним пунктом, купуючи білетів за один раз на сотні тисяч, а взамін отримуючи половину у частці 5 % комісійних. Саме лише це приносило групі Селбі додаткові кілька тисяч[162] на кожному «розбиванні» джек-поту.

Щоб зрозуміти, як впливає на гру наплив великих гравців, диплом MIT не потрібен. Пам'ятаймо: причина надзвичайно великих виплат при «розбиванні» джек-поту полягала в тому, що великі гроші ділилися між купкою гравців. 2007 року на кожен розіграш з «розбиванням» продавалося мільйон і більше білетів, і більшість з них — трьом великим синдикатам. Дні виграшів 2300 доларів на чотирьох вгаданих номерах давно минули; якщо білети купують півтора мільйони людей, і один з восьмисот вгадує чотири числа, то таких правильних відповідей зазвичай буде майже дві тисячі. Тож кожна частка загального призового фонду 1,4 мільйона доларів тепер буде близько 800 доларів.

Дуже легко зрозуміти, скільки великий гравець зароблятиме на «Кеш ВінФол» — фокус у тому, щоб подивитися на ситуацію з боку самої лотереї. У день «розбивання» джек-поту штат має (щонайменше!) 2 мільйони накопичених у джек-поті грошей, які повинен пустити на виграші. Припустимо, на такий розіграш було куплено півтора мільйона білетів. Це ще три мільйони доходу, з яких 40 %, або 1,2 мільйона доларів, іде до скарбниці штату, а решта 1,8 мільйона поповнює виграшний фонд, який повністю розігрується між власниками білетів. Тож штат у такий день отримує 3 мільйони, а віддає 3,8 мільйона*: 2 мільйони, які вже накопичені у джек-поті, і 1,8 мільйона з проданих на цей розіграш білетів. У будь-який окремий день, за будь-яких обставин, гравці в середньому програють, а штат, відповідно, навпаки. Тож такий день для гри добрий — у цілому покупці білетів отримують від штату 800 тисяч доларів.

Якщо купується 3,5 млн білетів, картина виходить інша; в такому разі лотерея забирає 2,8 млн доларів, а виплачує решту 4,2 млн. У джек-поті вже накопичено 2 мільйони, тому разом призовий фонд становить 6,2 млн доларів — менше ніж 7 млн виручки, яка надходить штату. Іншими словами, незважаючи на щедрість «розбивання» джек-поту, лотерея стає такою популярною, що штат усе одно заробляє за рахунок гравців.

Через те штат дуже-дуже задоволений.

Точка рівноваги настає, коли 40 %-ва частка надходжень у день «розбивання» джек-поту точно збігається з 2 мільйонами доларів, що вже лежать у призовому фонді (тобто грошима, внесеними гравцями, достатньо нерозважливими або ризикованими для того, щоб грати у «Кеш ВінФол» без «розбивання» джек-поту). Це 5 млн доларів, або 2,5 млн білетів. Більше куплених білетів — і грати у «ВінФол» невигідно. Але коли менше — а протягом усієї історії цієї лотереї їх *було* менше, — лотерея дає гравцям можливість щось заробити.

Насправді ми тут застосовуємо чудовий і водночас природний факт, що має назву *адитивність очікуваної цінності*. Припустимо, я маю франшизу

* Ми не беремо до уваги призових грошей поза «розбиванням»; проте, як ми вже бачили, надто багато їх не буває.

«МакДональдз» і кав'ярню, і очікуваний річний прибуток від «МакДональдзу» — 100 тисяч доларів, а кав'ярні — 50 тисяч. Звичайно, ці показники залежно від року можуть різнитися; очікувана цінність означає, що у тривалій перспективі середній прибуток від «МакДональдзу» становитиме близько 100 тисяч доларів на рік, а середньорічний прибуток від кав'ярні — 50 тисяч.

Тобто в середньому мій прибуток від «Біґ-Маків» та кави разом становитиме 150 тисяч доларів, суму очікуваних прибутків від кожного з моїх двох підприємств.

Іншими словами:

АДИТИВНІСТЬ: Очікувана цінність двох речей є сумою очікуваної цінності першої речі та очікуваної цінності другої речі.

Математики полюбляють підсумовувати міркування формулами — так ми записували переставну властивість множення («*ось стільки* рядів *по стільки* отворів — те саме, що *от стільки* колонок по *стільки* отворів) формулою $a \times b = b \times a$. У нашому випадку, якщо X і Y — дві невизначені величини, а $E(X)$ — це «очікувана цінність X», то адитивність — це

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

А ось як це пов'язано з нашою лотереєю. Вартість усіх білетів у конкретному розіграші дорівнює сумі грошей, яку віддає штат. І ця вартість невизначеною зовсім не є*; це сума грошей, на які «розбивається» призовий фонд, 3,8 млн доларів у нашому першому прикладі. Очікувана цінність суми 3,8 млн доларів — це саме те, чого ви й очікуєте — 3,8 млн доларів.

У цьому прикладі у розіграші з «розбиванням» джек-поту брали участь 1 мільйон гравців. За принципом адитивності, очікувана цінність усіх 1,5 мільйона лотерейних білетів — це очікувана цінність загальної вартості всіх білетів, тобто 3,8 млн доларів. Але всі білети (принаймні, доки ви не знаєте виграшних номерів) коштують однаково. Тож яке число потрібно додати 1,5 млн разів, щоб у сумі вийшло 3,8 млн? Це число — 2,53 долара. Очікуваний прибуток на білет ціною 2 долари становить 53 центи — добрий прибуток на те, що мало бути напевне програшною ставкою.

Принцип адитивності такий інтуїтивно привабливий для нас, що може легко видатися очевидним. Але так само, як ціна на довічну ренту, він не очевидний! Щоб це зрозуміти, підставимо на місце очікуваної цінності щось інше — і все розвалиться. Дивіться:

* Ми і далі не зважаємо на гроші, які не входять до призового фонду джек-поту.

Найбільш імовірна вартість суми певної множини речей є сумою найбільш імовірних вартостей кожної з цих речей.

Абсолютно неправильно. Припустимо, я навмання обираю, кому з моїх трьох дітей дістанеться родинний спадок. Найбільш імовірна вартість частки кожного з дітей дорівнює нулю, тому що двоє з трьох залишаться без спадщини. Але найбільш імовірна вартість суми цих трьох розподілів спадщини — насправді, *єдина можлива* вартість, — дорівнює усьому моєму багатству.

Голка Бюффона, локшина Бюффона, круг Бюффона

На хвилину маємо перервати історію про студентів і лотерею, тому що, коли ми заговорили про адитивність очікуваної цінності, я не можу не розповісти про одне з найкрасивіших з відомих мені доведень. Ґрунтується воно саме на цій ідеї.

Починається воно з гри *franc-carreau*, яка, як і генуезька лотерея, нагадує про те, що люди у давнину могли зробити азартну гру майже з усього. Усе, що потрібно для гри у *franc-carreau,* — це монета і підлога з квадратними плитками. Монета кидається на підлогу, а ставка робиться на те, чи потрапить монета повністю у межі однієї плитки, чи вона зачепить край. (*Franc-carreau* можна приблизно перекласти як «чесно, повністю у квадраті»[163] — для цієї гри не користувалися франком, якого ще не було, на долівку кидалося екю).

Жорж-Луї Леклерк, граф де Бюффон, був бургундським провінційним аристократом[164], що з ранніх років проявив схильність до наук. Він студіював право, — напевно, щоб, як і батько, обійняти адміністративну посаду. Та щойно отримавши диплом, молодий Бюффон право облишив і присвятив себе природничим наукам. 1733-го, у віці 27 років за видатні досягнення він став членом Паризької Королівської академії наук.

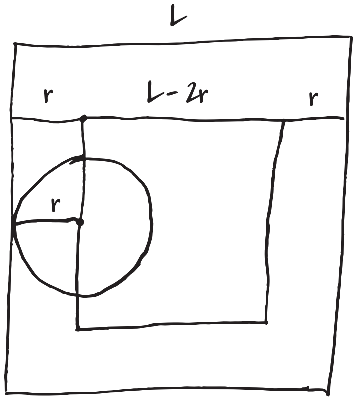
Пізніше Бюффон прославився як натураліст, написав титанічну 44-томну «Природну історію», у якій запропонував теорію походження життя, що мала стати такою ж універсальною і стислою, як Ньютонова теорія руху і сил. Але замолоду, під впливом короткої зустрічі і тривалого листування зі швейцарським математиком Ґабріелем Крамером*, Бюффон цікавився теоретичною математикою, — саме як математик він став членом Королівської академії.

Стаття, представлена Бюффоном Академії, являла собою блискуче поєднання двох галузей математики, що до того вважалися цілковито окремими: геометрії і теорії ймовірностей. Стаття присвячувалася не якомусь великому питанню механіки орбітального руху планет чи багатства народів; вона досліджувала скромну гру *franc-carreau*. Яка ймовірність того, запиту-

* Згадайте «правило Крамера» — для всіх поціновувачів лінійної алгебри, що читають цю книжку.

вав Бюффон*, що монета повністю потрапить у межі однієї квадратної плитки? І якими завбільшки мають бути квадратні плитки, щоб гра була справедливою для обох гравців?

Бюффон відповів так. Якщо монета має радіус r, а квадратна плитка — сторону довжиною L, то монета торкається межі квадрата в тому разі, коли її центр знаходиться в межах меншого квадрата, сторона якого дорівнює $L - 2r$:



Менший квадрат має площу $(L - 2r)^2$, тоді як більший — L^2; тож якщо ви ставите на те, що монета потрапить повністю в межі одного квадрата, ваш шанс на виграш буде часткою $(L - 2r)^2 / L^2$. Щоб гра була справедливою, потрібно, щоб ця ймовірність дорівнювала 1/2, тобто

$$(L - 2r)^2 / L^2 = 1/2.$$

Бюффон розв'язав це рівняння (ви теж можете це зробити, якщо вам такі речі подобаються) і з'ясував, що *franc-carreau* буде справедливою, коли сторона квадрата у $4 + 2\sqrt{2}$ рази більша за радіус монети, тобто трохи менше, ніж у сім разів. Це було цікаво через новаторське поєднання підходу ймовірності з геометричними фігурами, однак не становило великої складності, і Бюффон розумів, що академіком на цьому йому не стати. Тож він пішов далі:

«Але якщо кидати не щось кругле, як-от екю, а предмет якоїсь іншої форми — іспанський квадратний ескудо, або голку, або паличку, геометрії потрібно буде трохи більше».

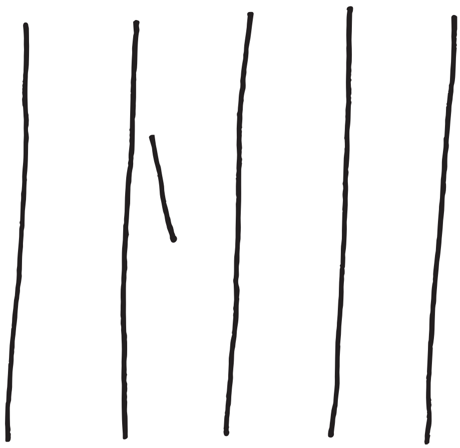
* Насправді я не до кінця певен, що на момент подання статті до Академії він був «Бюффоном»; його батько, який першим придбав титул графа де Бюффона, погано порався зі справами і мусив продати своє майно, водночас одружившись із двадцятидворічною дівчиною; Жорж-Луї подав до суду і, очевидно, домігся відчуження статків бездітного материного дядька безпосередньо на свою користь, що дало йому змогу викупити і землю, і титул.

Сказати так — не сказати нічого; задача про кидання голки — одна з причин того, що ім'я Бюффона математики пам'ятають донині. Дозвольте пояснити докладніше, що ж зробив Бюффон.

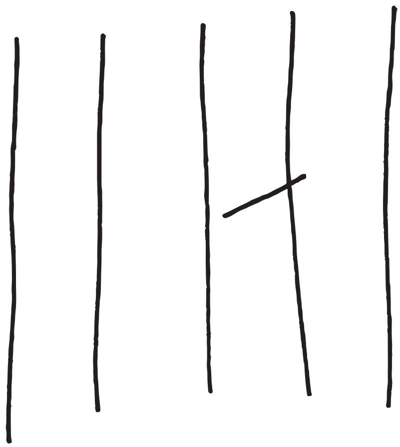
Задача Бюффона про кидання голки. Припустимо, що в нас є дерев'яна підлога з довгих тонких дощок однакової ширини, і в нашому розпорядженні опинилася голка точно такої самої довжини, як ширина дошки. Кидаємо голку на підлогу. Яка ймовірність того, що голка перетне стик між дошками?

Задача ця така незручна ось чому: коли на підлогу кинути екю, байдуже, у який бік у результаті дивитиметься Луї XV. Круг однаковий під будь-яким кутом; імовірність торкнутися стику не залежить від орієнтації.

Не те з голкою Бюффона. Якщо голка впаде майже паралельно дошкам, імовірність перетину стику буде близькою до нуля:



Але якщо вона ляже упоперек дощок, то перетне стик майже напевно:



Гра *franc-carreau* — високосиметрична, професійною мовою кажуть, що вона *інваріантна* щодо обертання. У задачі про голку цієї симетрії немає. І через те ця задача значно ускладнюється; потрібно стежити не тільки за центром голки, а й за тим, куди вона показує.

У двох крайніх випадках імовірність перетину стику дорівнює 0 (якщо голка паралельна дошці) або 1 (якщо голка і стик перетинаються під прямим кутом). Тож можемо поділити ймовірність навпіл і дійти висновку, що голка торкається стику рівно у половині випадків.

Але це неправильно; насправді голка перетинає стик набагато частіше, ніж падає у межах однієї дошки. Бюффонова задача про голку має чудово несподівану відповідь: ймовірність дорівнює $2/\pi$, або близько 64 %. До чого тут π, коли жодного кола не видно? Бюффон отримав відповідь, застосувавши дещо складну аргументацію, у якій ішлося про площу під кривою, що має назву циклоїда. Обчислення цієї площі вимагає деякого застосування математичного аналізу; нічого непідйомного для математика-другокурсника, але й нічого особливо цікавого.

Але є ще одне розв'язання, розроблене Жозефом-Емілем Барб'є через понад сто років після того, як Бюффон став членом Королівської академії. Матаналіз для нього не потрібен; насправді не потрібні й жодні складні обчислення. Для розуміння цього розв'язання хоч і знадобиться трохи подумати, але в ньому застосовується тільки арифметика й основи геометрії. А найголовніше в ньому — адитивність очікуваної цінності!

Перший крок полягає в тому, щоб переформулювати задачу Бюффона в термінах очікуваної вартості. Питання можна поставити так: яка очікувана *кількість* стиків, які перетинає голка? Число, яке обчислював Бюффон, — це імовірність p того, що в результаті кидання голка перетне стик. Отже, є й імовірність $1 - p$ — голка стику не перетне. Але якщо голка стик таки перетинає, то вона перетинає *тільки* один[165]. Отже, очікувана кількість перетинів отримується так само, як обчислюється очікувана цінність: додаванням усіх можливих кількостей перетинів, а потім множенням цього значення на ймовірність отримання такого результату. У нашому випадку єдиними можливими варіантами є 0 (отримуваний з імовірністю $1 - p$) і p (отримуваний з імовірністю p), тож ми додаємо

$$(1 - p) \times 0 = 0$$

і

$$p \times 1 = p$$

і отримуємо p. Отже, очікувана кількість перетинів — це просто p, те саме значення, що обчислював Бюффон. Здається, ми не прийшли ні до чого. Як же знайти це таємниче число?

Коли стикаєшся з математичною задачею, з якою невідомо, що робити, є два основних варіанти дій. Можна зробити задачу легшою і можна тяжчою.

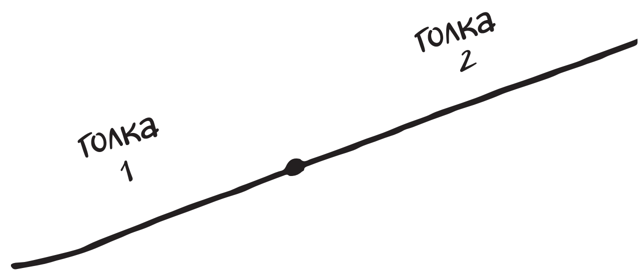
Варіант з полегшенням задачі виглядає краще: потрібно задачу замінити легшою, розв'язати, а потім сподіватися, що розуміння розв'язання легшої задачі дасть ідеї щодо розв'язання тієї, яку насправді розв'язуєш. Саме це математики роблять кожного разу, коли складні системи реального світу моделюються за допомогою ідеальних математичних понять і методів. Часом такий підхід веде до блискучих успіхів; коли потрібно змоделювати траєкторію важкого снаряда, це чудово робиться без урахування опору повітря, через уявлення, що на рухоме тіло діє тільки сила тяжіння. В інших випадках під спрощення можуть потрапити моменти, значущі для задачі, як це відбувається у старому анекдоті про фізика, якого попросили розробити метод прогнозування того, який кінь на перегонах прийде першим. Цей фізик упевнено почав пояснення своїх висновків так: «Розгляньмо сферичного коня...».

Діючи в такому дусі, можна спробувати щось зрозуміти про Бюффонову голку через розв'язання легшої задачі про *franc-carreau*: «Розгляньмо круглу голку...». Але неясно, яку корисну інформацію можна отримати від монети, симетрія якої щодо обертання виключає саме ті моменти, які роблять задачу про голку цікавою.

Замість цього ми вдамося до іншої стратегії — тієї, яку застосував Барб'є: *зробимо задачу складнішою*. Ні до чого доброго це, здається, привести не може. Але коли цей метод спрацьовує, то творить чудеса.

Почнемо з малого. Що коли поставити загальніше запитання про очікувану кількість перетинів стиків між дошками голкою, що має довжину подвійної ширини дошки? Здається, це складніше питання, тому що тут буде три, а не два можливих результати. Голка може потрапити повністю на одну дошку, може перетнути один стик або може перетнути два. Тож щоб знайти очікувану кількість перетинів, здається, маємо обчислювати ймовірність трьох окремих подій, а не двох.

Але завдяки адитивності ця складніша задача легша, ніж ви думаєте. Поставмо точку в центрі довгої голки і позначмо дві половини як «1» і «2», ось так:



Тоді очікувана кількість перетинів довгої голки — це просто сума очікуваної кількості перетинів «півголки 1» і очікуваної кількості перетинів «півголки 2». У термінах алгебри, якщо X — кількість стиків, перетнутих півголкою 1, а Y — кількість стиків, перетнутих півголкою 2, то загальна кількість стиків, які перетинає довга голка, — це $X + Y$. Але кожна з двох цих половин — це голка, яку і розглядав Бюффон спочатку; тож кожна з цих голок у середньому перетинає стики p разів; тобто $E(X)$ і $E(Y)$ обидві дорівнюють p. Отже, очікувана кількість перетинів цілої довгої голки — це просто $E(X) + E(Y)$, тобто $p + p$, тобто $2p$.

Такі самі міркування можна застосувати до голок, що мають довжину три, чотири чи сто значень ширини дошки. Якщо голка має довжину N (як одиницю вимірювання ми беремо ширину дошки), то очікувана кількість перетинів дорівнює Np.

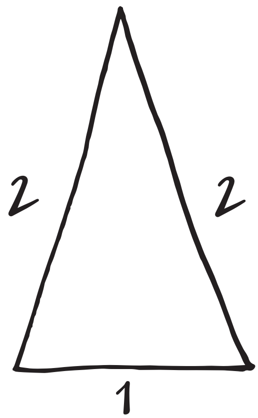
Це однаково працює і з короткими, і з довгими голками. Припустимо, я кидаю голку, довжина якої становить 1/2 — тобто її довжина дорівнює половині ширини дошки. Оскільки Бюффонову голку довжиною 1 можна розбити на дві голки довжиною 1/2, то Бюффонова очікувана кількість перетинів повинна бути удвічі більшою за очікувану кількість перетинів голки, що має довжину 1/2. Насправді формула

Очікувана кількість перетинів голки довжиною $N = Np$

виконується за будь-якого дійсного додатного N, хоч малого, хоч великого.

(Тут я не наводитиму строгого доведення — певна технічна аргументація необхідна для того, щоб показати, що наша формула виконується, і коли N — страхітливе ірраціональне число на зразок квадратного кореня з 2. Але обіцяю, що основні ідеї доведення Барб'є ви знатимете).

Тепер зробимо, так би мовити, новий крок — *зігнемо голку*:



Ця голка найдовша з усіх, що були досі, — її загальна довжина дорівнює 5. Але вона зігнута у двох місцях, і я звів кінці разом, щоб вийшов трикутник. Прямі відрізки мають довжини 1, 2 і 2; тож очікувана кількість перетинів для кожного відрізка становить p, $2p$ і $2p$ відповідно. Кількість перетинів для всієї голки — це сума кількостей перетинів для кожного відрізка. Принцип адитивності каже нам, що очікувана кількість перетинів усією голкою — це

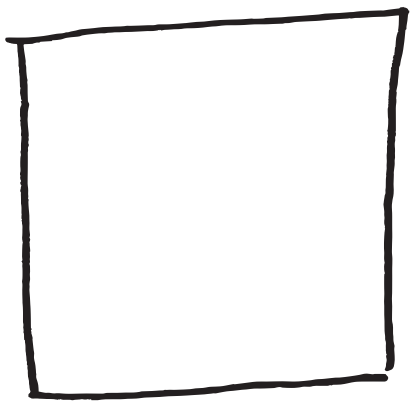
$$p + 2p + 2p = 5p.$$

Іншими словами, формула

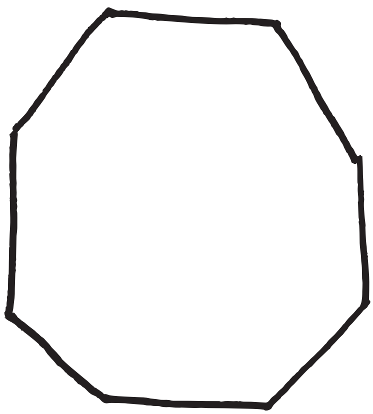
Очікувана кількість перетинів голки довжиною $N = Np$

виконується і для гнутих голок.

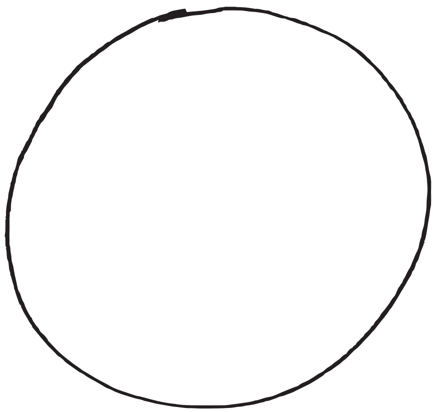
Ось одна з них:



А ось ще одна:



І ще одна:



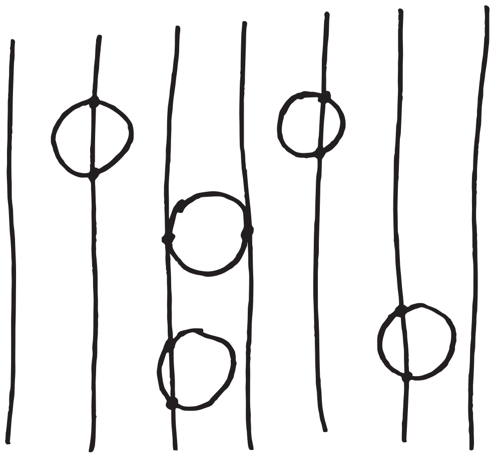
Ці картинки ми вже бачили. Вони — ті самі, які малювали дві тисячі років тому Архімед з Евдоксом, розробляючи метод вичерпання. Останній малюнок виглядає як коло з діаметром 1. Але насправді це многокутник, зроблений з 65 536 малесеньких голок. На око різниці ви не помітите — і підлога не помітить. Що означає, що очікувана кількість перетинів кола з діаметром 1 — майже точно така сама, як очікувана кількість перетинів 65 536-кутника. І, згідно з нашим правилом гнутої голки, це Np, де N — периметр многокутника. Який цей периметр? Він має бути майже точно такий самий, як у кола; коло має радіус 1/2, тож його довжина — π. Отже, очікувана кількість перетинів кругом стику — πp.

І що ж дає ускладнення задачі? Чи не здається, що ми тільки робимо її дедалі абстрактнішою й загальнішою, не торкаючись головного питання: чому дорівнює p?

А знаєте що? Ми щойно його знайшли.

Скільки буде точок перетину кола та стиків на підлозі? І раптом задача, яка здавалася складною, стає легкою. Симетрія, яку ми загубили, перейшовши від монети до голки, відновилася, коли ми зігнули голку в коло. А це величезною мірою спрощує ситуацію. Байдуже, куди впаде коло, — воно перетне стики на підлозі рівно двічі.

Тож очікувана кількість перетинів — 2, а також це πp; і таким чином ми знаходимо, що $p = 2 / \pi$, як і сказав Бюффон. Наведене вище міркування правильне для будь-якої голки, хоч якої багатокутної і кривої; очікувана кількість перетинів дорівнює Lp, де L — довжина голки в одиницях, що дорівнюють ширині дошки. Киньте купу спагеті на підлогу з паралельних дощок, і я скажу вам точно очікувану кількість перетинів ліній макарониною. Узагаль-



нена задача має назву, якою завдячуємо математикам-жартівникам: *задача про локшину Бюффона*.

Море і камінь

Доведення Барб'є нагадало мені про те, що фахівець з алгебраїчної геометрії П'єр Делінь написав про свого вчителя Александра Ґротендіка: «Начебто нічого не відбувається*, а зрештою виходить надзвичайно нетривіальна теорема».

У нефахівців часом виникає враження, що математика — це застосування дедалі потужніших засобів у заглибленні в невідоме, схоже на те, як гірники-прохідники пробивають шлях через скелю дедалі потужнішими зарядами вибухівки. І це справді один з методів. Але Ґротендік, який у 1960–1970-х роках перебудував значну частину теоретичної математики за власним планом, мав іншу думку: «Невідоме, яке потрібно дізнатися[166], уявляється мені скелею, тяжкодоступною ділянкою суші… у тиші море наступає; здається, що нічого не відбувається, не видно жодного руху, море так далеко, що його майже не чутно… але через деякий час воно поглинає непокірну сушу».

Невідоме — це скеля в морі, яка заважає нашому поступу. Ми можемо спробувати закласти динаміт у тріщини в скелі, підірвати його — і робити так, доки не зруйнуємо скелі, як це зробив Бюффон своїм математичним аналізом. Або ж можна вдатися до більш споглядального підходу, даючи можли-

* Ви можете заперечити, що оскільки голка завдовжки точно така, як дошка завширшки, то може статися й так, що голка торкатиметься двох стиків. Але для цього необхідно, щоб голка впала на дошку *рівно* упоперек; це можливо, але ймовірність того, що так станеться, нульова, тому ми можемо спокійно цією можливістю знехтувати.

вість рівню розуміння поступово, повільно підійматися — доти, доки з часом те, що здавалося перешкодою, поглинається спокійними водами і зникає.

Математика, якою вона є зараз, — це тонка взаємодія чернечого споглядання і вибуху динаміту.

Відступ про математику й божевілля

Барб'є опублікував доведення теореми Бюффона 1860 року, коли він був двадцятиоднорічним багатообіцяючим студентом Вищої нормальної школи в Парижі. 1865 року він у стані нервового розладу виїхав з міста в невідомому напрямку. Жоден математик його не бачив, доки 1880 року його старий учитель Жозеф Бертран не знайшов його в божевільні. Стосовно Ґротендіка, то він теж залишив публічну роботу в математиці у 1980-х роках; зараз він живе у селінджерівському усамітненні десь у Піренеях. Ніхто не знає, якими саме математичними питаннями він займається, і чи займається математикою взагалі. Дехто каже, що він пасе овець.

Ці історії суголосні популярному міфу про математику — вона зводить з розуму або ж сама є видом божевілля. Найбільш «математичний» серед сучасних романістів Девід Фостер Воллес (колись він відірвався від написання художніх творів і написав цілу книжку про теорію трансфінітних множин!) говорив про цей міф як про «математичну мелодраму», а про головного її героя як «постать у дусі Прометея й Ікара, високий геній якої — це водночас і гординя та смертельний порок». У фільмах на зразок «Ігор розуму», «Доведення» та «π» математика — синонім одержимості і втечі від дійсності. У трилері Скотта Туроу «Презумпція невинуватості» дружина головного героя, математик, виявляється божевільною вбивцею. (У цьому разі міф пов'язується з ексцентричною сексуальністю: автор намагається переконати читача, що надмірні розумові зусилля, які потрібні *жінці*, щоб опанувати математику, саме й доводять її до вбивчого божевілля). Ще одну версію цього міфу бачимо у «Загадковому нічному вбивстві собаки», де математичні здібності представлено просто як ще один відтінок у спектрі аутизму.

Воллес заперечує цю мелодраматичну картину психічного життя математиків, — так само вважаю і я. У дійсності математики — люди зовсім звичайні, не більш божевільні за пересічних, і серед нас не надто поширено усамітнюватися для битв сам-на-сам із жорстокими абстрактними світами. Математика швидше зміцнює розум, а не доводить до божевілля. З мого власного досвіду, у моменти емоційного напруження ніщо не має такого заспокійливого ефекту, як математична задача. Математика, як і медитація, дає вам прямий зв'язок зі Всесвітом, більшим за вас, який був до вас і буде після вас. Я збожеволів би, якби *не займався* математикою.

«Розбити» джек-пот

Тим часом у Массачусетсі:

Що більше людей грало у «Кеш ВінФол», то менш прибутковою ставала справа. Кожне придбання великої кількості білетів вело до поділу виграшу на більшу кількість частин. Одного разу, як розповів мені Джеральд Селбі[167], Юран Лу з «Випадкових стратегій» запропонував угоду: група Селбі і «Випадкові стратегії» грають при «розбиванні» джек-поту по черзі, що гарантує кожному вищий прибуток. Селбі так перефразував пропозицію Юрана: «Ти — великий гравець, я — великий гравець, і ми не контролюємо інших гравців, які наче блохи в нас у шерсті». Завдяки угоді Селбі і Лу могли б принаймні контролювати один одного. То був розумний план, але Селбі на нього не пристав. Він почувався спокійно, експлуатуючи ваду гри, — оскільки правила були однаковими для всіх, так міг чинити будь-хто. Однак змова з іншими гравцями — хоча й незрозуміло, які правила лотереї вона порушувала, — дуже нагадувала шахрайство. Тож картелі прийшли до рівноваги — гроші у розіграші з «розбиванням» джек-поту вкладали всі три. При тому, що великі гравці скуповували в таких випадках від 1,2 до 1,4 мільйона білетів, за оцінкою Селбі, очікувана цінність виграшу лише на 15 % перевищувала сукупну ціну білетів.

Утім це все одно був дуже добрий прибуток. Але Гарві і його сподвижників це не задовольняло. Життя професійного лотерейного переможця зовсім не схоже на суцільне дозвілля, як це комусь може здатися. Для Гарві «Випадкові стратегії» стали справжньою роботою, причому не надто вдячною. Перед розіграшем з «розбиванням» потрібно було купувати десятки тисяч лотерейних білетів і від руки заповнювати всі бланки; у день розіграшу Гарві мав налагодити логістику численних членів групи, які приносили білети до точок продажу, що погоджувалися працювати з масовими закупівлями. А після оголошення виграшних номерів потрібно було зробити велику роботу — відділити виграшні білети від тих, що програли. Програшні білети не можна було просто викидати; Гарві зберігав їх у спеціальних коробках, тому що коли багато виграєш у лотерею, податківці стають до тебе дуже уважними, і Гарві потрібно було мати документальне підтвердження своєї ігрової діяльності. (Джеральд Селбі досі зберігає понад два десятки великих пластикових ящиків з програшними лотерейними білетами загальною вартістю близько 18 мільйонів доларів; вони стоять у нього на подвір'ї під навісом). Виграшні білети теж потребували роботи. Кожен член групи мав заповнювати індивідуальну податкову форму на кожен розіграш, незалежно від кількості куплених білетів. І це схоже на розвагу?

За оцінками генерального інспектора, «Випадкові стратегії» заробили за сім років проведення лотереї «Кеш ВінФол» 3,5 мільйона доларів до сплати податків. Ми не знаємо, скільки з цих грошей отримав Джеймс Гарві, але ми знаємо, що він купив машину.

То був уживаний «Ніссан Альтіма» 1999 року випуску.

Добрі часи «Кеш ВінФол», коли вкладені гроші легко подвоювалися, відійшли в не таке вже й далеке минуле; звісно, Гарві і його команда хотіли ті часи повернути. Але як це було зробити, коли родина Селбі та «Лотерейний клуб доктора Чжана» скуповували сотні тисяч білетів на кожен розіграш з «розбиванням» джек-поту?

Інші великі гравці робили паузу, тільки коли джек-пот не досягав розміру, достатнього для його «розбивання». Але й Гарві тоді пропускав такі розіграші, і підстави на те були: без «розбивання» лотерея прибутку не приносила.

У п'ятницю, 13 серпня 2010 року, джек-пот на наступний понеділковий розіграш становив 1,675 мільйона доларів — набагато менше, ніж потрібно для його «розбивання». Картелі Чжана і Селбі нічого не робили, чекаючи, доки джек-пот доповзе до потрібного розміру. Але «Випадкові стратегії» зіграли по-іншому. За кілька місяців вони потихеньку накопичили кілька сотень тисяч лотерейних білетів, чекаючи дня, коли наступний джек-пот буде близьким до 2 мільйонів, однак до цього розміру не дотягуватиме. Такий день настав. У вихідні члени групи скупили по всьому Бостону більше лотерейних білетів, ніж будь-коли раніше, — усього близько 700 тисяч. За рахунок несподіваного надходження від «Випадкових стратегій» джек-пот у понеділок, 16 серпня дійшов до 2,1 мільйона доларів. Це вже був розіграш з «розбиванням», і ніхто, крім студентів MIT, не знав, що так буде. Майже 90 % білетів, що брали участь в розіграші, належали групі Гарві. Перед ними був грошовий кран, і ділитися ні з ким не було потрібно. І коли розіграш закінчився, прибуток «Випадкових стратегій» становив 700 тисяч доларів; на інвестицію 1,4 мільйони — чудові 50 %.

Повторити цей фокус не судилося. Коли організатори лотереї зрозуміли, що сталося, вони запровадили систему раннього попередження керівництва лотереї про те, що хтось одноосібно тягне джек-пот до «розбивання». Коли наприкінці грудня «Випадкові стратегії» спробували повторити трюк, лотерея була до цього готова. Вранці 24 грудня, за три дні до розіграшу, директор лотереї отримав електронне повідомлення від своїх підлеглих: «Хлопці з "Кеш ВінФол" знову взялися за своє». Якщо Гарві розраховував на те, що лотерея не працюватиме у різдвяні вихідні, він помилився; різдвяного ранку лотерея оновила дані щодо джек-поту й оголосила про «розбивання». Інші картелі, які ще відчували гіркоту серпневої події, скасували різдвяні канікули і скупили сотні тисяч білетів, знизивши прибутковість до звичайного рівня.

У кожному разі з грою було майже покінчено. Невдовзі після цього один знайомий Андреа Естес[168], журналістки з газети «Бостон Ґлоб», зауважив у публічному списку переможців лотерей цікаву річ: багато людей у Мічиґані вигравали в лотерею, і всі вони грали у «Кеш ВінФол». Чи не здається Естес, що тут щось є? Щойно газета почала ставити запитання, картина прояснилася. 31 липня 2011 року «Ґлоб» вийшла зі статтею Естес і Скотта Аллена на першій сторінці[169]. У статті розповідалося, як три лотерейні клуби монополізували виграші в лотереї «Кеш ВінФол». У серпні лотерея змінила правила, запровадивши граничну суму 5 тисяч доларів на продаж білетів одним пунктом на день, таким чином заблокувавши можливість для картелів скуповувати білети у великих кількостях. Але справу вже було зроблено. Хоча тепер «Кеш ВінФол» була «прихильнішою» до звичайних гравців, вона вже не мала сенсу. Останній розіграш «Кеш ВінФол» — як і годиться, з «розбиванням» джекпоту, — відбувся 23 січня 2012 року.

Якщо гра захоплює, ви граєте неправильно

Джеймс Гарві був не першим, хто скористався помилками у правилах державних лотерей. Група Джеральда Селбі заробила мільйони доларів у Мічиґані на першій лотереї «ВінФол» до того, як штат зрозумів помилку і 2005 року закрив лотерею. Така практика почалася набагато раніше. На початку XVIII століття[170] державні витрати у Франції фінансувалися за допомогою продажу облігацій, однак проценти за ними не були достатніми для стимулювання продажу. Щоб зробити облігації привабливішими, уряд поєднав облігації з лотереєю. Кожна облігація давала її власнику право купівлі білета лотереї з можливістю виграшу 50 тисяч ліврів — на цю суму можна було безбідно жити кілька десятків років. Однак Мішель Лепелетьє де Форт, заступник міністра фінансів, який придумав план з лотереєю, припустився помилки у розрахунках — виграші за нею значно перевищували гроші від продажу білетів. Іншими словами, лотерея, як і «Кеш ВінФол» при розіграшах з «розбиванням» джек-поту, мала для гравців додатну очікувану цінність, і кожен, хто купив достатньо білетів, отримував добрий виграш.

Одним з тих, хто це зрозумів, був математик і мандрівник Шарль Марі де ла Кондамін. Так само, як зробив через майже три століття Гарві, він об'єднав друзів у картель, що скуповував лотерейні білети. Одним з цих друзів був молодий письменник Франсуа-Марі Аруе, більш відомий як Вольтер. Хоча він, напевно, не брав участі у математичному аналізі лотереї, все ж таки свій слід він залишив. Гравці мали писати на своїх білетах гасла, які прилюдно зачитувалися вголос, коли білет вигравав головний приз. Вольтер, у звичній для нього манері, вбачав у цьому чудову можливість для влучної епіграми. Він писав на своїх білетах гасла на зразок «Усі люди рівні!» та «Хай живе Мішель Лепелетьє!», які зачитували, коли картель вигравав приз.

Зрештою держава спам'яталася і скасувала лотерею. Але часу її проведення вистачило, щоб Кондамін і Вольтер виграли в уряду достатньо грошей для того, щоб бути багатими до кінця життя. А ви думаєте, що Вольтер заробляв на життя письменництвом? Тоді (та й тепер) на цій справі було не розбагатіти.

У Франції XVIII століття не було ні комп'ютерів, ні телефонів, ні інших способів швидко дізнатися, хто, скільки і де купує лотерейних білетів: зрозуміло, що урядові знадобилося кілька місяців, щоб виявити схему Вольтера і Кондаміна. А яке може бути виправдання у Массачусетсу? Стаття у «Бостон Ґлоб» вийшла *через шість років* після того, як організатори лотереї помітили, що студенти купують надзвичайно багато білетів у супермаркетах поблизу MIT. Як можна було не зрозуміти, що відбувається?

Це просто: вони знали, що відбувається.

Організаторам не потрібно було навіть думати — тому що Джеймс Гарві приходив до офісу лотереї у Брейнтрі у січні 2005 року, до того, як його картель уперше взяв участь у лотереї, до того, як у нього навіть з'явилася назва. План здавався надто простим. Мусили існувати якісь правила, які б завадили його реалізувати. Гарві звертався до офісу лотереї, щоб пересвідчитися, чи не порушує його схема якихось правил. Ми достеменно не знаємо, якою була та розмова, але, здається, в кінці працівники лотереї сказали йому щось на зразок: «Уперед!». Усього через кілька тижнів Гарві і його друзі почали велику гру.

Не забарився долучитися до неї і Джеральд Селбі; він розповів мені, що зустрічався з юристами лотереї у Брейнтрі у серпні 2005 року, щоб повідомити їх, що його Мічиґанська корпорація планує купувати лотерейні білети в Массачусетсі. Існування великих гравців не було для штату таємницею.

Чому ж штат Массачусетс дозволив Гарві, доктору Чжану і сім'ї Селбі забирати у себе гроші мільйонами? Яке казино дозволить гравцям раз у раз вигравати у себе і нічого при цьому не робитиме?

Для того щоб зрозуміти це, потрібно трохи докладніше розглянути, як насправді працює лотерея. З кожного проданого дводоларового білета Массачусетс залишає собі 80 центів. Частина цих грошей іде на виплати комісійним крамницям, де продаються білети, і на проведення самої лотереї; решта, 2011 року — майже 900 мільйонів доларів, іде на зарплати поліцейським, утримання шкіл і взагалі на затикання дірок у муніципальних бюджетах.

Решта 1 долар 20 центів ішли на призовий фонд і мали розподілятися між гравцями. Але пам'ятаєте обчислення, яке ми зробили на самому початку? У звичайний день очікувана цінність білета становить лише 80 центів, що означає, що в середньому штат повертає 80 центів на кожен проданий білет. А куди дівається ще 40? Ось тут і вступає у гру «розбивання» джек-поту. Повернення 80 центів на білет недостатньо для того, щоб вичерпати призовий фонд, тож джек-пот кожного тижня зростає, доки не досягає 2 мільйонів доларів і не «розбивається». І тут сутність лотереї змінюється: заслінки відчиняються, і накопичені гроші виливаються — до рук тих, хто має достатньо розуму, щоб цього дочекатися.

Може здатися, що в такий день штат втрачає гроші, але це не зовсім так. Усі ці мільйони ніколи Массачусетсу не належали; вони із самого початку призначалися для призового фонду. Штат забирає свої 80 центів і роздає решту. Що більше продається білетів, то більше отримується надходжень. Для штату байдуже, хто виграє. Для штату має значення, скільки людей грає.

Тож коли гральні картелі отримували великі виграші на «розбиванні» джек-поту, вони не відбирали гроші у штату. Вони відбирали їх в інших гравців, особливо у тих, хто ухвалив погане рішення грати в лотерею, коли «розбивання» немає. Картелі не вигравали у казино. Вони самі були казино.

Як і організаторам казино в Лас-Веґасі, великим гравцям теж могло не поталанити. Будь-який гравець у рулетку може зробити щасливу ставку і виграти в казино багато грошей. Так само могло статися і з картелями, якщо пересічний гравець вгадував шість номерів і переводив усі гроші, що призначалися на «розбивання», до власного джек-поту.

Але Гарві та інші великі гравці прорахували все достатньо добре для того, щоб таке траплялося рідко і з цим можна було миритися. За всю історію лотереї[171] «Кеш ВінФол» незалежний гравець виграв джек-пот лише раз. Якщо ви робите ставки у грі, де ймовірність працює на вас, загальна перевага компенсує будь-яку нещасливу для вас випадковість.

Ясна річ, що це робить лотерею не такою захопливою. Але для Гарві та інших великих гравців сенс гри полягав не в азарті. Їхній підхід описується простим твердженням: *якщо гра захоплює, ви граєте неправильно*.

Якщо ігрові картелі являли собою казино, то чим був штат? Штат був… штатом. Так само, як Невада бере з лас-веґаських казино плату у відсотках від їхніх прибутків в обмін на підтримання інфраструктури і порядку, що робить можливим процвітання їхнього бізнесу, Массачусетс брав частку з грошей, які загрібали картелі. Коли «Випадкові стратегії» купили 700 тисяч білетів, щоб відбулося «розбивання» джек-поту, міста Массачусетсу отримали по 40 центів з кожного з цих білетів, загалом 560 тисяч доларів.

Державі не подобається грати в азартні ігри, хоч якими — добрими чи поганими — будуть шанси на виграш. Державі подобається збирати податки. По суті, саме це і робила лотерея штату Массачусетс.

І не без успіху. За даними звіту генерального інспектора, лотерея «Кеш ВінФол» отримала 120 мільйонів доларів надходжень. Коли залишаєшся з дев’ятизначною сумою, то, напевно, тебе не ошукали.

А кого тоді ошукали? Очевидна відповідь: «інших гравців». Зрештою, це їхні гроші опинилися у кишенях членів картелів. Однак генеральний інспектор Салліван завершує свій звіт у тому дусі, що нікого не ошукали взагалі:

> Коли Лотерея оголошувала про наближення розміру призового фонду до 2 мільйонів доларів, що ймовірно тягло за собою розбивання джек-поту, звичайний гравець, що купує один білет чи будь-яку кількість білетів, не зазнавав шкоди від великих гравців. Коротко кажучи, нічиї шанси на виграш не зменшувалися діями великих гравців. І малі, і великі гравці мали однакові шанси на виграш. Коли джек-пот досягав межі розбивання, «Кеш ВінФол» ставала вигідною для всіх, а не тільки для великих гравців.

Салліван мав рацію в тому, що діяльність Гарві й інших картелів не позначалася на шансах на виграш інших гравців. Але він припускається тієї самої помилки, що й Адам Сміт — питання не просто в тому, якими є ваші шанси на виграш, а в тому *скільки* в середньому можна очікувати виграти чи програти. Закупівля картелями сотень тисяч білетів істотно збільшувала кількість частин, на які розбивається джек-пот, що знижує вартість кожного виграшного білета. У цьому сенсі картелі завдавали збитків пересічним гравцям.

Схожим чином: якщо майже ніхто не братиме участі в церковній лотереї, дуже ймовірно, що ту каструлю виграю я. Коли до церкви прийде ще сто людей і купить білети, мої шанси виграти каструлю дуже знизяться. Це може мене засмутити.

Але чи буде це нечесно? А коли я дізнаюся, що всі ці сто людей насправді працюють на одного господаря, який дуже хоче отримати ту каструлю, і вирахував, що ціна ста лотерейних білетів десь на 10 % менша за ціну каструлі? Це дещо неспортивно — але я б не сказав, що мене ошукали. І, звісно ж, багато людей на церковній лотереї — набагато краще, ніж мало, для церковної каси, що зрештою і є метою цього заходу.

І все ж таки, навіть якщо великі гравці не шахраї, в історії про лотерею «Кеш ВінФол» є щось бентежне. Завдяки дивним правилам лотереї штат у підсумку видав Джеймсу Гарві як власнику віртуального казино своєрідну ліцензію на постійне відбирання грошей у менш метикованих гравців.

Але чи значить це, що правила були поганими? Як сказав начальник канцелярії губернатора штату Массачусетс Вільям Ґелвін газеті «Бостон Ґлоб», «це приватна лотерея для досвідчених людей[172]. Питання в тому, чому?».

Якщо повернутися до чисел, відповідь напрошується сама собою. Пригадаймо: «ВінФол» розпочали, щоб збільшити популярність лотереї. І план спрацював — але, можливо, не так добре, як розраховували організатори. Що коли б галас навколо лотереї «Кеш ВінФол» був таким гучним, що лотерея почала б продавати по 3,5 мільйона білетів щоразу, коли розбивався джек-пот? Пам'ятаймо: що більше людей грають, то більшою буде частка 40 %, які отримує штат. Як ми обчислили раніше, якщо штат продає 3,5 мільйона білетів, він матиме зиск навіть у дні розбивання джек-поту. За таких умов «велика гра» вже не буде прибутковою: лазівка закривається, картелі розпускаються, і всі, за винятком, можливо, найбільших гравців, задоволені.

Шанси продати стільки білетів дуже малі, але організатори лотереї у Массачусетсі, мабуть, подумали, що це в них вийде — якщо поталанить. У певному сенсі штатові подобалося грати в азартну гру.

Розділ 12

Більше спізнюйтеся на літаки!

Лауреат Нобелівської премії з економіки 1982 року Джордж Стіґлер казав: «Якщо ви ніколи не спізнювалися на літак, ви проводите забагато часу в аеропортах»[173]. Це парадоксальне твердження, особливо якщо ви справді недавно спізнилися на літак. Застрягнувши в аеропорту «О'Гара» й поїдаючи жахливий курячий рол за 12 доларів, я рідко відчуваю захоплення своїми здібностями як економіста. Хай там як дивно звучить висловлювання Стіґлера, обчислення очікуваної цінності показує, що воно цілковито правильне — принаймні для людей, які багато літають. Для спрощення розглянемо всього три можливості:

Варіант 1: прибуття до аеропорту за 2 години до вильоту, запізнення на літак — 2 % випадків.
Варіант 2: прибуття до аеропорту за 1,5 години до вильоту, запізнення на літак — 5 % випадків.
Варіант 3: прибуття до аеропорту за 1 годину до вильоту, спізнення на літак — 15 % випадків.

Звичайно, ціна запізнення на літак дуже залежить від конкретної ситуації; одна справа — спізнитися на частий рейс до Вашингтона і полетіти наступним, зовсім інша — спізнитися на останній літак, коли намагаєшся встигнути на весілля до родичів, призначене на 10-ту наступного ранку. В лотереї і ціна квитків, і розмір призу мають грошове вираження. Набагато менш ясно, як виміряти вартість часу, який ми можемо змарнувати в аеропорту, порівняно з ціною запізнення на літак. Дратує і те і те, але загальновизнаної валюти для оцінювання роздратування немає.

Або ж принаймні немає такої валюти на папері. Проте рішення мусять ухвалюватися, і економісти прагнуть розповісти нам, як це робити, — тож для певних різновидів роздратування варто створити свій долар. Стандартна економічна наука каже, що люди, коли вони діють раціонально, ухвалюють рішення, які максимізують *корисність*. Усе в житті має користь; добрі речі, як-от долари і торти, мають додатну корисність, а от погані речі, такі як забиті пальці на нозі чи пропущені літаки, — корисність від'ємну. Декому навіть подобається вимірювати корисність у стандартних одиницях, що звуться *ютили*. Скажімо, година часу, проведеного вами вдома, вартує одного ютила; тоді приїзд до аеропорту за дві години до вильоту коштуватиме вам два ютили, а приїзд за годину — лише один ютил. Спізнитися на літак, ясна річ, гірше, ніж змарнувати годину часу. Якщо ви вважаєте, що спізнення коштує близько шести годин вашого часу, то можна вважати, що спізнення на літак коштує вам шість ютилів.

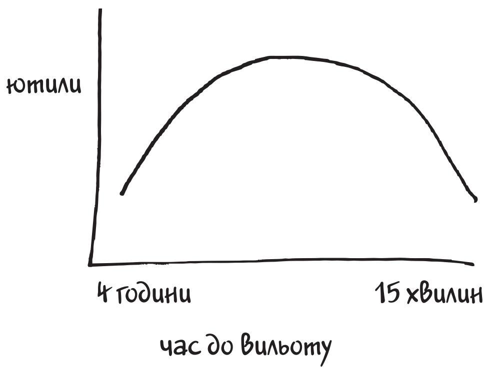
Перевівши все в ютили, ми можемо порівняти очікувані цінності трьох наших варіантів:

Варіант 1	$-2 + 2\,\% \times (-6) = -2{,}12$ ютила
Варіант 2	$-1{,}5 + 5\,\% \times (-6) = -1{,}8$ ютила
Варіант 3	$-1 + 15\,\% \times (-6) = -1{,}9$ ютила

Варіант 2 в середньому коштуватиме вам найменше, незважаючи на те, що він передбачає помітний шанс спізнитися на літак. Так, застрягнути в аеропорту — штука болісна й неприємна, але чи ця неприємність варта зайвої півгодини в терміналі, щоб скоротити і без того невеликі шанси спізнитися на літак?

Можливо, ви відповісте ствердно. Можливо, ви *ненавидите* запізнюватися на літак, і таке спізнення для вас коштує не шість, а двадцять ютилів. Тоді наведене вище обчислення зміниться, і консервативний варіант 1 стає найкращим. Його очікувана цінність $-2 + 2\,\% \times (-20) = -2{,}4$ ютила.

Але це не значить, що Стіґлер помиляється; це просто змінює умови компромісу. Можна ще більше знизити шанси на запізнення, приїхавши до аеропорту за три години; але якщо так зробити, незважаючи на скорочення ймовірності спізнитися на літак фактично до нуля, гарантовано отримуємо ціну 3 ютили за політ, що робить цей варіант гіршим за варіант 1. Якщо зобразити на графіку кількість годин, проведених в очікуванні в аеропорту по відношенню до очікуваної цінності, отримаємо таку картину:



Знову крива Лаффера! Приїхавши до аеропорту за 15 хвилин до вильоту, ви ризикуєте через дуже високу ймовірність запізнитися на літак і отримати всю відповідну від'ємну корисність. З іншого боку, приїхати за багато годин до відльоту теж коштуватиме вам багато ютилів. Оптимальний варіант лежить десь між цими крайніми. *Де саме* він буде, залежить від вашого особистого сприйняття відносної цінності запізнення на літак і марнування часу. Але така оптимальна стратегія завжди передбачатиме певну додатну ймовірність запізнитися — вона може бути малою, але відрізнятиметься від нуля. Якщо ви буквально ніколи не спізнюєтеся на літак, то, напевно, знаходитеся зліва від найкращої стратегії. Відбувається саме так, як каже Стіґлер: вам варто зберігати ютили і частіше спізнюватися на літаки.

Звичайно, такі обчислення обов'язково будуть суб'єктивними; зайва година в аеропорту, можливо, не буде коштувати вам стільки ютилів, як мені (я *справді* ненавиджу аеропортівські курячі роли). Тож теорія не може точно визначити оптимальний час приїзду до аеропорту чи оптимальну кількість запізнень на літак. Результат тут якісний, а не кількісний. Я не знаю, якою є ваша ідеальна ймовірність запізнитися на літак; я знаю тільки, що вона не нульова.

Одне застереження: на практиці близьку до нуля ймовірність може бути тяжко відрізнити від ймовірності, що справді дорівнює нулю. Якщо ви відомий у світі економіст, то ризик спізнитися на літак 1 % насправді означає, що ви раз на рік будете запізнюватися. Для більшості ж людей такий низький ризик дуже може означати, що вони не запізняться на літак ніколи в житті — тож якщо 1 % для вас оптимальний рівень ризику, то завжди встигати на літак не означає, що ви робите щось не так. Аналогічно ніхто не буде вважати аргумент Стіґлера розумним у такому варіанті: «Якщо ви ніколи дощенту не розбивали машину, то ви їздите надто повільно». Насправді аргумент Стіґлера каже, що якщо ви *абсолютно не ризикуєте* розбити машину, то їздите надто повільно, що є чистою правдою: єдиний спосіб не ризикувати взагалі — це не сідати за кермо!

Стіґлерівський аргумент являє собою зручний інструмент для вирішення усіх різновидів задач, пов'язаних з оптимізацією. Візьмімо марнування державних коштів: місяць не минає без того, щоб не з'явилася новина про державного службовця, який нечесним шляхом зробив собі величезну пенсію, або про військового підрядника, який продав свої послуги державі за абсурдно високою ціною, або про міську службу, яка вже нікому не потрібна, але існує, витрачаючи кошти платників податків, через інерцію і високе покровительство. Типове для цього розряду новин повідомлення з'явилося 24 червня 2013 року у блозі газети «Вол-Стріт Джорнел» «Вашинґтон Ваєр»:

> Генеральний інспектор Адміністрації соціального забезпечення[175] заявив у понеділок, що це відомство неправомірно виплатило 31 мільйон доларів допомоги 1546 американцям, що вже померли.
>
> Ще більш потенційно небезпечним для відомства, зауважив генеральний інспектор, є те, що Адміністрація соціального забезпечення передала інформацію про смерть кожної з цих осіб для занесення до відповідної державної бази даних. Це означає, що відомство мусило знати, що ці громадяни померли, і зупинити виплату допомоги.

Чому ми дозволяємо, щоб такі речі раз у раз повторювалися? Відповідь проста: усунення марнування державних коштів має свою ціну — так само, як завчасний приїзд до аеропорту. Дотримання закону і пильність — це розумні і правильні цілі, але *цілковите* усунення марнування, так само, як усунення найменшої імовірності запізнитися на літак, тягне за собою витрати, що переважують користь від нього. Як зауважує блогер (і колишній учасник математичних олімпіад) Ніколя Бодро[176], цей 31 мільйон доларів становить 0,004 % соціальної допомоги, яка щороку розподіляється Адміністрацією соціального забезпечення. Іншими словами, відомство *надзвичайно добре* знає, хто ще живий, а хто вже ні. Отримання ще точніших даних для того, щоб усунути останні помилки, може бути пов'язаним зі значними витратами. Якщо ми рахуємо ютили, то не маємо запитувати: «Чому ми марно витрачаємо гроші платників податків?». Питання має ставитися так: «Скільки грошей платників податків допустимо змарнувати?». Перифразуючи Стіґлера: якщо уряд не марнує коштів, то надто багато часу витрачається на боротьбу з марнуванням.

Ще раз про Бога (і на цьому, обіцяю, — усе)

Одним з перших, хто ясно розумів очікувану цінність, був Блез Паскаль; зацікавлений запитаннями азартного гравця Антуана Гомбо (який також називав себе шевальє де Мере, Паскаль півроку 1654-го листувався з П'єром Ферма, намагаючись з'ясувати, які ставки, якщо їх постійно повторювати, у тривалій перспективі виявляться вигідними, а які вестимуть до розорення. Говорячи сучасною мовою, він намагався зрозуміти, які види ставок мають додатну очікувану цінність, а які — від'ємну. Листування Паскаля з Ферма нині вважається основоположною віхою теорії ймовірностей.

Увечері 23 листопада 1654 року Паскаль, і до того чоловік доброчесний, пережив містичне осяяння, про яке написав, наскільки зміг:

> ВОГОНЬ.
> Бог Авраама, Бог Ісаака, Бог Якова.
> Але не Бог філософів і вчених…

Я розлучився з ним, втік від нього, відрікся, розпинав його.
Хай не розлучатимуся з ним ніколи!
Зберегти його можна тільки на шляхах, вказаних у Євангелії.
Зречення повне й солодке.
Цілковита покірність Ісусові Христу й моєму духівникові.
Вічна радість за день подвигу на землі.

Паскаль зашив цю списану сторінку у підкладку свого камзола, де вона зберігалася до кінця його життя. Після «вогненної ночі» Паскаль майже облишив математику, присвятивши свій розум релігії. 1660 року на пропозицію старого друга Ферма зустрітися він відповів:

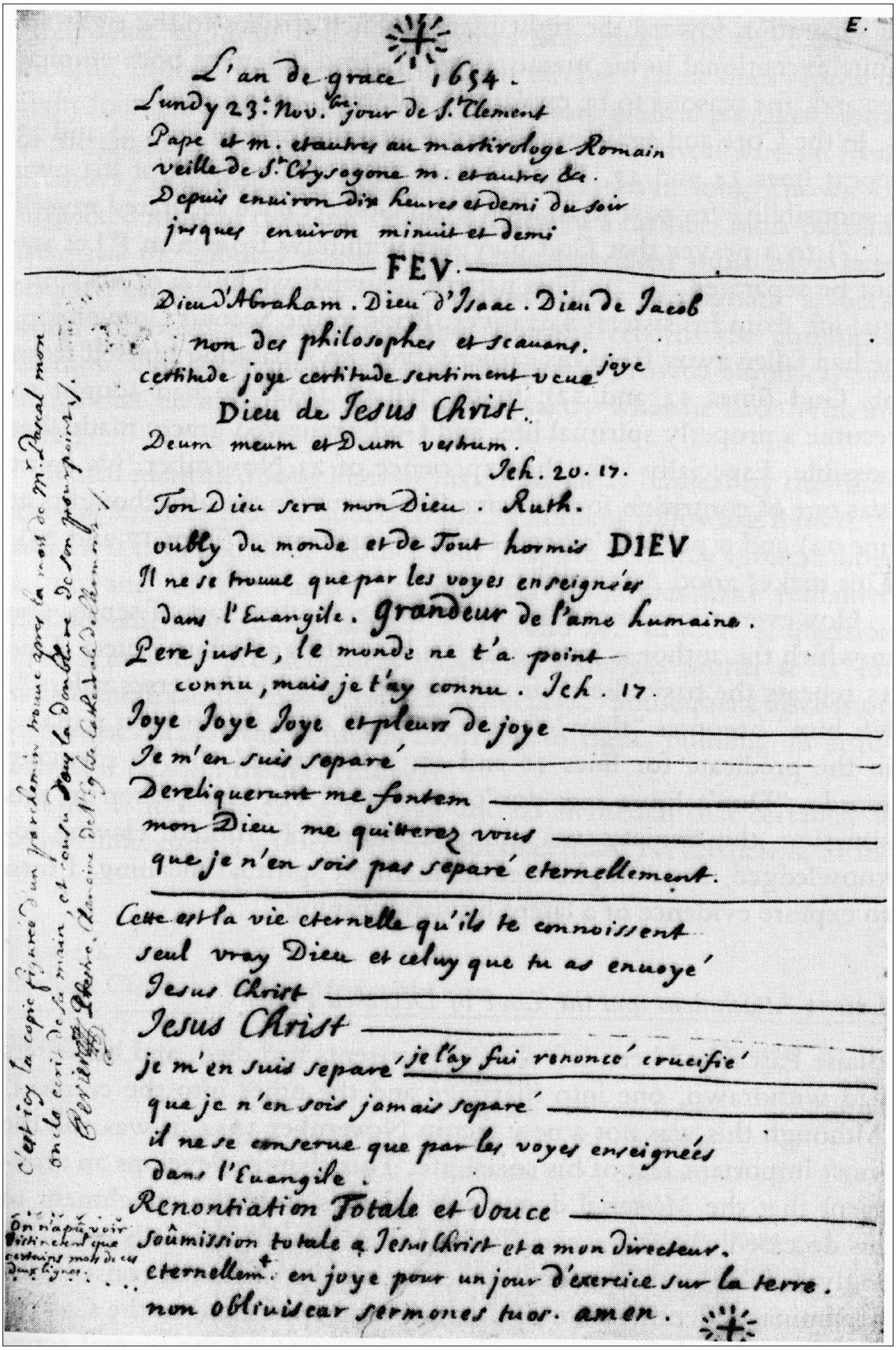
> Для мене Геометрія — найкраща розумова вправа[177]: але водночас я визнаю її такою марною, що майже не бачу різниці між людиною, яка не займається нічим, крім геометрії, і добрим ремісником... мої дослідження завели мене так далеко від цього способу мислення, що я заледве пам'ятаю, що існує така річ, як геометрія.

Через два роки Паскаль помер, йому було тридцять дев'ять років. Паскаль залишив зібрання нотаток і коротких есе, призначених для книжки на захист християнства. Їх було зібрано у книжку «Думки», що побачила світ через вісім років по його смерті. Цю чудову афористичну працю постійно цитують; багато в чому вона приводить у відчай, багато в чому вона незбагненна. Велика її частина — це пронумеровані фрагменти:

> 199. Уявіть собі багато людей в кайданах, й усіх їх засуджено на смерть, і щодня когось убивають на очах в інших, і ті, що зосталися, розуміють, що їхня доля така сама, і вони чекають своєї черги, дивлячись одне на одного скорботно й без надії. Це — образ умов людського існування.
>
> 209. Чи будеш ти від того менше рабом, що твій пан любить і вихваляє тебе? Тобі справді добре, раб. Твій пан ласкавий до тебе; скоро він тебе приб'є.

Проте найбільш знамениті «Думки» фрагментом 233, який Паскаль сам назвав Infinite — rien («Нескінченність — небуття»), широко відомий як «Парі Паскаля».

Як ми вже згадували, Паскаль вважав питання існування Бога таким, що лежить за межами логіки: «"Є Бог чи Бога немає". До чого нам схилитися? Розум тут нічого вирішити не може». Але Паскаль на цьому не зупинився. Що таке питання віри, запитує він, як не різновид азартної гри, гри з найвищою з усіх можливих ставкою, гри, від якої не можна відмовитися? А аналіз парі, відмінність між розважливою й нерозумною грою — це те, на чому Паскаль розумівся краще за майже будь-кого у світі. Зрештою, математику він так ніколи цілковито і не облишив.


E.

L'an de grace 1654.
Lundy 23e. Nov.bre jour de S.t Clement
Pape et m. et autres au martirologe Romain
veille de S.t Crysogone m. et autres &c.
Depuis environ dix heures et demi du soir
jusques environ minuit et demi

FEV.

Dieu d'Abraham. Dieu d'Isaac. Dieu de Jacob
non des philosophes et scavans.
certitude joye certitude sentiment veue joye
Dieu de Jesus Christ.
Deum meum et Deum vestrum.
Jeh. 20. 17.
Ton Dieu sera mon Dieu. Ruth.
oubly du monde et de Tout hormis DIEV
Il ne se trouve que par les voyes enseignées
dans l'Evangile. Grandeur de l'ame humaine.
Pere juste, le monde ne t'a point
connu, mais je t'ay connu. Jeh. 17.
Joye Joye Joye et pleurs de joye
Je m'en suis separé
Dereliquerunt me fontem
mon Dieu me quitterez vous
que je n'en sois pas separé eternellement.

Cette est la vie eternelle qu'ils te connoissent
seul vray Dieu et celuy que tu as envoyé
Jesus Christ
Jesus Christ
je m'en suis separé je l'ay fui renoncé crucifié
que je n'en sois jamais separé
il ne se conserve que par les voyes enseignées
dans l'Evangile.
Renontiation Totale et douce
Soumission totale a Jesus Christ et a mon directeur.
eternellem.t en joye pour un jour d'exercice sur la terre.
non obliviscar sermones tuos. amen.

C'est icy la copie figurée d'un parchemin trouvé apres la mort de M.r Pascal mon oncle escrit de sa main, et cousu dans la doublure de son pourpoint.
Perrier Prestre, chanoine de l'Eglise cathedrale de Clermont.

On n'a pu voir distinctement que certains mots de ces deux lignes.

«Меморіал». Копія на пергаменті. Фото © Bibliothèque Nationale de France, Paris

Як Паскаль обчислює очікувану цінність у грі віри? Ключ знаходимо вже у його містичному осяянні:

Вічна радість за день подвигу на землі.

Що це, як не міркування про витрати й вигоди навернення до віри? Навіть під час екстатичного спілкування зі спасителем Паскаль не полишає математики! У цьому він мені надзвичайно подобається.

Для обчислення очікуваної цінності Паскаля нам потрібна ймовірність того, що Бог існує; на хвилинку уявімо, що ми дуже в цьому сумніваємося, і присвоїмо цій гіпотезі ймовірність усього лише 5 %. Якщо ми віримо у Бога, і виявляється, що маємо рацію, то наша винагорода в такому разі — «вічна радість», або, в термінах економіки, нескінченна кількість ютилів*. Якщо ми віримо в Бога, і виявляється, що ми *помиляємося,* — у такому результаті ми впевнені на 95 % — ми платимо певну ціну; вона може бути більшою за «день подвигу на землі», про який каже Паскаль, оскільки потрібно враховувати не тільки час, витрачений на поклоніння, а й альтернативну вартість усіх розпутних задоволень, які ми відкидаємо в нашому прагненні до спасіння. Це, однак, певний обсяг, скажімо сто ютилів.

Отже, очікувана цінність віри — це

$$(5\ \%) \times \text{нескінченність} + (95\ \%)(-100).$$

5 %, звісно, — число маленьке. Але вічна радість — це дуже багато радості; 5 % від нього — все одно нескінченність. Тож вона більша за будь-які скінченні витрати, яких ми зазнаємо, навертаючись до віри.

Ми вже говорили про небезпечність намагань приписати кількісну ймовірність твердженням на зразок «Бог є». Неясно, чи має таке присвоєння сенс. Але Паскаль не робить жодних сумнівних кроків з числами. Йому це не потрібно. Тому що байдуже, яким є число — 5 % чи якимось іншим. Один відсоток від нескінченної благодаті — це все одно нескінченна благодать, і вона переважує будь-які скінченні витрати, пов'язані з доброчесним життям. Так само буде і з 0,1 %, і з 0,000001 %. Має значення лише те, що ймовірність існування Бога *не дорівнює нулю*. Хіба ви не маєте з цим погодитися? З тим, що існування Божественного принаймні *можливе*? Якщо так, то обчислення очікуваної цінності дає, здається, однозначний результат: варто вірити. Очікувана цінність такого вибору не просто додатна, вона нескінченно додатна.

---

* Хоча я знаю, що принаймні один економіст стверджував, що, оскільки певний обсяг майбутнього щастя вартує менше за той самий обсяг щастя зараз, то цінність вічної радості в лоні Авраамовому насправді скінченна.

Аргумент Паскаля має суттєві вади. Найсерйозніша з них у тому, що для нього актуальна проблема Кота в капелюсі, про яку ішлося в розділі 10: він не враховує усіх можливих гіпотез. У схемі Паскаля є тільки два варіанти: те, що християнський Бог реальний, і він винагородить цю конкретну групу вірян, або ж що Бога немає. Але що, коли Бог, що існує, це такий Бог, який навіки проклинає християн? Такий Бог, поза сумнівом, теж можливий, і самої лише цієї можливості достатньо, щоб знищити аргумент Паскаля: в такому разі, приймаючи християнство, ми робимо ставку на можливість вічної радості, але водночас ідемо на ризик вічних мук, при цьому не маючи достовірного способу оцінити ці два варіанти. Ми повернулися до того, з чого починали: розум тут безсилий.

Вольтер висунув інше заперечення. Можливо, ви подумали, що він з розумінням ставився до парі Паскаля — як ми вже пересвідчилися, Вольтер не мав заперечень проти азартних ігор. А ще він із захопленням ставився до математики; його оцінка Ньютона була близька до поклоніння (одного разу Вольтер назвав його «богом, якому я приношу себе в жертву»), і ще він протягом довгих років підтримував романтичний зв'язок з Емілі дю Шатле, яка прославилася як математик і фізик. Але стиль мислення Паскаля не був надто близький Вольтеру. Вони мали різні характери і філософські погляди. У загалом життєлюбному світі Вольтера не було місця темним, самозаглибленим і містичним думкам Паскаля. Вольтер назвав Паскаля «високим мізантропом» і присвятив великий твір розвінчанню похмурих «Думок», однієї по одній[178]. Його ставлення до Паскаля — це ставлення розумного й товариського хлопця до сумного й незручного відлюдька.

Вольтер оцінив парі Паскаля як «трохи непристойне і дитяче: ідея гри, виграшу і програшу не відповідає серйозності предмета». Конкретніше: «Моя зацікавленість вірити у щось не є доказом того, що це щось існує». Сам Вольтер, що мав світлу вдачу, схилявся до неформального аргументу божественного провидіння: подивіться на світ, подивіться, який він дивовижний, тож Бог є, що й потрібно було довести!

Вольтер не зрозумів ідеї. Парі Паскаля — дивовижно сучасне, таке сучасне, що Вольтер його не сприйняв. Вольтер має рацію в тому, що Паскаль, на відміну від Вітцтума і дослідників біблійного коду, чи Арбетнота, чи сучасних прихильників «розумного плану творіння», зовсім не подає *доказу* існування Бога. Насправді він пропонує причину для віри, але причину, пов'язану з корисністю віри, а не її обґрунтованістю. У певному сенсі він передбачає позицію Неймана і Пірсона, про яку йшлося в розділі 9. Так само, як вони, Паскаль сумнівається в тому, що докази, які ми можемо мати, дають надійні підстави для визначення істини. Водночас ми не маємо іншого вибору, як вирішувати, що нам *робити*. Паскаль не намагається переконати вас у тому, що Бог є; він намагається переконати в тому, що вам вигідно в це вірити, а тому найкраща лінія поведінки полягає в тому, щоб бути християнином і дотримуватися правил доброчесності — доки ви так не зріднитеся з нею, що почнете справді вірити. Чи можу я викласти аргумент Паскаля по-сучасному краще, ніж це зробив Девід Фостер Воллес у «Нескінченному жарті»? Не можу.

> Сповнених розпачу, щойно протвереженених Нещасних завжди заохочують згадувати і бездумно повторювати гасла, які вони ще не розуміють і в які не вірять, — наприклад, «Уперед, це просто!», «Довірся!» і «Крок за кроком!». Зветься це «Удавай, доки не вийде» — ще одне часто повторюване гасло. Кожен, хто взяв Зобов'язання, виступаючи на зібранні, починає з того, що каже, що він алкоголік — каже це, хоч сам так вважає, а хоч ні; тоді всі інші там кажуть, який він Добрий, що сьогодні тверезий, і як то чудово бути Активним у виконанні Зобов'язання зі своєю Групою, навіть якщо він зовсім не почувається ні добре, ні приємно. Тебе заохочують говорити всяке таке, доки сам ти не почнеш цьому вірити, — запитай когось, хто довго тримає «зав'язку», скільки тобі ще тягатися на всі ці чортові зібрання, і він посміхнеться так, що вбив би, і скаже, що рівно доки ти не почнеш *хотіти* ходити на всі ці чортові зібрання.

Санкт-Петербурґ і Еллсберґ

Ютилі корисні при ухваленні рішень стосовно речей, які не мають чітко визначеної вартості в доларах, як-от змарнований час чи несмачна їжа. Але потрібно якось давати раду речам, які мають чітко визначену вартість у доларах — як-от самі долари.

Усвідомлення цього відбулося вже на ранньому етапі розвитку теорії ймовірностей. Як багато інших важливих ідей, це розуміння було пов'язане з розв'язанням головоломки. Даниїл Бернуллі описав цю задачу в знаменитій статті 1738 року «Досвід нової теорії вимірювання жереба»: «Петро кидає догори монету, доки вона не впаде лицьовим боком догори; якщо це відбувається після першого кидання, він повинен дати Павлові 1 дукат, але якщо тільки після другого — 2 дукати, після третього — 4, після четвертого — 8 і так далі, так що після кожного кидання кількість дукатів подвоюється».

Такі умови очевидно привабливі для Павла: він мав би заплатити, щоб вступити у таку гру. Але скільки? Природною відповіддю на це запитання, враховуючи наш досвід з лотереями, буде обчислити очікувану цінність грошей, які Павло отримає від Петра. Шанси того, що після першого кидання монета впаде гербом догори і Павло отримає дукат, становлять 50/50. Якщо в результаті першого кидання випадає копійка, а після другого — герб, що стається в 1/4 усіх випадків, Павло отримує два дукати. Щоб він отримав чотири, потрібно, щоб результати перших трьох кидань були такими: копійка, копійка, герб, імовірність чого становить 1/8. При продовженні гри ймовірності додаються, тож очікуваний прибуток Павла становить:

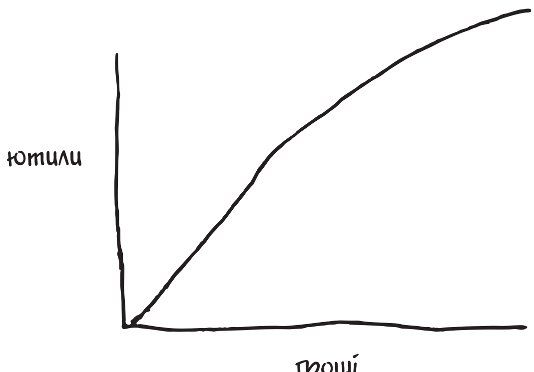
$$(1/2) \times 1 + (1/4) \times 2 + (1/8) \times 4 + (1/16) \times 8 + (1/32) \times 16 + \ldots$$

або

$$1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots$$

Ця сума — не число. Це — *розбіжний ряд*; що більше в ньому доданків, то більшою стає сума. Вона зростатиме, долаючи будь-яку скінченну межу*. Здається, це вказує на те, що Павлові варто віддати *будь-яку* кількість дукатів за право грати в цю гру.

Якась маячня. І так воно і є! Але коли математика каже нам щось, що здається маячнею, математики так просто не здаються. Ми йдемо на полювання: шукаємо винуватця, хоч де він є — чи то у математиці, чи в нашій інтуїції. Нашу головоломку, відому під назвою санкт-петербурзького парадоксу, винайшов двоюрідний брат Даниїла, Микола Бернуллі, десь за тридцять років до публікації статті; чимало тогочасних фахівців з теорії ймовірностей ламали над нею голови, але так і не досягли жодних задовільних результатів. Молодший Бернуллі блискуче розплутав цю загадку, і це його досягнення стало однією з головних підвалин економічного аналізу невизначених вартостей. Бернуллі стверджує, що в даному разі помилка в тому, що всі дукати вважаються однаковими. Але дукат у кишені багатія має не однакову цінність з дукатом, який має селянин, — і це добре видно з того, як багатій і бідняк ставляться до своїх грошей. Зокрема, мати дві тисячі дукатів — не удвічі краще, ніж мати одну тисячу; це краще менше, ніж удвічі, тому що тисяча дукатів має меншу цінність для того, хто вже має тисячу дукатів, ніж для того, хто не має нічого. Удвічі більша кількість дукатів не дорівнює удвічі більшій кількості ютилів; не всі лінії прямі, і відношення між грошима і корисністю відображається такими непрямими лініями.



* Хоча з розділу 2 ми пам’ятаємо, що розбіжні ряди — це не просто ті, що йдуть до нескінченності; серед них і й такі дивні явища, як ряд Гранді 1 — 1 + 1 − 1 +...

На думку Бернуллі, корисність зростає, як логарифмічна функція, тож цінність 2^k дукатів дорівнює k ютилів. Пригадаймо, що логарифм можна розглядати приблизно як кількість цифр у числі: отже, у грошовому вираженні, стверджує теорія Бернуллі, багатії вимірюють вартість своїх статків кількістю цифр у загальній сумі — мільярдер багатший за власника ста мільйонів на стільки, на скільки власник ста мільйонів багатший за власника десяти.

За формулюванням Бернуллі, очікувана цінність санкт-петербурзької гри — це сума

$$(1/2) \times 1 + (1/4) \times 2 + (1/8) \times 3 + (1/16) \times 4 + \ldots$$

У ній вже немає нічого парадоксального; виявляється, що ця сума — зовсім не нескінченна, вона навіть така вже й велика. Існує чудовий фокус, що дає змогу обчислити її точно:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots & = & 1 \\
\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots & = & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots & = & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots & = & \frac{1}{8} \\
\frac{1}{32} + \ldots & = & \frac{1}{16}
\end{array}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots = 2$$

Сума у першому рядку, $(1/2) + (1/4) + (1/8) + \ldots$, дорівнює 1; це — той самий нескінченний ряд, на який у другому розділі натрапив Зенон. Другий рядок — такий самий, як і перший, але кожний доданок у ньому поділено на 2; тож його сума мусить становити половину від суми першого рядка, тобто 1/2. Так само третій рядок, що являє собою поділений на 2 другий, мусить становити половину суми другого, тобто 1/4. Отже, сума *усіх* чисел у нашому трикутнику — це $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$, на 1 більше за суму ряду Зенона, тобто 2.

А коли додавати числа не рядками, а колонками? Так само, як з отворами у стереосистемі, тут не може бути відмінності в тому, рахуємо ми вертикально чи горизонтально; сума залишається незмінною*. У першій колонці — тільки одне число, 1/2; у другій — дві 1/4, що разом дає (1/4) × 2; у третій — три 1/8, разом (1/8) × 3 і так далі. Ряд, що складається із сум чисел у колонках, — це та сама сума, яку ми бачимо у санкт-петербурзькому парадоксі Бернуллі. І ця сума — це сума всіх чисел у нашому нескінченному трикутнику, тобто 2. Тож гроші, які має заплатити Павло, — це кількість дукатів, що, за його власною кривою корисності, коштують 2 ютили**.

Форму кривої корисності, крім того факту, що вона схиляється донизу мірою збільшення грошей, неможливо визначити точно***, хоча нині економісти і психологи постійно розробляють дедалі складніші й точніші експерименти, щоб поліпшити наше розуміння властивостей цієї кривої. («Знайдіть зручне положення голови у центрі томографа; коли не заперечуєте, я попрошу вас розставити у порядку від найкращої до найгіршої, на вашу думку, шість стратегій гри у покер, а потім, якщо не заперечуєте, мій помічник візьме мазок з вашої щоки...?»)

Принаймні ми знаємо, що універсальної кривої немає; різні люди в різних умовах вважають корисність грошей різною. Це важливий факт. Гарвардський економіст Ґреґ Менк'ю, якого ми бачили востаннє у розділі 1 (тоді він не надто енергійно схвалював рейґаноміку), 2008 року написав популярний пост у своєму блозі[179], у якому пояснював, що пропоноване кандидатом у президенти Бараком Обамою збільшення податку на доходи приведе до того, що він менше працюватиме. Зрештою, Менк'ю на той момент уже перебував у рівноважній точці, у якій корисність доларів, які б він отримав у результаті ще однієї години роботи, точно дорівнювала від'ємній корисності години, не проведеної з дітьми. Якщо зменшити кількість доларів, які Менк'ю заробляє за годину, рівність перестає виконуватися; він скорочує робочий час, доки не досягне рівня доходів, за якого година з дітьми для нього має ту саму вартість, що й година за роботою зі зменшеною Обамою оплатою. Він погоджується з рейґанівським поглядом на економіку — позицією зірки ковбойських фільмів: коли податки ростуть, робиш менше фільмів про ковбоїв.

---

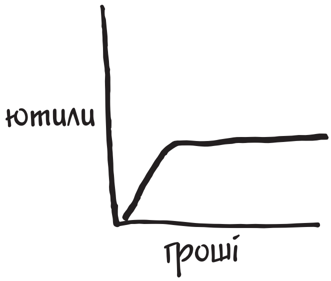
* Попередження: на того, хто застосовує інтуїтивні аргументи такого типу до нескінченних сум, чигають грізні небезпеки. У нашому випадку все гаразд, але це зовсім не так, коли йдеться про складніші нескінченні суми, особливо коли доданки у них і додатні, і від'ємні.

** Хоча Карл Менґер — науковий керівник дисертації Абрагама Вальда — 1934 року вказав, що існують такі щедрі варіанти санкт-петербурзької гри, порівняно з якими навіть «логарифмічні» гравці Бернуллі зобов'язані платити невиправдано велику кількість дукатів за право грати. А коли винагорода за k-те кидання монети становитиме $2^{2^\wedge k}$ дукатів?

*** Більшість людей скажуть, що кривої корисності у буквальному розумінні просто *не існує*, — що її потрібно розглядати як неточно визначену керівну лінію, а не як реальну річ, що має певну форму, яку ми ще точно не виміряли.

Та не всі такі, як Ґреґ Менк'ю. Зокрема, не всі мають такі, як у нього, криві корисності. Письменниця і журналістка Фран Лебовіц розповідає[180], як вона замолоду таксувала на Мангеттені. На початку місяця вона починала працювати і возила пасажирів, доки не заробляла, щоб вистачило на квартиру і їжу. Після цього вона припиняла водити таксі і решту місяця присвячувала літературі. Для Фран Лебовіц усі гроші, що перевищували певний поріг, фактично мали нульову корисність; її крива корисності має іншу, ніж крива Менк'ю, форму. Її крива, щойно вона заплатила за квартиру, стає плоскою. Що зміниться для Фран Лебовіц, коли зросте податок на доходи? Вона працюватиме *більше*, а не менше, щоб заробити ту саму «порогову» суму*.

крива Менк'ю



крива Лебовіц

Бернуллі був не єдиним математиком, який прийшов до ідеї корисності і її нелінійного зв'язку з грошима. У цьому він мав принаймні двох попередників. Одним з них був Ґабріель Крамер з Женеви; іншим — молодий кореспондент Крамера, не хто інший, як майстер кидання голки Жорж-Луї Леклерк, граф де Бюффон. Інтереси Бюффона у теорії ймовірностей не обмежувалися салонними іграми. Пізніше він згадував про час, коли дізнався про санкт-петербурзький парадокс: «Я якийсь час бився над цією задачею[181], не знаходячи розв'язку; я не міг зрозуміти, як можна узгодити математичні обчислення зі здоровим глуздом, не вводячи якихось міркувань морального характеру; я познайомив зі своїми ідеями пана Крамера, і він сказав мені, що я маю рацію і що він також знайшов відповідь на це питання за допомогою схожого підходу».

* У своїй книжці «Соціальні студії» Лебовіц написала: «Тримайтеся стійко: не приходьте до тями на алгебрі. У реальному житті, запевняю вас, немає такої речі, як алгебра». Я заявляю, що наведений приклад доводить, що в житті Фран Лебовіц є математика, хоч називає вона її так, а хоч ні!

Бюффон доходить того самого висновку, що й Бернуллі. Особливо чітко він уявляє нелінійність:

> Гроші не можна оцінювати за їх чисельною кількістю; якби метал, який є лише знаком багатства, сам був багатством, тобто якби щастя чи вигоди, які походять від багатства, були пропорційними кількості грошей, люди мали б підставу оцінювати їх чисельно й за кількістю, але не завжди вигоди, які отримуються з грошей, точно пропорційні їхній кількості; багата людина, що має сто тисяч екю доходу, не багатша у десять разів за людину, що має доходу тільки десять тисяч екю; поза самими лише грошима з'являється ще щось, коли перевищуються певні межі, за якими гроші майже не мають реальної цінності і не здатні поліпшити умов життя їхнього власника; людина, яка знайшла гору золота, не багатша за ту, що знайшла лише кубічний сажень його.

Учення про очікувану корисність приваблює своєю прямотою і простотою: з певного набору варіантів обирається той, що має найвищу очікувану корисність. Напевно, вона є найближчою до простої математичної теорії індивідуального ухвалення рішень. Теорія очікуваної корисності враховує чимало з того, як люди приймають рішення, тому вона залишається одним з найважливіших інструментів в арсеналі соціологів, що займаються кількісним аналізом. П'єр-Сімон Лаплас на останній сторінці свого трактату 1814 року «Філософська проба теорії ймовірностей» пише: «З нашої праці бачимо, що у підсумку теорія ймовірностей є лише здоровим глуздом, зведеним до "числення"; вона точно виражає те, що раціональні люди нібито розуміють інстинктивно, не обов'язково усвідомлюючи це. Вона не залишає місця сумніву у виборі думок і рішень; застосовуючи її, завжди можна визначити найвигідніший вибір».

Знову бачимо те саме: математика — це продовження здорового глузду іншими засобами.

Очікувана корисність працює не скрізь. І знову незручні ускладнення постають у формі головоломки. Цього разу автором головоломки є Деніел Еллсберґ, який пізніше стане знаменитим як людина, що передала пресі документи Пентагону про в'єтнамську війну. (Для математичних кіл, у яких часом панують обмежені погляди, недивною є й така думка про Еллсберґа: «Знаєте, він робив справді важливі речі, доки не вплутався у політику»).

1961 року, за десятиліття до того, як він став знаменитістю, Еллсберґ був блискучим молодим аналітиком корпорації «РЕНД». Він розробляв рекомендації уряду США зі стратегічних питань, пов'язаних з ядерною війною — як їй запобігти або, якщо не вдасться, як її ефективно вести. Одночасно він працював у Гарвардському університеті над дисертацією з економіки. В обох сферах він докладно аналізував процес ухвалення людьми рішень в умовах невизначеності. У той час теорія очікуваної корисності вважалася найкращим засобом математичного аналізу процесу ухвалення рішень. Фон Нейман і Морґенштерн* в основоположній праці «Теорія ігор і економічна поведінка» довели, що всі люди, які дотримуються певного набору правил або аксіом поведінки, *повинні* діяти так, щоб їхні рішення керувалися прагненням максимізувати певну функцію корисності. Ці аксіоми — пізніше уточнені Леонардом Джиммі Севіджем, який під час війни працював з Абрагамом Вальдом у Групі статистичних досліджень, — у той час були стандартною моделлю поведінки в умовах невизначеності.

Теорія ігор і теорія очікуваної корисності досі відіграють велику роль у дослідженні переговорів між людьми й державами, але найбільшою ця роль була в дослідженнях «РЕНД» у розпалі холодної війни, коли працям фон Неймана і Морґенштерна поклонялися, як Біблії, і досліджували їх так ретельно, як Святе Письмо. Науковці з «РЕНД» досліджували фундаментальні для людського життя речі: процес вибору і конкуренцію. І в іграх, які вони вивчали, як у парі Паскаля, ставки були надзвичайно високі.

Молода суперзірка Еллсберґ полюбляв порушувати загальноприйняті норми. Після дуже успішного закінчення навчання в Гарварді[182] він приголомшив своїх товаришів-інтелектуалів, записавшись до Корпусу морської піхоти, де відслужив солдатом три роки. 1959 року, будучи молодшим науковим співробітником у Гарварді, він прочитав у Бостонській публічній бібліотеці лекцію про стратегії зовнішньої політики, яка набула розголосу через те, що Еллсберґ як приклад ефективної геополітичної тактики наводить діяльність Адольфа Гітлера: «Є майстер, гідний вивчення[183], вивчення того, на що *можна* сподіватися, що можна зробити загрозою насильства». (Еллсберґ завжди наполягав, що він не рекомендував, щоб США застосовували стратегії, подібні до гітлерівської, що він лише хотів здійснити неупереджене дослідження ефективності таких стратегій — може, воно й так, але навряд чи можна сумніватися в тому, що він намагався розбурхати своїх слухачів).

Тож не дивно, що Еллсберґ неохоче приймав усталені погляди і думки. Він ще студентом критично аналізував основи теорії ігор. У «РЕНД» він придумав знаменитий експеримент, відомий зараз як парадокс Еллсберґа[184].

Припустимо, є урна**, а в ній дев’яносто куль. Ви знаєте, що тридцять куль червоні; про решту шістдесят ви знаєте тільки те, що деякі з них чорні, а деякі жовті. Експериментатор дає вам такі чотири варіанти ставок:

* Той самий Морґенштерн, який витягнув Абрагама Вальда з царини чистої математики, а згодом і з окупованої Австрії.

** Особисто я ніколи такої урни не бачив, але існує залізний закон теорії ймовірностей, за яким, коли навмання вибираються кольорові кулі, то їх обов’язково виймають з цієї урни.

Червона: Ви отримуєте 100 доларів, якщо наступна вийнята з урни куля виявиться червоною; інакше ви не отримуєте нічого.

Чорна: Ви отримуєте 100 доларів, якщо наступна куля чорна, інакше — нічого.

Не-червона: Ви отримуєте 100 доларів, якщо наступна куля буде або чорною, або жовтою, інакше — нічого.

Не-чорна: Ви отримуєте 100 доларів, якщо наступна куля або червона, або жовта, інакше — нічого.

Що ви виберете — червону чи чорну? А з не-червоної і не-чорної?

У ході свого експерименту Еллсберґ вивчав, які з цих варіантів люди вважають кращими. Як виявилося, учасники експерименту мали за краще з червоної і чорної ставок обирати червону. Зробивши червону ставку, ви знаєте свої шанси отримати гроші — один до трьох. З чорною ставкою ви не маєте уявлення, якою є імовірність виграшу. Зі ставками не-червона і не-чорна ситуація та сама: учасники експерименту обирали не-червону, маючи за краще знати, що їхня імовірність виграшу становить точно 2/3.

Тепер припустимо, що вибір ускладнюється: вам потрібно обирати відразу *дві* ставки. І не просто які завгодно дві — потрібно вибирати з двох пар «червона і не-червона» і «чорна і не-чорна». Якщо ви вважали кращою червону за чорну, а не-червону за не-чорну, то, здавалося б, ви вважатимете кращим обрати ставки «червона і не-червона», а не «чорна і не-чорна».

Але тут з'являється проблема. Зробити ставку «червона і не-червона» — це гарантія отримання 100 доларів. Але ж «чорна і не-чорна» — те саме! Як можна обирати між чимось, що є *одним і тим самим*?

Для прихильника теорії очікуваної корисності результати Еллсберґа виглядають надзвичайно дивно. Кожна ставка мусить мати певну вартість в ютилах, і якщо червона має більшу корисність, ніж чорна, а не-червона — більшу, ніж не-чорна, то так само повинно бути і в ситуації з парами: «червона + не-червона» вартує більше, ніж «чорна + не-чорна»; але ці дві ставки однакові. Якщо ви хочете вірити в ютили, то маєте вірити і в те, що учасники дослідження Еллсберґа мають цілковито помилкові уподобання, що вони погано рахують, або неуважно слухали запитання, або що вони просто божевільні. Оскільки насправді учасниками експерименту Еллсберґа були знані економісти і фахівці з теорії ухвалення рішень, такий висновок сам по собі становить проблему для усталених поглядів на предмет.

За Еллсберґом, рішення парадоксу полягає просто в тому, що теорія очікуваної корисності неправильна. Як пізніше скаже Дональд Рамсфельд, є відоме невідоме і невідоме невідоме, і з ними потрібно діяти по-різному. «Відомі невідомі» схожі на ставку червона — ми не знаємо, яку кулю отримаємо, але ми можемо кількісно виразити ймовірність того, що куля матиме бажаний для нас колір. З іншого боку, ЧОРНА ставка являє собою для гравця «невідоме невідоме» — ми не просто не впевнені в тому, що куля буде чорною, ми абсолютно не знаємо, яка ймовірність того, що вона може виявитися чорною. У літературі з теорії ухвалення рішень невідоме першого виду має назву *ризик*, а другого — *невизначеність*. Ризиковані стратегії можна аналізувати кількісно; невизначені стратегії, як вважає Еллсберґ, виходять за межі формального математичного аналізу, чи принаймні за межі різновиду математичного аналізу, прийнятого на той час у «РЕНД».

Усе це жодним чином не заперечує неймовірної корисності теорії корисності. Існує багато ситуацій, наприклад лотерея, у яких таємниця — це тільки ризик, який описується чітко визначеними ймовірностями; також є і набагато більше ситуацій, у яких присутнє також і «невідоме невідоме», але воно відіграє незначну роль. Тут ми бачимо характерний для математики двосторонній підхід. Такі математики, як Бернуллі і фон Нейман, будують формальні моделі, які проливають яскраве світло на сфери, майже незрозумілі до того; науковці, що добре знаються на математиці, такі як Еллсберґ, спрямовують свої зусилля на виявлення меж цих формальних моделей, щоб уточнити й удосконалити їх там, де це можливо, і поставити добре видимі застережні знаки там, де неможливо.

Стаття Еллсберґа написана живою літературною мовою, не характерною для економічної науки. В останньому абзаці автор пише про учасників експерименту, що «підхід Баєса і Севіджа, на їхню думку, дає неправильні прогнози і погані поради. Вони діють всупереч аксіомам свідомо, не виправдовуючись, тому що вважають свої дії розумними. То чи є їхні дії цілковито помилковими?».

У світі Вашингтона і корпорації «РЕНД» періоду «холодної війни» теорія ухвалення рішень і теорія ігор оцінювалися надзвичайно високо; вони вважалися науковими інструментами, здатними забезпечити перемогу в наступній світовій війні — так, як атомна бомба перемогла в останній. Те, що ці інструменти насправді можуть мати обмежену сферу застосування, особливо коли немає прецедентів, а отже, і способів оцінки ймовірностей — як, скажімо, для випадку *миттєвого перетворення людства на радіоактивний пил*, — мусило, принаймні деякою мірою, турбувати Еллсберґа. Чи не з цього, з незгоди у математичному питанні, насправді почалися його сумніви у військових?

Розділ 13

Де сходяться рейки

Поняття корисності допомагає розібратися в одному складному моменті історії з «Кеш ВінФол». Коли група Джеральда Селбі купувала великі партії білетів, числа вибиралися з допомогою програми генерування випадкових чисел. «Випадкові стратегії», з іншого боку, добирали числа самі; це означало, що вони мусять вручну заповнювати сотні тисяч бланків, після чого один за одним згодовувати їх автоматам у магазинах — величезна й неймовірно нудна робота.

Виграшні номери повністю випадкові, тож усі лотерейні білети мають однакову очікувану цінність; вибрані комп'ютером 100 тисяч номерів Селбі в середньому приносять той самий обсяг призових коштів, що й 100 тисяч номерів Гарві чи Лу «ручної роботи». З погляду очікуваної цінності «Випадкові стратегії» робили купу марної роботи. Навіщо?

Розгляньмо такий приклад (він простіший за те, що реально відбувалося, але суть та сама). Що ви виберете: 50 тисяч доларів чи ставку 50 на 50 програти 100 тисяч, а виграти 200? Очікувана цінність ставки

$$(1/2) \times (-100\,000 \text{ доларів}) + (1/2) \times (200\,000 \text{ доларів}) = 50\,000 \text{ доларів},$$

тобто у грошовому вираженні — та сама сума. Дійсно, певні підстави для однакового ставлення до цих двох варіантів є; якщо робити таку ставку багато-багато разів, майже напевно ви виграватимете по 200 тисяч доларів половину разів, а в іншій половині розіграшів програватимете по 100 тисяч. Уявіть собі почергові виграші і програші: після двох ставок ви виграли 200 тисяч і програли 100 — отримали чистого доходу 100 тисяч доларів, після чотирьох ставок — чистий дохід 200 тисяч, шість ставок — 300 тисяч і так далі: середній прибуток на ставку — 50 тисяч, точно так само, як було б узагалі без ставок за нашою умовою.

Але уявіть на хвилину, що ви не персонаж сюжетної задачі у підручнику з економіки, а реальна людина — реальна людина, яка не має 100 тисяч доларів. Коли ви програєте першу ставку і ваш букмекер — скажімо, кремезний, сердитий, нахабний букмекер-качок — приходить по гроші, чи скажете ви: «Обчислення очікуваної цінності показує, що з дуже високою ймовірністю я зможу заплатити у триваліший перспективі»? Не скажете. Цей аргумент, незважаючи на свою математичну бездоганність, не досягне мети.

Якщо ви реальна людина, вам варто взяти 50 тисяч.

Такий висновок добре обґрунтовується теорією корисності. Якщо я — корпорація з необмеженими ресурсами, втрата 100 тисяч доларів, можливо, не така вже й велика біда, — скажімо, вона вартує −100 ютилів, тоді як виграш 200 тисяч доларів приносить мені 200 ютилів. У такому разі відношення доларів і ютилів може бути лінійним, ютил — це просто інша назва для тисячі доларів.

Але якщо я реальна людина зі скромними статками, розрахунок буде дещо іншим. Виграш 200 тисяч доларів змінить моє життя більше за життя корпорації, тож він матиме для мене більшу корисність — скажімо, 400 ютилів. Але втрата 100 тисяч не просто спустошить мій рахунок у банку, це віддає мене на поталу сердитому й нахабному букмекеру-качку. Це не просто поганий день для бухгалтерського балансу, це серйозна небезпека зазнати тяжких тілесних ушкоджень. Напевно, ми оцінимо такий варіант у −1000 ютилів. У такому разі наша очікувана корисність ставки буде

$$(1/2) \times (-1000) + (1/2) \times (400) = -300.$$

Від'ємна корисність цієї ставки означає, що вона не просто гірша за гарантовані 50 тисяч доларів — *зробити таку ставку гірше, ніж не робити нічого*. 50 %-ва ймовірність цілковитого розорення — це ризик, який ви собі просто не можете дозволити; принаймні без обіцянки набагато вищої винагороди.

Це — математичний спосіб формалізації вже знайомого вам принципу: що ви багатші, то більший ризик ви можете собі дозволити. Такі ставки, як щойно описана, схожі на ризиковане фондове інвестування з додатним фінансовим результатом; якщо ви робите багато таких інвестицій, ви можете одноразово втратити купу грошей, але у тривалій перспективі ви виграєте. Багата особа, що має резерви для компенсування таких випадкових збитків, інвестує і стає ще багатшою; небагаті люди залишаються з тим, що мали.

Ризиковане інвестування може мати сенс, незважаючи на відсутність у вас грошей для покриття збитків, — якщо ви маєте запасний план. Певна подія на ринку може бути пов'язана з 99 % шансів заробити мільйон доларів і 1 % імовірності витратити 50 мільйонів. Чи варто вам робити цей крок? Він має додатну очікувану цінність, тож видається доброю стратегією. Але вас, можливо, стримуватиме ризик дуже великих збитків — особливо тому, що малі ймовірності — річ надзвичайно непевна*. Професіонали називають такі дії «витягання копійок з-під парового котка» — у більшості випадків ви заробляєте невеликі гроші, але хоч раз схибите — й від вас тільки мокре місце лишиться.

Одна зі стратегій полягає в тому, щоб набрати позикових коштів, як жаба мулу, доки не матимете достатньо паперових активів для ризикованої операції — але з підвищувальним коефіцієнтом 100. Тепер ви, ймовірно, зароблятимете по 100 мільйонів на транзакції — чудово! А якщо таки вийде ота неприємність з котком? Попадете на 5 мільярдів. А ось і не попадете — тому що світова економіка в нашу мережеву добу — це хатка на дереві, що ледь не розвалюється, тримаючись на чесному слові, дроті й іржавих цвяхах. Серйозна аварія в одній частині конструкції тягне за собою істотну небезпеку завалити всю халупу. Федеральна резервна система дуже не налаштована до цього допускатися. Як каже давня мудрість, якщо ви втратите мільйон доларів, це ваша проблема; якщо п'ять мільярдів — це проблема державна.

Незважаючи на весь свій цинізм, ця фінансова стратегія часто спрацьовує — як виявилася вона дієвою у 1990-х роках для інвестиційного фонду «Лонґ-Терм Кепітал Менеджмент»[185], про що розповідає Роджер Ловенстайн у своїй чудовій книжці «Коли геній зазнає поразки». Спрацювала вона і для компаній, які вижили і навіть нажилися на фінансовому обвалі 2008 року. За відсутності фундаментальних змін, яких щось не видно, вона і далі буде дієвою**.

Фінансові компанії не люди, а більшість людей, навіть багатих, не люблять непевності. Можливо, багатий інвестор із задоволенням робитиме ставки 50 на 50 з очікуваною цінністю 50 тисяч доларів, але він, імовірно, обере взяти 50 тисяч, не граючи. Відповідний спеціальний термін — *дисперсія*, міра того, наскільки широко від середньої величини відхиляються можливі результати рішення, і, з іншого боку, наскільки ймовірним є досягнення крайнього показника з кожного боку. З-поміж ставок з однаковою очікуваною грошовою вартістю більшість людей, особливо, якщо ці люди не мають необмежених ліквідних активів, обирає ставки з нижчою дисперсією. Ось чому дехто вкладає гроші в муніципальні облігації, незважаючи на те, що біржа дає більшу прибутковість у тривалій перспективі. З облігаціями ви *впевнені*, що отримаєте гроші. Інвестуючи в акції, що мають більшу дисперсію, ви, ймовірно, отримаєте більше — але все може закінчитися і набагато гірше.

---

* Деякі аналітики, у тому числі й Нассім Талеб, стверджують — як на мене, переконливо, — що присвоювати числові значення ймовірностям рідкісних фінансових подій неприпустимо взагалі.

** Звісно, є достатньо причин вважати, що певні люди в банках знали, що їхні інвестиції прогорять, але брехали; штука в тому, що *навіть якщо банкіри чесні*, матеріальні стимули штовхають їх на дурний ризик, а збитки зрештою муситиме відшкодовувати суспільство.

Боротьба з дисперсією становить один з найбільших викликів управління фінансами, хоч називай це так, а хоч по-іншому. Якщо ви тримаєте всі гроші в акціях нафтогазових компаній, один великий обвал в енергетичному секторі може знищити весь ваш інвестиційний портфель. Але якщо половина ваших акцій — нафтогазові, а друга половина — технологічні, велика подія в одному секторі не обов'язково супроводжуватиметься якимись змінами в інших; це — інвестиційний портфель з нижчою дисперсією. Ви хочете тримати яйця у різних кошиках, *багатьох* різних кошиках; саме це ви робите, коли вкладаєте заощадження у величезний індексний фонд, який розподіляє інвестиції по всіх секторах економіки. Більш математично грамотні автори порадників з управління фінансами, як-от Бертон Мелкіл зі своєю книжкою «Випадкова прогулянка по Вол-Стріт», надзвичайно високо оцінюють цю нудну стратегію; вона нудна, але вона діє. *Якщо підготовка до виходу на пенсію захоплює...*

Акції, принаймні у тривалій перспективі, в середньому зростають у ціні; іншими словами, інвестування у фондовий ринок — це операція з додатною очікуваною цінністю. Ситуація з розрахунком у ставках з *від'ємною* очікуваною цінністю зворотна: люди так само не люблять певної поразки, як люблять гарантований виграш. Тож тут потрібна не менша дисперсія, а більша. Ви не побачите гравця, який підходить до рулетки і розкладає фішки по одній на кожен номер; це буде просто тяжчий спосіб віддати фішки круп'є.

Який усе це має стосунок до «Кеш ВінФол»? Як ми вже відзначили, очікувана цінність 100 тисяч лотерейних білетів буде та сама, хоч скільки білетів ви купите. Але з дисперсією справа інша. Припустимо на хвилину, що я вирішив вступити у велику гру, але застосувати в ній інший підхід; я купую 100 тисяч копій одного білета.

Якщо за результатами розіграшу лотереї у цьому білеті виявиться чотири з шести виграшних номерів, то у мене буде 100 тисяч виграшів на чотири номери; таким чином, я, в принципі, забираю увесь призовий фонд 1,4 мільйона доларів — пристойний прибуток 600 %. Але якщо мої номери програшні, то я втрачаю 200 тисяч, на які купив білети. Це ставка з високою дисперсією — з великою ймовірністю великого програшу і невеликими шансами на дуже великий виграш.

Тож «не ставте всі гроші на один номер» — порада дуже добра, набагато краще буде ставки розподілити. Але чи не саме це група Селбі робила за допомогою комп'ютера, який генерує випадкові числа?

Не зовсім. По-перше, хоча Селбі не ставив усі гроші на один білет, він *купував* той самий білет багато разів. Спершу це здається дивним. У найактивніший період він купував по 300 тисяч білетів на розіграш, даючи комп'ютеру можливість добирати номери з майже 10 мільйонів варіантів. Тож його білети становили лише 3 % можливих; яка ймовірність того, що він купить один білет двічі?

Насправді, вона дуже і дуже висока. Старий фокус: запропонуйте гостям на вечірці парі на те, що двоє людей тут народилися в один день. Таке парі краще влаштовувати на великій вечірці — скажімо, на тридцять людей. Тридцять днів народження з 365 можливих варіантів* — не дуже багато, тож ви можете подумати, що збіг двох днів народження тут — річ дуже малоймовірна. Але для цього випадку важлива не кількість людей, а кількість *пар* людей. Нескладно обчислити, що таких пар тут буде 435**, і кожна пара має 1 з 356 шансів мати один день народження; тож на вечірці з такою кількістю людей можна очікувати, що така пара буде, — можливо, їх буде навіть дві. Ймовірність того, що двоє людей з тридцяти народилися в той самий день, становить майже 70 % — дуже добра ймовірність. А якщо ви купите 300 тисяч випадково дібраних лотерейних білетів з 10 мільйонами можливих варіантів номерів, імовірність купити той самий білет двічі така близька до 1, що я краще скажу «незаперечно», ніж обчислюватиму, скільки дев'яток після коми потрібно дописати у 99,9 %.

І проблеми створюють не тільки білети, що повторюються. Як завжди, в математиці легше можна зрозуміти, що відбувається, якщо зробити числа достатньо малими, щоб охопити загальну картину. Тож нехай наша лотерея буде тільки з сімома кулями, з яких штат відбирає три як виграшну комбінацію джек-поту. Існує 35 можливих виграшних комбінацій, що відповідають тридцяти п'яти різним способам добору семи чисел з набору 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ось вони у порядку зростання:

123 124 125 126 127
134 135 136 137
145 146 147
156 157
167
234 235 236 237
245 246 247
256 257
267
345 346 347
356 357

* 366, якщо враховувати високосні роки, але тут нам така точність не потрібна.

** Перша людина в парі може бути будь-ким з тридцяти присутніх, друга — будь-хто з 29 решти, що дає 30 × 29 варіантів; але так ми враховуємо кожну пару двічі — і {Ерні, Берт}, і {Берт, Ерні}; тож правильна кількість пар — це (30 × 29)/2 = 435.

367
456 457
467
567

Скажімо, Джеральд Селбі йде до магазину і за допомогою комп'ютера добирає сім випадкових білетів. Його шанси на виграш залишаються дуже низькими. Але в цій лотереї ви також отримуєте винагороду за вгадані два з трьох номерів. (Лотерею, організовану за такою схемою, часом називають *трансільванською лотереєю*, хоча мені не вдалося знайти ознак того, що в неї коли-небудь грали у Трансільванії, чи що її особливо полюбляли вампіри).

Виграти, вгадуючи два номери з трьох, дуже легко. Тож я не буду весь час писати «два з трьох» — давайте назвемо білет, який виграє цей менший приз, *двійкою*. Якщо виграшні номери джек-поту будуть, наприклад, 1, 4 і 7, то чотири білети з 1, 4 і якась кількість номерів, що мають номер *не* 7, будуть двійками. А крім цих чотирьох є ще чотири білети, у яких буде 1 і 7, і ще чотири з номерами 4 і 7. Тож 12 з 35, трохи більше за третину можливих комбінацій, будуть двійками. Тож, імовірно, серед семи білетів Джеральда Селбі принаймні два будуть двійками. Можна точно обчислити, що Селбі має

імовірність не мати двійок — 5,3 %
імовірність мати точно одну двійку — 19,3 %
імовірність мати дві двійки — 30,3 %
імовірність мати три двійки — 26,3 %
імовірність мати чотири двійки — 13,7 %
імовірність мати п'ять двійок — 4,3 %
імовірність мати шість двійок — 0,7 %
імовірність, що двійками будуть усі сім білетів, — 0,1 %.

Таким чином, очікувана кількість двійок становить

$$5{,}3\,\% \times 0 + 19{,}3\,\% \times 1 + 30{,}3\,\% \times 2 + 26{,}3\,\% \times 3 + 13{,}7\,\% \times 4 +$$
$$+ 4{,}3\,\% \times 5 + 0{,}7\,\% \times 6 + 0{,}1\,\% \times 7 = 2{,}4.$$

Трансільванська версія Джеймса Гарві, з іншого боку, не послуговується комп'ютером. Той Гарві заповнює бланки від руки, і ось номери, які він записує:

124
135
167

257
347
236
456

Припустимо, у розіграші випали номери 1, 3 і 7. Тоді Гарві має три двійки: 135, 167 і 347. Що коли виграшними будуть номери 3, 5, 6? Тоді Гарві знову матиме три двійки: 135, 236 і 456. Якщо ви будете перебирати можливі комбінації далі, то швидко побачите, що вибір Гарві має дуже особливу властивість: він або виграє джек-пот, або *точно* три двійки. Імовірність того, що один із семи білетів Гарві виграє джек-пот, становить 7 з 35, тобто 20 %. Тож у нього:

ймовірність не мати двійок — 20 %;
ймовірність мати три двійки — 80%.

Очікувана кількість двійок, таким чином, становить

$$20\,\% \times 0 + 80\,\% \times 3 = 2{,}4$$

— така сама, як у Селбі, як воно і має бути. Але дисперсія тут набагато менша. Гарві майже не має сумніву щодо того, скільки в нього буде двійок. Це робить «портфель» Гарві набагато привабливішим для потенційних членів картелю. Зауважимо: у будь-якому разі, коли Гарві не має трьох двійок, він виграє джек-пот. Це означає, що стратегія Гарві *гарантує* значний мінімальний виграш — те, чого не здатний зробити випадковий добір чисел з допомогою комп'ютера, що робить Селбі. Якщо добирати номери самостійно, можна позбутися ризику, водночас гарантуючи винагороду — якщо добирати числа правильно.

І як це зробити? Питання — цього разу буквально! — це питання на мільйон доларів.

Перша спроба: просто нехай за вас це зробить комп'ютер. Гарві з товаришами були студентами MIT, — їм, напевно, видати десяток рядків коду все одно, що дурному з гори збігти. То чому просто не написати програму, яка б перебирала всі можливі комбінації для 300 тисяч білетів «ВінФол», щоб знайти стратегію мінімальної дисперсії?

Написати таку програму нескладно. Одна маленька проблема тут у тому, що вся матерія й енергія у Всесвіті давно загине від теплової смерті, доки ваша програма обробить першу мікроскопічну крихту даних, які потрібно проаналізувати. З погляду сучасного комп'ютера 300 тисяч — кількість невелика. Але об'єкт, з яким має справу наша програма, — це не 300 тисяч білетів, це всі можливі набори з 300 тисяч білетів, які потрібно купити з 10 мільйонів білетів лотереї «Кеш ВінФол». Скільки є таких наборів? Їх більше за 300 тисяч. Їх більше за кількість елементарних частинок, що існують і коли-небудь існували. Набагато більше. Напевно, ви ніколи навіть *не чули* про таке велике число, як кількість способів дібрати ці 300 тисяч білетів*.

Тут ми стикаємося зі страхітливим явищем, відомим серед програмістів як «комбінаторний вибух». Якщо просто: дуже прості операції здатні перетворювати великі, але приступні числа, на цілковито неможливі. Якщо ви хочете дізнатися, в якому з 50 штатів краще відкрити фірму, це зробити легко; вам просто потрібно порівняти 50 різних речей. Але якщо ви хочете дізнатися, яким буде найефективніший *маршрут* через 50 штатів — так звана задача комівояжера, — відбувається комбінаторний вибух, і ви стикаєтеся зі складністю абсолютно іншого рівня. Існує близько 30 вігінтильйонів можливих маршрутів, з яких потрібно обрати один. У знайоміших термінах — це тридцять тисяч трильйонів трильйонів трильйонів трильйонів трильйонів.

Бабах!

Тож краще було б знайти якийсь інший спосіб вибору наших лотерейних білетів для гамування дисперсії. Ви мені повірите, коли я вам скажу, що все зводиться до планіметрії?

Де сходяться рейки

Паралельні лінії не сходяться. Саме це робить їх паралельними.

Але паралельні лінії часом *здаються* такими, що сходяться, — уявіть залізничні рейки у порожньому пейзажі: дві рейки, здається, сходяться, наближаючись до горизонту. (Оживити цей образ, із мого досвіду, добряче допомагає музика кантрі). Це явище *перспективи*; коли ви намагаєтеся зобразити тривимірний світ у вашому двовимірному полі зору, чимось потрібно поступатися.

Першими з'ясували, що тут відбувається, художники. Саме їм потрібно було зрозуміти, якими речі є і як вони виглядають, а також у чому полягає відмінність між речами та їхнім зображенням. Цей момент, ранній період італійського Відродження, коли художники зрозуміли перспективу, став моментом докорінної зміни візуальної репрезентації, моментом, від якого європейський живопис перестав нагадувати те, що ваша дитина малює на дверцятах холодильника (якщо ваша дитина малює Ісуса на хресті), і почав виглядати так, як зображувані речі**.

* Якщо ви не чули про ґуґолплекс. *Ось це* (Боже милостивий!) велике число.

** Чи принаймні вони почали скидатися на певні види оптичної репрезентації речей, які ці художники зображали; ці види оптичної репрезентації з часом почали вважатися реалістичними;

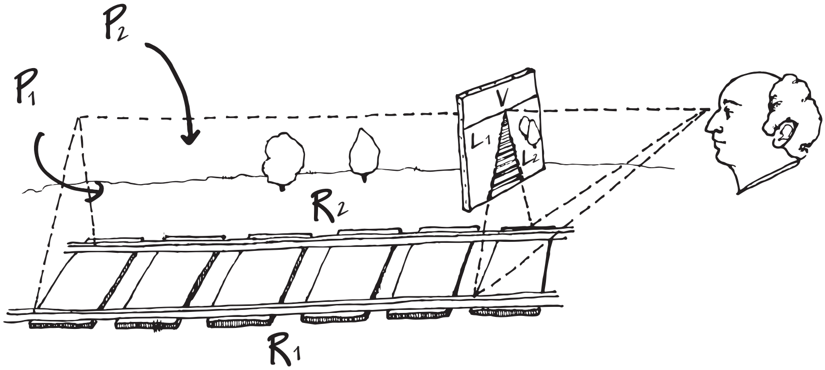
Як саме флорентійські митці, як-от Філіппо Брунеллескі, прийшли до розробки сучасної теорії перспективи, викликає сотні сварок серед істориків; ми у них не заглиблюватимемося. Ми знаємо напевно, що прорив поєднав естетичні міркування з новими ідеями, які походили з математики й оптики. Центральну роль відіграло розуміння того, що образи, які ми бачимо, утворюються променями світла, що відбиваються від предметів і після цього потрапляють до наших очей. Сучасній людині це видається очевидним, але, повірте, тоді очевидним це не було. Чимало давніх учених, серед яких найзнаменитішим був Платон, стверджували, що зір мусить ґрунтуватися на своєрідному вогні, що виходить з очей[186]. Така думка сягає у минуле принаймні до Алкмеона Кротонського, одного з химерних піфагорійців, яких ми зустрічали у розділі 2. Алкмеон твердив, що око мусить випускати вогонь: в іншому разі звідки береться *фосфен*, оті зірки, які ви бачите, коли заплющуєте очі й натискаєте на них? Теорію зору на основі відбиття променів було розроблено в XI столітті каїрським математиком Абу Алі аль-Гасаном ібн аль-Гайсамом (але давайте будемо називати його, як більшість західних авторів, Альхазеном). Його трактат про оптику, «Кітаб аль-Маназір», був перекладений латиною і схвально сприйнятий філософами та митцями, які прагнули більш систематичного розуміння зв'язку між зором і тим, що ми бачимо. Головна ідея така: точка P на полотні представляє *лінію* у тривимірному просторі. Завдяки Евкліду ми знаємо, що існує тільки одна лінія, що містить будь-які дві задані точки. У такому разі ця лінія міститиме точку P і око. Будь-який предмет у світі, що лежить на цій лінії, зображатиметься у точці P.

Тепер уявімо, що ви — Філіппо Брунеллескі, і стоїте ви серед степу широкого й малюєте рейки*. Їх дві — позначимо їх як R_1 і R_2. Кожна з рейок, зображена на полотні, виглядатиме як лінія. І так само, як точка на полотні відповідає прямій у просторі, пряма на полотні відповідає площині. Площина P_1, що відповідає R_1, — це та, що утворена лініями, які з'єднують кожну точку на рейці з оком. Іншими словами, це єдина площина, що містить і ваше око, і рейку R_1. Так само площина P_2, що відповідає R_2, — це площина, що містить ваше око і рейку R_2. Перетини кожної з двох площин з полотном утворюють дві лінії, позначимо їх як L_1 і L_2.

Дві рейки паралельні. *Але дві площини — ні*. Як вони можуть бути паралельними? Вони перетинаються у вашому оці, а паралельні площини не перетинаються ніде. Але площини, які не є паралельними, мусять перетинатися по прямій. У такому разі лінія буде горизонтальною, вона виходить з ока

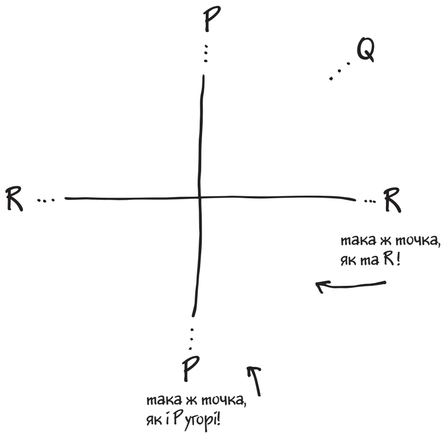
що вважати «реалізмом», серед художніх критиків є предметом запеклих суперечок протягом приблизно того самого часу, скільки існує сама художня критика.

* Це, звісно, анахронізм, але менше з тим.



і проходить паралельно до рейок. Ця горизонтальна лінія не перетинається зі степом — вона прямує до горизонту, не торкаючись землі. Але вона — у цьому і полягає ідея — перетинається з полотном у певній точці V. Оскільки V лежить на площині R_1, вона має лежати на лінії L_1, що є лінією перетину площини R_1 і полотна. А оскільки V лежить також і на площині R_2, вона повинна бути на лінії L_2. Іншими словами, V — це точка на полотні, у якій сходяться зображені на ньому рейки. Будь-яка пряма в степу, паралельна рейкам, на полотні виглядатиме як лінія, що проходить через точку V. V — це так звана точка сходу, точка, через яку повинні проходити всі зображені лінії, паралельні рейкам. Будь-яка пара паралельних рейок задає певну точку сходу на полотні; розташування точки сходу залежить від напрямку, у якому йдуть паралельні лінії. (Єдиним винятком є пара ліній, паралельна самому полотну, як-от шпали між рейками — вони будуть паралельними і на полотні).

Концептуальний прорив, який зробив Брунеллескі, становить основу того, що математики називають проективною геометрією. Замість точок у пейзажі ми розглядаємо лінії, що проходять крізь око. Спершу може здатися, що відмінність пов'язана тільки зі значенням слів; кожна точка на землі визначає одну і тільки одну лінію між цією точкою і оком, тож яка різниця, чи розглядаємо ми точку, чи лінію? Різниця ось яка: через око проходить більше ліній, ніж є точок на землі, тому що існують *горизонтальні лінії*, які зовсім не перетинають земної поверхні. Вони відповідають точкам сходу на полотні, місцям, у яких сходяться залізничні рейки. Про цю лінією можна думати як про точку на землі, що лежить «нескінченно далеко» в напрямку, в якому ідуть рейки. Математики зазвичай називають їх *точками в нескінченності*. Коли взяти евклідову площину і причепити до неї точки в нескінченності, отримаємо *проективну площину*. Ось як вона виглядає:



Проективна площина виглядає переважно так само, як знайома нам звичайна. Але на проективній площині більше точок, тих самих точок у нескінченності — по одній для кожного можливого напрямку, по якому можуть орієнтуватися паралельні лінії на площині. Точку *P*, яка відповідає вертикальному напрямку, потрібно розглядати як розташовану нескінченно високо на вертикальній осі — але водночас і *нескінченно низько* на вертикальній осі. На проективній площині два кінці осі *y сходяться* у точці в нескінченності, а вісь, як виявляється, насправді не лінія, а коло. Таким самим чином *Q* — це точка, що лежить нескінченно далеко на північному сході (або південному заході!), а *R* — це точка на кінці горизонтальної осі. Чи, точніше, на *обох* кінцях. Якщо йти нескінченно далеко направо, доки не дійти до *R*, а потім іти ще далі, то виявиться, що, як і раніше, ідеш праворуч, але вже назад до центра від лівого краю картинки.

Таке «повернення через той бік» захоплювало молодого Вінстона Черчилля, який яскраво згадував про пережите ним математичне одкровення:

> Одного разу я збагнув математику, наче оглянув її усю, переді мною розкрилися всі її глибини, уся бездонність. Подібно до того, як хтось спостерігає за проходженням Венери чи виходом лорда-мера, я спостерігав політ величини через нескінченність і зміну її знака з плюса на мінус. Я зрозумів, чому це відбувається і як один крок тягне за собою всі решту. Схоже на політику. Але осяяння відбулося після обіду, і мені вже було не до нього!

Насправді точка *R* — це не просто кінець горизонтальної осі, а кінець *будь-якої* горизонтальної лінії. Якщо якісь дві різні лінії обидві є горизонтальними, то вони паралельні; незважаючи на це, у проективній геометрії вони сходяться у точці в нескінченності. 1996 року Девіда Фостера Воллеса запитали про закінчення «Нескінченного жарту», яке багато кому видалося абсурдним. Журналіст запитав, чи, бува, письменник вирішив не писати кінця, бо «вже просто змучився»? Воллес досить роздратовано відповів: «Як на мене, кінець є[187]. Деякі види паралельних прямих сходяться таким чином, що “кінець” читач може спроектувати на якесь інше місце, за кадром. Якщо такого сходження чи проекції ви не уявили, читання не вдалося».

Недолік проективної площини в тому, що її тяжко малювати; але вона має і перевагу — робить правила геометрії набагато зручнішими. На Евклідовій площині дві різні точки визначають одну пряму, а дві різні прямі мають одну точку перетину — в іншому разі вони паралельні, і тоді не перетинаються ніколи. Математикам подобаються правила і не подобаються винятки. На проективній площині не потрібно робити жодних винятків з правила, що дві прямі перетинаються в одній точці, тому що тут перетинаються і паралельні прямі. Наприклад, будь-які дві вертикальні лінії перетинаються в точці *P*, а будь-які дві паралельні лінії, що прямують з північного сходу до південного заходу, перетинаються в точці *Q*. Дві точки визначають пряму, дві прямі сходяться в одній точці, крапка*. Геометрія проективної площини відзначається досконалою симетричністю й елегантністю, яких не має класична планіметрія. Невипадково проективна геометрія природним чином виросла зі спроб розв’язання практичної задачі зображення тривимірного світу на двовимірному плоскому полотні. Математична краса і практична корисність ідуть рука в руку, історія науки демонструє це знову і знову. Іноді вчені відкривають якусь теорію і залишають її математикам, щоб ті з’ясували джерела її елегантності. В інших випадках математики розробляють красиву теорію і віддають її природничим наукам, які визначають, у чому її корисність.

З одного боку, проективна геометрія корисна для реалістичного живопису. З іншого — для добору номерів лотереї.

Маленька геометрія

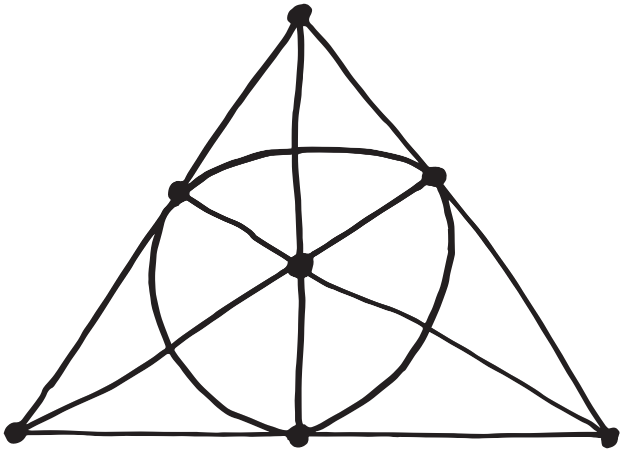
Геометрія проективної площини керується двома аксіомами:

Кожна пара точок лежить на одній і тільки одній спільній прямій.
Кожна пара прямих має одну і тільки одну спільну точку.

---

* Але якщо всі лінії, на яких знаходиться *R*, є горизонтальними, а всі лінії, на яких знаходиться *P*, вертикальні, яка лінія проходить через *R* і *P*? Це лінія, якої ми не намалювали, *лінія в нескінченності*, яка містить усі точки на нескінченності і не містить жодної з евклідової площини.

Щойно математики знайшли *одну* геометрію, що задовольняє ці дві чудово узгоджені аксіоми, постало питання, чи немає інших? Виявилося, що є, причому багато. Деякі з них великі, інші — ні. Найменша геометрія має назву *площини Фано*, за іменем свого творця Джино Фано, який наприкінці XIX століття був одним з перших математиків, який серйозно сприйняв ідею скінченних геометрій. Виглядає ця площина так:



Це справді маленька геометрія, складається вона всього із семи точок! «Прямі» у цій геометрії — це лінії, показані на нашому рисунку; вони теж маленькі — на кожній є три точки. Ліній сім; шість *виглядають* як лінії, а сьома — як коло. І, незважаючи на це, ця так звана геометрія, хоч яка вона химерна, задовольняє аксіоми 1 і 2, так само, як площина Брунеллескі.

Фано керувався гідним захоплення сучасним підходом — він, за висловом Гарді, мав «звичку визначати», уникаючи питання, на яке немає відповіді, «якою насправді є геометрія», а замість цього запитуючи: Які явища поводяться так, як геометрія? Ось що пише сам Фано:

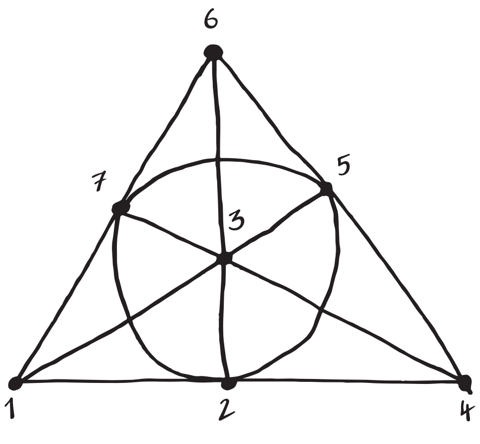
> A base del nostro studio noi mettiamo una varietà qualsiasi di enti di qualunque natura; enti che chiameremo, per brevità, punti indipendentemente però, ben inteso, dalla loro stessa natura[188].

Тобто:

> Як основу для нашого дослідження ми беремо довільну сукупність об'єктів певної довільної природи, об'єктів, які для стислості ми будемо називати точками, але це жодним чином не стосується їхньої природи[189].

Для Фано та його інтелектуальних нащадків байдуже, чи «виглядає» пряма як лінія, коло, дика качка чи ще щось, — має значення тільки те, що лінії *дотримуються законів* для ліній, установлених Евклідом та його наступниками. Якщо вона ходить, як геометрія, і кахкає, як геометрія, то ми називаємо її геометрією. Для одного способу мислення такий крок знаменує розрив між математикою і реальністю, і йому потрібно опиратися. Але такий погляд надто обмежений. Смілива ідея, що ми можемо геометрично мислити про системи, які не виглядають як евклідовий простір (чесно кажучи, є ще один сенс, у якому площина Фано насправді виглядає так, як більш традиційна геометрія. Декарт навчив нас розглядати точки на площині як пари координат *x* і *y*, які є дійсними числами; якщо застосовувати Декартову конструкцію, але координати брати з числових систем, відмінних від дійсних чисел, отримаємо інші геометрії. Якщо будувати картезіанську геометрію з Булевими числами[190], які так полюбляють у комп'ютерному світі, у яких є тільки дві цифри — 0 і 1, отримаємо площину Фано. Це чудова історія, але розповідати її я тут не буду. Трохи більше про це можна знайти у примітках в кінці книжки), і, навіть не позичаючи в Сірка очі, називати такі системи «геометріями», виявилася критично важливою для розуміння геометрії релятивістського простору-часу, в якому ми живемо; а нині для картографування інтернету ми застосовуємо узагальнені геометричні ідеї, які відходять від будь-чого, що міг би впізнати Евклід, навіть ще далі. У цьому — велич і слава математики. Ми розробляємо якісь ідеї, і якщо вони правильні, то *вони правильні*, навіть якщо їх застосовувати дуже далеко від того контексту, у якому їх придумали спочатку.

Наприклад: ось знову площина Фано, але цього разу з точками, позначеними числами від 1 до 7:



Десь уже бачили? Якщо скласти список семи ліній, записуючи для кожної набір із семи чисел, що її задають, отримуємо:

124
135

167
257
347
236
456

Це — не що інше, як комбінації для лотереї із сімома номерами, які ми бачили в попередньому розділі; ті, що мають одну пару, гарантуючи мінімальний виграш. Тоді ця властивість здавалася дивовижною. Як можна знайти ці номери?

Але ось я відчинив скриньку і пояснив фокус: це просто геометрія. Кожна пара чисел з'являється на одному і тільки на одному білеті, тому що кожна пара чисел лежить тільки на одній лінії. Це просто Евклід, хоча ми говоримо про точки і лінії, які Евклід би точками і лініями не вважав.

Перепрошую, ви сказали BOFAB?

Площина Фано каже нам, як без жодного ризику грати у трансільванську лотерею із сімома числами, але як бути з массачусетською лотереєю? Існує багато скінченних геометрій, що мають більше за сім точок, але, на жаль, жодна з них точно не відповідає вимогам «Кеш ВінФол». Потрібно щось загальніше. Відповідь не походить безпосередньо із живопису доби Відродження чи евклідової геометрії, вона походить з іншого несподіваного джерела — теорії цифрової обробки сигналів.

Припустимо, я хочу послати важливе повідомлення орбітальному супутнику, наприклад: «Увімкнути правий двигун». Супутники не знають людської мови, тож я надсилаю послідовність нулів і одиниць, які в інформатиці мають назву *бітів*:

1110101...

Таке повідомлення здається чітким і недвозначним. Але в реальному житті в комунікаційних каналах є шум. Можливо, космічний промінь зіткнувся із супутником, коли він отримував ваше повідомлення, і спотворив один його біт, і тому супутник отримав:

1010101...

Здається, це повідомлення не дуже відрізняється; але якщо заміна біта змінює в наказі «правий двигун» на «лівий», у супутника можуть виникнути серйозні неприємності.

Супутники коштують дорого, тож таких неприємностей потрібно уникати. Коли ви намагаєтеся говорити з другом на галасливій вечірці, часом мусите щось повторювати, бо шум заглушає ваші слова. Той самий прийом можна застосувати і з супутником; у нашому початковому повідомленні кожен біт можна повторювати двічі, посилаючи 00 замість 0 і 11 замість 1:

11 11 11 00 11 00 11...

Тепер, коли космічний промінь потрапляє у другий біт нашого повідомлення, супутник бачить

10 11 11 00 11 00 11...

Супутник *знає*, що кожен із двобітових сегментів має бути або 00, або 11, тож початкові «10» — знак тривоги; щось сталося. Але що? Супутникові складно це встановити: оскільки він точно не знає, де шум спотворив сигнал, немає способу з'ясувати, починалося повідомлення з 00 чи 11.

Цю проблему теж можна вирішити. Просто повторюватимемо по три рази, а не по два:

111 111 111 000 111 000 111...

Повідомлення при передачі спотворюється, ось так:

101 111 111 000 111 000 111...

Тепер супутник при повній зброї. Перший трибітовий сегмент має бути 000 або 111, тож наявність 101 означає, що щось зіпсувалося. Але якби початкове повідомлення було 000, *два* біти, що знаходяться дуже близько один від одного, мали б зіпсуватися — малоймовірна подія при тому, що довжина хвилі у космічних променів дуже мала. Тож супутник має всі підстави застосувати правило більшості: якщо два з трьох бітів одиниці, то дуже імовірно, що початкове повідомлення — 111.

Те, що ми щойно бачили, — це *код з виправленням помилок*, протокол зв'язку, який дозволяє отримувачу виправляти помилки у сигналі з шумом*. Ця ідея, як, у принципі, усі ідеї теорії інформації, походить з епохальної статті Клода Шеннона 1948 року «Математична теорія комунікації».

Математична теорія комунікації! Чи не виглядає це трохи претензійно? Чи не є комунікація фундаментально людським видом діяльності, що не зводиться до холодних чисел і формул?

Зрозумійте: я всією душею підтримую, *настійливо рекомендую*, дуже скептично ставитися до всіляких претензій, що ось те-то і те-то можна пояснити, чи упокорити, чи повністю зрозуміти математичними засобами.

Незважаючи на це, історія математики — це історія постійної територіальної експансії, яка здійснюється мірою того, як математичні прийоми розширюються і збагачуються, а математики знаходять способи розв'язувати задачі, які раніше, як здавалося, не були математичними. У «математичній теорії імовірності» зараз немає нічого незвичайного, але колись вона здавалася непосильним завданням; математика — це ж визначеність та істина, а не можливість і випадковість! Усе змінилося, коли Паскаль, Бернуллі та інші знайшли математичні закони, що керують випадковістю**. Математична теорія нескінченності? До XIX століття і праць Георга Кантора дослідження нескінченності однаковою мірою належало богослов'ю і науці; тепер ми розуміємо Канторову теорію множинних нескінченностей, кожна з яких нескінченно більша за попередню, достатньо добре для того, щоб її вивчали студенти-математики на першому курсі. (Потрібно визнати, що від цього у них трохи дах зносить).

Ці формальні математичні теорії не описують кожної деталі явищ, які вони розглядають, та вони і не ставлять перед собою такої мети. Наприклад, є питання щодо випадковості, на які теорія ймовірностей не відповідає. Для деяких людей питання, на які математика не відповідає, — найцікавіші. Але нині розглядати випадковість і *не зважати* на теорію ймовірності буде помилкою. Якщо не вірите, запитайте у Джеймса Гарві. Або, ще краще, запитайте у тих, у кого він виграв гроші.

Чи буде колись математична теорія свідомості? Суспільства? Естетики? Поза сумнівом, досі всі спроби до великих успіхів не привели. До всіх подібних претензій варто на інстинктивному рівні ставитися із сумнівом. Та варто пам'ятати, що зрештою такі спроби можуть привести до правильного розуміння деяких важливих речей.

Спочатку код з коригуванням помилок не здається чимось таким уже й математично революційним. Якщо на вечірці шумно — повторіть сказане,

* А *будь-який* сигнал містить шум, тією чи іншою мірою.

** Цю історію чудово висвітлено у книжці Яна Гакінґа «Поява ймовірності».

і проблему вирішено! Але таке рішення має свою ціну. Якщо тричі повторювати кожен біт повідомлення, передавати потрібно утричі більше даних. На вечірці це, може, і не проблема, але проблема може виникнути, якщо супутнику потрібно увімкнути правий двигун у *цю саму секунду*. Шеннон у статті, яка поклала початок теорії інформації, визначив принциповий компроміс, з яким інженери борються і сьогодні: що стійкішим до шуму буде сигнал, то повільніше він передаватиметься. Наявність шуму покладає межу на довжину повідомлення, яке може надійно передаватися по вашому каналу в конкретний момент часу; цю межу Шеннон назвав *пропускною здатністю* каналу. Так само, як по трубі можна пропустити певну кількість води, так і канал може передавати певну кількість інформації.

Виправлення помилок не вимагає трикратного «звуження» каналу, як це відбувається у випадку протоколу із триразовим повторенням. Можна зробити краще — і Шеннон дуже добре знав це, тому що один з його колег у «Белл Лабс», Річард Геммінґ, уже зрозумів, як це зробити.

Геммінґ, молодий ветеран Мангетенського проекту[191], мав низькопріоритетний доступ до десятитонного електромеханічного комп'ютера; він мав запускати на комп'ютері власні програми тільки у вихідні. Проблема полягала в тому, що будь-яка механічна помилка могла зупинити виконання обчислень, а людина, що могла запустити машину знову, з'являлася тільки в понеділок уранці. Це дратувало. А роздратування, як ми знаємо, — це чудовий стимул технічного поступу. Чи не було б краще, подумав Геммінґ, якби машина сама могла виправляти власні помилки і працювала далі. Вхідні дані можна вважати рядком з нулів і одиниць, так само, як і повідомлення на супутник — математиці однаково, чи це біти у цифровому потоці, чи положення електричного реле, чи отвори у стрічці (на той момент найсучасніший спосіб представлення даних).

Спершу Геммінґ розбив повідомлення на блоки по три символи:

111 010 101…

Код Геммінґа[*] — це правило перетворення цих трисимвольних блоків на рядки із семи символів. Ось шифрувальна книга:

000 -> 0000000
001 -> 0010111
010 -> 0101011

* Для поборників технічного перфекціонізму: насправді я описую двійковий код Геммінґа; в нашому випадку — це приклад *перфорованого коду Адамара*.

011 -> 0111100
101 -> 1011010
110 -> 1100110
100 -> 1001101
111 -> 1110001

Тож закодоване повідомлення виглядатиме так:

1110001 0101011 1011010…

Ці блоки по сім бітів називаються *кодовими словами*. Код передбачає можливість тільки восьми кодових слів; якщо отримувач бачить у переданому йому повідомленні щось інше, то щось напевне не так. Скажімо, ви отримали 1010001. Ви знаєте, що так бути не може, тому що 1010001 не є кодовим словом. Крім того, повідомлення, яке ви отримали, відрізняється від кодового слова 1110001 тільки в одному символі. І немає *жодного* іншого кодового слова, яке було б таким близьким до отриманого спотвореного повідомлення. Тож ви можете дуже спокійно вирішити, що ваш кореспондент відправив вам кодове слово 1110001, що означає, що відповідний трицифровий блок у початковому повідомленні — це 111.

Можна подумати, що нам просто поталанило. А коли таємниче повідомлення буде близьким до двох різних кодових слів? Тоді ми не зможемо зробити висновок напевно. Але цього не станеться, і ось чому. Погляньмо знову на лінії на площині Фано:

124
135
167
257
347
236
456

Як описати геометрію комп'ютеру? Комп'ютерам подобається, коли з ними спілкуються нулями й одиницями, тож запишемо кожну лінію як рядок з нулів і одиниць, де 0 означає «точка n належить лінії», а 1 — «точка n не належить лінії». Тож перший рядок, 124, перетворюється на

0010111,

а другий рядок, 135, на

0101011.

Як ви, напевно, зауважили, обидва рядки — це кодові слова у коді Геммінґа. Сім ненульових кодових слів у коді Геммінґа точно відповідають семи лініям на площині Фано. Код Геммінґа і площина Фано (і, до речі, оптимальна комбінація білетів трансільванської лотереї) — це один і той самий математичний об'єкт у двох різних вбраннях!

Це — таємна геометрія коду Геммінґа. Кодове слово — це набір із трьох точок на площині Фано, що утворюють пряму. Змінити біт у рядку — це те саме, що додати чи видалити точку, тож якщо оригінальне кодове слово — не 0000000, то зіпсоване повідомлення, яке ви отримали, відповідає множині або з двох, або з трьох точок*. Якщо ви отримали множину з двох точок, ви знаєте, як знайти точку, якої бракує; це — третя точка єдиної лінії, що з'єднує дві точки, які ви отримали. А коли отримано множину з чотирьох точок — «лінія плюс одна додаткова точка»? Тоді можна зробити висновок, що правильне повідомлення складається із тих трьох точок у множині, що утворюють лінію. Тут маємо одну особливість: звідки ми знаємо, що є тільки *один* спосіб визначити таку множину з трьох точок? Нам допоможе позначення точок буквами: назвемо їх *A*, *B*, *C*, і *D*. Якщо *A*, *B* і *C* лежать на одній лінії, тоді *A*, *B* і *C* мусять бути тою множиною, яку надсилав ваш кореспондент. А якщо *A*, *C* і *D* теж лежать на одній прямій? Не проблема: такого бути не може, тому що пряма, що містить *A*, *B* і *C*, і пряма, що містить *A*, *C* і *D*, тоді б мали дві спільні точки — *A* і *C*. Але дві прямі можуть перетинатися тільки в *одній* точці; таким є правило**. Іншими словами, завдяки аксіомам геометрії, код Геммінґа має ті самі чарівні властивості виправлення власних помилок, як і триразове повторення; якщо при передачі в повідомленні змінюється один біт, отримувач завжди може зрозуміти, яке повідомлення надсилав відправник. Але замість збільшення часу передачі втричі новий удосконалений код надсилає лише сім бітів замість трьох оригінального повідомлення, — з ефективнішим співвідношенням 2,33.

* Якщо оригінальне кодове слово *буде* 0000000, тоді його спотворена на один біт версія — це шість нулів і тільки одна одиниця, що дає отримувачу повну впевненість у тому, що надісланий сигнал — це насправді 0000000.

** Якщо ви раніше про це не думали, цей абзац може видатися вам складним. Причина складності в тому, що подібні аргументи тяжко зрозуміти, якщо просто сидіти і читати — потрібно взяти ручку і спробувати записати множину з чотирьох точок, яка визначає дві різні лінії на площині Фано, і після того, як зробити це не вдасться, зрозуміти, чому не вдалося. Іншого шляху тут немає. Я закликаю вас писати прямо в книжці, якщо вона не бібліотечна і не електронна.

Відкриття кодів з виправленням помилок, і перших кодів Геммінґа, і потужніших пізніших, змінило інформаційну інженерію. Мета більше не полягала в тому, щоб будувати такі потужно захищені системи, щоб у них не могла виникнути жодна помилка. Після Геммінґа і Шеннона стало прийнятним зробити помилки *достатньо рідкісними* для того, щоб гнучкість механізмів виправлення помилок у самому коді була здатною долати вплив шуму. Коди з виправленням помилок нині є скрізь, де потрібно швидко і надійно передавати дані. Міжпланетний автоматичний космічний корабель «Марінер 9» надсилав на Землю зображення поверхні Марса за допомогою одного з таких кодів — коду Адамара. Компакт-диски записуються за допомогою коду Ріда—Соломона, і саме через те їх можна дряпати, а вони все одно гратимуть. (Читачі, які народилися, скажімо, після 1990 року і які не знають, що таке компакт-диски, можуть для прикладу взяти карти пам'яті — «флешки», у яких, серед іншого, для уникнення псування даних використовуються схожі коди Боуза—Чоудхурі—Гоквінгема). У маршрутному номері вашого банку використовується простий код, що має назву *контрольна сума*. Це не зовсім код з виправленням помилок, а код з *виявленням* помилок, схожий на протокол «повторювати кожен біт двічі»; якщо ви неправильно напишете одну цифру, комп'ютер, що проводить операцію, не зможе визначити, яке число ви мали на увазі, але він принаймні зможе зрозуміти, що щось не так, і не перекаже ваші гроші не в той банк.

Неясно, чи розумів Геммінґ увесь потенціал застосування свого винаходу, але його керівництво у «Белл», поза сумнівом, мало певні ідеї на цей рахунок, що Геммінґ і зрозумів, коли спробував опублікувати результати своїх досліджень:

> Патентний відділ не давав дозволу[192] на публікацію до забезпечення патентного захисту... Я не вірив у те, що можна запатентувати математичні формули. Я сказав, що вони не можуть цього зробити. Вони сказали: «Подивишся». Вони мали рацію. І відтоді я знаю, що дуже погано розуміюся на патентному праві, тому що, як правило, речі, які не повинні патентуватися, — бо це ганьба — можна запатентувати.

Математика рухається швидше за патентне бюро: швейцарський математик і фізик Марсель Ґолей дізнався про ідеї Геммінґа від Шеннона і самостійно розробив низку власних кодів, не знаючи, що Геммінґ багато з цих кодів уже створив за патентною завісою. Ґолей першим опублікував свої результати[193], що призвело до плутанини з пріоритетом, яка триває і досі. Стосовно патенту[194], то компанія «Белл» його отримала, але 1956 року вона втратила право брати ліцензійну плату, що передбачалося умовами антитрестівської угоди.

Чому код Геммінґа працює? Щоб це зрозуміти, потрібно зайти з іншого боку й запитати: «Що може його зламати?».

Ми пам'ятаємо, що прокляттям для коду з виправленням помилок є цифровий блок, одночасно близький до двох *різних* кодових слів. Отримувач такого ненормального рядка бітів потрапляє у пастку, не маючи можливості визначити, яке з близьких кодових слів було в оригінальному повідомленні.

Тут ми начебто вдаємося до метафори: блоки двійкових чисел не мають просторового розташування, тож що ми маємо на увазі, кажучи що один з них «близький» до іншого? Одне з великих концептуальних досягнень Геммінґа у тому, що він зумів наполягти, що це не просто метафора і не має бути метафорою. Він запровадив нове поняття відстані, яке зараз має назву *відстані Геммінґа*. Це поняття відстані увійшло до нової інформаційної математики так само, як відстань у розумінні Евкліда й Піфагора є частиною геометрії площини. Визначення Геммінґа просте: відстань між двома блоками — це кількість бітів, які потрібно змінити для того, щоб перетворити один блок на інший. Тож відстань між кодовими словами 0010111 і 0101011 становить 4; для того щоб перетворити перше кодове слово на друге, потрібно змінити біти на другому, третьому, четвертому і п'ятому місцях.

Вісім кодових слів Геммінґа — це добрий код, тому що жоден семибітовий блок не знаходиться на відстані Геммінґа 1 від двох інших кодових слів. Якби так було, два кодових слова мали б відстань Геммінґа 2 одне від одного*. Але ви самі можете перевірити і переконатися, що жодні два з кодових слів не відрізняються тільки у двох місцях; будь-які два кодових слова знаходяться одне від одного на відстані Геммінґа, яка дорівнює щонайменше 4. Кодові слова можна уявляти як електрони в ящику чи соціопатів у ліфті. Вони — в обмеженому просторі, і в умовах цих обмежень намагаються знаходитися на максимально можливій відстані одне від одного.

Саме цей принцип лежить в основі всіх видів комунікації, стійких до шуму. Так влаштована природна мова: якщо я напишу **повібомлення** замість **повідомлення**, ви зможете зрозуміти, що я мав на увазі, тому що немає жодного іншого слова, що знаходилося б на відстані зміни однієї літери від **повідомлення**. Звичайно, це перестає працювати в коротших словах: дуб, куб, зуб і чуб — абсолютно нормальні слова, але якщо шум заглушить у них перший звук, — стає неможливо визначити, яке з них малося на увазі. Але навіть у такому разі для виправлення помилок можна скористатися семантичною відстанню між цими словами. Якщо щось має шість однакових граней, то це, напевно, куб; а якщо ви з нього впали, то це вже дуб. І так далі.

Мову можна зробити ефективнішою — але в такому разі ми стикаємося з необхідністю болісного компромісу, відкритого Шенноном. Чимало лю-

* Для експертів: відстань Геммінґа задовольняє *нерівність трикутника*.

дей занудних та/або математично обдарованих* напружено працюють над створенням мов, які б передавали інформацію стисло і точно, без жодної надлишковості, синонімії і двозначності, що притаманні природним мовам. 1906 року священик Едвард Павелл Фостер розробив штучну мову Ро[195], маючи на меті замінити нетрі англійської лексики словником, у якому значення кожного слова логічно виводиться з його звукової форми. Напевно, не викличе здивування те, що серед ентузіастів Ро був Мелвіл Дьюї, чия універсальна десяткова класифікація принесла схожу строгу організованість у каталоги публічних бібліотек. Ро і справді відзначається гідною захоплення стислістю; наприклад, чимало слів, як-от **інгредієнт**, коротші у мові Ро, — **cegab**. Але стислість має свою ціну; у цій штучній мові втрачається властивість виправлення помилок, вбудована у мову природну. Ліфт маленький, у ньому дуже тісно, особистого простору в пасажирів дуже мало; іншими словами, кожне слово у Ро дуже близьке до багатьох інших, що створює можливості для плутанини. Слово зі значенням «колір» на Ро — **bofab**. Але якщо змінити одну літеру і зробити з нього **bogab**, отримаємо «звук». **Bokab** означає «електрика», а **bolab** — «смак». Ще гірше те, що логічна організація Ро спричиняється до того, що схожі за звучанням слова мають схожі значення, тому неможливо зрозуміти ситуацію з контексту. Bofoc, bofof, bofog і bofol означають, відповідно, «червоний», «жовтий», «зелений» і «синій». Відображення у звуках слова смислової схожості має певний сенс; але водночас ця властивість надзвичайно ускладнює розмову мовою Ро про кольори на людній вечірці. «Перепрошую, ви сказали bofoc чи bofog**?»

З іншого боку, деякі сучасні штучні мови ідуть іншим шляхом, прямо використовуючи принципи Геммінґа і Шеннона; в одній з найбільш успішних сучасних штучних мов, ложбані***, є правило, за яким жодні два основні корені, або ginsu, не можуть бути надто фонетично близькими.

Поняття «відстані» Геммінґа відповідає філософії Фано — кількість, яка кахкає, як відстань, має право поводитися, як відстань. Але навіщо на цьому зупинятися? Сукупність точок, що знаходяться на відстані, рівній або меншій 1 від заданої центральної точки, в евклідовій геометрії має свою назву; це — круг, або, для вищих розмірностей, сфера****. Тож ми хоч-не-хоч змушені нази-

* Це не одне й те саме!

** Мені подобається думати, що той факт, що слово **bebop** на Ро значить «еластичний», являє собою досі невідкритий фрагмент таємної історії джазу, але, напевно, це просто збіг.

*** За інформацією, вміщеною на веб-сайті lojban.org, кількість людей, які можуть спілкуватися розмовним варіантом мови Ложбан, «перевищує кількість пальців на одній руці», а це для штучної мови таки немалий успіх.

**** Якщо точніше, то сфера — це сукупність точок, що розташовані на відстані *точно* 1 від центра; описуване тут геометричне тіло, заповнена сфера, зазвичай називається *кулею*.

вати сукупність рядків, що мають максимальну відстань Геммінґа 1* від кодового слова, «сферою Геммінґа», у центрі якої знаходиться це кодове слово. Щоб код мав властивість виправлення помилок, жоден рядок — жодна *точка*, якщо ми серйозно ставимося до цієї геометричної аналогії, — не може знаходитися в межах відстані 1 від двох різних кодових слів; іншими словами, необхідно, щоб жодні дві Геммінґові сфери, що мають центрами кодові слова, не мали спільних точок.

Тож задача конструювання кодів з виправленням помилок має ту саму структуру, що й класична геометрична задача, задача про *пакування куль*: як помістити найкомпактнішим чином багато куль одного розміру у невеликому просторі, щоб зайнятою кулями вийшла якнайбільша частка простору? Кажучи коротше: скільки апельсинів влізе у ящик?

Задача про пакування куль набагато старша за коди з виправленням помилок; усе почалося з астронома Йоганна Кеплера[196], який 1611 року написав невеликий трактат «Strena Seu De Nive Sexangula» — «Про шестикутні сніжинки». Незважаючи на доволі конкретну назву, Кеплер у своїй праці досліджує загальне питання походження природних форм. Чому сніжинки і бджолині стільники шестикутні, а насіннєва камера в яблуці має п'ятикутну форму? Найважливіше для нас зараз: чому зернини граната, як правило, мають по дванадцять плоских граней?

Кеплер пояснює так: гранат прагне помістити у плоді максимальну кількість зернин; іншими словами, гранат на практиці розв'язує задачу про пакування куль. Якщо вважати, що найкраще робить роботу природа, тоді ці кулі мають бути упаковані якомога щільніше. Кеплер стверджує, що найщільніше можливе пакування отримується так. Почнемо з плоского шару зернин, упорядкованого таким чином:

* Тобто на відстані або 0, або 1, тому що відстані Геммінґа, на відміну від звичайних відстаней в геометрії, мусять бути цілими числами.

Наступний шар виглядатиме так само, як цей, але розміщається так, що кожна зернина «сидить» у маленькій трикутній заглибині, утвореній трьома зернинами під нею. Після цього будемо просто додавати так само нові шари. Тут краще бути трохи обережним: тільки половина заглибин підтримуватиме кулі наступного верхнього шару, і на кожному етапі можна обирати, яку половину заглибин заповнювати. Найпоширеніший варіант, що має назву *гранецентрованої кубічної решітки*, має приємну властивість: кулі кожного шару розміщуються точно над сферами, що знаходяться на три шари нижче. За Кеплером, щільнішого способу пакування куль у просторі немає. І у випадку гранецентрованої кубічної решітки кожна куля дотикається точно до 12 інших. Кеплер міркує, що, коли зернини граната ростимуть, кожна з них тиснутиме на 12 сусідів, що робитиме поверхні зернин біля точок дотику плоскими — так утворюються дванадцятигранники, які ми бачимо.

Я не знаю, чи мав рацію Кеплер щодо граната*, але його твердження, що гранецентрована кубічна решітка являє собою найщільніший можливий спосіб пакування куль, на кілька століть стало предметом пильної зацікавленості серед математиків. Доведення свого твердження Кеплер не подає; очевидно, йому просто здавалося безперечним, що гранецентрована кубічна решітка — це найщільніший з усіх можливих варіантів. Покоління бакалійників, які пакували апельсини у гранецентровані кубічні конфігурації, не задумуючись про те, чи справді цей спосіб найефективніший, з ним погоджуються. Математики більш вимогливі, і їм потрібне абсолютне доведення. І не просто про круги і сфери; у царстві теоретичної математики ніщо не заважає вийти за межі кругів і сфер, перейти до вищих розмірностей і зайнятися пакуванням так званих гіперсфер розмірності, більшої за 3. Чи дає геометрія пакування сфер вищої розмірності ідеї для теорії кодів з виправленням помилок, як це було з проективною геометрією? У цьому випадку бачимо переважно зворотний рух**; ідеї з теорії кодів сприяють поступу у розв'язанні задач про пакування куль. У 1960-х роках Джон Ліч застосував коди Ґолея для створення неймовірно щільної схеми пакування двадцятичотиривимірних сфер; ця конфігурація отримала назву решітки Ліча. Решітка Ліча — тісне місце, у ній кожна двадцятичотиривимірна сфера дотикається до 196 560 своїх сусідів. Досі невідомо, чи є вона найщільнішим з можливих способів пакування два-

* Проте ми знаємо, що атоми у твердих формах алюмінію, міді, золота, іридію, свинцю, нікелю, платини і срібла утворюють гранецентровані кубічні решітки. Ще один приклад того, як результати теоретичної математики знаходять застосування там, де це не передбачалося.

** Хоча в тих випадках, коли сигнали моделюються як послідовності дійсних чисел, а не послідовності нулів і одиниць, задача про пакування куль — це саме те, що потрібно для створення добрих кодів з виправленням помилок.

дцятичотиривимірних сфер, проте 2003 року Генрі Кон* і Абгінав Кумар довели[197], що якщо щільніша решітка існує, то вона може переважати решітку Ліча з коефіцієнтом, не більшим за

1,0000000000000000000000000000165.

Іншими словами, є достатньо близькою.

Можна спокійно не зважати на двадцятичотиривимірні кулі і те, як їх краще упакувати, але річ ось у чому: будь-який математичний об'єкт, такий дивовижний, як решітка Ліча, обов'язково має велике значення. Як виявилося, решітка Ліча надзвичайно багата на симетрії справді екзотичного різновиду. Джон Конвей, один з найвидатніших фахівців з теорії груп, дізнавшись про решітку Ліча, 1968 року побудував систему всіх її симетрій за 12 годин неперервних обчислень, виконаних на одному величезному рулоні паперу[198]. Ці симетрії зрештою стали основою для деяких фінальних частин загальної теорії скінченних груп симетрії, над якою напружено працювали алгебраїсти впродовж переважної частини XX століття**.

Щодо старих добрих тривимірних апельсинів, то, як виявилося, Кеплер мав рацію — його спосіб пакування є найкращим можливим; але це майже чотириста років залишалося недоведеним. Удалося це зробити тільки 1998 року Томасу Гейлзу, який тоді був професором у Мічиґанському університеті. Гейлз побудував своє доведення на складному міркуванні, за допомогою якого задача зводиться до аналізу всього лише кількох тисяч конфігурацій сфер, здійснений величезним обсягом комп'ютерних обчислень. Складна і витончена аргументація Гейлза не становила проблеми для математичної спільноти; ми до такого звикли, і цю частину роботи було швидко проаналізовано і визнано правильною. З комп'ютерними обчисленнями, з іншого боку, було складніше. Доведення можна перевірити до останньої деталі, але комп'ютерна програма — річ зовсім інша. У принципі людина може перевірити кожен рядок коду; але навіть якщо це зробити, як можна бути впевненим у тому, що код правильно виконувався?

Математики майже одностайно схвалили доведення Гейлза, але сам Гейлз, здається, почувається незручно через те, що його доведення ґрунтувалося на обчисленнях. Після розв'язання гіпотези Кеплера він майже відійшов від гео-

* Кон працює у дослідницькому підрозділі компанії «Майкрософт», який певним чином продовжує модель «Белл Лабс», за якою дослідження в теоретичній математиці підтримуються індустрією високих технологій; будемо сподіватися, що на користь обом.

** Це ще одна історія, надто довга й заплутана, щоб у неї тут заглиблюватися; подивіться книжку Марка Ронана «Симетрія і чудовисько».

метрії, завдяки якій став знаменитим, і присвятив себе проекту формальної перевірки доведень. Гейлз задумав (і працює над утіленням цього задуму) майбутню математику, яка має значно відрізнятися від теперішньої. На його переконання, математичні доведення — і ті, що спираються на машинні обчислення, і ті, що робляться людьми за допомогою олівця, — так ускладнилися, що у їхній правильності більше не можна бути повністю впевненим. Класифікація скінченних груп симетрії, нині виконана програма, ключовою складовою якої був аналіз Конвея решітки Ліча, поширилася в сотнях статей сотень авторів, — разом десь тисяч десять сторінок. Про жодну живу людину неможливо сказати, що вона розуміє все це до кінця. То як можна бути впевненим у тому, що класифікація справді правильна?

Гейлз вважає, що ми не маємо іншого вибору, як почати все з початку — перебудувати гігантський корпус математичного знання в рамках формальної структури, яку зможе перевірити машина. Якщо код, що перевіряє формальні доведення, сам надається до перевірки (а це, як переконливо доводить Гейлз, — завдання посильне), ми можемо назавжди звільнитися від сумнівів щодо правильності доведення, з якими зіткнувся сам Гейлз. А далі? Наступний крок, можливо, полягатиме в тому, що комп'ютери зможуть будувати доведення, чи навіть *щось придумуватимуть* — без жодного людського втручання.

Якщо це станеться, математика закінчиться? Звісно, якщо машини наздоженуть, а потім переженуть людей у всіх інтелектуальних сферах і будуть використовувати людей як рабів, худобу чи іграшки, як віщує дехто з найбільш екстравагантних футурологів, тоді так, з математикою буде покінчено — як і з усім іншим. Проте я думаю, що математика виживе. Зрештою, комп'ютери в математиці застосовуються вже десятки років. Багато обчислень, які раніше вважалися «дослідженням», тепер стали не більш творчими і гідними захоплення, ніж додавання десятицифрових чисел; якщо це може робити ваш ноутбук, то це вже не математика. Але це не забрало в математиків роботу. Нам вдається триматися попереду дедалі ширшої сфери комп'ютерного панування — так само, як героям коміксів вдається обганяти кульову блискавку.

А якщо машинний розум майбутнього відбере у нас значну частину тієї роботи, що зараз вважається дослідницькою? Ми перекваліфікуємо такі дослідження на «обчислення». А те, чим ми, перейняті числами люди, займатимемося у вивільнений час, ми і назвемо «математикою».

Код Геммінґа дуже добрий, але можна сподіватися розробити ще кращий. Зрештою, у коді Геммінґа є певна надлишковість: навіть у часи перфострічок і механічних реле комп'ютери були достатньо надійними для того, щоб передавати без спотворень семибітові блоки. Цей код здається занадто консервативним; напевно, можна обійтися додаванням до нашого повідомлення меншої кількості зайвих бітів для усунення помилок. І це справді можливо: саме це доводить знаменита теорема Шеннона. Наприклад, якщо частка помилок становить одна на тисячу бітів, Шеннон стверджує, що існують коди, що подовжують кожне повідомлення лише на 1,2 % порівняно з їх некодованою формою. А коли робити базові блоки дедалі довшими, то можна знайти коди, що будуть задовольняти які завгодно суворі вимоги до швидкості й надійності передачі.

Як Шеннон будував ці чудові коди? Ну, в тому-то й річ: він їх не будував. Стикаючись зі складною конструкцією на зразок коду Геммінґа, природним чином починаєш думати, що код з виправленням помилок — річ дуже особлива, її проектують, конструюють, налагоджують і перелагоджують, доки кожна пара кодових слів обережно не відтискається одна від одної і при цьому жодна інша пара не зближується. Геніальність Шеннона в тому, що він зрозумів, що все тут зовсім не так. У кодах з виправленням помилок нічого особливого немає. Шеннон довів, — а коли він зрозумів, *що* доводити, то це вже було не так і складно, — що *майже всі* набори кодових слів демонструють властивість виправлення помилок; іншими словами, довільний код, який не має жодної організації, з надзвичайно високою імовірністю буде кодом з виправленням помилок.

Сказати, що це було дивовижно — не сказати майже нічого. Уявіть, що вам поставили завдання побудувати машину на повітряній подушці; хіба ви почнете з того, що навмання розкидаєте купу деталей двигуна і гумових шлангів, вважаючи, що результат, імовірно, літатиме?

Геммінґ, на якого це доведення справляло великий вплив і через чотири десятиліття, писав у 1986 році про досягнення Шеннона:

> Сміливість — це та річ, якої Шеннон мав з надлишком. Лишень подумайте про його головну теорему. Він хоче створити метод кодування, але не знає, як це зробити, і він створює випадковий код. Тут він застрягає. І тоді ставить неможливе запитання: «Що робить середній код?». Потім він доводить, що середній код буде умовно добрим, а тому мусить існувати принаймні один добрий код. Хто, крім безмежно сміливої людини, міг би наважитися на такі думки? Це — характерна особливість великих учених; вони сміливі. За неймовірних обставин вони йтимуть уперед; вони думають — і ніколи не перестають думати.

Якщо випадковий код з дуже високою імовірністю буде кодом з виправленням помилок, то який сенс у коді Геммінґа? Чому просто не взяти кодові слова абсолютно навмання, знаючи напевно, що, згідно з теоремою Шеннона, код з високою імовірністю буде таким, що виправлятиме помилки? У такому плані є одна проблема. Принципової здатності виправляти помилки для коду недостатньо; помилки потрібно виправляти на практиці. Якщо в одному з кодів Шеннона застосовуються блоки розміру 50, то кількість кодових слів — це кількість рядків з нулів і одиниць завдовжки по 50 бітів, а це 2 у 50-му степені, трохи більше за квадрильйон. Велике число. Ваш космічний корабель отримує сигнал, який має бути одним з цього квадрильйона кодових слів, чи принаймні близьким до такого кодового слова. Але *якого*? Якщо вам потрібно по одному перебирати квадрильйон кодових слів, то у вас великі неприємності. Знову стається комбінаторний вибух, і в таких умовах ми змушені йти на ще один компроміс. Коди складної структури, як-от код Геммінґа, як правило, легко декодуються. Але ці дуже особливі коди зазвичай не такі ефективні, як повністю довільні, які досліджував Шеннон! І всі ці десятиліття математики намагаються балансувати на межі між організованістю й випадковістю, розробляючи коди, достатньо випадкові для того, щоб бути швидкими, і достатньо структурованими для того, щоб їх можна було декодувати.

Код Геммінґа чудово працює у трансільванській лотереї, але не так добре у «Кеш ВінФол». У трансільваніській лотереї чисел лише сім; у массачусетській — 46. Код потрібен більший. Найкращий, який мені вдалося знайти, був відкритий 1976 року Р. Г. Ф. Денністоном[199] з Лестерського університету. І це — чиста краса.

Денністон склав список 285 384 комбінацій із шести чисел, що вибираються з 48 можливих. Починається список так:

1 2 48 3 4 8
2 3 48 4 5 9
1 2 48 3 6 32…

Перші два білети мають чотири спільні числа — 2, 3, 4, і 48. Але — і в цьому дивовижність системи Денністона, — ніколи серед цих 285 384 білетів не знайдеться жодних двох, що матимуть *п'ять* спільних чисел. Систему Денністона можна перетворити на код, так само, як ми робили у випадку з площиною Фано: замінимо кожен білет рядком з 48 нулів і одиниць: нулі на місцях, що відповідають числам у білеті, а одиниці — числам, яких у білеті немає. Таким чином перший із записаних вище з білетів перетворюється на кодове слово:

000011101111111111111111111111111111111111111110.

Перевірте самі: той факт, що жодні два білети не збігаються у п'яти із шести номерів, означає, що цей код, як і код Геммінґа, не має жодних двох кодових слів, відстань Геммінґа між якими менша за 4*.

* А в чому тут сенс, коли Шеннон довів, що абсолютно довільний код має працювати так само? У певному розумінні це так, але теорема Шеннона у найбільш строгому варіанті вимагає, щоб

Можна сказати по-іншому: кожна комбінація з п'яти номерів є щонайбільше на одному з білетів Денністона. І ще краще: насправді кожна комбінація з п'яти номерів є *точно* на одному білеті*.

Як можна собі уявити, добір білетів у списку Денністона вимагає великої ретельності. Денністон включив до своєї статті комп'ютерну програму на алголі, що здійснювала перевірку того, чи справді список має заявлені дивовижні властивості — крок для 1970-х років дуже передовий. Денністон наполягав на тому, що роль комп'ютера в такій співпраці потрібно вважати виключно другорядною стосовно його власної: «Я хотів би наголосити, що всі результати, про які тут повідомляється, отримано без звернення до комп'ютерів, незважаючи на те, що я пропоную, щоб комп'ютери застосовувалися для їх перевірки».

Номерів у «Кеш ВінФоіл» тільки 46, тож для гри за Денністоном потрібно трохи зіпсувати чудову симетрію, вилучивши із системи Денністона всі білети, в яких є 47 чи 48. Після цього все одно залишається 217 833 білети. Припустимо, ви видобули зі сховку 435 666 доларів і вирішили на цих номерах зіграти. Що станеться?

У розіграші випадає шість номерів — скажімо, 4, 7, 10, 11, 34, 46. У тому малоймовірному випадку, що ці номери точно відповідають номерам в одному з ваших білетів, ви зірвете джек-пот. А якщо й ні, ви залишаєтеся з можливістю виграти добрячу купу грошей, вгадавши п'ять із шести номерів. Чи маєте ви білет з номерами 4, 7, 10, 11, 34? В *одному* з білетів Денністона є ці номери, тож єдина можливість незбігу, — якщо Денністоновий білет був із числами 4, 7, 10, 11, 34, 47 або 4, 7, 10, 11, 34, 48, а отже, потрапив на смітник.

А що з якоюсь іншою комбінацією з п'яти номерів, наприклад 4, 7, 10, 11, 46? Можливо, першого разу вам не поталанило, тому що номери 4, 7, 10, 11, 34, 47 були на одному з Денністонових білетів. Але тоді білета 4, 7, 10, 11, 46, 47 не могло бути у списку Денністона, оскільки він би збігався у п'яти номерах з білетом, про який ви знаєте, що він уже є. Іншими словами, якщо недобре 47 змусить вас упустити один виграш «п'ять із шести», більше йому таке не вдасться. Те саме стосується і 48. Тож із шести можливих виграшних комбінацій «п'ять із шести»:

кодові слова могли мати довільну довжину. У схожих на наш випадках, коли кодові слова мають фіксовану довжину 48, випадковий код потребує деяких додаткових заходів, яких і вжив Денністон.

* У математичних термінах, так відбувається тому, що список білетів Денністона утворює *систему Штейнера*. Додано в останній момент: у січні 2014 року молодий оксфордський математик Пітер Ківаш заявив про прорив, довівши існування більш чи менш *усіх* можливих систем Штейнера, якими цікавилися математики.

4, 7, 10, 11, 34
4, 7, 10, 11, 46
4, 7, 10, 34, 46
4, 7, 11, 34, 46
4, 10, 11, 34, 46
7, 10, 11, 34, 46

ви *гарантовано* маєте щонайменше чотири.

Якщо купити 217 833 Денністонових білети, отримаємо такі шанси на виграш:

імовірність виграти джек-пот — 2 %
імовірність виграти шість призів «п’ять із шести» — 72 %
імовірність виграти п’ять призів «п’ять із шести» — 24 %
імовірність виграти чотири призи «п’ять із шести» — 2 %

Порівняймо ці шанси зі стратегією Селбі із застосуванням комп’ютера, який добирає випадкові номери. У такому разі існує низька ймовірність, 0,3 %, не отримати жодного призу «п’ять із шести». Гірше те, що є імовірність 2 % отримати лише один такий приз, 6 % на отримання двох, 11 % — трьох і 15 % — виграти чотири з них. Гарантована віддача стратегії Денністона тут заміняється ризиком. Природно, такий ризик має і свою перевагу — група Селбі має 32 % шансів отримати більш як шість таких призів, що неможливо, якщо добирати номери за схемою Денністона. Очікувана цінність білетів Селбі — та сама, що і в білетів Денністона, і в будь-яких інших білетів. Але метод Денністона захищає гравця від випадковості. Для того щоб грати в лотерею без ризику, недостатньо купувати сотні тисяч білетів; потрібно, щоб ці сотні тисяч білетів були *правильні*.

Чи була ця стратегія причиною того, що «Випадкові стратегії» заповнювали вручну сотні тисяч бланків? Чи застосовувала ця група систему Денністона, розроблену як чиста теорія, для викачування грошей з лотереї без ризику для себе? Тут моє дослідження натикається на глуху стіну. Мені вдалося поспілкуватися з Юраном Лу, але він точно не знав, як добиралися номери; він тільки сказав мені, що в гуртожитку в них був «один хлопець», який займався всіма цими алгоритмами. Я не можу бути певним, що той «один хлопець» застосовував систему Денністона чи щось подібне. Але якщо і не застосовував, то, як на мене, мав би.

Гаразд, у «Павербол» грати можна

Отже, ми докладно розібралися в тому, що грати в лотерею — майже завжди погане рішення. Йдеться і про очікувану кількість грошей, і про те, що навіть у тих рідкісних випадках, коли очікувана грошова вартість лотерейного білета перевищує його ціну, потрібно бути дуже обережним, щоб зуміти витиснути з куплених білетів максимальну очікувану корисність.

Математично налаштованим економістам залишається пояснити один незручний факт, той самий, який бентежив Адама Сміта понад двісті років тому: лотереї дуже, дуже популярні. Лотереї не належать до ситуацій, які досліджував Еллсберґ, у яких люди мають ухвалювати рішення, що стосуються невідомих і непізнаваних імовірностей. Крихітна ймовірність виграти в лотерею виставляється всім на огляд. Принцип схильності людей ухвалювати рішення, виходячи з їхньої (більш-менш) максимальної корисності, лежить в осерді економічної науки; цей принцип адекватно працює у моделюванні будь-якої поведінки — від бізнесу до романтичних стосунків. Але не «Павербол». Цей вид ірраціональної поведінки не прийнятний для деяких економістів — так само, як нестерпною була ірраціональна величина гіпотенузи для піфагорійців. Це не відповідає їхній моделі того, що може бути; але воно є.

Економісти гнучкіші за піфагорійців. Замість того щоб топити тих, хто приносить погані новини, вони пристосовують свої моделі до реальності. Один популярний варіант запропонували наші старі знайомі Мілтон Фрідман і Леонард Севідж. На їхню думку, гравці в лотерею йдуть за хвилястою кривою корисності, яка віддзеркалює уявлення про багатство у класовому, а не чисельному розумінні. Якщо ви належите до середнього класу, витрачаєте п'ять доларів на тиждень на лотерейні білети і програєте, такий вибір коштує вам небагато грошей, але не змінює вашого класового становища; незважаючи на втрату грошей, від'ємна корисність надзвичайно близька до нуля. Але якщо ви *виграєте*, ну, то це виведе вас до іншого суспільного прошарку. Це можна уявляти як модель «божої постелі» — на порозі смерті для вас матиме значення те, що ви помираєте з трохи меншою кількістю грошей, бо грали в лотерею? Мабуть, зовсім ні. А матиме значення те, що ви в тридцять п'ять років перестали працювати і решту життя провели на пляжах Кабо, бо виграли у «Павербол»? Так. Матиме.

Ще далі від класичної теорії відходять Даніел Канеманн і Амос Тверський: вони стверджують, що люди взагалі схильні йти шляхом, відмінним від продиктованого кривою корисності, — не тільки тоді, коли Деніел Еллсберґ ставить перед ними свою урну, а взагалі в житті. Їхня «теорія перспектив», за яку Канеманн згодом отримав Нобелівську премію, нині розглядається як основоположна праця поведінкової економіки, що має на меті моделювання з максимально можливою точністю того, як люди діють *насправді*, а не того, як вони, згідно з абстрактними уявленнями про раціональність, *мають* діяти. Згідно з теорією Канеманна—Тверського, люди схильні надавати подіям, що мають низьку ймовірність, більшого значення за те, якого надають їм люди відповідно до аксіом Неймана—Морґенштерна; тому і привабливість джек-поту виходить за межі, поставлені строгим підрахунком очікуваної корисності.

Найпростіше пояснення не вимагає застосування жодних складних теорій. Просто: придбання лотерейного білета, виграє він чи ні, — це хоч і невелика, а розвага. Не карибські канікули, не танці на всю ніч, а розвага на один-два долари. Цілком можливо. Існують підстави сумніватися в такому міркуванні (наприклад, гравці в лотерею часто самі називають головною причиною участі в ній перспективу виграшу), але воно чудово пояснює реальну поведінку.

Економіка не фізика, а корисність не енергія. Корисність не є постійною, і результатом взаємодії двох осіб може стати збільшення корисності у кожного з них. Це оптимістичний вільноринковий погляд на лотерею. Це не регресивний податок, це *гра*, у якій люди платять державі невеликі гроші за кілька хвилин розваги, яку держава може надавати дуже дешево, а в підсумку бібліотеки працюють і ліхтарі вночі горять. Так само, як у торгівлі двох країн, обидві сторони від цієї транзакції виграють.

Тож так — грайте у «Павербол», якщо це вас розважає. Математика дає добро!

Поза сумнівом, у такому підході є свої проблеми. І знову Паскаль, з типовим для нього похмурим поглядом на радість від азартної гри:

> Цей чоловік живе, не знаючи туги[200], тому що кожного дня грає на дрібні гроші. Дайте йому щоранку стільки грошей, скільки він міг би виграти за день, і забороніть при цьому грати — і він почуватиметься нещасним. Мені, напевно, скажуть, що він грає для розваги, а не для виграшу. Нехай тоді він не грає на гроші; тоді гра його не захопить, і він швидко знудиться. Отже, не самої лише розваги прагне він; гра без хвилювання і пристрасті набридне йому. Він повинен захоплюватися, тішити себе ілюзією, що він буде щасливий від виграшу і не буде, коли йому дадуть ці гроші як дарунок, щоб тільки він не грав.

Паскаль вважає задоволення від азартної гри ницим. І коли воно надмірне, то і справді може завдати шкоди. Ті, хто обстоюють думку про прийнятність лотерей, також кажуть, що торговці метамфетаміном і їхні клієнти отримують взаємну користь. Хоч що кажіть про метамфетамін, але неможливо заперечувати, що його широко та із задоволенням вживають*.

* Я не викладаю цього аргументу докладно; якщо потрібні подробиці, подивіться інформацію про теорію раціональної залежності у Ґері Бекера і Кевіна Мерфі.

Як вам таке порівняння? Подумайте не про чамренних наркоманів, а про малих підприємців — гордість Америки. Відкрити магазин чи надавати якусь послугу — не те саме, що купити лотерейний білет; тут потрібен певний ступінь контролю над процесом. Проте обидві справи мають дещо спільне: у більшості випадків започаткування бізнесу — погана ставка. Байдуже, наскільки смачним ви вважаєте свій соус до шашлику, якої вибухової інноваційності ви очікуєте від своєї програми, яким безжальним і зухвалим ви маєте намір бути у своїй підприємницькій діяльності — з набагато вищою ймовірністю на вас чекає крах, а не успіх. Така природа підприємництва: ви маєте дуже і дуже малі шанси заробити великі гроші, скромні шанси сяк-так виживати, і набагато більші — гроші втратити. Для великої частки потенційних підприємців, якщо порахувати цифри, очікувана фінансова цінність, як і у випадку з лотерейним білетом, буде меншою за нуль. Типовий підприємець (як і типовий гравець у лотерею) завищує свої шанси на успіх. Навіть підприємства, що виживають[201], як правило, приносять менше грошей своїм власникам, ніж би вони могли отримувати у формі зарплати, працюючи на когось іншого. Попри це суспільство має користь від світу, в якому люди, всупереч мудрій обачності, відкривають свою справу. Нам потрібні ресторани, нам потрібні перукарі, нам потрібні ігри в телефонах. Чи є підприємництво «податком на дурість»? Якщо так сказати, вас назвуть божевільним. Почасти тому, що ми цінимо власника бізнесу вище, ніж азартного гравця; а відділити моральну оцінку якоїсь діяльності від висновків про її раціональність тяжко. Але почасти — і частина ця *найбільша* — тому, що корисність ведення бізнесу, як і корисність купівлі лотерейного білета, самими лише очікуваними доларами не вимірюється. Уже саме втілення мрії чи навіть спроба такого втілення — почасти отримана винагорода.

У кожному разі саме такого висновку дійшли Джеймс Гарві і Юран Лу. Після закриття «ВінФолу» вони вирушили на захід і заснували у Кремнієвій долині фірму — новий корпоративний месенджер. (На сторінці про Гарві у переліку його інтересів є і такий сором’язливий пункт — «нетрадиційні інвестиційні стратегії»). Коли я писав ці рядки, Гарві і Лу шукали венчурного інвестора. Можливо, вони його знайдуть. А якщо ні, готовий битися об заклад: вони почнуть щось знову, хоч з очікуваною цінністю, а хоч без, сподіваючись, що наступний їхній білет виграє.

Частина четверта

РЕГРЕСІЯ

У цій частині: успадкування обдарованості, прокляття «Гоум-ран дербі», розставляємо слонів рядами й колонами, бертильйонаж, винайдення діаграми розсіювання, еліпс Ґальтона, багаті штати голосують за демократів, а багаті люди — за республіканців, «Отже, чи можливо, що рак легенів є однією з причин куріння?», чому вродливі чоловіки такі підлі.

Розділ 14

Тріумф посередності

Початок 1930-х років, як і теперішній час, для американської бізнес-спільноти був періодом перегляду цінностей. Робилося щось не те, і це було ясно. Але що саме? Чи була криза 1929 року і наступна депресія непередбачуваною катастрофою? Чи сама американська економіка мала системну ваду?

Горас Секріст краще за будь-кого іншого міг відповісти на це запитання. Секріст був професором статистики у Бюро досліджень ринків Північно-Східного університету, експертом із застосування кількісних методів у бізнесі та автором популярних посібників зі статистики[202] для студентів і професіоналів бізнесу. З 1920-го, протягом років, що передували кризі, він збирав деталізовані дані про сотні підприємств — від господарчих магазинів до банків і залізниць. Секріст зводив дані про витрати, обсяги продажу, витрати на зарплату й оренду і будь-які дані, які міг знайти, намагаючись виявити і класифікувати таємничі чинники, що робили одні підприємства процвітаючими, а інші руйнували.

Тож 1933 року, коли Секріст вирішив оприлюднити результати своїх досліджень, як науковці, так і представники бізнесу були схильні дослухатися. Ця схильність ще більше зросла, коли він оприлюднив приголомшливу суть отриманих результатів у книжці на 468 сторінок з численними таблицями і графіками. Секріст рубав з плеча: книжку він назвав «Тріумф посередності в бізнесі».

«Посередність перемагає[203] у веденні конкурентного бізнесу, — пише Секріст. — Це висновок, до якого однозначно приводить аналіз витрат і прибутків тисяч фірм. Такою є ціна свободи виробництва і торгівлі».

Як Секріст дійшов такого висновку-вироку? По-перше, він розподілив компанії кожного сектору, ретельно відділивши переможців (високі доходи, низькі затрати) від неефективних нікчем. Наприклад, 120 крамниць одягу Секріст спочатку проранжував за відношенням обсяг продажу — затрати 1916 року, а потім поділив на шість груп, чи «секстилів», по двадцять компаній у кожній. Секріст очікував, що з часом магазини верхнього секстилю зміцнять свої позиції, ще більше удосконаливши свою майстерність. Дійсність виявилася цілковито протилежною. 1922 року магазини верхнього секстилю майже втратили свої переваги порівняно з пересічними; вони й далі були кращими за середні, але здебільшого нічим особливо не вирізнялися. Хай там що вивело магазини з першої групи у переможці, усього лиш за шість років це вичерпалося. Перемогла посередність.

Те саме явище Секріст виявив у всіх видах економічної діяльності. Господарчі магазини скотилися до посередності; так само сталося і з бакалійними. Способи вимірювання значення не мали. Секріст аналізував відношення зарплат до обсягу продажу, оренди до обсягу продажу, будь-які статистичні дані, що потрапляли йому до рук. Байдуже. З часом найкращі компанії починали виглядати і діяти, як пересічні представники єдиної маси.

Книжка Секріста стала цебром крижаної води, вилитим на голови бізнес-еліти, яка й до того почувалася незатишно. Чимало рецензентів побачили у графіках і таблицях Секріста підтверджене цифрами спростування міфів, на які спиралося підприємництво. Роберт Ріґель з Університету Буффало писав: «Ці результати ставлять перед бізнесменом[204] і економістом нагальну і до певної міри трагічну проблему. Незважаючи на наявність деяких винятків із загального правила, уявлення про початкові тяжку працю і боротьбу, які приносять успіх здібним і метким, а потім настає тривалий період пожинання плодів, підставово розвінчано».

Що за сила тягне найкращі компанії до середини? Напевно, щось пов'язане з людською поведінкою, бо жодних видимих природних причин немає. Секріст із притаманною йому ретельністю провів подібне дослідження для середніх липневих температур у 191 американському місті. Тут регресії не було. Міста, що були найспекотнішими 1922 року, залишилися такими і 1931-го.

Після кількох десятиліть укладання статистики і досліджень діяльності американського бізнесу Секріст гадав, що знає відповідь. Сама природа конкуренції передбачає пригнічення успішних компаній і вивищення їхніх некомпетентних конкурентів. Секріст пише:

> Повна свобода входження на ринок[205] і тривала конкуренція ведуть до увіковічування посередності. Нові фірми приходять із середовища відносно «нездатних» — щонайменше, вони не мають досвіду. Якщо якісь з них досягають успіху, то вони мусять відповідати певним стандартам конкуренції свого виду діяльності і ринку, на якому вони працюють. Водночас компетентність, відчуття ринку і чесність залишаються під владою безпринципних, немудрих, непоінформованих та необачних. У результаті роздрібна торгівля перенаселена, крамниці тісні й неефективні, обсяги низькі, витрати відносно високі, а прибутки малі. Так буде, доки існує вільний доступ до економічної діяльності; так буде, доки конкуренція є «вільною» в писаних вище межах; гору

> не візьмуть ні найкращі, ні найгірші. Гору братиме посередність. Перемагатимуть керівники підприємств із середнім рівнем розуму, а правилом будуть прийоми і методи, притаманні такій бізнесовій психології.

Можна уявити, що щось подібне каже професор у якійсь бізнес-школі? Ні, не можна. Загальноприйнятим сьогодні є, що вільноринкова конкуренція безжально відсіює не тільки некомпетентних, а й усіх, чия компетентність більш як на 10 % не дотягує до максимальної. Кращі фірми диктують правила гіршим, а не навпаки.

На думку Секріста, вільний ринок, на якому одна на одну наштовхуються фірми різного розміру, був схожий на школу, в якій до одного приміщення зібрано всіх учнів[206], — такого 1933 року вже майже не було: «Учнів різного віку, з різними характерами і різною підготовкою зібрано в одній кімнаті для навчання. У результаті, звісно, — гамір, нехіть до навчання і неефективність. Здоровий глузд згодом вказав на бажаність поділу, класифікації, різного підходу — ці заходи відкрили можливість до ствердження природних здібностей, до того, що вищість стає життєздатною, не розмиваючись посередністю».

Останнє речення звучить трохи… Як би його сказати? Можете згадати *ще когось*, хто 1933 року говорив про важливість того, щоб кращі люди не розчинялися у гірших?

З огляду на думки Секріста про освіту, напевно, не викличе здивування, що його ідеї про виродження до посередності походять від ідей британського вченого XIX століття, основоположника євгеніки Френсіса Ґальтона. Ґальтон був наймолодшим із семи дітей, таким собі вундеркіндом. Для прикутої хворобою до ліжка старшої сестри Аделі освіта Френсіса стала найголовнішою розвагою; у два роки він умів писати своє ім'я, а в чотири писав їй ось такі листи: «Я вмію додавати будь-які числа[207] і множити на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10. Також я знаю пенси і фунти. Я трохи читаю по-французьки і розумію годинник». Вісімнадцятирічним Ґальтон почав вивчати медицину, але після смерті батька, що залишив йому великі статки, він раптом зрозумів, що не схильний робити традиційну кар'єру. Якийсь час Ґальтон був мандрівником — очолював експедиції до внутрішніх районів Африки. Радикальній зміні його зацікавлень сприяло знайомство 1859 року з працею «Походження видів»: Ґальтон згадував, що «жадібно поглинав її зміст і відразу ж засвоював його»[208]. Відтоді Ґальтон переважну частину своєї праці присвячує успадкуванню людських рис, як фізичних, так і розумових. Ця робота привела його до політичних переконань, які сьогодні видаються цілковито неприйнятними. Певне враження можна скласти вже за початком його книжки 1869 року «Спадковий геній»:

> У цій книжці я маю намір показати, що природні здібності людини з'являються у неї шляхом успадкування, при таких самих обмеженнях, як

> і зовнішня форма, і фізичні ознаки в усьому органічному світі. Відповідно, подібно до того, як попри ці обмеження з допомогою ретельного добору неважко отримати таку породу коней чи собак, для якої швидкість бігу являла б собою властивість не випадкову, а постійну, або досягнути будь-якого схожого результату, — так само було б справою цілком здійсненною створити високообдаровану расу людей шляхом відповідних шлюбів протягом кількох поколінь.

Ґальтон наводить результати докладного дослідження знаменитих британців, від священиків до циркових борців, стверджуючи, що ці видатні англійці*, як правило, мали непропорційно видатних родичів. «Спадковий геній» мав великий негативний резонанс, особливо у клерикальних колах; суто натуралістичний погляд Ґальтона на земний успіх не залишав місця більш традиційній версії Божого провидіння. Особливе роздратування викликало твердження Ґальтона, що успіхи на церковній ниві самі є наслідком спадковості, що, як писав один рецензент[209], «благочестивий чоловік завдячує своїм благочестям не так прямій дії Духа Святого на його душу (як ми завжди вважали), як вітер, що віє, куди забажає, а завдячує своєму земному батькові фізичним спадком певної постави, пристосованої до релігійних почуттів». Якщо у Ґальтона і були друзі в церковному середовищі, то він їх повністю втратив через три роки, коли опублікував коротку статтю «Статистичне дослідження дієвості молитви». (Резюме: молитва не є надто дієвою.)

На відміну від священства, вікторіанська наукова спільнота сприйняла книжку Ґальтона з великим ентузіазмом, що межувала з повною некритичністю. Чарльз Дарвін писав Ґальтону в нападі своєрідної інтелектуальної несамовитості, навіть не дочитавши книжки до кінця:

> *Даун, Бекенгем, Кент, Південна Англія*
> *23 грудня*
>
> *Дорогий мій Ґальтоне!*
> Я прочитав лише сторінок з 50 вашої книжки (до суддів), але мушу висловитися, бо інакше щось зі мною трапиться. Не думаю, що колись у житті я читав щось цікавіше й оригінальніше, — а як же ви добре і ясно викладаєте кожен аргумент! Джордж, який уже дочитав і має ту саму думку, каже мені, що перші розділи — то ніщо порівняно з цікавістю наступних! Мені потрібно буде трохи часу, щоб дістатися до цих наступних розділів, бо мені вголос читає дружина, якій теж дуже цікаво. У певному сенсі ви навернули на свій бік опонента, бо я завжди твердив, що, за винятком дурнів, люди не надто від-

* Ґальтон вибачається за те, що не згадує іноземців, відзначаючи: «Я дуже б хотів дослідити біографії італійців і євреїв, — обидва ці народи багаті на родини високоінтелектуальної породи».

> різняються одне від одного розумом, а тільки завзяттям і тяжкою працею; я й досі гадаю, що це дуже важлива відмінність. Вітаю вас зі здійсненням праці, яку, на моє переконання, пам'ятатимуть. З нетерпінням і великою цікавістю чекаю кожного читання, але кожне з них змушує мене так багато думати, що це для мене тяжка робота; однак це виключно провина мого розуму, а не вашого чудово ясного стилю.
>
> *Щиро ваш*
> *Ч. Дарвін*

Слід визнати: ставлення Дарвіна могло бути упередженим, як-не-як він доводився Ґальтонові двоюрідним братом. Крім того, Дарвін був глибоко переконаний, що математичні методи дозволяють науковцям краще розуміти світ, — хоча у своїх власних працях він набагато менше за Ґальтона вдавався до кількісних методів. У своїх спогадах Дарвін пише про початковий період своєї освіти:

> Я пробував студіювати математику[210] і навіть вирушив для цього влітку 1828 року до Бармута з приватним учителем (добрячим телепнем), але студії мої просувалися украй мляво. Вони викликали у мене спротив головно тому, що я не здатний був урозуміти жодного сенсу в самих початках алгебри. Це нетерпіння було дуже нерозважливим, і згодом я глибоко пошкодував про те, що не просунувся принаймні так, щоб хоч трохи щось затямити у великих провідних началах математики, бо мені здається, що люди, цим наділені, мають ще одне чуття.

Дарвін міг вважати, що нарешті бачить у Ґальтоні уособлення початку нової позачуттєвої біології, яку він не здатний був створити сам через брак математичної підготовки.

На думку критиків «Спадкового генія», незважаючи на те, що спадковість інтелектуальних рис справді існує, Ґальтон переоцінював її потужність порівняно з іншими чинниками. Тож Ґальтон узявся за дослідження *міри*, до якої наша доля залежить від успадкованого нами від батьків. Але кількісний аналіз спадкової «геніальності» — справа нелегка: як точно можна виміряти ступінь видатності видатних англійців? Незламний Ґальтон узявся за характеристики людей, що краще надаються до кількісного представлення, як-от зріст. Загальновідомо, що у високих батьків і діти часто високі. Якщо чоловік має метр дев'яносто, а дружина метр вісімдесят, то і їхні сини й доньки, швидше за все, матимуть зріст, вищий за середній.

Саме тут настає черга Ґальтонового відкриття: діти високих батьків *не обов'язково* будуть так само високими. Те саме стосується і низеньких батьків, у протилежному напрямку; їхні діти будуть схильними до низького зросту, але не такого низького, як батьки. Ґальтон відкрив явище, яке нині має назву *регресія до середнього*. Представлені дані не залишали сумнівів у його реальності.

«Хоч яким парадоксальним це може здатися з першого погляду, — писав Ґальтон у книжці 1889 року “Природна спадковість”, — необхідний у теоретичному плані факт*, який однозначно підтверджується спостереженнями: статура дорослих нащадків мусить у цілому бути більш посередньою, ніж статура їхніх батьків».

Тож те саме, на думку Ґальтона мусить відбуватися і з розумовими здібностями. І це відповідає загальному досвіду; діти великого композитора чи вченого, чи політичного лідера, часто досягають значних успіхів у відповідній галузі, однак рідко ці успіхи так само високі, як і в їхніх знаменитих батьків. Ґальтон відзначає те саме явище, яке Секріст згодом відкриє у бізнесі. Вищість не є стійкою; з плином часу утверджується посередність**.

Але між Ґальтоном і Секрістом є одна велика відмінність. Ґальтон у душі був математиком, а Секріст — ні. І тому Ґальтон розумів, *чому* регресія відбувається, тоді як для Секріста це залишалося таємницею.

Ґальтон розумів, що зріст визначається певною комбінацією вроджених характеристик і зовнішніх чинників; до останніх можуть належати середовище, захворювання, перенесені в дитинстві, або ж чиста випадковість. Я маю 182 см зросту — почасти тому, що такий самий на зріст і мій батько, і я успадкував від нього певну частину генів, що відповідають за високий зріст. Але почасти мій зріст — це і наслідок того, що в дитинстві я вживав правильні харчі і не зазнавав екстремальних стресів, які могли загальмувати ріст. Також, поза сумнівом, мій зріст зазнавав хтозна-скільки інших впливів, що діяли в обох напрямках, як в утробному періоді, так і після народження. Високі люди є високими, тому що мають спадкову схильність бути високими, або тому, що зовнішні чинники викликають посилений ріст, або з обох цих причин. І що вища людина, то більша ймовірність, що догори її тягнули *обидві* ці причини.

Іншими словами, люди, що належать до групи найвищих серед усього населення, майже напевно будуть вищими за той рівень, до якого вони мають схильність, зумовлену генетично. Вони народилися з добрими генами, але водночас їх підштовхнули середовище і випадковість. Їхні діти матимуть ті самі гени, але у їхньому випадку немає причини очікувати, що зовнішні чин-

* Технічне, але важливе зауваження: говорячи про «необхідність», Ґальтон спирається на той біологічний факт, що розподіл зросту залишається приблизно однаковим від покоління до покоління. У такому разі теоретично можливою є відсутність регресії, але це означало б зростання ступеня варіативності: з кожним поколінням гіганти ставали б більшими, а коротуни — меншими.

** Тяжко зрозуміти, як Секріст зміг — при тому, що він знав працю Ґальтона про людський зріст, — переконати себе в тому, що регресія до середнього поширюється лише на залежні від людини змінні. Коли якась теорія по-справжньому заволодіває розумом, суперечливий доказ — навіть вам відомий — часом повністю витісняється зі свідомості.

ники знову змовляться і знову зроблять їхній зріст вищим ніж той, за який відповідає спадковість. А отже, в середньому вони будуть вищими за пересічну людину, але не аж такими високими, як їхні батьки. У *цьому* причина регресії до середнього: це не таємнича сила, що ненавидить усе видатне, а просто наслідок спадковості у поєднанні з випадковістю. У цьому — підстава, на якій Ґальтон називає регресію до середнього «необхідним у теоретичному плані фактом». Спершу ця закономірність у зібраних ним даних здалася йому дивною, але коли він зрозумів, що відбувається, для нього стало ясно, що по-іншому просто бути не може.

Те саме відбувається і в бізнесі. Секріст не помилявся з приводу фірм, які 1922 року мали найбільші прибутки; ймовірно, це було пов'язано з найкращим у їхніх галузях управлінням. Але водночас цим компаніям поталанило. У майбутньому керівництво цих компаній могло залишися на тому самому високому рівні. Але компанії, яким поталанило 1922 року, через 10 років мали ту саму ймовірність на щасливий випадок, що й усі інші. І тому компанії з верхнього сектору починають з роками сповзати донизу.

Майже будь-що в житті, на що впливає випадкова мінливість, має потенціал до регресії. Ви спробували нову абрикосово-сирну дієту і схудли на кілограм? Пригадайте, коли ви вирішили худнути. Більш ніж імовірно, що це був момент, у який звичайне коливання вашої ваги знаходилося у найвищій точці, тому що саме в такі моменти починаєш дивитися на показники ваг чи просто на живіт і кажеш: «Боже мій, треба ж щось *робити*!». Але якщо це так, то, можливо, ви схуднули б на той кілограм у будь-якому разі, з абрикосами чи без них, коли б повернулися до своєї середньої ваги. А про ефективність дієти ви дізналися дуже мало.

Можна спробувати вирішити цю проблему шляхом застосування випадкової вибірки: візьмемо двісті випадкових пацієнтів, виберемо з них тих, що мають надмірну вагу, а потім перевіримо на них дієту. У такому разі ми робитимемо те саме, що й Секріст. Найтяжчий сегмент населення дуже схожий на верхній секстиль у бізнесі. Люди з надмірною вагою, поза сумнівом, з більшою ймовірністю за пересічних громадян мали проблеми з вагою давно. Але вони *також* з більшою ймовірністю могли знаходитися у найвищій точці коливань своєї ваги у день, коли їх важили. Так само, як найкращі фірми у Секріста з часом деградували до посередності, наші ваговиті пацієнти втрачатимуть свою вагу — незважаючи на ефективність чи неефективність дієти. Саме тому кращі дослідження дієт передбачають розгляд ефекту не однієї з них; такі дослідження порівнюють дві дієти-кандидати з метою визначення, яка з них приводить до більшої втрати ваги. Регресія до середнього мусить позначатися на групах з різними дієтами однаково — і *таке* порівняння буде чесним.

Чому другий роман зіркового письменника-дебютанта або другий альбом вибухово популярної групи надзвичайно рідко буває так само успішним, як перший? Не тому, чи не тільки тому, що більшість митців мають мало що сказати. Так відбувається тому, що успіх у мистецтві — це поєднання таланту і талану, і, як усе інше в житті, він зазнає регресії до середнього*.

Після підписання багаторічних контрактів футболісти-нападники, як правило, у наступному сезоні роблять коротші пробіги**. Дехто твердить, що так відбувається тому, що ці футболісти втрачають фінансовий мотив гнатися за ярдами, і що, ймовірно, відграє певну роль також і психологічний чинник. Так само важливо й те, що великі контракти вони підписують у результаті видатних успіхів, досягнутих попереднього року. Було б дуже дивно, якби наступного сезону вони *не* повернулися до звичайнішого рівня.

«На основі досягнутих показників»

Я пишу ці рядки у квітні, на початку бейсбольного сезону, коли щороку нам підносять букет новин про те, яких неймовірних результатів досягне той чи той гравець на основі успіхів у попередньому сезоні. Сьогодні на каналі «І-Ес-Пі-Ен» сказали, що «Метт Кепм обіцяє блискучий старт[211]: на основі досягнутих ним показників можна очікувати 86 гоум-ранів, 210 ранів після бетера та 172 рани». Ці дивовижні цифри (жоден гравець в історії вищої бейсбольної ліги не мав більше ніж 73 гоум-рани за сезон) — типовий приклад хибної лінійності. Це як у тій сюжетній задачі: «Якщо Марсія може пофарбувати 9 будинків за 17 днів, і вона має 162 дні на фарбування якомога більшої кількості будинків...»

Кемп зробив дев’ять гоум-ранів у перших сімнадцяти іграх «Доджерс» — показник 9/17 на гру. Тож алгебраїст-аматор міг би записати таке лінійне рівняння:

$$H = G \times (9/17),$$

де H — кількість гоум-ранів, які Кемп робить за повний сезон, а G — кількість матчів, які зіграє його команда. Бейсбольний сезон — це 162 гри. І коли під-

* Ускладнює ситуацію той факт, що письменники й музиканти, як правило, із часом пишуть і грають краще. Другий роман Ф. Скотта Фіцджеральда (а можете згадати його назву?) набагато гірший за дебютний, «По цей бік раю», але коли стиль письменника став більш зрілим, виявилося, що у порохівницях ще щось залишилося — і немало.

** Цей факт та його інтерпретація — заслуга Браяна Берка зі статистичного підрозділу Національної футбольної ліги. Його чіткий виклад, добрий смак та постійна увага до статистичного здорового глузду має стати взірцем для всіх серйозних спортивних аналітиків.

ставити замість *G* 162, отримаємо 86 (точніше, 85,7647, але 86 — найближче до нього ціле).

Але не всі лінії прямі. Метт Кемп не виб'є цього року вісімдесят шість гоум-ранів. І регресія до середнього пояснює нам, чому. У будь-який момент сезону дуже ймовірно, що лідер у гоум-ранах — це добрий майстер таких ударів. Справді, з того, як Кемп грав раніше, зрозуміло, що він регулярно б'є по м'ячу з дивовижною силою. Але лідерові гоум-ранів ще й дуже пощастило. Це означає, що, хоч якими є його показники, можна очікувати, що далі у сезоні вони знизяться.

Якщо чесно, то ніхто на «І-Ес-Пі-Ен» не вважає, що Метт Кемп виб'є вісімдесят шість гоум-ранів. Такі заяви «на основі попередніх показників», якщо вони робляться у квітні, мають напівжартівливий тон: «Звісно, не виб'є, а *якби* він так грав і далі?». Але приходить літо, і жартівливості стає дедалі менше — доки в середині сезону не починаються цілком серйозні прогнозування статистики гравця до кінця сезону за допомогою лінійного рівняння.

Однак і це неправильно. Якщо регресія до середнього є у квітні, то буде вона й у липні.

Гравці це розуміють. Дерек Джетер, коли йому набридли запитання про те, що «на основі показників» він поб'є рекорд Пітера Роуза, сказав «Нью-Йорк Таймс»: «Один з найгірших виразів у спорті — "на основі показників"». Золоті слова!

Підійдімо з більш практичного боку. Якщо я очолюю список лідерів Ліги за кількістю гоум-ранів[212] на момент гри «Ол-Стар», скільки гоум-ранів до кінця сезону я маю очікувати?

«Ол-Стар» ділить бейсбольний сезон на «першу половину» і «другу половину», але друга насправді трохи коротша — в останні роки на 10–20 %. Тож можна було б очікувати у другій половині сезону зробити близько 85 % гоум-ранів від показника першої*.

Як свідчить історія, очікувати цього не варто. Для того щоб отримати уявлення про те, що насправді відбувається, я переглянув статистику лідерів перших половин сезонів Ліги за кількістю гоум-ранів у період 1976–2000 років (за винятком сезонів, скорочених через страйки, і тих, де у першій половині сезону лідерів було два). Тільки троє гравців (Джим Райс 1978 року, Бен Оґілві 1980-го і Марк МакҐвайр 1997-го) у другій половині сезону зробили 85 % від гоум-ранів першої половини. І на кожного з них є такий гравець, як Міккі Тетлтон, який був лідером Ліги у першій половині сезону 1993 року, зро-

* Насправді, загальні показники кількості гоум-ранів у другій половині трохи знижуються; проте це може пояснюватися зростанням активності бейсболістів-новачків. Якщо взяти показники елітних гравців, вони будуть однаковими в обох половинах сезону.

бивши 24 гоум-рани, а у другій спромігся лише на 8. Такі гравці в середньому у другій половині сезону роблять лише 60 % гоум-ранів першої, у якій вони були лідерами. Причина тут не у виснаженні і не в серпневій спеці; якби це було так, усі інші теж потерпали б від такого спаду. Це — просто регресія до середніх значень.

І це не прерогатива лідера Ліги за кількістю гоум-ранів. Під час перерви «Ол-Стар» у середині сезону щороку проводиться «Гоум-ран Дербі» — змагання найкращих бейсболістів у вертикальних ударах, які грають проти найкращих подавачів. Дехто з гравців скаржився, що штучні умови змагання негативно позначаються на їхній грі у наступні тижні: так зване «прокляття» дербі. Газета «Вол-Стріт Джорнел» 2009 року надрукувала моторошну статтю «Таємниче прокляття дербі», що викликала інтенсивну критику в бейсбольних блогах, автори яких аналізують спортивну статистику. Це не завадило газеті знову звернутися до тієї самої теми 2011-го, стаття називалася «Прокляття дербі завдає нового удару». Але прокляття немає. До дербі потрапляють гравці, які показують видатні успіхи у першій половині сезону. Регресія вимагає, щоб у середньому їхні подальші показники знижувалися.

А Метт Кемп у травні зазнав травми підколінного сухожилля, пропустив ігровий місяць і повернувся на поле іншим гравцем. Він закінчив сезон 2012 року не з 86 гоум-ранами, очікуваними «на основі попередніх показників», а з 23.

У регресії до середнього є щось, чому наш розум опирається. Ми хочемо вірити у щось, що скидає з висоти сильних. І нам недостатньо прийняти те, що знав Ґальтон 1889 року: позірно сильні насправді рідко коли такі сильні, як здається.

Секріст отримує гідну відсіч

Найважливіший момент, який не зауважив Секріст, не становив таємниці для уважніших до математики дослідників. Серед загалом прихильних рецензій різко вирізнявся статистичний розгром — стаття Гарольда Готеллінґа[213] у «Журналі Американської статистичної асоціації». Готеллінґ народився у Міннесоті[214] в родині торговця сіном; він вступив до коледжу з наміром вивчати журналістику і тут проявив видатні математичні здібності. (Френсіс Ґальтон, якби він поширив свої дослідження на спадковість видатних американців, із задоволенням міг би встановити, що, незважаючи на скромних батьків, серед предків Готеллінґа були секретар Колонії Массачусетської затоки та архієпископ кентерберійський). Як і Абрагам Вальд, Готеллінґ почав з теоретичної математики — він захистив у Принстоні дисертацію з алгебраїчної топології. Згодом, під час війни, він очолив Групу статистичних досліджень у Нью-Йорку — саме тут Вальд пояснював військовим, що броня потрібна там, де кульових отворів немає. 1933 року, коли вийшла книжка Секріста, Готеллінґ був молодим професором Колумбійського університету, що вже встиг зробити значний внесок у теоретичну статистику, особливо актуальний для економічного застосування. Розповідали, що він полюбляв грати у «Монополію» всліпу; запам'ятовування ігрового поля та частотності різних карток у грі було для нього простою вправою на генерування випадкових чисел і фінансові операції. Це має дати певне уявлення як про здібності Готеллінґа, так і про те, що йому подобалося.

Готеллінґ повністю присвятив себе науці і в Секрісті міг бачити споріднену душу. «Збирання і опрацювання даних, — писав він із симпатією, — мабуть, потребувало титанічних зусиль».

Далі настала черга удару[215]. Тріумф посередності, який відзначає Секріст, «з'являється більш чи менш автоматично, коли йдеться про змінну, на яку одночасно впливають як постійні, так і випадкові чинники», — пише Готеллінґ. Сотні таблиць і графіків Секріста «не доводять нічого, крім того, що відношення, які розглядаються, мають тенденцію до коливань». Результати вичерпного дослідження Секріста «математично очевидні із загальних міркувань, для їх доведення не потрібно звертатися до величезного масиву даних». Готеллінґ доводить свою думку за допомогою єдиного спостереження. Секріст вважав, що регресія до посередності спричиняється негативним впливом конкуренції з плином часу; конкуренція — ось причина того, що найкращі крамниці 1916 року мали заледве вищі за середні показники 1922-го. Але що буде, коли розглянути крамниці, що мали найкращі показники 1922 року? Як і в дослідженні Ґальтона, ці магазини, імовірно, водночас краще працювали і їм таланило. Якщо повернутися до 1916 року, то добра організація мала залишатися тією самою, а дія щасливого випадку — зовсім іншою. Як правило, 1916 року такі магазини будуть ближчими до середнього рівня, ніж 1922-го. Іншими словами, якщо регресія до середнього є, як вважав Секріст, природним результатом дії конкуренції, то ця дія *має бути як зворотною, так і прямою в часі*.

Рецензія Готеллінґа коректна, але тверда, у ній набагато більше жалю, ніж гніву: автор якомога ввічливіше намагається пояснити видатному колезі, що той змарнував десять років свого життя. Але Секріст не зрозумів. Через один номер у «Журналі Американської статистичної асоціації» з'явився гнівний лист-відповідь, у якому Секріст вказував на кілька помилок у рецензії Готеллінґа; в усьому іншому цей лист демонстрував повне нерозуміння аргументації рецензента. Секріст знову наполягав, що регресія до середніх значень — це не просто статистичний загальник, а конкретна особливість «даних щодо результатів ефектів конкуренції і адміністративного контролю». Тут Готеллінґ залишив ввічливість і почав висловлюватися прямо. «Головна теза книжки, —

пише він у відповідь, — якщо коректно її інтерпретувати, по суті тривіальна... “Доводити” такий математичний результат за допомогою дорогих і тривалих кількісних досліджень показників витрат і прибутків компаній різного профілю — це все одно, що доводити таблицю множення, розставляючи слонів по рядах і колонах, а потім робити те саме з багатьма іншими видами тварин. Результати таких вправ, можливо, розважать і матимуть певну педагогічну цінність, однак нічого по суті не дають ні зоології, ні математиці».

Тріумф посередності у часі травного транзиту

Не випадає звинувачувати Секріста аж надто сильно. Самому Ґальтону знадобилося близько двох десятиліть, щоб повністю зрозуміти значення регресії до середнього, і чимало вчених не зрозуміли Ґальтона так само, як не зрозумів його Секріст. Біометрист Волтер Ф. Велдон, який заробив свою наукову репутацію, продемонструвавши, що результати Ґальтона, які стосуються варіативності людських рис, також виконуються і для креветок, так характеризував у своїй лекції 1905 року досягнення Ґальтона:

> Дуже небагато біологів[216], які намагаються застосовувати його методи, завдають собі труду зрозуміти процес, який привів його до цих методів, і ми постійно бачимо, що регресія вважається особливістю живих істот, завдяки чому варіативність зменшується при передачі від батьків до дітей, а види залишаються самими собою. Такий погляд може здаватися реалістичним для тих, хто просто вважає, що середнє відхилення для дітей є меншим, ніж для батьків: але якби такі науковці пам’ятали так само очевидний факт, що регресія діє й у зворотному напрямку, від дітей до батьків, так що батьки аномальних дітей в цілому є менш аномальними за своїх дітей, вони б мали або пов’язати цю властивість регресії з певною властивістю життя, завдяки якій діти здатні зменшувати аномальність своїх батьків, або ж усвідомити справжню природу явища, яке вони намагаються обговорювати.

Біологи схильні вважати, що регресія походить з біології, теоретики бізнесового управління на зразок Секріста — що це результат конкуренції, літературні критики приписують її творчому виснаженню, — але природа регресії не в цьому. Природа її математична.

Попри всі аргументи і роз’яснення Готеллінґа, Велдона і самого Ґальтона ідею так до кінця й не розуміють. Не розуміють її не тільки спортивні журналісти з «Вол-Стріт Джорнел»; буває таке і з науковцями. Один з особливо яскравих прикладів — стаття у «Британському медичному журналі» 1976 року[217] про лікування дивертикульозу товстої кишки висівками. (Я достатньо старий для того, щоб пам’ятати 1976 рік — тоді про висівки ентузіасти говорили з тим самим захопленням, як сьогодні про жирні кислоти омега-3 й антиоксиданти). Автори статті фіксували для кожного пацієнта «час орально-анального транзиту» — тобто тривалість часу, який порція їжі проводить в організмі між входом і виходом — до і після застосування висівок.

Науковці виявили помітну нормалізацію процесу. «В усіх учасників дослідження зі швидким періодом транзиту він уповільнювався до 48 годин... у тих, хто мав середню тривалість транзиту, вона не змінилася... а у тих, хто мав подовжені періоди транзиту, спостерігалася тенденція до прискорення до показника 48 годин. Таким чином, висівки мають тенденцію до модифікації як швидкого, так і повільного транзиту до середнього значення 48 годин».

Це, звичайно ж, саме те, чого і слід очікувати, якщо висівки жодного ефекту не мають. Кажучи делікатно, в усіх нас бувають швидкі дні і повільні дні, незалежно від здоров'я кишківника. І за незвичайно швидким транзитом у понеділок слід чекати ближчого до середнього значення у вівторок — з висівками чи без них*.

А ще є злет і падіння програми «Виховання через залякування». У рамках програми малолітнім правопорушникам влаштовували екскурсії по тюрмах — і в'язні розповідали про жахи, що на них чекають, коли вони негайно не облишать своїх кримінальних звичок. Початкову програму, яка проводилася у тюрмі штату Нью-Джерсі, було висвітлено у документальному фільмі 1978 року, який отримав «Оскара»; через таку популяризацію схожі програми почали організовуватися по всіх Сполучених Штатах і навіть у Норвегії.

Підліткам ці екскурсії дуже подобалися, подобалася участь у цих програмах також наглядачам і в'язням, які вбачали у ній можливість зробити щось корисне для суспільства. Програма «Виховання через залякування» була суголосною з поширеним у суспільстві відчуттям, що причиною злочинності серед неповнолітніх є потурання з боку батьків і громадськості.

Найважливіше те, що «Виховання через залякування» таки працювало. Як повідомлялося, в результаті проведення такої типової програми у Новому Орлеані серед її учасників було зафіксовано менше половини арештів, ніж їх було до програми.

Однак дієвим «Виховання через залякування» насправді не було. Малолітні правопорушники схожі на погані магазини Секріста: вони відбиралися не випадково, а через те, що були найгіршими. Регресія каже нам, що діти, котрі цього року поводяться найгірше, наступного, імовірно, поводитимуться теж погано, *але не так погано, як зараз*. Зниження показника арештів —

* Автори демонструють обізнаність з існуванням регресії: «Хоча це явище могло би бути просто регресією до середнього, ми доходимо висновку, що збільшення споживання грубої їжі справді має фізіологічну дію, уповільнюючи швидкі періоди транзиту і прискорюючи повільний транзит у пацієнтів з дивертикульозом товстої кишки». На чому ґрунтується такий висновок, крім віри у висівки, сказати тяжко.

саме те, чого слід було очікувати, навіть якби «Виховання через залякування» не мало жодного ефекту.

Це не означає, що «Виховання через залякування» було цілковито неефективним. Після перевірки програми методом випадкової вибірки[218] — коли через програму проходить випадково дібрана підгрупа малолітніх правопорушників, а потім порівнюється з рештою дітей, які у програмі участі не брали, — дослідники встановили, що насправді програма робила поведінку *більш антисоціальною*. Напевно, програму слід було назвати «Ошуканство через залякування».

Розділ 15

Еліпс Ґальтона

Ґальтон показав, що регресія до середнього значення спостерігається щоразу, коли на досліджуване явище впливають випадкові чинники. Але наскільки сильні ці чинники, як порівняти із впливом спадковості? Щоб зрозуміти, про що говорять дані, Ґальтон представив їх у графічній формі, більш наочній, ніж стовпчик чисел. «Я почав з розлінованого аркуша паперу[219], на якому накреслив горизонтальну шкалу, щоб позначати зріст синів, і вертикальну шкалу для позначення зросту батьків, — згадував він згодом. — Крім того, я зробив позначки олівцем у тих місцях, які відповідали зросту кожного сина і його батька».

Такий метод візуалізації даних започатковано в аналітичній геометрії Рене Декарта, за якою точки на площині розглядаються як пари чисел, координата x і координата y; тож відтоді й до сьогодні алгебра нерозривно пов'язана з геометрією.

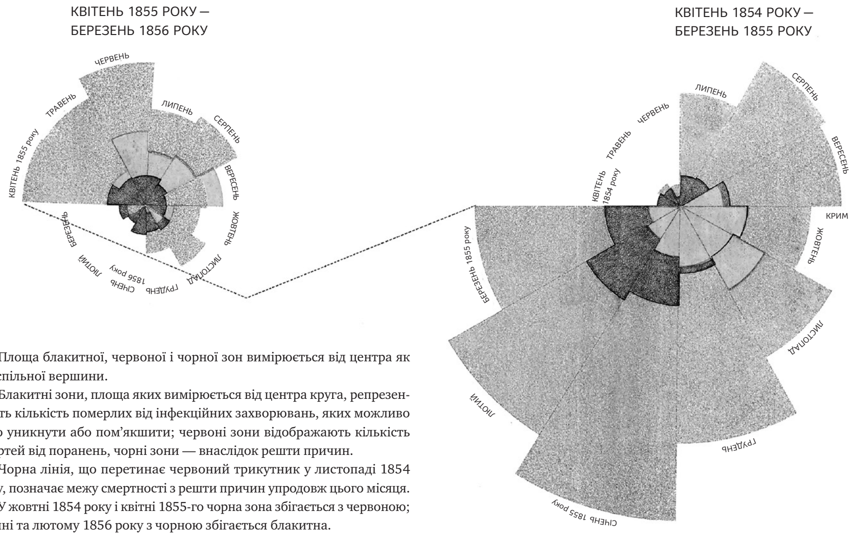
З кожною парою «батько-син» пов'язана пара чисел, а саме — зріст батька і зріст сина. Зріст мого батька 73 дюйми*, як і мій — отже, якби ми потрапили в набір даних Ґальтона, то нас він записав би як (73, 73). І Ґальтон задокументував би наше існування, позначивши на своєму аркуші точку з координатами $x = 73$ і $y = 73$. Кожен син і батько, дані про яких містилися у записах Ґальтона, мали бути позначені на папері, і зрештою аркуш був покритий розсипом точок, що відображали весь діапазон значень зросту. Ґальтон винайшов тип графіка, який ми називаємо *діаграмою розсіювання*. Принаймні він відкрив її ще раз[220]: астроном Джон Гершель побудував щось схоже на діаграму розсіювання 1833 року, щоб вивчати орбіти подвійних зірок. Це, до речі, не той Гершель, який відкрив Уран; то був його батько Вільям Гершель. О, ці видатні англійці та їхні видатні нащадки!

Діаграми розсіювання стають у пригоді, якщо треба продемонструвати зв'язки між двома змінними — тому їх безліч у будь-якому сучасному науковому журналі. Кінець XIX століття був такою собі золотою добою візуалізації

* 1 дюйм дорівнює 2,54 сантиметра. — *Прим. пер.*

даних. 1869 року Шарль Мінар побудував свою відому діаграму, що показувала скорочення армії Наполеона під час походу в Росію, а потім відступу, яку часто називають найвидатнішою графікою даних, що будь-коли з’являлася. Своєю чергою, Мінарова діаграма була наступником діаграми Флоренс Найтінґейл «півнячий гребінь»*, яка наочно засвідчила, що під час Кримської війни більшість британських солдатів було вбито інфекціями, а не росіянами.

ДІАГРАМА ПРИЧИН СМЕРТНОСТІ У ВІЙСЬКУ НА СХОДІ



Площа блакитної, червоної і чорної зон вимірюється від центра як від спільної вершини.

Блакитні зони, площа яких вимірюється від центра круга, репрезентують кількість померлих від інфекційних захворювань, яких можливо було уникнути або пом’якшити; червоні зони відображають кількість смертей від поранень, чорні зони — внаслідок решти причин.

Чорна лінія, що перетинає червоний трикутник у листопаді 1854 року, позначає межу смертності з решти причин упродовж цього місяця.

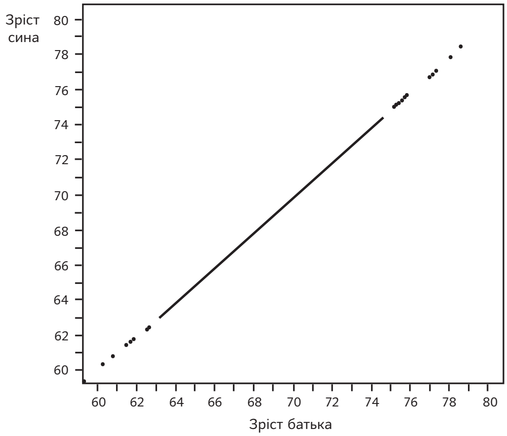
У жовтні 1854 року і квітні 1855-го чорна зона збігається з червоною; у січні та лютому 1856 року з чорною збігається блакитна.

Усі зони можна порівнювати одна з одною за блакитними, червоними і чорними лініями, що їх обмежують.

«Півнячий гребінь» і діаграма розсіювання відповідають нашим когнітивним здібностям: мозку людини до снаги не стовпчики чисел, а пошук даних та інформації у двовимірному полі зору.

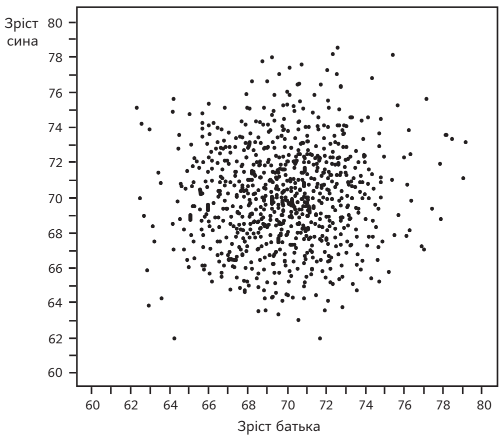
У деяких випадках це просто. Наприклад, припустимо, що кожен син і батько були *однакового* зросту, як ми з батьком. Це та сама ситуація, коли випадок не відіграє жодної ролі, а ваш зріст повністю визначається спадковістю. Тоді всі точки нашої діаграми розсіювання мали б однакові координати x і y; іншими словами, вони були б прив’язані до діагональної лінії, рівняння якої $x = y$:

* Насправді Флоренс Найтінґейл називала *півнячим гребенем* буклет з діаграмою, а не саму діаграму, але до такої назви всі звикли, тож змінювати її було запізно.



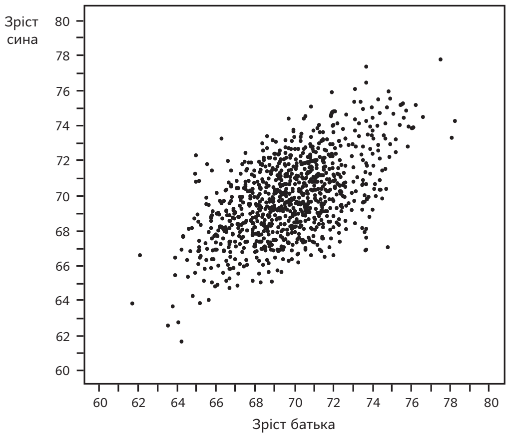
Зауважте, що щільність точок є більшою біля середини і менша при кінцях графіка; це означає, що кількість чоловіків, що мають зріст 69 дюймів, більша за кількість чоловіків зростом 73 і 64 дюйми.

Розгляньмо протилежний випадок: коли зріст синів та батьків жодним чином не пов'язані? У такому разі діаграма розсіювання була б десь такою:

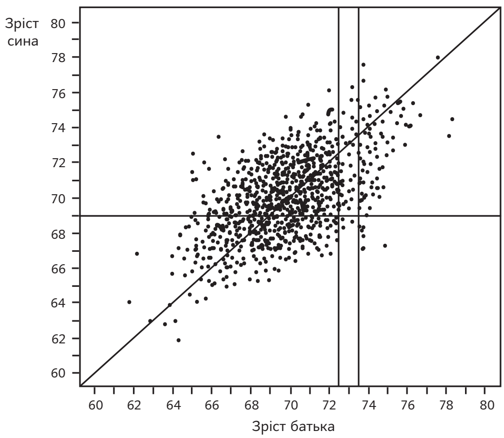


На цьому рисунку, на відміну від попереднього, немає зміщення точок у бік діагоналі. Якщо ви звертатимете увагу тільки на синів, чиї батьки мають зріст 73 дюйми, що відповідає вертикальному зрізу у правій частині діаграми розсіювання, то точки, що позначають зріст синів, як і раніше, концентруються біля позначки 69 дюймів. Ми кажемо, що *умовне математичне очікування* зросту сина (тобто яким у середньому буде зріст сина, якщо зріст батька 73 дюйми) є таким самим, як *безумовне математичне очікування* (середній зріст синів, обчислений без урахування зросту батьків). Ось як виглядав би Ґальтонів аркуш, якби там не було жодних спадкових особливостей, що впливають на зріст. Це інтенсивна регресія до середнього значення; сини високих батьків регресують до середнього зросту, тобто стають не вищими від синів низькорослих батьків.

Однак діаграма розсіювання Ґальтона не схожа на жоден із цих крайніх випадків, це щось середнє між ними:



Де позначено середній зріст сина, чий батько має зріст 73 дюйми? Я виділив вертикальну область, щоб показати вам, які точки на діаграмі розсіювання відповідають цим парам батька і сина.



Кількість дорослих дітей різного віку, народжених від 205 середніх батьків різного зросту (зріст жінок помножено на коефіцієнт 1,08)

Зріст середніх батьків у дюймах	Зріст дорослих дітей														Загальна кількість		
	Нижче	62,2	63,2	64,2	65,2	66,2	67,2	68,2	69,2	70,2	71,2	72,2	73,2	Вище	**Дорослих дітей**	**Середніх батьків**	Медіани
Вище	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	3	–	**4**	**5**	–
72,5	–	–	–	–	–	–	–	1	2	1	2	7	2	4	**19**	**6**	72,2
71,5	–	–	–	–	1	3	4	3	5	10	4	9	2	2	**43**	**11**	69,9
70,5	1	–	1	–	1	1	3	12	18	14	7	4	3	3	**68**	**22**	69,5
69,5	–	–	1	16	4	17	27	20	33	25	20	11	4	5	**183**	**41**	68,9
68,5	1	–	7	11	16	25	31	34	48	21	18	4	3	–	**219**	**49**	68,2
67,5	–	3	5	14	15	36	38	28	38	19	11	4	–	–	**211**	**33**	67,6
66,5	–	3	3	5	2	17	17	14	13	4	–	–	–	–	**78**	**20**	67,2
65,5	1	–	9	5	7	11	11	7	7	5	2	1	–	–	**66**	**12**	66,7
64,5	1	1	4	4	1	5	5	–	2	–	–	–	–	–	**23**	**5**	65,8
Нижче	1	–	2	4	1	2	2	1	1	–	–	–	–	–	**14**	**1**	–
Загальна кількість	5	7	32	59	48	117	138	120	167	99	64	41	17	14	**928**	**205**	–
Медіани	–	–	66,3	67,8	67,9	67,7	67,9	68,3	68,5	69,0	69,0	70,0	–	–	**–**	**–**	–

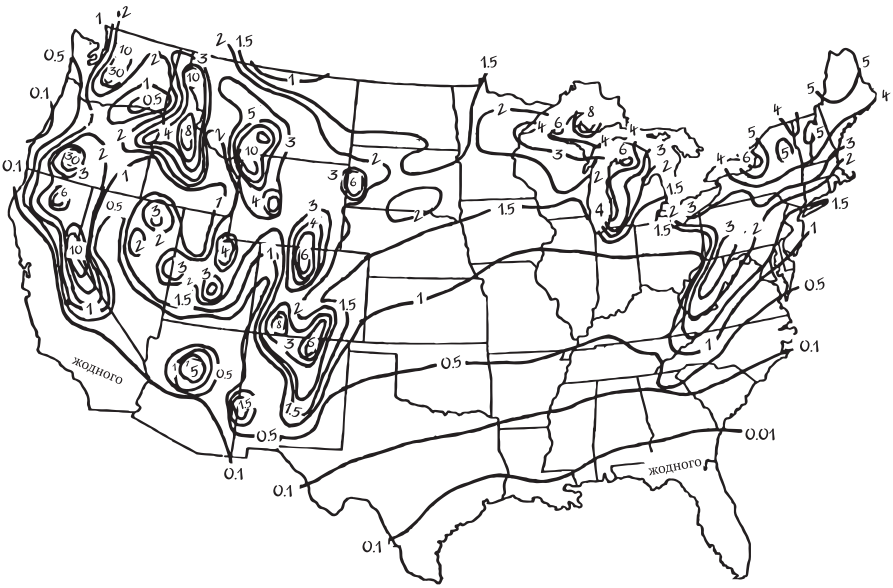
Примітка. При розрахунку медіан враховувалися середні значення показників у відповідних комірках таблиці. У заголовках колонок зазначено числа 62,2, 63,2 і т. ін., оскільки дані спостережень нерівномірно розподілені між показниками 62 і 63, 63 і 64 тощо зі значним зміщенням у бік цілих дюймів. Після ретельного обмірковування, я дійшов висновку, що заголовки колонок у запропонованій формі задовольняють задані умови найкращим можливим чином. У разі зросту середніх батьків така нерівномірність не була очевидною.

Ви бачите, що точки біля області «батько зростом 73 дюйми» більше сконцентровані під діагоналлю, ніж над нею, тож син у середньому нижчий за батька. З іншого боку, вони перевищують 69 дюймів — зріст звичайного чоловіка. У наборі даних, які я позначив на діаграмі, середній зріст цих синів становить трохи менше ніж 72,5 дюйма, тобто це вище від середнього зросту, але вони не такі високі, як їхній батько. Ви бачите *картину* регресії до середнього.

Ґальтон дуже швидко помітив, що його діаграми розсіювання, які відображають взаємодію спадковості і випадковості, мають далеко не випадкову геометричну структуру. Здавалося, що вони більшою чи меншою мірою вписуються в еліпс, центр якого лежав у точці, що позначала батьків і дітей з однаковим середнім зростом.

Цю похилу еліптичну форму чітко видно навіть у початкових даних у наведеній вище таблиці з роботи Ґальтона 1886 року «Регресія до посередності в успадкованому зрості»; погляньте на фігуру, утворену відмінними від нуля числами у цій таблиці. З таблиці стає ясно, що я не все розповів про дані Ґальтона. Наприклад, координата *y* — це не «зріст батька», а «середнє між зростом батька і помноженим на 1,08 зростом матері»[*] (що Ґальтон називає «середнім батьком»).

Насправді Ґальтон зробив більше — він ретельно накреслив на своїй діаграмі розсіювання криві, уздовж яких щільність точок була приблизно постійною. Такі криві називаються *ізоплети,* і ви їх добре знаєте, хоча, можливо, і не за такою химерною назвою. Якщо ми візьмемо карту США і проведемо на ній лінію, що сполучає міста, в яких сьогодні температура становить 20 градусів, 10 градусів або будь-яке інше фіксоване значення, ви отримаєте знайомі криві карти погоди, які називаються *ізотерми*. Справжня карта погоди містить також *ізобари,* що з'єднують місця з однаковим атмосферним тиском, або *ізонефи,* що з'єднують місця з однаковою хмарністю. Якщо ми вимірюємо висоту, а не температуру, то ізоплети — це контурні лінії, які іноді називають ізогіпси, які можна знайти на топографічних картах. Ця карта ізоплет[221] показує середньорічну кількість хуртовин на континентальній частині території США:



* 1,08 використано для того, щоб зробити середній зріст матері приблизно таким самим, як зріст батька, тож зріст чоловіків і жінок вимірюється в одному масштабі.

Ізоплета не була винаходом Ґальтона. Першу карту ізоплет[222] опублікував 1701 року Едмонд Галлей, британський Королівський астроном (востаннє ми його бачили, коли він пояснював королю, як правильно оцінювати ренти*). Мореплавці вже знали, що магнітна північ не завжди збігається з істинною північчю. Розуміння того, де і наскільки вони не збігаються, було критично важливим для успішних океанських мандрівок. Криві на карті Галлея — *ізогони* — показували мандрівникам, де розбіжності між магнітною та істинною північчю були однаковими. Дані ґрунтувалися на вимірюваннях, які виконав Галлей на борту судна «Парамор», що кілька разів перетинало Атлантичний океан під кермою Галлея. (Цей хлопець таки знав, як себе розважити між візитами комети.)

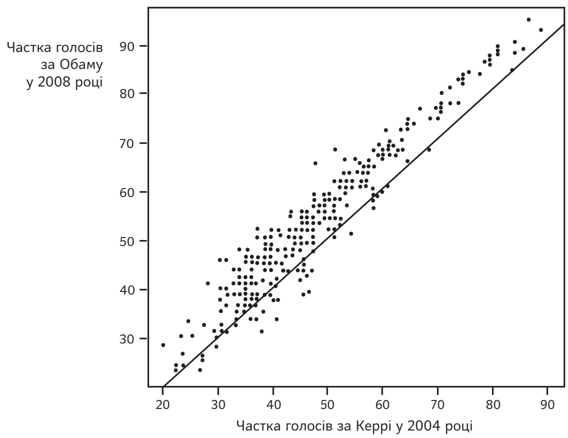
Ґальтон виявив разючу закономірність: його ізоплети були еліпсами, кожен з яких містився всередині наступного, і у всіх них був один центр. Це скидалося на контурну карту ідеально еліптичної гори з вершиною у точці, що найчастіше зустрічалася у вибірці Ґальтона, — їй відповідали два значення зросту: середній зріст обох батьків і дітей. Гора — це не що інше, як тривимірний варіант «шолому жандарма», який вивчав де Муавр; сьогодні ми застосовуємо термін «двовимірний нормальний розподіл».

Коли зріст синів жодним чином не пов’язаний зі зростом батьків, як на другій діаграмі розсіювання, усі еліпси Ґальтона — круги, а діаграма розсіювання теж приблизно кругла. Коли зріст синів повністю визначається спад-

* Ізоплети сягають ще давніших часів. Першими відомими нам ізоплетами були ізобати (криві однакової глибини), нанесені на карти річок і гаваней ще до 1584 року. Проте Галлей, здається, винайшов цей спосіб самостійно і популяризував його.

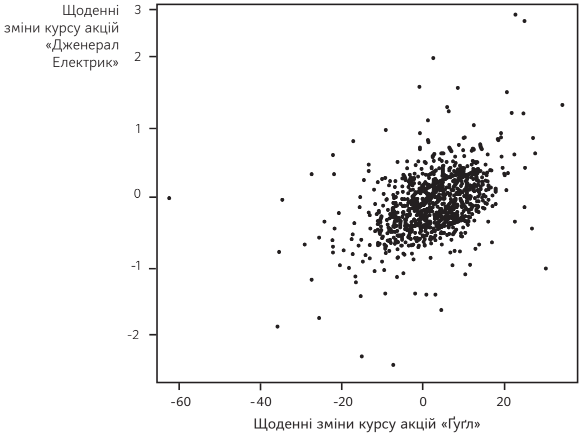
ковістю, без випадкової складової, як на першій діаграмі розсіювання, дані розташовані вздовж прямої лінії, яку можна вважати еліпсом, причому максимально витягнутим. Між цими двома крайніми випадками ми маємо еліпси різної витягнутості, яку класичні геометри називали *ексцентриситетом* еліпса. Ексцентриситет відображає, наскільки зріст батька визначає зріст сина. Високий ексцентриситет означає, що спостерігається потужний спадковий чинник, а регресія до середнього значення слабка; низький ексцентриситет означає протилежне: панує регресія до середнього. Ґальтон назвав це *кореляцією,* і цей термін ми досі використовуємо. Якщо еліпс Ґальтона майже круглий, то кореляція є близькою до 0; якщо еліпс витягнутий з північного сходу на південний захід, кореляція близька до 1. За допомогою ексцентриситету — геометричної величини, що є принаймні такою давньою, як праця Аполлонія з Перги, III ст. до н. е., — Ґальтон знайшов спосіб вимірювати зв'язок між двома змінними і тим самим розв'язав найнагальнішу проблему біології XIX століття — кількісного аналізу спадковості.

Переконаний скептик може запитати: а якщо діаграма розсіювання *не схожа* на еліпс? Що тоді? Є прагматична відповідь: на практиці діаграми розсіювання реальних множин даних часто розподіляються у формі еліпса. Не завжди, але досить часто, щоб можна було цей метод широко застосовувати. Ось як це виглядає, якщо ви хочете відобразити частку виборців, які проголосували за Джона Керрі 2004 року, проти тих, що проголосували за Барака Обаму 2008 року. Кожна точка репрезентує один виборчий округ:

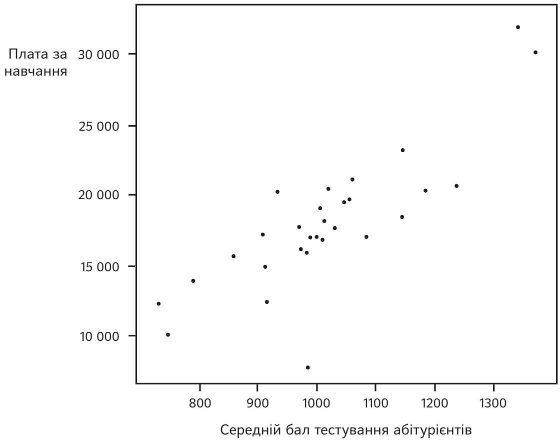


Це точно еліпс, причому дуже витягнутий; частка виборців, які голосували за Керрі, сильно корелює з часткою тих, хто голосував за Обаму. Більшість точок зосереджені *над* діагоналлю, що відбиває той факт, що загалом за Обаму проголосувало більше, ніж за Керрі.

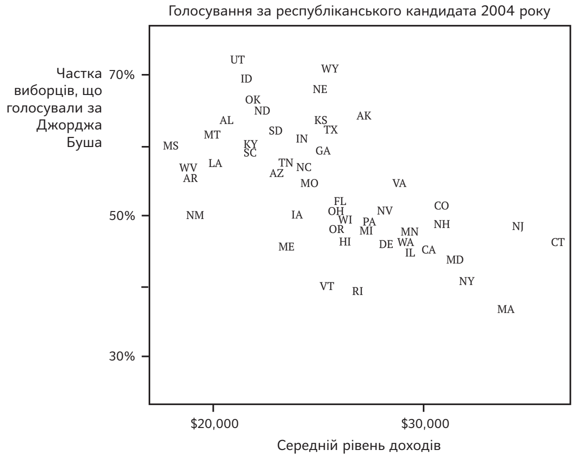
А ось діаграма щоденних змін курсів акцій «Ґуґл» і «Дженерал Електрик» за кілька років:



Ось малюнок, який ми вже бачили, де продемонстровано залежність між середнім балом тестування абітурієнтів і вартістю навчання у коледжах штату Північна Кароліна:



А ось 50 штатів США[223], розташованих на діаграмі розсіювання за даними про середній дохід і частку виборців, що голосували за Джорджа Буша на президентських виборах 2004 року: багаті ліберальні штати, як-от Коннектикут, — у нижній правій частині діаграми, а республіканські штати зі скромнішими доходами, такі як Айдахо, — у верхній лівій частині.



Ці дані зібрано з найрізноманітніших джерел, проте всі чотири діаграми розсіювання мають приблизно таку саму еліптичну форму, як і ті, що відображають зріст батьків і дітей. У перших трьох випадках кореляція позитивна: збільшення однієї змінної пов’язано зі збільшенням іншої, а еліпс витягнутий з північного сходу на південний захід. На останньому рисунку кореляція негативна: загалом багатші штати схильні до підтримки демократів, а еліпс спрямований з північного заходу на південний схід.

Незбагненна ефективність класичної геометрії

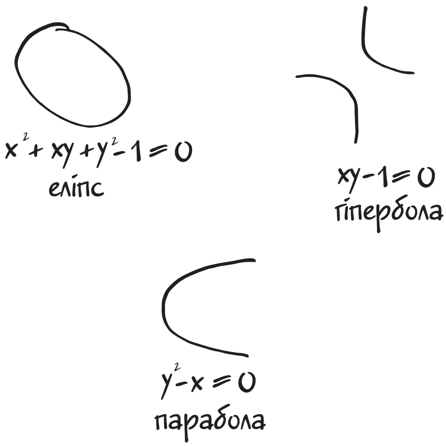
Для Аполлонія і давньогрецьких геометрів еліпси були конічними перерізами, тобто поверхнями, отриманими перетином конуса площиною. Кеплер показав (хоча астрономічній спільноті знадобилося кілька десятиліть, щоб зрозуміти це), що планети рухаються по еліптичних орбітах, а не по колу, як вважали раніше. Тепер та сама крива виникає як природна форма, що охоплює відношення зросту батьків і дітей. Чому? Річ не в тому, що існує прихований конус, який керує спадковістю і в разі перетину під певним кутом дає еліпси Ґальтона. Не можна сказати, що якась форма генетичного тяжіння забезпечує появу еліпсів на діаграмах Ґальтона через закони механіки Ньютона.

Відповідь криється в одній фундаментальній властивості математики — у певному сенсі саме ця властивість зробила математику неймовірно корисною для вчених. У математиці є дуже багато складних об’єктів, а простих — лише кілька. Тож якщо перед вами задача, розв’язання якої допускає простий математичний опис, то *для розв’язання є лише кілька можливостей*. Таким чином, найпростіші математичні об’єкти — всюди, вони виконують численні функції у вирішенні різноманітних наукових завдань.

Найпростіші лінії — прямі. Прямі лінії в природі є скрізь, від граней кристалів до траєкторії рухомих тіл (якщо відсутня сила, яка на них діє). *Наступні* найпростіші лінії — ті, що описуються квадратними рівняннями[*], в яких одна на одну множаться не більш як дві змінні. Отже, піднесення змінної до квадрата або множення двох різних змінних допускається, але піднесення до куба чи множення однієї змінної на квадрат іншої суворо заборонено. Лінії у цьому класі, зокрема й еліпси, досі — шануючи історію, — називають конічними перерізами, однак далекоглядні фахівці з алгебраїчної геометрії називають їх квадриками. Існує безліч квадратних рівнянь, кожне з них має таку форму:

$$A x^2 + B xy + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

для деяких значень сталих A, B, C, D, E і F. (Охочий читач може перевірити, що інші типи алгебраїчних виразів неприпустимі — за умови виконання нашої вимоги про те, що дозволено множити дві, але не три змінні). Скидається на те, що варіантів багато — нескінченно багато! Однак, виявляється, ці квадрики поділяються на три основні категорії: еліпси, параболи і гіперболи[**]. Ось як вони виглядають:



У розв'язанні наукових задач ми знову і знову натрапляємо на ці три криві: це не тільки орбіти планет, а й оптимальна конструкція вигнутих дзеркал, траєкторія снарядів, форма веселки.

* Можна також навести як приклад криві експоненціального зростання і спаду, так само повсюдні, як і конічні перерізи.

** Насправді існує ще кілька, як-от лінія, представлена рівнянням $xy = 0$, що являє собою пару прямих, які перетинаються в точці (0, 0). Вони вважаються «виродженими», і про них ми тут не говоритимемо.

І навіть за межами науки. Мій колега Майкл Гарріс, видатний фахівець з теорії чисел з Інституту математики Жюсьє в Парижі, має теорію, що зміст трьох головних романів Томаса Пінчона[224] визначається трьома конічними перерізами: «Веселка тяжіння» — про параболу (всі ці ракети, що запускаються і падають!); «Мейсон і Діксон» — про еліпс; «На день мого похорону» — про гіперболу. Гадаю, це добра теорія, як і всі інші теорії про організаційні принципи цих романів, на які я натрапляв; звісно, Пінчон, який колись студіював фізику, полюбляє згадувати у своїх романах про стрічку Мебіуса і кватерніони, тож він дуже добре знає, що таке конічні перерізи.

Ґальтон помітив, що криві, які він малював від руки, схожі на еліпси, але він не знав так добре геометрії, щоб бути цілком певним, що це саме та крива, а не якась інша більш-менш овальна фігура. Чи не дозволяє він своєму прагненню до красивої та універсальної теорії вплинути на сприйняття зібраних даних? Він був би не першим і не останнім ученим, що припустився такої помилки. Як завжди обачний, Ґальтон звернувся по пораду до Дж. Д. Гамільтона Діксона, математика з Кембриджського університету. Він пішов навіть на те, щоб приховати походження своїх даних, і представив усе як задачу в царині фізики, щоб не схилити Діксона до якогось певного висновку. На радість Ґальтона, Діксон швидко підтвердив, що еліпс не просто крива, побудована на основі зібраних даних, а крива, якої вимагає теорія.

«Задача, мабуть, не була складною для досвідченого математика[225], — писав Ґальтон, — але я, звісно, ніколи не зустрічав такої щирої прихильності й поваги до незалежності й безмежного впливу математичного аналізу, як тоді, коли прийшла його відповідь, що підтвердила чисто математичними міркуваннями мої різноманітні й кропіткі статистичні висновки з більшою ретельністю, ніж я смів сподіватися, тому що дані були дещо попередніми, і я мусив обережно їх позагладжувати».

Бертильйонаж

Ґальтон швидко зрозумів, що ідея кореляції не обмежується вивченням спадковості; вона застосовна до будь-якої пари якось пов'язаних характеристик.

Вийшло так, що Ґальтон мав величезну базу даних анатомічних параметрів, які стали дуже популярними в кінці XIX століття завдяки праці Альфонса Бертильйона. Бертильйон, французький кримінолог, був з Ґальтоном одного духу: людське життя він розглядав із суто кількісного погляду і був переконаний у перевагах такого підходу*. Зокрема, Бертильйона вразило те, як

* Попри захоплення даними, Бертильйон дискредитував себе у найбільшій справі, до якої він коли-небудь був причетний. Він допоміг засудити Альфреда Дрейфуса за зраду, надавши

безсистемно й безладно французька поліція виявляла підозрюваних у злочині. Набагато кращим і сучаснішим, міркував Бертильйон, було б пов'язати кожного зарізяку у Франції з низкою кількісних показників, як-от довжина і ширина голови, довжина пальців і стоп тощо. За системою Бертильйона, кожного затриманого підозрюваного мали обміряти, його дані записати на картки і зберігати для майбутнього використання. Тепер, якщо ту саму людину знову затримали, ідентифікувати її було простісінькою справою: взяти кронциркуль, виконати вимірювання і порівняти їх із записами на картці. «Ага, пане 15-6-56-42, то ви гадали що? що втекли? А дзуськи!» Ім'я можна взяти інше, та з формою голови нічого не вдієш.

Система Бертильйона, суголосна аналітичному духові свого часу, була прийнята паризькою префектурою поліції 1883 року і швидко поширилася по всьому світу. Бертильйонаж застосовували в поліцейських відділках у Бухаресті й Буенос-Айресі. «Картотека Бертильйона, — писав Реймонд Фосдік 1915 року, — стала відмітною рисою сучасної організації поліції». Свого часу у Сполучених Штатах ця практика стала такою поширеною і безперечною, що суддя Ентоні Кеннеді послався на неї в рішенні у справі 2013 року «Штат Мериленд проти Кінґа», що дозволяло штатам брати зразки ДНК в арештованих: на думку Кеннеді, послідовність ДНК — це просто ще одна послідовність даних, прив'язаних до підозрюваного, така собі картка Бертильйона XXI століття.

Ґальтона цікавило, наскільки оптимальним є вибір Бертильйона. Чи можна точніше ідентифікувати підозрюваних, якщо зробити більше вимірювань? Ґальтон зрозумів: проблема в тому, що фізичні параметри не є повністю незалежними. Якщо ви виміряли руки підозрюваного, чи справді ще треба вимірювати і його стопи? Ви знаєте, що кажуть про людей з великими руками: їхні стопи, за статистикою, також є більшими від середнього розміру. Отже, включення довжини стопи не додає інформації на картці Бертильйона, як того можна було сподіватися. Додавання щораз більшої кількості вимірювань, якщо вони погано дібрані, може зрештою знизити загальний ефект.

Щоб вивчити це явище, Ґальтон побудував ще одну діаграму розсіювання — порівняння зросту з «ліктем»[226], відстанню від ліктя до кінчика середнього пальця. Як же був здивований Ґальтон, побачивши той самий еліпс, що з'являвся при порівнянні зросту батьків і синів. Укотре він наочно продемонстрував, що дві змінні, зріст і лікоть, *корелюють*, хоча й не визначають суворо одна одної. Якщо існує висока кореляція між двома вимірами (як-от

підроблений «геометричний доказ», нібито лист, у якому пропонувалося продати французькі військові документи, був написаний почерком Дрейфуса. Детально про цей випадок і невдалу участь Бертильйона у справі Дрейфуса див. у книжці «Математика перед судом».

довжина лівої і правої стоп), немає сенсу витрачати час на запис обох чисел. Найкраще реєструвати ті виміри, які не корелюють один з одним. І відповідні дані можна було знайти у величезному масиві антропометричних даних, які вже зібрав Ґальтон.

Вийшло так, що відкриття Ґальтоном кореляції не спричинилося до створення значно удосконаленої системи Бертильйона. І сталося так через самого Ґальтона, який обстоював альтернативну систему — дактилоскопію, зняття відбитків пальців. Як і система Бертильйона, дактилоскопія зводила підозрюваного до списку чисел або символів, які можна було позначити на картці, відсортувати й долучити до справи. Однак відбитки пальців мали очевидні переваги — найперше те, що відбитки пальців злочинця часто можна було отримати навіть тоді, коли сам злочинець недоступний. Це яскраво продемонструвала справа Вінченцо Перуджі, котрий 1911 року викрав «Мону Лізу» з Лувру. Перуджу вже раніше арештовували в Парижі, але його сумлінно заповнена картка Бертильйона, внесена в картотеку відповідно до результатів вимірювання, користі не принесла. Якби в цих картках була дактилоскопічна інформація, то відбиток пальця Перуджі, залишений на викинутій рамі «Мони Лізи», відразу допоміг би його ідентифікувати*.

Відступ: кореляція, інформація, компресія, Бетховен

Я трохи збрехав про систему Бертильйона. Він записував не точне числове значення кожної фізичної характеристики, а тільки те, якою була ця величина — малою, середньою чи великою. Вимірюючи довжину пальця, ви ділите злочинців на три групи: з короткими, середніми й довгими пальцями. Потім, коли вимірюєте лікті, теж ділите кожну з цих трьох груп на три підгрупи, тож злочинці тепер поділені на дев'ять груп. Виконання всіх п'яти вимірювань, передбачених базовою системою Бертильйона, ділить злочинців на

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$$

групи; і для кожної з цих 243 груп є сім варіантів кольору очей і волосся. Так зрештою Бертильйон поділяв підозрюваних на 1701 ($3^5 \times 7$) крихітну категорію. Після того як ви заарештуєте понад 1701 особу, деякі категорії неминуче міститимуть більш ніж одного підозрюваного. Проте кількість людей

* Принаймні саме так розповідає про цю подію Фосдік у статті «Кінець системи ідентифікації Бертильйона». Як і кожен знаменитий злочин минулого, викрадення «Мони Лізи» оповите численними чутками, аж до теорії змови; інші джерела розповідають інші історії про роль відбитків пальців.

у якійсь одній категорії, скоріш за все, буде доволі невеликою — досить малою, щоб жандарм зміг легко перебрати всі картки і знайти фотографію, що збігається із хлопцем у ланцюгах, котрий перед ним сидить. А якби ви додали ще більше параметрів, потроївши кількість категорій, ви зробили б категорії такими маленькими, що не знайшли б двох злочинців — точніше, двох французів — з однаковим кодом Бертильйона.

Цей спритний трюк дозволяє відстежувати таку складну річ, як людське тіло, за допомогою короткого рядка символів. І цей трюк застосовний не лише до людської зовнішності. Аналогічна система, код Парсонса*, використовується для класифікації музичних мелодій. Ось як це працює. Візьмімо мелодію, яку ми всі знаємо, наприклад «Оду до радості» Бетховена, величний фінал Дев'ятої симфонії. Позначимо першу ноту символом *. А кожну наступну ноту позначатимемо одним з трьох символів: **u** — якщо ця нота вища за попередню, **d** — якщо нижча, **r** — якщо нота повторює попередню. Перші дві ноти «Оди до радості» однакові, тому починаємо з ***r**. Далі вища нота, а за нею ще вища: ***ruu**. Потім ви повторюєте вищу ноту, а далі йде чотири щораз нижчих: тобто всю початкову частину записуємо як такий код: ***ruurdddd**.

Ви не зможете відтворити звучання бетховенського шедевра за кодом Парсонса, як не намалюєте портрета грабіжника банку за даними картотеки Бертильйона[227]. Утім якщо у вас велика картотека музичних творів, складена за кодом Парсонса, рядок символів легко ідентифікує будь-яку мелодію. Якщо, наприклад, ви наспівуєте «Оду до радості», але не можете згадати, що це за твір, зайдіть на сайт, як-от «Музипедія», і введіть рядок символів ***ruurdddd**. Цього короткого рядка вистачить, щоб з-поміж безлічі мелодій знайти «Оду до радості» або Концерт № 12 для фортепіано з оркестром Моцарта. Якщо ви насвистуєте сімнадцять нот, то отримуєте

$$3^{16} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 43\,046\,721$$

різних кодів Парсонса. Це набагато більше від кількості мелодій, будь-коли записаних, тож малоймовірно, що дві пісні матимуть однаковий код. Додаючи новий символ, ви щоразу потроюєте кількість кодів — однак завдяки диву експоненціального зростання коротенький код забезпечує надзвичайну можливість розрізнити дві пісні.

Утім є проблема. Повернімося до Бертильйона: а якщо у двох чолов'яг, що опинилися у відділку, лікті у тій самій категорії, що й пальці? Тоді те, що ви-

* Читачам певного віку може бути приємно дізнатися, що Парсонс, автор коду Парсонса, — це батько Алана Парсонса, який написав «Око в небі» (Eye in the Sky).

глядає як дев’ять варіантів по перших двох вимірах, є лише трьома: короткий палець / короткий лікоть, палець середньої довжини / лікоть середньої довжини, довгий палець / довгий лікоть. У підсумку — дві третини шухляд у картотеці Бертильйона порожні. Загальна кількість категорій насправді не 1701, а 567, що відповідно зменшує наші шанси відрізнити одного злочинця від іншого. Поміркуємо ще й так: ми думали, що маємо п’ять вимірів, але, оскільки лікоть передає таку саму інформацію, що й палець, ми враховуємо тільки чотири. Тому кількість можливих карток скорочується з $7 \times 3^5 = 1701$ до $7 \times 3^4 = 567$ (7 — це варіанти з кольором очей і волосся). Що тісніший зв’язок між вимірами, то менша кількість категорій і то менш ефективна система Бертильйона.

Велика прозорливість Ґальтона полягала в тому, що таке відбувається, навіть якщо довжина пальця і довжина ліктя не *ідентичні*, а й просто у тому разі, коли вони *корелюють*. Кореляції між цими вимірами роблять код Бертильйона менш інформативним. Ґальтонова мудрість сприяла інтелектуальному передбаченню. Те, що він осягнув тоді, було зародковою формою міркувань, які аж через півстоліття повністю формалізує Клод Шеннон у теорії інформації. Як ми бачили в розділі 13, формальний спосіб вимірювання інформації Шеннона міг надати оцінки того, як швидко біти проходитимуть по каналу з шумом. Дуже подібним способом теорія Шеннона дозволяє з’ясувати, наскільки кореляція між змінними знижує інформативність картки. Сучасною мовою ми б сказали: що вища кореляція між вимірами, то менше інформації, по Шеннону, передає картка Бертильйона.

Бертильйонаж нині не використовується, однак провідною залишається ідея про те, що найкраще відстежувати ідентичність за послідовністю чисел. Ми живемо у світі цифрової інформації, і розуміння того, що кореляція скорочує корисний обсяг інформації, стала основним організаційним принципом. Фотографія, яка раніше була забарвленими плямами на аркуші паперу з хімічним покриттям, зараз є рядком чисел, кожне з яких позначає яскравість і колір пікселя. Фото, зняте за допомогою 4-мегапіксельної камери, — це список із чотирьох мільйонів чисел, тож такий пристрій повинен мати чималу пам’ять. Але числа тісно пов’язані одне з одним. Якщо один піксель яскраво-зелений, то наступний піксель, швидше за все, буде таким самим. Фактична інформація, що міститься в зображенні, набагато менша за чотири мільйони чисел — і саме це уможливлює *стиснення** — критично важливу математичну технологію, яка дозволяє зберігати фотографії, відео, музику та текст у набагато меншому обсязі, ніж ви могли б подумати. Наявність коре-

* Гаразд, насправді це не просто питання кореляції між парами пікселів. І все ж таки тут справді відіграє певну роль обсяг інформації (у сенсі Шеннона), що передається зображенням.

ляції робить можливим стиснення. Насправді це пов'язано з використанням значно більшої кількості сучасних ідей, таких як теорія вейвлетів, яку розробили у 1970–1980-х роках Жан Морлі, Стефан Малла, Ів Меєр, Інґрід Добеші та інші, а також інноваційної сфери «стислі вимірювання», яка розпочалася з праці 2005 року Еммануеля Канде, Джастіна Ромберґа і Террі Тао і швидко стала підгалуззю прикладної математики.

Тріумф посередності у погоді

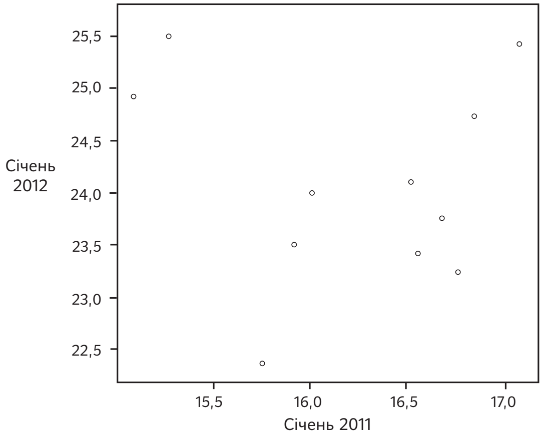
Є одна нитка, яку ми мусимо розплутати. Ми вже бачили, як регресія до середнього пояснює «тріумф посередності», знайдений Секрістом. А що скажете з приводу тріумфу посередності, якого Секріст не помітив? Відстежуючи температуру повітря в містах США, Секріст виявив, що міста, де було найспекотніше 1922 року, були серед тих, що потерпали від спеки і в 1931 році. Це спостереження має вирішальне значення для його аргументації на користь того, що регресія комерційних підприємств пов'язана саме з людиною. Якщо регресія до середнього значення — це універсальне явище, то чому цього не відбувається з температурами?

Відповідь проста: відбувається.

У поданій нижче таблиці наведено середню січневу температуру в градусах Фаренгейта на 13 метеорологічних станціях у південній частині штату Вісконсин (з однієї до іншої можна доїхати десь за годину).

Місто	**Січень 2011 року**	**Січень 2012 року**
Клінтон	15,9	23,5
Коттедж Ґроув	15,2	24,8
Форт Аткінсон	16,5	24,2
Джефферсон	16,5	23,4
Лейк Мілз	16,7	24,4
Лодай	15,3	23,3
Медісон, аеропорт	16,8	25,5
Медісон, дендропарк	16,6	24,7
Медісон, Чармані	17,0	23,8
Мазомані	16,6	25,3
Портидж	15,7	23,8
Річленд Сентер	16,0	22,5
Стоутон	16,9	23,9

Побудувавши діаграму розсіювання цих температур методом Ґальтона, ви побачите, що в цілому в містах, де було тепліше 2011 року, зазвичай було тепліше і 2012-го.

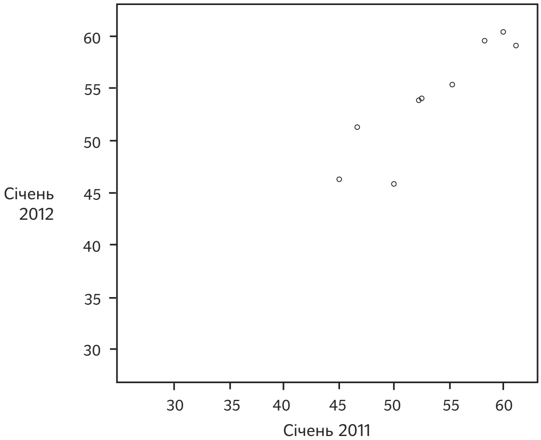


Однак три метеостанції, де 2011 року була найвища температура (Чармані, аеропорт Медісона і Стоутон), опинилися на першому, сьомому і восьмому місцях за рівнем температури 2012 року. Водночас на трьох метеостанціях, де 2011 року було найхолодніше (Коттедж Ґроув, Лодай і Портидж), 2012-го стало дещо тепліше: Портидж був на четвертому місці серед станцій з найнижчою температурою, Лодай — другим, а у Коттедж Ґроув 2012 року було тепліше, ніж у всіх інших містах. Інакше кажучи, як «найспекотніші», так і «найхолодніші» групи змістилися до середини рейтингів, як і господарчі крамниці Секріста.

Чому Секріст не побачив цього ефекту? Тому що він вибирав свої метеостанції інакше. Його міста не обмежувалися невеликим шматком верхнього Середнього Заходу, а були розосереджені набагато ширше. Припустимо, ми розглядаємо січневі температури в Каліфорнії, а не у Вісконсині:

Місто	**Січень 2011 року**	**Січень 2012 року**
Юрика	48,5	46,6
Фресно	46,6	49,3
Лос-Анджелес	59,2	59,4
Ріверсайд	57,8	58,9
Сан-Дієґо	60,1	58,2
Сан-Франциско	51,7	51,6
Сан-Хосе	51,2	51,4
Сан-Луїс-Обіспо	54,5	54,4
Стоктон	45,2	46,7
Тракі	27,1	30,2

Жодної регресії немає. Холодні місця, такі як Тракі в горах Сьєрра-Невада, і далі холодні, а у спекотних місцях, таких як Сан-Дієґо і Лос-Анджелес, і далі жарко. Діаграма набуває зовсім іншого вигляду:



Ґальтонівський еліпс навколо цих десяти точок був би дуже вузьким. Відмінності у таблиці між значеннями температури відображають той факт, що деякі місця в Каліфорнії просто холодніші за інші, і основні відмінності між містами поглинають випадкові коливання температури в різні роки. Мовою Шеннона ми б сказали, що багато сигналу і не так багато шуму. Для міст південного та центрального Вісконсина складається протилежна ситуація. Якщо брати до уваги клімат, міста Мазомані й Форт Аткінсон не надто відрізняються. У будь-який окремий рік рівень температури в цих містах значною мірою визначається випадком. Тут багато шуму і не так уже й багато сигналу.

Секріст вважав, що регресія, яку він так ретельно задокументував, — це новий закон бізнесової фізики, який додасть визначеності та строгості в наукове дослідження комерції. А вийшло все навпаки. Якби бізнес скидався на каліфорнійські міста — деякі справді успішні, а деякі ні, що відбиває властиві їм особливості ведення бізнесу, — ви б побачили відповідно меншу регресію до середнього. Що справді кажуть висновки Секріста, то це те, що компанії швидше подібні на міста у штаті Вісконсин. Чудове управління і розуміння бізнесу відіграють певну роль — таку саму, як і проста випадковість.

Євгеніка, первородний гріх і оманлива назва цієї книжки

У книжці, що має назву «Як ніколи не помилятися», було б трохи дивним писати про Ґальтона, не сказавши про те, за що його найбільше пам'ятають нематематики: теорію євгеніки, батьком якої його зазвичай називають. Якщо, як я стверджую в цій книжці, увага до математичної складової життя дозволяє уникати помилок, як міг такий розсудний у математичних питаннях вчений, як Ґальтон, так сильно помилятися з приводу переваг виведення людей з бажаними властивостями? Ґальтон вважав свої думки з цього питання поміркованими і розумними, але сучасну людину вони шокують:

> Як і в більшості інших випадків появи нових теорій[228], цікавою є затятість супротивників євгеніки у своїх помилках. Сьогодні найпоширеніше хибне уявлення полягає в тому, що методи євгеніки передбачають створення примусових шлюбів, як у разі виведення тварин. Це не так. Я вважаю, що суворий примус слід застосовувати для запобігання вільного розмноження божевільних, недоумків, схильних до скоєння злочинів і украй бідних, але про примусовий шлюб тут не йдеться. Питання про те, як стримувати загрозливі шлюби, залишається відкритим — чи слід це робити шляхом ізоляції, чи іншими способами, які ще не випрацювані, — однак вони мають бути гуманними і відповідати поглядам обізнаної громадськості. Не сумніваюсь, що наша демократія зрештою відмовиться потурати вільному розмноженню, яке нині дозволене небажаним класам, проте народу слід пояснити справжній стан речей. Демократія не зможе встояти, якщо вона не складатиметься зі спроможних громадян; тож з метою самозахисту вона має протистояти вільному відтворенню виродженців.

Що тут скажеш? Математика — це спосіб не помилятися, але не спосіб уникнути *всіх* помилок. (Вибачте, гроші не повертаються!) Ми помиляємося, і це як первородний гріх: з ним ми народжені, і він завжди залишається з нами, тому потрібна постійна пильність, якщо ми не хочемо потерпати від помилок. Існує реальна небезпека того, що, удосконалюючи свою здатність використовувати математичні методи для аналізу деяких питань, ми посилюємо впевненість у своїх переконаннях, невиправдано поширюючи її і на те, в чому ми таки помиляємося. Ми починаємо скидатися на тих побожних людей, які так переконані у своїй доброчесності, що змушують нас повірити, нібито їхні погані вчинки теж благочестиві.

Я роблю все можливе, щоб не піддатися цій спокусі. Але не втрачайте пильності зі мною.

Пригоди Карла Пірсона в десятому вимірі

Важко переоцінити вплив розробленої Ґальтоном теорії кореляції на концептуальний світ, у якому ми живемо, — не тільки у статистиці, а й у всіх наукових галузях. Якщо ви знаєте про *кореляцію* лише одну річ, то це те, що кореляція не передбачає причиново-наслідкового зв'язку. Ґальтон вважав, що два явища можуть корелювати, навіть якщо одне не веде до виникнення іншого. Саме по собі це не було новиною. Люди, звісно, розуміли, що рідні брати і сестри мають спільні фізичні характеристики частіше за інші пари людей, але це не тому, що сестри стають високими, бо на них впливають високі брати. Але десь на задньому плані причиново-наслідковий зв'язок таки є: високі батьки, чия генетика посприяла високому зросту обох дітей. У світі після Ґальтона ми можемо говорити про зв'язок між двома змінними, при цьому заперечуючи наявність будь-якого конкретного причиново-наслідкового зв'язку, прямого чи непрямого. Така собі концептуальна революція, породжена Ґальтоном, має дещо спільне з ідеями його відомішого двоюрідного брата, Чарльза Дарвіна. Дарвін показав, що можна змістовно обговорювати прогрес, не посилаючись на мету. Ґальтон показав, що можна змістовно обговорювати зв'язок між явищами, не посилаючись на першопричину.

Початкове визначення кореляції Ґальтона було дещо обмеженим — воно поширювалося тільки на ті змінні, розподіл значень яких підкоряється закону дзвоноподібної кривої (нормального розподілу), як ми бачили в розділі 4. Однак цю ідею швидко адаптував і узагальнив Карл Пірсон*, щоб її можна було застосовувати до будь-яких змінних.

Якби я зараз записав формулу Пірсона або якби ви пішли її шукати, то побачили б купу квадратних коренів і коефіцієнтів, які мало що вам би прояснили (хіба що ви знаєтеся на декартовій геометрії). Насправді ж формула Пірсона має дуже простий геометричний опис. Починаючи з Декарта, математики насолоджуються чудовою можливістю вільно переміщатися між алгебраїчним і геометричним описами світу. Перевага алгебри полягає в тому, що її легше формалізувати і ввести в комп'ютер. Перевага геометрії в тому, що вона дозволяє нам прилаштувати свою фізичну інтуїцію до ситуації, особливо коли ви можете намалювати малюнок. Я рідко відчуваю, що *справді* розумію те чи те математичне явище, поки не дізнаюся, що це означає мовою геометрії.

Тож що таке кореляція для геометра? Краще розглянемо це на прикладі. Подивіться ще раз на таблиці, де наведено дані про середню січневу температуру в десяти містах Каліфорнії у 2011–2012 роках. Як ми вже бачили, показники за 2011 і 2012 рік демонструють сильну позитивну кореляцію. За формулою Пірсона, значення кореляції дуже високе — аж 0,989.

Якщо ми хочемо вивчити зв'язок між показниками температури за два різних роки, ми без жодних наслідків можемо змінити кожен елемент таблиці на одну й ту саму величину. Якщо температура за 2011 рік корелює з температурою за 2012 рік, то вона корелюватиме і з показниками «температура за 2012 рік + 5 градусів». Скажемо інакше: якщо взяти точки на згаданій діаграмі й перемістити їх на п'ять сантиметрів угору, це не змінить форми еліпса Ґальтона — лише його розташування. Виявляється, корисно змінити значення

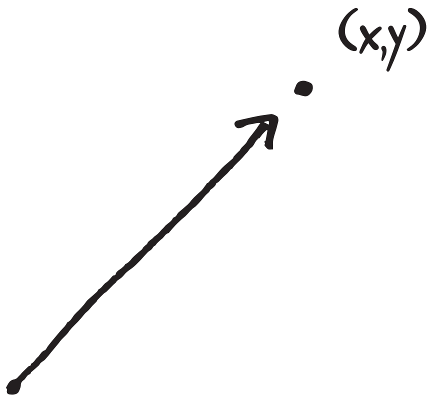
* Батько Еґона Пірсона, про ворожнечу якого з Р. Е. Фішером йшлося раніше.

температури на однакову величину так, щоб середнє значення дорівнювало *нулю* як 2011-го, так і 2012 року. Зробивши це, отримуємо десь таку таблицю:

Місто	**Січень 2011 року**	**Січень 2012 року**
Юрика	−1,7	−4,1
Фресно	−3,6	−1,4
Лос-Анджелес	9,0	8,7
Ріверсайд	7,6	8,2
Сан-Дієґо	9,9	7,5
Сан-Франциско	1,5	0,9
Сан-Хосе	1,0	0,7
Сан-Луїс-Обіспо	4,3	3,7
Стоктон	−5,0	−4,0
Тракі	−23,1	−20,5

Від'ємні числа у таблиці відповідають холодним містам, таким як Тракі, а додатні — містам з помірнішим кліматом, як-от Сан-Дієґо.

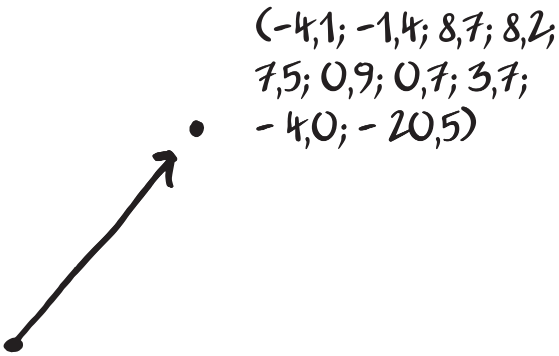
Тепер такий трюк. Стовпчик з десятьма числами, що відповідають температурі січня 2011 року, — це список чисел. Але це також і *точка*. Як це? Усе бере початок з нашого героя Декарта. Ви можете представити пару чисел (x, y) як точку на площині, яка знаходиться на x одиниць вправо та y одиниць угору від початку координат. Ми можемо намалювати маленьку стрілку, що вказує від початку координат до нашої точки (x, y); ця стрілка називається вектор.



Точно так само точку у тривимірному просторі описуємо за допомогою трьох координат (x, y, z). І ніщо, крім звички і боягузтва, не завадить нам просуватися далі. Групу з чотирьох координат можна розглядати як точку в чотиривимірному просторі, а група з десяти чисел, як-от каліфорнійська температура в нашій таблиці, є точкою у десятивимірному просторі. А ще краще — уявіть, що це десятивимірний вектор.

Стривайте, ви можете підставово запитати: а як же я маю це уявляти? Як виглядає десятивимірний вектор?

Виглядає він так:

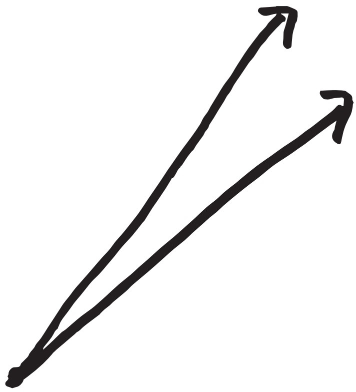


Оце вам брудна таємничка просунутої геометрії. Можливо, вражає те, що ми можемо оперувати з геометрією у десяти вимірах (чи ста, чи мільйоні...), але образи в нашій уяві є двовимірними або щонайбільше тривимірними. Це все, з чим наш мозок здатен впоратися. На щастя, здебільшого такого біднуватого бачення вистачає.

Високорозмірна геометрія може видатися доволі загадковою, тим більше світ, у якому ми живемо, тривимірний (або чотиривимірний, якщо ви враховуєте час, або, може, двадцятишестивимірний, якщо ви якийсь фахівець з теорії струн — та навіть тоді ви думаєте, що Всесвіт не виходить далеко за межі цих вимірювань). Навіщо ж вивчати геометрію, не реалізовану у Всесвіті?

Одну відповідь шукайте у вивченні даних, яке сьогодні дуже популярне. Пам'ятаєте цифрову фотографію, зроблену чотиримегапіксельною камерою? Її опис — це чотири мільйони чисел, по одному на кожен піксель. (І це ще без урахування кольору!) Отже, таке зображення — вектор з розмірністю 4 мільйони; або, якщо хочете, точка в 4-мільйонновимірному просторі. Зображення, яке змінюється із часом, представлено точкою, що *рухається* у 4-мільйонновимірному просторі і креслить лінію в 4-мільйонновимірному просторі. Ви, не підозрюючи того, вже робите обчислення у 4-мільйонновимірному просторі. І ось тепер може початися справжнє свято.

Повернімося до температури. У нашій таблиці два стовпчики чисел, кожний з яких можна представити у вигляді десятивимірного вектора. Виглядають вони так:



Вектори вказують приблизно в одному і тому ж напрямку, і це засвідчує той факт, що два стовпчики чисел не надто відрізняються. Як ми вже бачили, у містах з найнижчою температурою 2011 року було так само холодно 2012-го, те саме стосується міст з вищою температурою.

А це і є формула Пірсона мовою геометрії. Кореляція між цими двома змінними визначається *кутом* між двома векторами. Якщо хочете представити це в тригонометричній формі, то кореляція буде косинусом кута. Байдуже, чи ви пам'ятаєте, що таке косинус; ви маєте знати тільки те, що косинус кута дорівнює 1, якщо кут дорівнює 0 (тобто коли вектори вказують в одному напрямку), і −1, якщо кут дорівнює 180 градусів (вектори вказують у протилежних напрямках). Між двома змінними спостерігається позитивна кореляція, коли відповідні вектори утворюють гострий кут, тобто кут менший за 90 градусів, і негативна кореляція — якщо кут тупий, тобто кут між векторами більший за 90 градусів. Це має сенс: вектори, розташовані під гострим кутом один до одного, у якомусь «вільному» сенсі «дивляться в одному напрямку», тоді як вектори, які утворюють тупий кут, нібито мають протилежні цілі.

Якщо кут між векторами *прямий*, тобто не гострий і не тупий, кореляція між двома змінними дорівнює нулю, тобто ці змінні не пов'язані одна з одною (принаймні коли йдеться про кореляцію). У геометрії пара векторів, що утворюють прямий кут, називаються перпендикулярними, або ортогональними. Серед математиків та інших прихильників тригонометрії широко використовується слово «ортогональний», щоб послатися на щось, що не пов'язане з розглядуваною проблемою: «Ви можете припустити, що математичні здібності пов'язані з величезною популярністю, але, судячи з мого досвіду, ці дві якості ортогональні». Поступово таке вживання слова переходить з гіківського жаргону до загальновживаної лексики. Як-от під час недавніх дебатів у Верховному суді[229]:

Пан Фрідман. Я гадаю, це питання цілком ортогональне питанню, що тут розглядається, оскільки Співдружність визнає…

Голова Суду Робертс. Перепрошую. Цілком що?

Пан Фрідман. Ортогональне. Прямий кут. Не має стосунку. Не має значення.

Голова Суду Робертс. Ох.

Суддя Скаліа. Що то за прикметник? Мені подобається.

Пан Фрідман. Ортогональний.

Суддя Скаліа. Ортогональний?

Пан Фрідман. Правильно, правильно.

Суддя Скаліа. О-ох!

(Сміх.)

Я за те, щоб слово *ортогональний* прижилося. Уже давно математичні терміни ввійшли до повсякденного вжитку. *Найменший спільний знаменник* сьогодні майже втратив свій математичний зміст, а *експоненційно*[*]… — я краще не буду про *експоненційно*.

Застосування тригонометрії до високорозмірних векторів з метою кількісного представлення кореляції — трохи не те, що мали на увазі творці косинуса. Нікейський астроном Гіппарх, що склав перші тригонометричні таблиці в II столітті до нашої ери, намагався розрахувати проміжок часу між затемненнями. Він мав справу з векторами, які описували небесні тіла і були однозначно тривимірними. Однак математичний інструмент, яким послуговуються для однієї мети, зазвичай виявляється корисним знову і знову.

Геометричне розуміння кореляції оприявнює деякі аспекти статистики, які в іншому разі були б незрозумілими. Розглянемо випадок заможного представника еліти з ліберальними поглядами. Протягом якогось часу цей пан з дещо заплямованою репутацією був відомим у політикумі персонажем. Мабуть, найвідданішим літописцем цієї спільноти був Девід Брукс, що присвятив цілу книжку соціальній групі, яку він називає богемною буржуазією, або ж бобо. 2001 року, розглядаючи відмінності між багатим приміським округом Монтґомері, штат Меріленд (моя батьківщина!), і округом Франклін, штат Пенсильванія, населеним переважно представниками середнього класу, він припустив, що традиційна політична стратифікація за економічними класами — тобто Республіканська партія відстоює інтереси товстосумів, а демократи — трудящих, — сильно застаріла.

---

* Хоча, можливо, не варто надто ремствувати з приводу неправильного вживання слова *експоненційний* замість «швидкий» — недавно я бачив, як один спортивний журналіст, якого, поза сумнівом, якось вилаяли за надуживання словом «експоненційний», написав про «дивовижне логарифмічне зростання швидкості» спринтера Усейна Болта, — що ще гірше.

> Як і елітні райони скрізь по всій країні[230], від Кремнієвої долини до чиказького передмістя Нос Шор і коннектикутських приміських районів, округ Монтґомері минулого року на президентських виборах підтримав передвиборчу програму Демократичної партії — 63 % проти 34 %. Тим часом округ Франклін проголосував за Республіканську партію у співвідношенні 67 % проти 30 %.

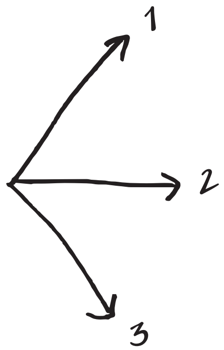
По-перше, оце «скрізь» — трохи перебільшення. У найбагатшому окрузі у Вісконсині, Ваукеші, розташованому в розкішних західних передмістях Мілуокі, Буш розгромив Ґора з рахунком 65 на 31, тоді як Ґор з невеликим відривом переміг у штаті в цілому.

Однак Брукс звертає увагу на реальне явище, яке ми чітко бачили на діаграмі розсіювання, наведеній раніше. На сучасному електоральному ландшафті США багаті штати голосують за демократів частіше, ніж бідні. Міссісіпі й Оклахома — це цитадель Республіканської партії, тоді як у штатах Нью-Йорк і Каліфорнія республіканці навіть не намагаються боротися за перемогу. Іншими словами, проживання в багатому штаті позитивно корелює з голосуванням за демократів.

Утім статистик Ендрю Ґельман з'ясував[231], що ситуація складніша, ніж створений Бруксом портрет нової породи лібералів, що попивають лате, їздять на «пріусах», мають великі вишукано опоряджені будинки й сумки грошей. Багаті люди, як і раніше, частіше голосують за республіканців, ніж бідні, — і таке ми бачимо вже протягом десятиліть. Ґельман і його колеги, копаючи все глибше, проаналізували дані по різних штатах та округах і виявили дуже цікаву особливість. У деяких штатах, таких як Техас і Вісконсин[232], багатші округи зазвичай голосують за республіканців. В інших штатах, таких як Меріленд, Каліфорнія і Нью-Йорк, багаті округи схильні підтримувати демократів. У цих останніх штатах живуть багато політиків. У цьому обмеженому світі багатих районів *дійсно* мешкає багато лібералів, тому для них природно переносити цей досвід на решту округу. Природно, але, якщо ви подивитеся на загальні результати, явно неправильно.

Здається, тут є певний парадокс. Між заможністю і проживанням у багатому штаті майже за визначенням існує позитивна кореляція. А проживання в багатому штаті позитивно корелює з голосуванням за демократів. Хіба це не означає, що багатство *має бути пов'язаним* з голосуванням за демократів? Тепер геометричними засобами: якщо вектор 1 утворює гострий кут з вектором 2, а вектор 2 утворює гострий кут з вектором 3, хіба не має вектор 1 знаходитися під гострим кутом до вектора 3?

Ні! Доведення — на малюнку:



Деякі зв'язки, як-от «більше ніж», є *транзитивними*: якщо моя вага більша за вагу мого сина, а син важить більше від моєї дочки, тоді (я абсолютно впевнений) моя вага більша за вагу дочки. «Живе в тому самому місті, що й» — теж транзитивний зв'язок: якщо я живу в тому самому місті, що й Білл, який живе в тому самому місті, що й Боб, то я живу в тому самому місті, що й Боб.

Кореляція не є транзитивною. Вона швидше нагадує кровну спорідненість: я родич свого сина, який є родичем моєї дружини, але ми з дружиною не є кровними родичами. Тож це не така жахлива ідея — уявляти собі корельовані змінні як величини, що мають «спільну ланку ДНК». Припустимо, я керую невеликою компанією з управління активами, у якій всього три інвестори: Лора, Сара і Тім. Їх біржові позиції доволі прості: фонд Лори розділений між акціями компаній «Фейсбук» і «Ґуґл» 50 на 50, у Тіма половина акцій «Дженерал Моторс» і половина акцій «Хонди», а Сара, підтримуючи рівновагу між старою і новою економікою, має половину акцій «Хонди» і половину акцій «Фейсбуку». Очевидно, що між рентабельністю інвестицій Лори і Сари є позитивна кореляція; у них спільна половина інвестиційного портфеля. Існує також сильна кореляція між рентабельністю інвестицій Сари і Тіма. Однак немає жодних причин думати, що фінансові результати фондів Тіма і Лори* якось пов'язані. Ці два фонди як батьки: кожен з них вносить свою половину «генетичного матеріалу» у формування гібридного фонду Сари.

Нетранзитивність кореляції очевидна і загадкова водночас. У прикладі зі взаємним фондом ви ніколи не подумаєте, що підвищення прибутковості фонду Тіма дає багато інформації про те, як справи у Лори. Однак в інших сферах наша інтуїція працює не так добре. Візьмімо, наприклад, так званий добрий холестерин, тобто холестерин, що переноситься в крові ліпопротеїдами високої щільності. Багато десятиліть відомо, що високий рівень ЛПВЩ у крові пов'язаний з нижчим ризиком серцево-судинних нападів. Для тих, хто

* Звісно, за винятком того випадку, коли увесь фондовий ринок поводиться більш-менш суголосно.

не володіє медичною термінологією: люди з високим рівнем доброго холестерину мають менше шансів померти від серцевого нападу.

Ми також знаємо, що деякі медичні препарати гарантовано підвищують рівень ЛПВЩ. Один з таких популярних препаратів — ніацин, різновид вітаміну B. Якщо ніацин підвищує рівень ЛПВЩ, а вищий рівень ЛПВЩ пов'язаний зі зниженням ризику серцево-судинних нападів, то прийом ніацину видається розумною ідеєю — саме тому мій лікар рекомендує його мені, як, імовірно, рекомендує вам ваш лікар, якщо тільки ви не підліток, не учасник марафону і не член якоїсь іншої групи людей з «привілейованим» метаболізмом.

Проблема в тому, що неясно, чи справді це працює. Під час клінічних випробувань невеликого масштабу ніацин справді продемонстрував непогані результати. Однак великомасштабне дослідження, яке проводив Національний інститут хвороб серця, легенів і крові, було припинено 2011 року[233], за півтора року до планованого закінчення, оскільки результати були такими слабкими, що продовжувати дослідження не було сенсу. У пацієнтів, які отримували ніацин, рівень ЛПВЩ справді зріс, однак у них було стільки ж випадків інфарктів та інсультів, скільки й у всіх інших учасників дослідження. Як таке може бути? Річ у тім, що кореляція не транзитивна. Існує кореляція між ніацином і високим рівнем ЛПВЩ, а також кореляція між високим рівнем ЛПВЩ і низьким ризиком гострих серцево-судинних захворювань, проте це не означає, що ніацин запобігає серцевим нападам.

Це не означає, що регулювання рівня холестерину ЛПВЩ — тупик. Кожен лікарський препарат має свою специфіку, і клінічно важливо, *наскільки* ви підвищуєте рівень ЛПВЩ. Повернімося до інвестиційної компанії: ми знаємо, що існує кореляція між показниками рентабельності інвестицій Тіма і Сари, тому можна спробувати підвищити прибуток Сари, вживши заходів, спрямованих на поліпшення ситуації в Тіма. Якби ваш підхід полягав у тому, щоб дати позірно оптимістичну пораду, аби підняти ціну акцій «Дженерал Моторс», то виявилося б, що ви поліпшили результати Тіма, тоді як Сара не отримала вигоди. Але якби ви зробили те саме з «Хондою», то показники і Тіма, і Сари зросли б.

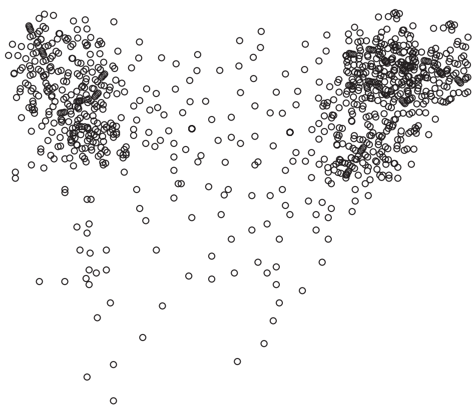
Якби кореляція була транзитивною, проводити медичні дослідження було б набагато легше, ніж це є насправді. Десятиліття спостережень і збору даних забезпечили нам багато кореляцій для подальшої роботи. Якби транзитивність була, лікарі мали б просто все об'єднати і створити надійні методи втручання. Ми знаємо, що існує кореляція між високим рівнем естрогену у жінок і зниженням ризику серцево-судинних захворювань, і ми знаємо, що замісна гормональна терапія може підвищити цей рівень; тому можна очікувати, що замісна гормональна терапія захистить від серцево-судинних захворювань. І це був традиційний загальновизнаний підхід. Але правда, як ви, мабуть, чули, набагато складніша. На початку 2000-х років Ініціатива з охорони здоров'я жінок провела тривале дослідження, що включало масштабні рандомізовані клінічні випробування. Було встановлено, що замісна гормональна терапія естрогеном і прогестином фактично *підвищила* ризик[234] серцево-судинних захворювань в учасників дослідження. Пізніші результати показали, що ефект замісної гормональної терапії може бути різним у різних групах жінок, або що естроген може бути кращим для вашого серця[235], ніж естроген-прогестин тощо.

У реальному світі майже неможливо передбачити, який вплив матимуть ліки на хворобу, навіть якщо ви знаєте, як вони впливають на такі біомаркери, як рівень холестерину або естрогену. Людське тіло — надзвичайно складна система, і є лише кілька його властивостей, які можна виміряти, не кажучи вже про те, щоб ними керувати. З огляду на кореляції, які ми можемо спостерігати, є безліч ліків, які можуть мати бажаний вплив на здоров'я людини. Тому ці препарати досліджують, але здебільшого очікування не справджуються. Щоб займатися розробкою лікарських препаратів, необхідно мати стійку психіку, не кажучи вже про великі гроші.

Відсутність кореляції не означає відсутності зв'язку

Якщо існує кореляція між двома змінними, вони якимось чином пов'язані одна з одною. А якщо кореляції немає? Чи означає це, що змінні ніяк не пов'язані одна з одною і жодна з них не впливає на іншу? Далеко не так. Кореляція в розумінні Ґальтона обмежена в дуже важливому значенні: вона виявляє лінійні зв'язки між змінними, коли збільшення однієї змінної збігається з пропорційним збільшенням (або зменшенням) іншої. Але так само, як не всі лінії прямі, не всі відношення є лінійними.

Візьмімо такий приклад:



Ви дивитеся на малюнок, на якому я відобразив результати опитування, проведеного компанією «Паблік Полісі Поллінґ» 15 грудня 2011 року. Тут тисяча точок, кожна з яких представляє виборця, що відповів на двадцять три запитання анкети. Якщо точка розташована на правій або лівій осі, це означає, що виборець дотримується правих чи лівих поглядів: ті, які заявили, що підтримують президента Обаму, схвалюють діяльність Демократичної партії і виступають проти Партії чаювання, знаходяться на лівому боці діаграми, тоді як ті, що підтримують Республіканську партію, не люблять Гаррі Рейда і вважають, що «Війна з Різдвом» відійшла в минуле, знаходяться праворуч. Вертикальна вісь приблизно відповідає рівню поінформованості: виборці з нижньої частини діаграми найчастіше відповідали «не знаю» на запитання типу «Ви схвалюєте чи не схвалюєте роботу Мітча Макконнелла?», а також майже не переймалися президентськими виборами 2012 року.

Можна переконатися, що немає кореляції* між змінними, представленими двома осями, це наочно видно на діаграмі. Мірою переміщення вгору по сторінці точки не відхиляються істотно ні ліворуч, ні праворуч. Але це не означає, що дві змінні не пов’язані одна з одною. Цей зв’язок очевидний з малюнка. Діаграма «у формі серця» з виступами по обидва боки і точкою внизу. З підвищенням поінформованості виборці не стають більшими прихильниками демократів чи республіканців, але вони дедалі більше *поляризуються*: люди лівих поглядів відхиляються ще більше вліво, прихильники правого крила — ще більше вправо, а область з малою щільністю точок стає ще менше заповненою. Менш поінформовані виборці, точки яких розташовані в нижній частині графіка, схильні до більш центристської позиції. Діаграма відображає позбавлення суспільства від ілюзій — соціальний факт, який сьогодні часто згадується в книжках з політології. Як правило, виборці не визначилися не тому, що вони ретельно зважують чесноти кожного кандидата, не маючи при цьому твердих політичних переконань. Вони не визначилися з тієї простої причини, що на вибори майже не звертають уваги.

Математичний інструмент, як і кожен науковий інструмент, одні явища виявляє, а інші — ні. Обчислення кореляції може виявити серцеподібність (кардіоморфізм?) цієї діаграми розсіювання не більше, ніж ваш фотоапарат — гамма-випромінювання. Пам’ятайте про це, коли вам скажуть, що два явища в природі або в суспільстві виявилися некорельованими. Це не означає, що зв’язку немає. Немає лише зв’язку того типу, для виявлення якого призначена ця кореляція.

* Технічне зауваження для небайдужих: насправді це двовимірна проекція, отримана методом аналізу головних компонентів даних опитування, а значить, відсутність кореляції двох осей є автоматичною. Інтерпретацію осей виконав я сам. Цей приклад призначено виключно для ілюстрації властивостей кореляції, і його в жодному разі не слід сприймати як соціологію!

Розділ 16

Чи змушує вас рак легенів курити?

А якщо дві змінні таки *корелюють*? Що це насправді означає? Щоб спростити завдання, почнімо з найпростішого типу змінної — бінарної змінної, що набуває тільки двох значень. Часто бінарна змінна є відповіддю на питання, що передбачає відповідь «так» або «ні»: «Ви одружені?», «Ви курите?», «Чи є ви зараз або були коли-небудь раніше членом Комуністичної партії?»

Коли ви порівнюєте дві бінарні змінні, кореляція набуває особливо простої форми. Наприклад, сказати, що існує негативна кореляція між сімейним статусом і статусом курця, — це те саме, що сказати: сімейні люди курять з меншою часткою ймовірності, ніж середня людина. Інакше кажучи, курці одружуються з меншою часткою ймовірності, ніж середня людина. Варто витратити трохи часу, щоб переконатися, що це одне і те саме! Перше твердження можна записати у вигляді нерівності:

одружені курці / усі одружені люди < усі курці / усі люди,

а друге як:

одружені курці / усі курці < усі одружені люди / усі люди.

Якщо помножити обидві сторони кожної нерівності на спільний знаменник (усі люди) × (усі курці), ви побачите, що ці два твердження є різними способами сказати те саме:

(одружені курці) × (усі люди) < (усі курці) × (усі одружені люди).

Точно так само, якби між курінням і одруженням існувала *позитивна* кореляція, це означало б, що одружені люди були б курцями з більшою ймовірністю, ніж середня людина, а курці з більшою ймовірністю були б одруженими порівняно із середньою людиною.

Одразу постає одна проблема. Звісно, дуже мало шансів, що частка курців серед сімейних людей *точно така сама*, що й частка курців серед усього населення. Тож за відсутності неймовірного збігу сімейний статус і куріння будуть корелювати — позитивно або негативно. Те саме можна сказати про сексуальну орієнтацію і куріння, про громадянство США і куріння, про першу-літеру-імені-в-другій-половині-алфавіту і куріння тощо. Кореляція з курінням буде виявлена *скрізь*, хоч в одному, а хоч в іншому напрямку. Це та сама проблема, з якою ми зіткнулися в розділі 7: нульова гіпотеза, строго кажучи, майже завжди хибна.

Опустити руки і сказати: «Усе корелює з усім!» буде вкрай неінформативним. Тому ми не повідомляємо про всі ці кореляції. Коли ви прочитаєте повідомлення, що існує кореляція між однією подією та іншою, вам неявно кажуть, що кореляція «досить сильна», щоб про це можна було повідомити — зазвичай тому, що вона пройшла перевірку статистичної значущості. Як ми бачили, перевірка статистичної значущості таїть у собі чимало небезпек, але це принаймні сигнал, що змушує статистика сісти, звернути увагу і сказати: «Щось тут відбувається».

Але що саме? Тут ми підійшли до дійсно непростого питання. Існує негативна кореляція між шлюбом і курінням, це факт. Типовим способом висловити цей факт, це сказати:

«Якщо ви курець, то є менше шансів на те, що ви одружені».

Але через одну маленьку зміну значення стає цілком іншим:

«Якби ви курили, то мали б менше шансів бути одруженим».

Дивним здається те, що зміна дійсного способу на умовний може так сильно змінити зміст висловлювання. Перше речення — це просто констатація факту. Друге стосується набагато тоншого питання: *що було б*, якби ми змінили щось у світі? Перше речення виражає кореляцію; друге передбачає причиновість. Як ми вже відзначали, це не одне й те саме. Математичне визначення кореляції значною мірою сформувалося після публікації робіт Ґальтона і Пірсона, ще сто років тому. Однак утвердити ідею причиновості на твердому математичному ґрунті було набагато тяжче*.

У нашому розумінні кореляції і причиновості є щось нестійке і підступне. Інтуїція часом допомагає вам вловити їх суть за одних обставин, але не спро-

* Утім, подивіться праці Джуди Перла з Каліфорнійського університету в Лос-Анджелесі; дослідження цього науковця — одна з найбільш значущих сучасних спроб вирішити проблему формалізації причиновості.

можна за інших. Кажучи, що існує кореляція між ЛПВЩ і зниженням ризику серцево-судинних захворювань, фактично ми заявляємо: «Якщо у вас вищий рівень холестерину ЛПВЩ, ви маєте меншу ймовірність серцевого нападу». Важко не вважати, що ЛПВЩ щось *робить* — що молекули, про які йдеться, буквально спричиняються до поліпшення здоров'я серцево-судинної системи, скажімо, «зскрібаючи» ліпідні відкладення зі стінок судин. Якби це було так — якби просто наявність великої кількості ЛПВЩ приносила вам користь, — тоді було б логічно очікувати, що будь-яке втручання з метою підвищення рівня ЛПВЩ скорочує ризик серцевого нападу.

Може бути, що кореляція між ЛПВЩ і серцевими нападами зумовлена іншою причиною. Скажімо, якийсь інший чинник, який ми не виміряли, призводить і до підвищення ЛПВЩ, і до зниження ризику серцево-судинних ускладнень. Якщо це так, тоді препарат, що підвищує рівень ЛПВЩ, зможе або не зможе запобігти серцевим нападам. Якщо цей препарат впливає на ЛПВЩ за допомогою цього загадкового чинника, тоді він, мабуть, допоможе вашому серцю, але, якщо він якось підвищує рівень ЛПВЩ, тоді ситуація непередбачувана. Те саме з Тімом і Сарою. Їхні фінансові результати корелюють, але не тому, що фонд Тіма сприяє підвищенню курсу акцій Сари, чи навпаки. Існує якийсь загадковий фактор, акції «Хонди», який впливає і на Тіма, і на Сару. Клінічні дослідники називають це проблемою *сурогатної кінцевої точки*. Щоб перевірити, чи подовжує препарат середню тривалість життя, потрібно багато часу і грошей — для визначення тривалості життя людини довелося б дочекатися її смерті. Рівень ЛПВЩ — це і є сурогатна кінцева точка, біомаркер, що надається до перевірки і має витримувати «довге життя без серцевих нападів». Але кореляція між ЛПВЩ і відсутністю серцевих нападів може не вказувати на жоден причиново-наслідковий зв'язок.

Розділити кореляцію, зумовлену причиново-наслідковими зв'язками, і ту, в якій таких зв'язків немає, неймовірно важко, навіть у випадках, які здаються очевидними, як-от взаємозв'язок між раком легенів і курінням[236]. На межі XX століття рак легенів був украй рідкісним захворюванням. Але вже до 1947 року п'ята частина смертей від раку серед британських чоловіків припадала на рак легенів. Він вбивав у п'ятнадцять разів більше людей, ніж кілька десятиліть тому. Спочатку багато дослідників вважали, що рак легенів просто почали діагностувати краще, ніж раніше, проте незабаром стало ясно, що кількість випадків цього захворювання зростає занадто сильно і занадто швидко, щоб можна було пояснити це удосконаленням діагностики. Рак легенів поширювався дедалі стрімкіше. Однак причини ніхто не знав напевно. Може, так сталося через дим заводів, а може, через підвищений рівень вихлопних газів або ж якусь речовину, яку навіть не вважали небезпечною.

А може, причиною стало куріння сигарет, які стали різко популярними в той самий період.

На початку 1950-х років великі дослідження в Англії та Америці показали наявність сильної залежності між курінням сигарет і раком легенів. Серед некурців і раніше рак рідко траплявся, але для курців ризик був набагато вищим. У знаменитій статті Долла і Гілла[237] 1950 року йшлося про те, що із 649 чоловіків, хворих на рак легенів, з двадцяти лондонських клінік тільки двоє не курили. Це не так вражає, як здається за сучасними стандартами. У середині століття в Лондоні куріння було надзвичайно поширеною звичкою, а некурців було набагато менше, ніж зараз. Попри це в групі із 649 пацієнтів чоловічої статі, які мали проблеми зі здоров'ям, що не стосувалися раку легенів, було двадцять сім некурців, тобто набагато більше від двох. Крім того, зв'язок був то сильнішим, що більше люди курили. 168 пацієнтів, хворих на рак легенів, викурювали понад 25 сигарет на день, тоді як серед хворих, госпіталізованих з інших причин, так багато курили тільки 86 пацієнтів.

Дані Долла і Гілла свідчили, що рак легенів і куріння *корелюють*; зв'язок між ними не був строго детермінованим (деякі завзяті курці не хворіють на рак легенів, а деякі некурці — хворіють), але ці два явища не були незалежними. Зв'язок між ними належав до тієї невизначеної проміжної зони, яку вперше виявили Ґальтон і Пірсон.

Просте твердження про наявність кореляції істотно відрізняється від пояснення. Дослідження Долла і Гілла не показує, що куріння викликає рак; як вони пишуть, «цей зв'язок мав би місце, якби рак легенів був причиною куріння або якби обидві властивості були наслідком спільної причини». Думка про те, що рак легенів викликає схильність до куріння, як пишуть дослідники, абсурдна. Пухлина не може повернутися назад у часі й виробити в когось звичку викурювати щодня пачку сигарет. Тривожнішою є проблема спільної причини.

Наш давній приятель Р. Е. Фішер, засновник сучасної статистики, вельми скептично ставився до думки про існування зв'язку між курінням і раком саме на таких підставах. Фішер був справжнім інтелектуальним наступником Ґальтона і Пірсона. 1933 року він змінив Пірсона на посаді керівника кафедри євгеніки Ґальтона при Університетському коледжі Лондона (щоб не образити нічиїх почуттів, ця установа нині називається кафедрою генетики Ґальтона).

Фішер вважав, що зарано відмовлятися від теорії, що рак викликає куріння:

> Чи можливо тоді, що рак легенів[238], тобто передраковий стан, який має існувати і, як відомо, існує у тих, у кого згодом розвивається явний рак легенів, — це одна з причин куріння? Не думаю, що таке можна виключати. Я не вважаю, що ми знаємо досить для того, щоб стверджувати, ніби причина саме в цьому. Проте передраковий стан — це стан, за якого спостерігається легке

> хронічне запалення. Причини куріння сигарет можна визначити якоюсь мірою серед ваших друзів. Я думаю, ви погодитеся, що навіть невеликий привід для роздратування — легке розчарування, несподівана затримка, відмова, порушення планів — часто веде до того, що вони дістають сигарету і так отримують невелику компенсацію за дрібні негаразди. Отже, людина з якимось хронічним запаленням в одній з частин тіла (щось, що не супроводжується болем) швидше курить, ніж не курить, або курить частіше, ніж зазвичай. Це така собі підтримка, яка може стати справжньою розрадою для того, хто через п'ятнадцять років може захворіти на рак легенів. І забрати у цього бідолахи сигарети — все одно, що забрати палицю у сліпого. Це зробило б і без того нещасну людину ще нещаснішою.

Тут бачимо мудру і тверду вимогу статистика з приводу того, щоб були належно розглянуті всі можливі варіанти, в тому числі пристрасть курців до цієї звички протягом усього життя. (Дехто запідозрив у цьому вплив роботи Фішера консультантом британської галузевої групи «Постійний комітет виробників тютюну»; як на мене, небажання Фішера підтверджувати наявність причиново-наслідкового зв'язку відповідало його загальному статистичному підходу). Припущення Фішера, що чоловіки, які брали участь в дослідженні Долла і Гілла, почали палити під впливом передракового запалення, так і не прижилося. Проте його аргумент на користь існування спільної причини мав поширення. Фішер, як йому і належало за академічною посадою, був вірним євгеністом; він вважав, що нашу життєздатність визначають генетичні особливості, а також що видатним людям у ці поблажливі з погляду еволюції часи загрожує серйозна небезпека змішання з тими, хто є нижчим за своєю природою. Фішер вважав, що було б цілком природно допустити, що є спільний генетичний фактор, поки що не з'ясований, який відповідає і за рак легенів, і за звичку курити. Це досить ризиковане припущення. Але пам'ятайте, що у той час припущення про рак легенів як наслідок куріння спиралося на не менш таємничу основу. Здатність хімічних складових тютюну викликати рак у лабораторних умовах тоді ще не було доведено.

Існує один простий спосіб перевірити вплив генетики на куріння за допомогою вивчення близнюків. Вважаємо, що між близнюками є «збіг», якщо вони або обидва курці, або обидва ні. Можна припустити, що такий збіг буде досить поширеним, оскільки близнюки зазвичай ростуть в одному будинку, з тими самими батьками, у тих самих культурних умовах — і ми це справді бачимо. Це справедливо і для однояйцевих, і для різнояйцевих близнюків. Тож якщо збіг між однояйцевими близнятами буває частіше, ніж між двояйцевими, це свідчить про певний вплив генетичних факторів на звичку курити. Фішер поділився результатами невеликих досліджень, які ще не публікувалися, а пізніша робота підтвердила його інтуїтивне припущення[239]: куріння, ймовірно, зумовлюється низкою спадкових чинників.

Це, звісно, не означає, що ті самі гени спричиняються і до раку легенів. Сьогодні ми знаємо набагато більше про рак та про те, як на нього впливає тютюн. Твердження, що куріння викликає рак, уже не є дискусійним. Проте важко не ставитися з деяким співчуттям до підходу Фішера, який закликав не поспішати робити висновки. Це *правильно* — ставитися до кореляцій з підозрою. Епідеміолог Ян Ванденброк так писав про Фішерові статті про тютюн: «Хоч як це дивно, але я знайшов добре написані й переконливі дослідження, які могли б стати класикою завдяки їхній бездоганній логіці й чіткому викладу даних і аргументів, якби тільки автори мали рацію»[240].

У 1950-х роках науковці поступово досягали консенсусу в питанні про рак легенів і куріння. Щоправда, досі не було знайдено біологічного механізму виникнення пухлини під впливом тютюнового диму, а також не виявлено аргументів про зв'язок між курінням і раком, які б ґрунтувалися на зафіксованих випадках кореляції. Однак 1959 року було виявлено так багато кореляцій і виключено так багато чинників, що можуть спотворювати отримані результати, що міністр охорони здоров'я США Лерой Е. Берні мав підстави заявити: «Нині вагомі докази підтверджують, що куріння є основним чинником підвищення рівня захворюваності на рак легенів». Однак і після цього сумніви залишалися. За кілька тижнів Джон Телботт, редактор «Журналу Американської медичної асоціації», завдав удару у відповідь: «Низка авторитетних фахівців, вивчивши ж докази[241], на які посилався доктор Берні, не погоджується з його висновками. Ні прихильники, ні супротивники теорії куріння не мають достатніх доказів для того, щоб категорично заявити про свою позицію. Поки не будуть отримані остаточні результати, лікар має працювати, уважно спостерігаючи за ситуацією, відстежуючи факти і даючи поради пацієнтам на основі своєї оцінки цих фактів». Телботт, як раніше Фішер, звинувачував Берні та згодних з ним у тому, що вони, якщо говорити по-науковому, лізуть поперед батька в пекло.

Про те, якою запеклою була суперечка навіть серед науковців, розповідає у своїй примітній праці[242] історик медицини Джон Гаркнесс. Ретельно вивчивши архівні документи, він дійшов висновку, що доповідь, підписану міністром охорони здоров'я, фактично писала велика група вчених з МОЗу, причому сам Берні у цій роботі майже не брав участі. Що стосується реакції Телботта, то це також була не його стаття. Її автори — група конкурентів з МОЗу! Те, що здавалося боротьбою між держчиновниками і медичною установою, насправді було протистоянням між різними групами вчених, винесеним на загальний огляд.

Кінець цієї історії відомий. На початку 1960-х років наступник Берні на посаді головлікаря США Лютер Террі скликав авторитетну комісію з питання куріння і здоров'я, а в січні 1964 року в пресі по всій країні було опубліковано висновки, порівняно з якими заява Берні виглядала дуже обережною:

> З огляду на дедалі більшу кількість доказів, що надходять з різних джерел, комісія вважає, що куріння сигарет є причиною істотного зростання смертності від певних захворювань і загального рівня смертності... **Куріння сигарет становить дуже серйозну небезпеку для здоров'я у Сполучених Штатах Америки, що є підставою для вжиття належних заходів з метою виправлення становища** [виділено жирним шрифтом в оригіналі доповіді].

Що змінилося? До 1964 року зв'язок між курінням і раком доводило щораз більше досліджень. Затяті курці потерпали від раку частіше, ніж ті, які курили менше; крім того, рак найчастіше виникав у місцях контакту тютюну з людською тканиною. У тих, хто курив сигарети, розвивався рак легенів, а в тих, хто курив люльки, — рак губи. Колишні курці були менш схильні до раку, ніж ті, хто не відмовився від цієї звички. Усі ці чинники зумовили те, що комісія, створена міністром охорони здоров'я, дійшла висновку: куріння не просто пов'язано з раком легенів, а *викликає* рак легенів, і скорочення споживання тютюну може подовжити тривалість життя американців.

Помилятися — не завжди помилка

В альтернативному всесвіті, де пізніші дослідження куріння мали б інші результати, дивна теорія Фішера могла б виявитися правильною, і ми б з'ясували, що куріння є наслідком раку, а не навпаки. Така подія була б далеко не найкрутішим поворотом, які знала медична наука. І що далі? Міністр охорони здоров'я зробив би заяву, у якій ішлося: «Перепрошую, тепер усі можуть курити далі». Тим часом тютюнові компанії втратили б багато грошей, а мільйони курців відмовилися б від мільярдів сигарет і не отримали задоволення. І все це тому, що головний лікар визнав фактом те, що було лише переконливою гіпотезою.

А яка ж альтернатива? Уявіть, що треба зробити, щоб цілком певно взнати, що куріння викликає рак легенів. Слід було зібрати велику групу підлітків, випадковим чином вибрати половину з них і змусити регулярно курити сигарети протягом п'ятдесяти років, тоді як інші підлітки мали б увесь цей час утримуватися від куріння. Джеррі Корнфілд, один з піонерів у дослідженні куріння, сказав, що такий експеримент «можна уявити, але не можна здійснити»[243]. Навіть якби такий експеримент був технічно можливим, він порушив би всі етичні норми, яких дотримуються у дослідженнях на людях.

На відміну від учених, державні керманичі не можуть собі дозволити такої розкоші, як невизначеність. Вони мусять ґрунтуватися на найбільш імовірних припущеннях і приймати на їх основі рішення. Коли ця система працює — як це було у випадку з тютюном, — учені та уряд тягнуть воза в один бік: учені визначають, наскільки можна бути певним, а очільники держави приймають рішення, як слід діяти в умовах указаної невизначеності.

Часом це призводить до помилок. Уже йшлося про випадок замісної гормональної терапії, що, як довго вважали під впливом досліджених кореляцій, захищає жінок від серцево-судинних захворювань у постклімактеричний період. Сьогодні рекомендації, що ґрунтуються на результатах виконаних пізніше рандомізованих експериментів, є тою чи тою мірою протилежними.

У 1976 році, а потім в 2009-му уряд США розпочав масштабні й дорогі кампанії вакцинації проти свинячого грипу — щоразу епідеміологи попереджали про можливість катастрофічної пандемії. Насправді в обох випадках то був грип — ситуація серйозна, але далеко не катастрофічна[244].

У таких випадках легко критикувати урядовців за те, що вони дозволили своїм рішенням бігти попереду науки. Але все не так просто. *Помилятися — не завжди помилка*.

Як таке може бути? Швидкий розрахунок очікуваної цінності, як ми робили в третій частині, допоможе пояснити цей, здавалося б, парадоксальний висновок. Припустимо, ми наміряємося дати рекомендації з приводу здоров’я, скажімо, щоб люди припинили їсти баклажани, бо існує невисока ймовірність, що баклажани можуть призвести до раптової серцевої недостатності. Цей висновок ґрунтується на низці досліджень, під час яких з’ясували, що любителі баклажанів мають дещо вищу ймовірність раптово померти, ніж ті, хто баклажанів не їсть. Жодної можливості провести велике рандомізоване контрольоване дослідження, під час якого одну групу ми змушуємо їсти баклажани, а іншій групі забороняємо, немає. Мусимо обходитися наявною інформацією, яка відображає тільки кореляцію. Нам відомо лише те, що баклажанофілія і зупинка серцевої діяльності нібито мають спільну генетичну основу. Проте ми не маємо можливості переконатися, чи це справді так.

Можливо, ми на 75 % впевнені, що наш висновок правильний і що кампанія проти баклажанів врятує життя тисячі американців на рік. Але існує також 25 %-ва ймовірність, що наш висновок хибний — у такому разі ми змушуємо багатьох людей відмовитися від улюбленого овочу і перейти на менш здорове харчування, що призведе, скажімо, до двох сотень додаткових смертей на рік*.

Як завжди, ми отримаємо очікувану цінність, помноживши результат кожного можливого варіанта розвитку подій на відповідну ймовірність, а потім усе додаємо. У цьому разі знаходимо, що

* Усі цифри в цьому прикладі вигадані й не претендують на достовірність.

$$75\,\% \times 1000 + 25\,\% \times (-200) = 750 - 50 = 700.$$

Тож очікувана цінність нашої рекомендації — 700 врятованих життів на рік. Попри гучні й добре профінансовані ламентації Ради з баклажанів і попри нашу дуже велику невпевненість — ми публікуємо рекомендації.

Пам'ятайте: очікувана цінність відображає не те, що ми очікуємо, а скоріше те, що ми могли б очікувати в *середньому*, раз по раз приймаючи це рішення. Ухвалити рішення, що стосується охорони здоров'я, — це вам не монету підкинути. Це те, що ви можете зробити лише раз. З іншого боку, баклажани не єдина екологічна загроза, серйозність якої нам можуть доручити оцінити. Може, ми звернемо увагу на той факт, що цвітна капуста пов'язана з артритом або електричні зубні щітки — з аутизмом. Якщо в кожному випадку очікувана цінність втручання — сімсот життів на рік, то ми маємо зробити все можливе, аби щоразу зберегти в середньому сімсот життів на рік. У кожному окремому випадку ми можемо принести більше шкоди, ніж користі, але в цілому ми збираємося врятувати багато життів. Як лотерейні гравці в день розбивання джек-поту, ми ризикуємо програти в будь-якому конкретному випадку, але майже впевнені в тому, що виграємо в довгостроковій перспективі.

А якби ми дотримувалися суворіших критеріїв доказовості, відмовляючись давати будь-які рекомендації, бо не були *певними*, що маємо рацію? Тоді життя, які ми могли б врятувати, були б втрачені.

Було б чудово, якби ми могли присвоїти точні об'єктивні ймовірності реальним проблемам зі здоров'ям, але, звісно, ми не можемо. Це ще одна відмінність між взаємодією ліків з людським організмом та монетою, яку ми кидаємо, чи лотерейним квитком, з якого зішкрябуємо покриття. Ми загрузли серед нечітких імовірностей, що відбивають ступінь нашої віри в різноманітні гіпотези. Ймовірностей, які Р. Е. Фішер гучно заперечував, — мовляв, це й не ймовірності зовсім. Тому ми не знаємо і не можемо знати точного значення очікуваної вартості розгортання кампанії проти баклажанів, електричних зубних щіток або тютюну. Але часто ми можемо впевнено стверджувати, що очікувана цінність є додатною. Знову ж, це не означає, що кампанія обов'язково матиме добрі результати, — йдеться тільки про те, що *всі* такі кампанії зрештою, скоріш за все, принесуть більше користі, ніж шкоди. Невизначеність полягає в тому, що ми не знаємо, який з наших варіантів допоможе, як було з тютюном, а який зашкодить, як було із замісною гормональною терапією. Але одне можна сказати точно: небажання давати рекомендації взагалі на тій підставі, що вони можуть бути хибними, — це програшна стратегія. Це схоже на пораду Джорджа Стіґлера спізнюватися на літаки. Якщо ви ніколи не даєте поради, доки не переконаєтеся, що вони правильні, ви даєте недостатньо порад.

Помилка Берксона, або Чому вродливі чоловіки такі підлі?

Те, що кореляція може виникнути через непомічену спільну причину, вже добряче заплутує, але це ще не все. Кореляція може також бути результатом спільних *ефектів*.

Цей феномен відомий як *помилка Берксона*. У розділі 8 фахівець з медичної статистики Джозеф Берксон пояснив нам, як бездумне покладання на *p*-значення може привести до висновку про те, що невелика група людей, у якій є альбінос, складається з не-людей.

Сам Берксон, як і Фішер, дуже скептично ставився до ідеї про зв'язок між тютюном і раком. Дипломований лікар Берксон представляв стару школу епідеміології та з великою недовірою сприймав будь-які твердження, що обґрунтовувалися швидше статистичними, ніж медичними методами. На його думку, це було зазіхання наївних теоретиків на царину, що по праву належить медикам. «Рак — це біологічна, а не статистична проблема[245], — писав він 1958 року. — Статистичні дані можуть зіграти допоміжну роль у її поясненні. Та якщо біологи дозволять статистикам виступати арбітрами з біологічних питань, наукова катастрофа неминуча».

Берксон особливо непокоївся з приводу того факту, що споживання тютюну, як було з'ясовано, корелює не тільки з раком легенів, а й з багатьма іншими хворобами, що вражають всі системи організму людини. Для Берксона думка про те, що тютюн такий небезпечний, була неправдоподібною: «Ніби, досліджуючи лікарський засіб[246], рекомендований для полегшення звичайної застуди, з'ясувати, що він не тільки полегшує нежить, а й лікує запалення легенів, рак і багато інших хвороб. Учений сказав би: “Мабуть, щось не так із цим методом дослідження”».

Берксон, як і Фішер, був більш схильний вірити в «конституційну гіпотезу», за якою відмінності у стані здоров'я між некурцями і курцями пояснюються тим, що некурці від початку були здоровішими:

> Якщо від 85 до 95 % населення[247] — курці, то мала меншість некурців, очевидно, має особливу конституцію. Цілком імовірно, що в середньому вони живуть порівняно довше. Це означає, що рівень смертності в цьому сегменті населення відносно низький. У підсумку невелика група людей успішно опирається нав'язливій і повсюдній рекламі сигарет, — а це доволі складно, — і якщо вони здатні протистояти такому натиску, то їм не має бути складно боротися з туберкульозом і навіть раком!

Берксон висував заперечення проти результатів дослідження Долла і Гілла, яке проводилося серед пацієнтів британських лікарень. У 1938 році він звернув увагу на те, що такий спосіб відбору пацієнтів може створити видимість зв'язків, яких насправді немає.

Припустимо, ви хочете дізнатися, чи є високий кров'яний тиск фактором ризику захворювання на діабет. Ви можете провести опитування серед пацієнтів своєї лікарні, щоб визначити, чи був високий тиск більш поширений серед тих, хто не страждає на діабет, чи серед діабетиків. Як же ви здивувалися, коли з'ясували, що високий кров'яний тиск *менш* поширений серед пацієнтів, які страждають на діабет. Тож ви можете схилитися до висновку, що високий кров'яний тиск захищає від діабету або як мінімум від появи таких важких симптомів діабету, коли потрібна госпіталізація. Утім перш ніж рекомендувати своїм пацієнтам-діабетикам налягти на солоні закуски, проаналізуйте цю табличку:

1000 осіб — загальна кількість населення;
300 осіб — мають високий тиск;
400 осіб — хворі на діабет;
120 осіб — мають і високий тиск, і діабет.

Припустимо, в нашому містечку живе 1000 осіб, з яких 30 % мають високий тиск і 40 % мають діабет. (Ми любимо як солоне, так і солодке). А тепер припустимо, що між цими двома умовами немає жодного зв'язку, а отже, 30 % з 400 діабетиків, або 120 осіб, страждають також від високого кров'яного тиску.

Якби всі хворі мешканці нашого містечка потрапили до лікарні, то наше лікарняне населення — це:

180 осіб з високим тиском, але без діабету;
280 осіб з діабетом, але без високого тиску;
120 осіб з високим тиском і діабетом.

Із 400 діабетиків, що потрапили до лікарні, 120, або 30 %, мають високий тиск. Однак із 180 не-діабетиків усі 100 % мають високий кров'яний тиск! Ми не робитимемо дурного висновку, що високий тиск запобігає діабету. Ці дві умови негативно корелюють, але це відбувається не тому, що одне призводить до відсутності іншого. І не тому, що є якийсь прихований чинник, який підвищує вам кров'яний тиск, і допомагає регулювати інсулін. А тому, що ці дві умови мають спільний *ефект*, а саме — через них ви потрапили до лікарні.

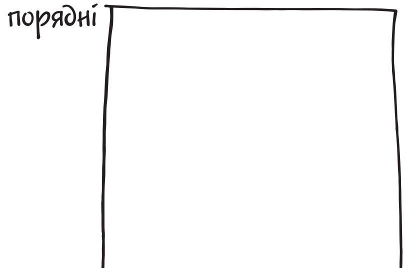
Скажемо простіше: якщо ви у лікарні, то ви чомусь туди потрапили. Якщо ви не діабетик, тоді більша ймовірність того, що ви тут через високий кров'яний тиск. Тож те, що спочатку виглядає як причиново-наслідковий зв'язок між високим кров'яним тиском і діабетом, насправді просто статистичний фантом.

Цей ефект може працювати інакше. У реальному житті, маючи дві хвороби, ви з більшою ймовірністю можете потрапити до лікарні, ніж якби ви мали одну хворобу. Можливо, *всі* 120 пацієнтів, які одночасно потерпають і від тиску, і від діабету, в нашому містечку потрапляють до лікарні, але 90 % відносно здорових людей, у яких тільки одна проблема, залишаються вдома. До того ж є й інші причини опинитися в лікарні: наприклад, у перший сніжний день року багато охочих почистити свої снігозбирачі — руками. Результат — відрізаний палець. Тепер контингент мешканців лікарні може виглядати так:

10 осіб без діабету і високого тиску, але з відрізаним пальцем;
18 осіб з високим тиском, але без діабету;
28 осіб з діабетом, але без високого тиску;
120 осіб з високим тиском і діабетом.

Тепер, проводячи дослідження в лікарні, ви побачите, що 120 з 148 діабетиків, або 81 %, мають високий тиск. Однак тільки 18 з 28 не-діабетиків, або 64 %, мають високий тиск. Через це здається, що високий тиск *збільшує* ймовірність того, що у вас є ще й діабет. Знову ілюзія: ми з'ясували лише те, що безліч людей, що потрапляють до лікарні, є випадковою вибіркою з генеральної сукупності.

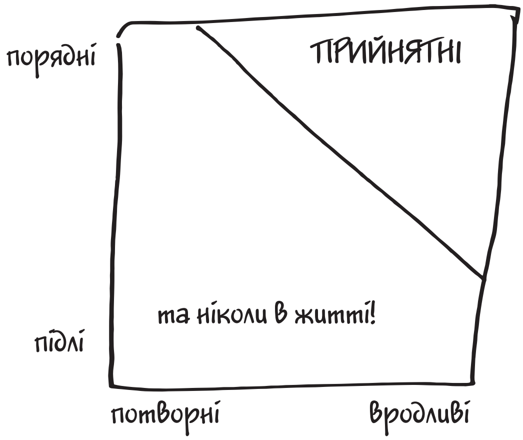
Помилка Берксона має сенс і за межами медицини. Її можна застосувати поза областями, де можлива точна кількісна оцінка. Чи не зауважували ви, що серед усіх чоловіків* у вашому списку можливих партнерів вродливі чоловіки зазвичай підлі, тоді як порядні зазвичай невродливі. Це тому, що симетричне обличчя робить людину жорстокою? Або тому, що гарне поводження з іншими робить тебе потворним? Ну, може й так. Але не обов'язково. Нижче я подаю Великий квадрат чоловіків:



* Або, очевидно, «представників ґендеру, якому ви віддаєте перевагу, якщо такий є».

і в рамках робочої гіпотези припускаю, що всі чоловіки рівномірно розподілені по цьому квадрату. Зокрема, тут приблизно в рівній кількості є порядні вродливі, порядні потворні, підлі вродливі й підлі потворні чоловіки.

Однак у хорошого характеру і привабливої зовнішності є спільний ефект: вони поміщають чоловіків до тієї групи, на яку ви звертаєте увагу. Будемо чесними: підлі виродки — це ж ті, кого ви не розглядаєте. Таким чином, усередині Великого квадрата є Малий трикутник прийнятних чоловіків:



Тепер усе ясно. Найкрасивіші чоловіки у вашому трикутнику представляють увесь діапазон особистостей, від найпорядніших до найпідліших. У середньому вони майже так само вродливі, як середньостатистичний чоловік серед усього населення, яке, мусимо визнати, не надто привабливе. Своєю чергою, найпорядніші чоловіки лише в середньому вродливі.

Однак некрасиві хлопці, які вам подобаються — вони утворюють крихітний кутик трикутника, — дуже порядні люди, і вони мусять такими бути, інакше ви їх узагалі не помітите.

Негативна кореляція між зовнішністю і особистими якостями серед ваших потенційних обранців абсолютно реальна. Однак якщо ви спробуєте поліпшити фігуру свого хлопця, навчивши його підлої поведінки, ви станете жертвою помилки Берксона.

Те саме з літературним снобізмом. Ви знаєте, чому популярні романи такі жахливі? Річ не в тім, що маси не цінують якість. Просто є Великий квадрат романів, і єдині романи, про які ви хоч колись чули, — це ті, що в Трикутнику прийнятних романів, — вони або популярні, або хороші.

Якщо ви змушуєте себе читати непопулярні романи, вибрані, по суті, навмання — я потрапив якось у журі літературної премії, так що я сам це робив, — ви побачите, що більшість з них, як і популярні, досить поганенькі.

Звичайно, Великий квадрат занадто простий. Є багато вимірів, а не тільки два, за якими ви можете оцінювати своїх коханих або книжки. Тому замість Великого квадрата мав би бути Великий гіперкуб. І це тільки для ваших особистих уподобань! Якщо ви спробуєте зрозуміти, що відбувається з усім населенням, ви побачите, що різні люди по-різному визначають привабливість. Може йтися про різні значущі критерії або ж узагалі несумісні переваги. Процес узагальнення думок, переваг і бажань безлічі різних людей — ще одна низка труднощів. Це означає ще одну можливість зайнятися математикою. До неї ми зараз і звернемося.

Частина п'ята

ІСНУВАННЯ

У цій частині: моральний статус Дерека Джитера, вибори з трьома кандидатами, програма Гільберта, використання всієї корови, чому американці не тупі, «до кожних двох кумкватів приєднується жаба», жорстоке і незвичайне покарання, «руйнування самої основи роботи одразу після її завершення», маркіз де Кондорсе, друга теорема про неповноту, мудрість слизовика

Розділ 17

Немає ніякої громадської думки

Ви свідомий громадянин Сполучених Штатів Америки або якоїсь іншої більш-менш ліберальної демократичної країни. Можливо, ви навіть виборна особа. Ви думаєте, що уряд, наскільки можливо, має поважати волю народу. Тож ви хочете знати: чого хоче народ?

Ви можете опитати купу людей, але цілком певним не будете. Наприклад: чи хочуть американці, щоб у них був компактний держапарат? Звісно, так, ми постійно це говоримо. У січневому опитуванні «Сі-Бі-Ес Ньюз»[248], проведеному 2011 року, 77 % респондентів визнали, що найкращим способом справитися з дефіцитом держбюджету є скорочення витрат, тоді як усього 9 % віддали перевагу підвищенню податків. Такий результат не просто данина нинішній моді на жорстку економію. Американці дедалі більше виступають за те, щоб скорочувати урядові програми, а не платити більші податки.

Але *які* урядові програми? Це дражливе питання. Виявляється, те, на що витрачає гроші уряд США, людям подобається. У лютому 2011 року «П'ю Ресерч Сентер» поцікавився в американців[249] їхньою думкою про тринадцять категорій урядових витрат: для одинадцяти з цих категорій, незалежно від дефіциту бюджету, більшість респондентів хотіли збільшити витрати, а не скоротити. Зарубали тільки дві категорії — допомогу іноземним країнам і страхування на випадок безробіття, які становили менш як 5 % витрат. Це узгоджується і з даними попередніх років. Пересічний американець завжди прагне скоротити допомогу іншим країнам, часом толерантний до урізання соцзабезпечення і беззастережно проти збільшення витрат на всі інші програми, на які витрачаються наші податки.

О, стривайте, ще ми хочемо скоротити армію чиновників.

Та сама неузгодженість на рівні штатів. Респонденти, які брали участь в опитуванні компанії «П'ю Ресерч», здебільшого висловилися за урізання програм і підвищення податків для збалансування бюджету штату. Наступне питання: а що скажете з приводу скорочення витрат на освіту, охорону здоров'я, транспорт чи пенсії? А підвищення податків з продажу, прибуткового податку штату чи податків на бізнес? Жоден із цих варіантів не мав підтримки більшості.

«Найправдоподібніше тлумачення цих даних[250] — те, що люди хочуть безплатних обідів, — писав економіст Браян Каплан. — Вони хочуть менше витрачати на уряд, але це не має зачіпати його основні функції». Ось що каже нобелівський лауреат економіст Пол Круґман: «Люди хочуть скоротити витрати[251], але виступають проти скорочення всього, крім допомоги іншим країнам... Висновок неминучий: республіканці мають мандат на скасування арифметичних законів». У звіті компанії «Гарріс» про результати опитування, присвяченого бюджету, яке було проведене в лютому 2011 року, ще мальовничіше описано таке неоднозначне ставлення громадськості до бюджету: «Багато людей, здається, хочуть вирубати ліс[252], але залишити дерева». Це дуже непоказний портрет американської громадськості. Або ми немовлята, не здатні зрозуміти, що скорочення бюджету неминуче уріже фінансування програм, які ми підтримуємо, або ми вперті нетямущі діти, які розуміють математику, але приймати її не бажають.

Як дізнатися, чого хочуть люди, якщо їхні слова не мають сенсу?

Раціональні люди, ірраціональні країни

Дозвольте мені заступитися за американців (хоча б з цього приводу) за допомогою сюжетної задачі.

Припустимо, третина виборців думає, що ми маємо вирішити проблему дефіциту бюджету шляхом підвищення податків без скорочення витрат; інша третина вважає, що треба обмежити військові витрати, а решта припускає, що мусимо добряче скоротити пільгові виплати за програмою «Медікер».

Двоє з трьох хочуть скоротити витрати; тож в опитуванні, де є таке запитання: «Нам треба урізати витрати чи підвищити податки?», — «різники» перемагають з великим відривом, 67: 33.

То що скорочувати? Якщо ви запитаєте: «Чи маємо скорочувати оборонний бюджет?» — отримаєте однозначне «ні»: дві третини виборців — прихильники підвищення податків, до яких приєдналися охочі обмежити «Медікеа», — хочуть, щоб бюджет оборони не чіпали. І останнє: «Чи маємо ми скоротити виплати "Медікеа"?» — програє з аналогічним співвідношенням.

Знайома суперечлива позиція, яку ми бачимо в опитуваннях: «Ми хочемо скоротити! Але ми хочемо, щоб були профінансовані всі програми!» Як ми опинилися в цьому глухому куті? Не тому, що ми тупі й неадекватні. *Кожен окремий виборець має цілком раціональну, послідовну політичну позицію*. Однак загалом їхня позиція безглузда.

Якщо заглибитися далі в результати опитувань про бюджет, стає очевидним, що наша сюжетна задача не така вже й далека від істини. Тільки 47 % американців вважають[253], що збалансований бюджет вимагатиме скорочення програм, які допомогли таким самим людям, як вони. Тільки 38 % погодилися, що є добрі програми, які доведеться скоротити. Інакше кажучи, не існує інфантильного «пересічного американця», який хоче скоротити витрати, але вимагає зберегти всі програми. Пересічний американець думає, що є багато непотрібних федеральних програм, що марнують наші гроші, і готовий урізати їх, щоб звести кінці з кінцями. Проблема в тому, що немає єдиної думки з приводу того, які програми непотрібні. Більшість американців хоче, хай там як, але зберегти ті програми, які приносять користь їм особисто. (Я не казав, що ми не егоїсти, я тільки сказав, що ми не тупі!)

Система, яка керується принципом більшості, проста, досконала й видається справедливою, але вона оптимальна у разі вибору з двох варіантів. Якщо ж їх більше ніж два, перевага більшості вже не така однозначна. Коли я пишу ці рядки, американці різко розійшлися в оцінці внутрішньої політики президента Обами, закону про доступне медичне обслуговування. У проведеному в жовтні 2010 року опитуванні[254] ймовірних виборців 52 % респондентів заявили, що вони виступають проти цього закону, а 41 % його підтримують. Погані новини для Обами? Аж ніяк, якщо поглянути на цифри. Скасування реформи системи охорони здоров'я підтримали 37 %, ще 10 % сказали, що закон треба послабити; водночас 15 % опитаних вважали за краще залишити все як є, а 36 % думають, що закон необхідно розширити, щоб ще *радикальніше* змінити систему охорони здоров'я, ніж передбачає закон. Це засвідчує, що багато супротивників закону зліва від Обами, а не справа. Тож маємо (принаймні) три варіанти: не чіпати закон про охорону здоров'я взагалі, знищити його або зробити сильнішим. І кожному з цих варіантів опирається більшість американців*.

Через неузгодженість більшості з'являються численні можливості для введення в оману. Ось як «Фокс Ньюз» міг би повідомити про вищенаведені результати опитування:

Більшість американців проти «Обамакеа»!

А ось так це могло би виглядати на каналі «Ем-Ес-Ен-Бі-Сі»:

Більшість американців хочуть зберегти або посилити «Обамакеа»!

Ці два заголовки розповідають цілком різні історії про громадську думку. Прикро, що вони обидві правдиві.

Однак обидва неповні. Якщо ви не хочете помилитися, треба перевірити кожен варіант опитування, щоб побачити, чи складається пазл. 56 % населення не схвалює політики президента Обами на Близькому Сході? Ця вражаюча цифра може включати і лівих, що закликають припинити проливати кров за нафту; і правих, готових знищити «їх усіх» атомною бомбою, та кількох ревних б'юкененців разом з вірними лібертаріанцями. Саме по собі це майже нічого не пояснює, чого хочуть люди.

З виборами, можливо, трохи легше. Опитувач пропонує вам зробити простий бінарний вибір, те саме, що ви робитимете біля виборчої скриньки: кандидат 1 чи кандидат 2?

Але часом їх буває більше ніж два. На президентських виборах 1992 року Білл Клінтон набрав 43 % голосів виборців, випередивши Джорджа Буша-старшого з 38 % і Росса Перо з 19 %. Тобто більшість виборців (57 %) вважали, що Білл Клінтон не має бути президентом. І більшість виборців (62 %) вважали, що Джордж Буш не має бути президентом. І справжня більшість виборців (81 %) вважали, що Росс Перо не має бути президентом. Вибір кожної більшості неможливо задовольнити одночасно. Принцип більшості в одному випадку не буде дотриманий.

Нічого аж такого страшного немає: завжди можна обрати президентом кандидата з найбільшою кількістю голосів, — як це й робить американська виборча система.

Але припустимо, що 19 % виборців, які голосували за Перо, розділилися на 13 %, які вважають Буша другим кращим вибором, а Клінтона найгіршим**, і 6 % тих, що вважають Клінтона найкращим з двох кандидатів від основних партій. Тоді, якби ви прямо спитали виборців, Клінтона чи Буша вони

* У той час, коли друкувалася книжка: опитування «Сі-Ен-Ен» у травні 2013 року засвідчило, що 43 % підтримують розглянутий закон; ще 35 % сказали, що він надто ліберальний, 16 % думають, що він недостатньо ліберальний.

** Досі сперечаються про те, від кого — Буша чи Клінтона — Перо отримав більше голосів.

хочуть бачити президентом, 51 %, більшість, вибрали б Буша. Ви досі вважаєте, що громадськість хоче бачити в Білому домі Клінтона? А може, вибір народу — це Буш, якому більшість виборців віддали перевагу перед Клінтоном? І чому почуття електорату до Росса Перо впливають на те, Буш чи Клінтон стане президентом?

Я думаю, що правильна відповідь — відповіді немає. Громадської думки просто не існує. Точніше, іноді вона є — коли йдеться про питання, з приводу яких більшість має чітку думку. Можна стверджувати, що громадськість вважає тероризм злом, а «Теорію великого вибуху» — крутим серіалом. Але скорочення дефіциту бюджету — це зовсім інше. Тут більшість не є одностайною.

Якщо немає такого поняття, як громадська думка, що робити виборному посадовцю? Найпростіша відповідь: якщо немає загальної згоди, робіть, що хочете. Як ми бачили, проста логіка вимагає, щоб ви часом діяли проти волі більшості. Якщо ви посередній політик, ви вкажете, що результати опитування самі собі суперечать. Якщо ви добрий політик, ви скажете: «Мене обрали, щоб я керував, а не стежив за опитуваннями».

А якщо ви талановитий політик, ви з'ясуєте, як повернути неузгодженість громадської думки собі на користь. У проведеному в лютому 2011 року опитуванні «П'ю Ресерч» лише 31 % респондентів підтримали скорочення витрат на транспорт, ще 31 % підтримали скорочення фінансування шкіл. Але тільки 41 % підтримали підвищення податків для місцевих компаній, щоб усе це компенсувати. Тобто проти кожного з основних варіантів скорочення дефіциту бюджету виступала більшість виборців. Який вибір має зробити губернатор, щоб мінімізувати політичні втрати? Відповідь: не вибирайте щось одне, вибирайте два. Губернатор має сказати десь так:

«Я обіцяю не підвищувати податків ані на цент. Я забезпечу муніципалітети інструментами для надання платникам податків якісних громадських послуг за меншу ціну».

Тепер кожна місцева громада, з огляду на менші надходження з боку штату, має сама робити вибір з решти двох варіантів: скоротити фінансування на дороги чи на школи. У чому тут геніальність? Губернатор спеціально виключив підвищення податків, найпопулярніший з трьох варіантів, але його тверду позицію підтримує більшість: 59 % виборців згодні з губернатором у тому, що податки підвищувати не треба. Бідний мер або очільник громади мусить сам махати сокирою. Цей нещасливець не має іншого вибору, ніж проводити політику, яка більшості виборців не сподобається, і потерпатиме від наслідків, а губернатор — на білому коні. У грі з бюджетом, як і в багатьох інших, часто виграє той, хто починає.

Злодії часто заслуговують різок, а може, й відрізання вух

Чи є неправильним страчувати розумово відсталих ув'язнених? Здається, абстрактне етичне питання, — але це було критичне питання в одній великій справі Верховного суду. Точніше, йшлося не про те, чи є неправильним страчувати розумово відсталих ув'язнених, а про те, чи вважають американці, що страчувати розумово відсталих ув'язнених неправильно. Це питання громадської думки, а не етики, — і, як ми вже бачили, у всіх, крім найпростіших, питаннях з приводу громадської думки панує суперечливість і непевність.

А питання таки непросте.

Судді зіткнулися з ним у справі «Аткінс проти штату Вірґінія» 2002 року. Деріл Ренард Аткінс і його спільник Вільям Джонс, загрожуючи пістолетом, пограбували людину, викрали її, а потім убили. Кожен зі злочинців свідчив, що вбивцею був інший, але присяжні повірили Джонсу, й Аткінса визнали винним у тяжкому вбивстві й засудили на смерть.

З приводу якості доказів чи тяжкості злочину суперечок не було. Перед судом стояло питання не що зробив Аткінс, а ким він був. Адвокат Аткінса стверджував перед Верховним судом штату Вірґінія, що в Аткінса слабка форма розумової відсталості, його IQ дорівнює 59, — тому його не можна вважати достатньою мірою морально відповідальним, щоб винести смертний вирок. Верховний суд штату відхилив цей аргумент, пославшись на ухвалу Верховного суду США 1989 року у справі «Пенрі проти Ліно», у якій ішлося про те, що смертна кара розумово відсталих ув'язнених не порушує Конституції.

Це рішення судді штату Вірґінія ухвалили після тривалих дебатів. Конституційні питання були достатньо складними для того, щоб Верховний суд США погодився переглянути цю справу, а заразом і справу Пенрі. Цього разу високий суд дотримувався протилежної думки. Страта Аткінса чи будь-якого іншого розумово відсталого злочинця суперечить Конституції — йшлося в ухвалі 6-3.

На перший погляд, це дивно. У період між 1989 і 2012 роками Конституція не змінювалася; тож як вона спочатку дозволила покарання, а потім, через двадцять три роки, заборонила? Ключ — у формулюванні Восьмої поправки, яка забороняє штату застосовувати «жорстоке і незвичайне покарання». Питання про те, що таке «жорстоке і незвичайне», стало предметом бурхливих юридичних спорів. Як тлумачити ці слова? Чи означає «жорстокий» те, що вважали жорстоким батьки-засновники, чи те, що вважаємо ми? Незвичайний — це те, що було незвичайним тоді, чи те, що ми вважаємо таким сьогодні? Творці Конституції знали про цю значущу невизначеність. Коли в серпні 1789 року в Палаті представників обговорювали ухвалення Білля про права, Семюел Лівермор з Нью-Гемпшира стверджував, що нечіткість формулювань дозволить м'якосердим майбутнім поколінням оголосити необхідні покарання поза законом:

> Ця стаття, здається, є надзвичайно гуманною[255], і з цього приводу я не заперечую; але, як мені здається, вона немає жодного сенсу, тому вона не потрібна. Що мається на увазі під терміном «надмірна застава»? Хто це має визначати? Що мається на увазі під надмірними штрафами? Визначення цього покладено на суд. Не мають призначатися жодні жорстокі і незвичайні покарання. А часом виникає потреба повісити людину, злодії часто заслуговують різки і, можливо, відрізання вух. То невже в майбутньому ми не зможемо присуджувати такі покарання, бо вони жорстокі?

Кошмар Лівермора справдився: ми не відрізаємо людям вуха, навіть якщо вони нас про це просять; до того ж ми вважаємо, що Конституція забороняє нам це робити. Сьогодні використання Восьмої поправки регулюється принципом «розвитку стандартів добропорядності», вперше сформульованим у справі «Троп проти Даллеса» (1958). У ньому стверджується, що саме сучасні американські норми, а не норми серпня 1789 року, визначають, що таке жорстокий і незвичайний.

І тут приходить громадська думка. В ухвалі судді Сандри Дей О'Коннор у справі Пенрі наголошувалося, що опитування громадської думки, які демонструють переважну незгоду суспільства зі стратою розумово неповноцінних злочинців, не мають враховуватися у визначенні «стандартів добропорядності». Законодавці штату повинні закріпити у законодавстві, що таке «найчіткіші й найнадійніші об'єктивні свідчення сучасних цінностей», і лише після цього суд може врахувати громадську думку. 1989 року тільки два штати — Джорджія і Меріленд — ухвалили спеціальні положення, що забороняють страту розумово відсталих злочинців. До 2002 року ситуація змінилася, і такі страти оголосили поза законом у багатьох штатах. Навіть законодавчий орган штату Техас ухвалив такий закон, однак губернатор його ветував. Більшість суддів визнали, що хвиля законодавчих змін — це достатній доказ такого розвитку стандартів добропорядності, що не дозволяє засудити Деріла Аткінса до смерті.

Суддя Антонін Скаліа з цим не погоджувався. По-перше, він украй неохоче визнавав, що Восьма поправка може забороняти покарання (наприклад, відрізання вух, відоме в теорії виконання покарань як «обрізка»), які були дозволені конституцією за часів її створення*.

* 15 травня 1805 року у штаті Массачусетс заборонили відрізання вух, таврування, побиття різками і прив'язування до ганебного стовпа як покарання за підробку грошей. Якби ці види покарання були визнані забороненими згідно з Восьмою поправкою, у законі штату не було б потреби. Ця особлива думка Скаліа, до речі, не відображає його нинішніх поглядів: 2013 року

А по-друге, пише Скаліа, законодавчі збори штатів не продемонстрували національної згоди у питанні страти розумово відсталих злочинців, як має бути відповідно до прецеденту Пенрі:

> Суд на словах зважає на ці прецеденти[256], коли він з доброго дива називає «національною згодою» з приводу заборони страти розумово відсталих... той факт, що 18 штатів — менше ніж половина (47 %) із 38 штатів, у яких дозволена смертна кара (де ця проблема існує), зовсім недавно ухвалили закони, які забороняють страту розумово відсталих... Цієї невеликої кількості штатів — лише 18 — має вистачити, щоб переконати будь-яку мислячу людину у відсутності «національної згоди». Яка це згода, якщо йдеться лише про 47 % округів?

Принцип більшості передбачає інші математичні розрахунки. У 13 штатах заборонено страту розумово відсталих злочинців; у 18 штатах, які згадав Скаліа, і ще в 12, смертну кару заборонено взагалі. Це становить 30 штатів із 50, суттєва більшість.

То які ж розрахунки правильні? Ахіл і Вікрам Амар[257], брати і викладачі конституційного права, пояснюють, чому принцип більшості має міцніше математичне підґрунтя. Уявіть собі, кажуть вони, що сорок сім штатів оголосили смертну кару поза законом, але два з трьох штатів, що залишилися, дозволяють смертну кару розумово відсталих засуджених. У такому разі важко заперечувати, що національний стандарт добропорядності виключає смертну кару взагалі і — тим більше — розумово відсталих злочинців. Інакше слід було б визнати величезний моральний авторитет трьох штатів, які крокують не в ногу з усією країною. Отже, правильно розглядати співвідношення 48 з 50, а не 1 з 3.

У реальному житті національної згоди у питанні смертної кари не існує. Це надає певної привабливості аргументу Скаліа. Позиція отих 12 штатів, де заборонено смертну кару*, відрізняється від загальнонаціональної думки на користь смертної кари. Якщо вони не думають, що смертна кара взагалі має бути дозволена, як вони можуть мати якусь думку з приводу того, в яких випадках смертна кара дозволена?

Помилка Скаліа — така сама, що й у багатьох спроб зрозуміти громадську думку. Суперечливість загальної сукупності думок. Розгляньмо докладніше. Скільки штатів 2002 року вважали, що смертна кара морально неприйнятна? Як свідчить законодавство, тільки дванадцять. Інакше кажучи, більшість штатів, 38 з 50, вважають страту прийнятною.

в інтерв'ю журналу «Нью-Йорк» він сказав, що тепер упевнений, що Конституція США дозволяє побиття різками; мабуть, те саме він думає про відрізання вух.

* Від 2002 року їх кількість збільшилася до сімнадцяти.

Тож скільки штатів вважають, що смертна кара розумово відсталих злочинців — це ще гірше, з юридичного погляду, ніж страта когось іншого? Звісно, 20 штатів, у яких згодні з обома покараннями, не можуть опинитися серед цих штатів. Не буде тут і 12 штатів, де смертну кару категорично заборонено. Є тільки 18 штатів, де виконують належне правове розмежування. Це більше, ніж було зазначено в ухвалі у справі Пенрі, але все одно це невелика меншість.

Більшість штатів, 32 з 50, застосовують смертну кару розумово відсталих злочинців на тих самих правових підставах, що і смертну кару взагалі*.

Логічно було б усі ці твердження об'єднати: якщо більшість вважає, що смертна кара — це добре, і якщо більшість вважає, що смертна кара розумово відсталих злочинців не гірша за смертну кару взагалі, тоді більшість має схвалити смертну кару розумово відсталих злочинців.

Але це неправильно. Як ми бачили, «більшість» не щось єдине, що дотримується логіки. Пам'ятаєте, більшість виборців не хотіли, щоб Джорджа Буша-старшого переобрали 1992 року; і більшість виборців не хотіли, щоб Білл Клінтон змінив Буша. Утім хоч би як цього хотів Росс Перо, звідси не випливає, що більшість хотіла, щоб ні Буш, ні Клінтон не потрапили в Овальний кабінет.

Аргументи братів Амар переконливіші. Якщо ви хочете знати, скільки штатів вважають страту розумово відсталих морально неприйнятною, ви просто маєте з'ясувати, скільки штатів це забороняють — а таких 30, а не 18.

Що не означає, що загальний висновок Скаліа хибний, а думка більшості правильна. Це правове питання, а не математичне. Задля справедливості мушу відзначити, що Скаліа висуває і деякі математичні аргументи. Наприклад, думка більшості, яку розділяв суддя Стівенс, полягає в тому, що страта розумово відсталих ув'язнених рідко трапляється навіть у тих штатах, де смертна кара спеціально не заборонена — і це засвідчує ще й опір громадськості, окрім офіційних рішень законодавчих органів штатів. Як зазначає Стівенс, за тринадцять років — між справами Пенрі й Аткінса — таке покарання було присуджене тільки у п'яти штатах.

Упродовж цього часу було страчено трохи більше за 600 осіб[258]. Стівенс пропонує вважати, що частка розумово відсталих у загальній кількості населення США становить 1 %. Тож якщо розумово відсталих злочинців страчували в такій самій кількості, що й населення в цілому, можна припустити, що серед страчених було п'ять або шість представників цієї групи. Якщо дивитися під таким кутом, зазначає Скаліа, то дані не показують особливого не-

* Це не точно ті самі обчислення, які робив Скаліа. Він не зайшов так далеко, щоб стверджувати, що штати, де смертна кара заборонена, вважають страту розумово відсталих злочинців не гіршою, ніж смертну кару взагалі. Скоріше, аргументи Скаліа зводяться до твердження, що у нас немає інформації про їхню думку з цього питання, тому ми не маємо включати їх у наш список.

бажання страчувати розумово відсталих. У штаті Техас не стратили жодного єпископа Грецької православної церкви, але чи сумніваєтеся ви в тому, що в Техасі стратили б єпископа, якби виникла така потреба?

У справі Аткінса Скаліа хвилювало не так конкретне питання в суді, яке зачіпає маленький сегмент справ про тяжкі злочини, за які можуть засудити на смерть. Скоріше, його турбувало те, що він називає «поступовим скасуванням» смертної кари відповідно до рішення суду. Він цитує свою ранішу думку у справі «Гармелін проти штату Мічиґан»: «Восьма поправка — це не важіль, за допомогою якого тимчасова згода з приводу полегкості до конкретного злочину фіксує постійний конституційний максимум, позбавляючи штати можливості впливати на змінені переконання і реагувати на змінені соціальні умови».

Скаліа має рацію, коли непокоїться з приводу системи, у якій уявлення одного покоління американців у підсумку конституційно обмежують наших нащадків. Зрозуміло, що його заперечення виходить за рамки права. Його турбота — це Америка, яка втрачає звичку до покарання через примусову відмову; Америка за законом не тільки не може стратити розумово відсталих вбивць, але й внаслідок м'якості суду забула, що хоче. Скаліа, подібно до Семюеля Лівермора двісті років тому, передбачає світ, де люди значною мірою втратять свою здатність нав'язувати ефективне покарання злочинцям, — і жалкує через це. Я не можу розділити цю стурбованість. Неймовірна винахідливість людини у вигадуванні способів покарання конкурує з нашими здібностями в мистецтві, філософії і науці. Покарання — це поновлюваний ресурс; і можна не хвилюватися, що він колись вичерпається.

Флорида 2000 року, слизовик і як обрати помічника на побаченні

Слизовик *Physarum polycephalum* — дивовижний маленький організм. Він проводить більшу частину свого життя як окрема крихітна клітина, що трохи скидається на амебу. За належних умов тисячі таких організмів зливаються в єдиний колектив — «плазмодій». У цій формі слизовик набуває яскраво-жовтого забарвлення і стає достатньо великим, щоб його можна було побачити неозброєним оком. У природі слизовик живе на гнилих рослинах, а в лабораторії вподобав вівсяні пластівці.

І чому це ми обговорюємо психологію плазмодіального слизовика, який не має мозку чи чогось такого, що можна було б назвати нервовою системою, не кажучи вже про почуття й думки? Але слизовик, як і всі живі істоти, ухвалює рішення. І що цікаво: він ухвалює *правильні* рішення. В обмеженому світі слизовика такі рішення за великим рахунком зводяться до «руху до того, що мені подобається» (пластівці), «руху від того, що мені не подобається» (яскраве світло). Так чи так децентралізований розум слизовика вміє дуже ефективно виконувати таку роботу. Тобто слизовика можна навчити пробігати по лабіринту[259]. (Для цього треба запастися часом і вівсом). Біологи сподіваються, що, з'ясувавши, як слизовик переміщується по своєму світу, вони зможуть зазирнути у часи, коли зароджувалося пізнання.

Навіть тут, коли йдеться про найпримітивніший спосіб ухвалення рішень, ми натрапляємо на деякі загадкові явища. Таня Летті й Медлін Бікман[260] з Університету Сіднея вивчали, як слизовики роблять непростий вибір. А непростий вибір для слизовика виглядає десь так: на одному боці чашки Петрі — три грами вівсяних пластівців. На іншому — п'ять грамів пластівців, але під ультрафіолетовим світлом. Ви поклали слизовика в центрі чашки Петрі. Що він робитиме?

З'ясували, що слизовик вибирає кожен варіант приблизно в половині випадків. Додатковий харч врівноважив нелюбов до ультрафіолету. Якби ви були класичним економістом на кшталт тих, з якими Деніел Еллсберґ працював у «RAND», ви сказали б, що менша купа вівсяних пластівців у темряві і більша купа пластівців на світлі мають однакову корисність для слизовика, тому він вагається, що ж вибрати.

Замініть п'ять грамів на десять грамів. Баланс порушений, однак слизовик щоразу прямує до подвійної порції — байдуже, освітлена вона чи ні. Ось такі експерименти знайомлять нас із пріоритетами слизовика і з тим, як він ухвалює рішення, коли ці пріоритети конфліктують. А слизовик у таких ситуаціях видається доволі розумним персонажем.

А потім трапилося щось дивне. Експериментатори спробували покласти слизовика в чашку Петрі з *трьома* варіантами: три грами вівсяних пластівців у темряві (3-темрява), п'ять грамів на світлі (5-світло) і один грам у темряві (1-темрява). Виглядає на те, що слизовик майже ніколи не поверне до купи 1-темрява. У купі 3-темрява більше пластівців, і там темно, тож це явно краще. І слизовик таки майже ніколи не вибирає 1-темрява.

Оскільки слизовика однаково приваблювали варіанти 3-темрява і 5-світло, то він у нових умовах і далі так чинитиме. Для економіста це означає, що наявність нового варіанта не має змінити того факту, що 3-темрява і 5-світло мають однакову корисність. А ось і ні. Якщо доступна 1-темрява, слизовик змінює свої переваги, вибираючи 3-темрява більш ніж утричі частіше, ніж 5-світло!

Що ж таке?

Підказую: маленька темна купа вівсяних пластівців грає тут роль Росса Перо під час виборів.

На математичному жаргоні це можна назвати «незалежність від сторонніх альтернатив». Згідно з цим правилом, хоч би ким ви були — слизовиком, людиною чи демократичною державою, — якщо ви маєте вибрати між двома варіантами — *A* і *B*, наявність третього варіанта *C* не має впливати на те, який варіант, А чи *B*, подобається вам більше. Якщо ви вирішуєте, який автомобіль ви хочете: «Пріус» чи «Хаммер», байдуже, чи вам пропонують «Форд Пінто». Ви ж *знаєте*, що не збираєтеся вибирати «Форд». То яке він може мати значення?

А тепер щось ближче до політики: замість автодилера візьміть штат Флорида. Замість «Пріуса» — Ела Ґора, замість «Хаммера» візьміть Джорджа Буша-молодшого, а замість «Форда Пінто» візьміть Ральфа Нейдера. На президентських виборах 2000 року Джордж Буш отримав 48,85 % голосів у Флориді, Альберт Ґор — 48,84 %. Пінто отримав 1,6 %.

Отже, про Флориду 2000-го. Ральф Нейдер не мав виграти вибори у Флориді. Ви це знаєте, я це знаю, і кожен виборець у Флориді це знав. Перед виборцями Флориди стояло не питання:

«Хто має отримати голоси виборників Флориди — Ґор, Буш чи Нейдер?»

а питання:

«Хто має отримати голоси виборників Флориди — Ґор чи Буш?»

Можна бути певним, що фактично кожен, хто голосував за Нейдера, вважав, що Ел Ґор був би кращим президентом, ніж Джордж Буш*. Це означає що 51 % віддав перевагу Ґору перед Бушем. Та присутність Ральфа Нейдера, стороння альтернатива, означає, що Буш виграє.

Я не кажу, що вибори мали закінчитися інакше. Але правда й те, що голосування часом призводить до парадоксальних результатів, і більшість не завжди отримує те, що мала би, а сторонні альтернативи контролюють результат. Клінтон отримав від цього вигоду в 1992-му, Джордж Буш-молодший — у 2000-му. Математичний принцип той самий: важко зрозуміти, «чого хочуть виборці».

Однак результати виборів в Америці визначаються не одним способом. Це може здатися дивним: який вибір, крім кандидата, який отримав найбільшу кількість голосів, може бути справедливим?

А що кажуть математики про цю проблему? Французький математик XVIII століття Жан-Шарль де Борда, відомий своєю роботою з балістики, міркував так. Вибори — це машина. Мені подобається уявляти їх як велику чавунну м'ясорубку. Те, що сюди надходить, — це переваги окремих виборців.

* Так-так, я теж знаю хлопця, який вважає, що і Ґор і Буш — всього лише інструменти в руках капіталістичних господарів, і тому не має значення, хто з них переможе. Але зараз мова не про цього хлопця.

Ковбаса, яка виходить, коли ви крутите ручку, — це те, що ми називаємо волею народу.

Що саме турбує нас у програші Ела Ґора у Флориді? Те, що більше виборців віддали перевагу Ґору перед Бушем, а не навпаки. Чому наша виборча система про це не знає? Тому що люди, які голосували за Нейдера, не могли висловити свою перевагу Ґору перед Бушем. Іншими словами, ми не враховуємо деякі важливі дані.

Математик сказав би: «Не можна виключати інформацію, що має стосунок до задачі, яку ви намагаєтеся розв'язати!».

А виробник ковбас сказав би: «Коли мелете м'ясо, використовуйте всю корову!».

І обидва погодяться, що ви маєте знайти спосіб узяти до уваги всі переваги виборців, а не тільки те, який кандидат найбільше їм подобається. Припустимо, бюлетень у Флориді дав би змогу виборцям записати всіх трьох кандидатів у порядку від найбільш до найменш прийнятного. Результати могли б виглядати приблизно так:

Буш, Ґор, Нейдер	49 %
Ґор, Нейдер, Буш	25 %
Ґор, Буш, Нейдер	24 %
Нейдер, Ґор, Буш*	2 %

Перша група — республіканці, друга — ліберальні демократи. Третя — консервативні демократи, для яких Нейдер — то вже занадто. Четверта група, як ви знаєте, — ті, що віддали голоси за Нейдера.

Як використати цю додаткову інформацію? Борда запропонував простий і оригінальний метод. Ви можете дати кожному кандидату бали залежно від його місця в списку: якщо є три кандидати, дайте 2 бали за перше місце, один — за друге і 0 — за третє. Тож Буш у нас отримує 2 бали від 49 % виборців і ще один від 24 % голосів, що становить:

$$2 \times 0{,}49 + 1 \times 0{,}24 = 1{,}22.$$

Ґор отримує 2 бали від 49 % виборців і один від 51 %, або 1,49 бала. І Нейдер отримує 2 бали від 2 % від тих виборців, яким він найбільше подобається, і ще один від 25 % лібералів, зрештою 0,29 бала.

* Звісно, були виборці, яким найбільше подобався Нейдер, і вони віддали б перевагу Бушу перед Ґором, або ж любили Буша, але, якщо що, віддали б перевагу Нейдеру перед Ґором. Але мені бракує уяви, щоб зрозуміти, що то за люди, тому я припущу, що їх надто мало, щоб вплинути на підрахунки.

Отже, Ґор приходить першим, Буш — другим, а Нейдер — третім. І це збігається з тим, що 51 % виборців віддають перевагу Ґору перед Бушем, 98 % віддають перевагу Ґору перед Нейдером і 73 % вибирають Буша, а не Нейдера. Усі три більшості отримали те, що хотіли!

А якщо взяти трохи інші цифри? Припустимо, ви перенесете 2 % голосів виборців з «Ґор, Нейдер, Буш» на «Буш, Ґор, Нейдер». Тоді рахунок такий:

Буш, Ґор, Нейдер	51 %
Ґор, Нейдер, Буш	23 %
Ґор, Буш, Нейдер	24 %
Нейдер, Ґор, Буш	2 %

Тепер більшості флоридців Буш подобається більше від Ґора. Та й узагалі більшість у штаті вважають Буша оптимальним вибором. Однак Ґор, за методом Борда, його випереджає: 1,47 проти 1,26. За рахунок чого Ґор виходить на перше місце? За рахунок Ральфа «Стороння Альтернатива» Нейдера, того самого хлопця, що зіпсував ставку Ґору на виборах 2000 року. Присутність Нейдера у виборчому бюлетені підштовхує Буша до третього місця у багатьох бюлетенях, занижаючи йому бали. А Ґор насолоджується перевагою не потрапити в кінець списку, бо люди, які його ненавидять, Нейдера ненавидять ще більше.

А тепер повернімося до слизовика. Пам'ятаєте, слизовику бракує мізків, щоб координувати ухвалення рішень — лише тисячі ядер у плазмодії, що штовхають спільноту то туди, то сюди. Слизовик мусить якось об'єднати доступну інформацію і щось вирішити.

Якби слизовик керувався лише кількістю їжі, він поставив би 5-світло на перше місце, 3-темрява — на друге і 1-темрява — на третє. Якби передусім зважав лише на темряву, то 3-темрява посіла б перше місце, за нею — 1-темрява, а почесне третє дістав би 5-світло.

Ці рейтинги несумісні. Тож як слизовик вирішує віддати перевагу 3-темрява? Летті й Бікман припускають, що слизовик, щоб зробити вибір, використовує якусь форму демократії, такий собі метод Борда. Припустимо, 50 % ядер слизовика перейняті їжею, а 50 % турбує світло. Тоді підрахунки, за Бордом, виглядають так:

5-світло, 3-темрява, 1-темрява	50 %
1-темрява і 3-темрява (порівну), 5-світло	50 %

5-світло отримує 2 бали від половини слизовика, перейнятої їжею, і 0 від тих, яких турбує світло, тобто маємо:

$$2 \times (0,5) + 0 \times (0,5) = 1.$$

За перше місце ми даємо кожному по 1,5 бала; тож 3-темрява отримує 1,5 бала від половини слизовика й один від іншої половини, разом 1,25. А нижній варіант 1-темрява не отримує нічого від половини вічно голодних, які ставлять його на останнє місце, і 1,5 бала від світлоненависників, які віддають цьому варіанту перше місце, загалом 0,75 бала. У фіналі 3-темрява виборює перше місце, 5-світло — друге і 1-темрява приходить останнім — саме так, як в експериментальному результаті.

А якби 1-темрява взагалі не було? Тоді б одна половина слизовика оцінила набагато вище 5-світло, ніж 3-темрява, а інша — 3-темрява вище від 5-світло. У підсумку маємо однакову кількість балів, що і сталося під час першого експерименту, коли слизовик коливався між купою вівсяних пластівців вагою 3 грами у темряві й купою пластівців вагою 5 грамів на світлі.

Інакше кажучи, маленька неосвітлена купа вівса подобається слизовику приблизно так само, що й велика, яскраво освітлена. Але якщо ви додасте *справді* маленьку неосвітлену жменьку пластівців, то неосвітлена темна поряд з нею виглядатиме краще. Настільки краще, що слизовик майже в усіх випадках вибиратиме її, а не велику, яскраво освітлену.

Це явище називають «ефект асиметричного домінування», і слизовики не єдині істоти, які до нього схильні. Біологи з'ясували, що сойки, медоносні бджоли і колібрі[261] діють так само, здавалося б, ірраціонально.

А люди й поготів! Замість вівса підставляємо любовних партнерів. Психологи Константин Седікідес, Ден Аріелі і Нільс Ольсен[262] запропонували студентам перших курсів таку задачу:

> Ви отримаєте опис кількох гіпотетичних любовних партнерів. Вас попросять вибрати *тільки одну* людину, яку ви запросили б на побачення. Уявіть, будь ласка, що всі потенційні партнери: (1) студенти Університету Північної Кароліни (або Університету Дюка); (2) того самого етнічного походження і раси, що й ви; (3) приблизно того самого віку, що й ви. Опис включатиме кілька параметрів із зазначенням кількості процентних пунктів. Ці процентні пункти відображають відносну позицію потенційного партнера за якостями порівняно зі студентами УПК (або УД), що мають таку саму стать, расу та вік, що і потенційний партнер.

Адам знаходиться у 81-му процентилі за привабливістю, 51-му процентилі за надійністю і 65-му процентилі за інтелектом, тоді як Білл — у 61-му процентилі за привабливістю, 51-му процентилі за надійністю і 87-му процентилі за інтелектом. Студентки коледжу, як раніше слизовики, мали зробити непростий вибір. І точно так само, як слизовики, вони розділилися 50-50, що вподобали кожного потенційного партнера.

Однак усе змінилося, коли на сцені з'явився Кріс. Він був у 81-му процентилі за привабливістю, 51-му процентилі за надійністю, як і Адам, але тільки у 54-му процентилі за інтелектом. Кріс був сторонньою альтернативою, тим варіантом, що явно гірший від одного із запропонованих раніше. Ви можете здогадатися, як воно було далі. Завдяки трохи тупішій версії Адама справжній Адам виглядав краще. Тому, вибираючи з трьох варіантів (Адам, Білл і Кріс), майже дві третини жінок вибрали Адама.

Отже, якщо ви самотній хлопець, який шукає кохання, і ви думаєте, кого з друзів взяти з собою як помічника на побаченні, на прогулянку за місто, виберіть того, хто точно схожий на вас — тільки за якимось параметром трохи гірший.

Звідки така ірраціональність? Ми вже бачили, що очевидна ірраціональність громадської думки може виникати з колективної поведінки надзвичайно раціональних окремих людей. Але окремі люди, як свідчить досвід, *не зовсім* раціональні. Історія зі слизовиками показує, що парадокси й непослідовність нашої повсякденної поведінки можна пояснити системніше. Можливо, окремі люди здаються ірраціональними, бо насправді вони не є самостійними індивідами! Кожен з нас — маленька національна держава, яка робить усе можливе, щоб врегулювати розбіжності і досягти компромісу між суперечливими голосами, які нами керують. Результати не завжди мають сенс. Але вони якось дозволяють нам, як слизовикам, рухатися далі, не роблячи надто багато жахливих помилок. Демократія — це безлад, але вона якось працює.

В Австралії і Вермонті використовують усю корову

Дозвольте розповісти, як це роблять в Австралії.

Виборчий бюлетень дуже схожий на Бордівський. Ви не просто відзначаєте кандидата, який вам найбільше подобається, а й ранжуєте всіх кандидатів — від найулюбленіших до тих, кого ви найбільше ненавидите.

Найпростіший спосіб пояснити, що відбувається далі, — це подивитися, як виглядала б Флорида-2000 за австралійською системою.

Почніть з підрахунку голосів за перше місце і виключіть кандидата, що отримав найменшу кількість голосів. У нас це Нейдер. Викиньте його геть! Тепер беремося за Буша і Ґора.

Ми виключили Нейдера зі списку, однак це не означає, що ми маємо викинути бюлетені людей, які за нього голосували. (Використайте всю корову!) Наступний етап — «вибування» — дійсно геніальний. Викреслюйте Нейдера з кожного бюлетеня і знову рахуйте голоси, ніби Нейдера ніколи не було. Тепер у Ґора 51 % голосів за перше місце в рейтингу: 49 % голосів, які він отримав у першому турі голосування, плюс голоси, які йшли Нейдеру. У Буша ті самі 49 %, з яких він почав. У нього менше голосів за перше місце, тому він вибуває. І Ґор стає переможцем.

Що робитимемо з дещо зміненим варіантом Флориди-2000, де ми перемістили 2 % голосів виборців від «Ґор, Нейдер, Буш» до «Буш, Ґор, Нейдер»? У цій ситуації Ґор усе ще вигравав би за методом Борда. А в Австралії це вже зовсім інша історія. Нейдер знову дістав удар у першому раунді. Але тепер перемагає Буш, бо 51 % бюлетенів ставлять його вище від Ґора.

Переваги системи рейтингового голосування (або, як його називають в Австралії, преференційного голосування) очевидні. Люди, яким подобається Ральф Нейдер, можуть голосувати за нього, не хвилюючись, що здають перегони людині, яка подобається їм найменше. Та й сам Ральф Нейдер може спокійно *брати участь у перегонах,* не думаючи про те, що він їх здає людині, яка подобається йому найменше*.

Рейтингове голосування існує вже сто п'ятдесят років. Його використовують не тільки в Австралії, а й в Ірландії, і Папуа-Новій Гвінеї. Коли Джон Стюарт Мілль, котрий завжди був небайдужий до математики, почув про цю ідею, він сказав, що це «один з найбільших здобутків[263] у теорії та практиці урядування»**.

Утім...

Погляньмо на те, що трапилося 2009 року на виборах мера Берлінґтона[264], штат Вермонт, єдиного муніципального округу США, де діє преференційна система голосування***. Приготуйтеся — зараз вас атакують цифри.

Трьома основними кандидатами були республіканець Курт Райт, Енді Монтролл, демократ, і чинний мер Боб Кісс з лівого крила Прогресивної партії. (Там були й інші, другорядні кандидати, але голоси за них я не враховуватиму). Результати голосування:

Монтролл, Кісс, Райт	1332
Монтролл, Райт, Кісс	767
Монтролл	455
Кісс, Монтролл, Райт	2043
Кісс, Райт, Монтролл	371
Кісс	568
Райт, Монтролл, Кісс	1513
Райт, Кісс, Монтролл	495
Райт	1289

* Не певний, чи це справді хвилює Ральфа Нейдера.

** Якщо бути точним, то Мілль казав про тісно пов'язану «систему єдиного переданого голосу».

*** Уже ні — 2010 року на референдумі в Берлінґтоні виборці проголосували за скасування рейтингового голосування.

(Не всі виборці оцінили цю передову систему голосування: деякі просто позначили одного обранця).

Райт, республіканець, отримує 3297 голосів за перше місце; Кісс — 2982 голоси, а Монтролл — 2554 голоси. Якщо ви коли-небудь були у Берлінґтоні, то могли спокійно заявити, що мер-республіканець не відповідає волі народу. У традиційній американській системі голосування Райт виграв би ці вибори завдяки поділу голосів між двома більш ліберальними кандидатами.

Але насправді трапилося дещо інше. Демократ Монтролл мав мінімальну кількість голосів за перше місце в рейтингу, тому його вилучили. У наступному раунді Кісс і Райт зберегли ті голоси за перше місце, які мали до цього, але в 1332 бюлетенях, де було вказано «Монтролл, Кісс, Райт», залишилося «Кісс, Райт», і голоси перейшли до Кісса. Аналогічно 767 голосів з «Монтролл, Райт, Кісс» перейшли до Райта. Остаточний результат: Кісс — 4314, Райт — 4064, а це означало, що Кісса переобрано.

Таки непогано, еге ж? Але зачекайте хвилинку. По-іншому додавши числа, ви зможете перевірити, що 4067 виборцям Монтролл сподобався більше, ніж Кісс, і тільки 3477 виборців Кісс сподобався більше, ніж Монтролл. І 4597 виборців віддали перевагу Монтроллу перед Райтом, але тільки 3668 виборців віддали перевагу Райту перед Монтроллом.

Іншими словами, більшості виборців сподобався центристський кандидат Монтролл більше, ніж Кісс, і більшості виборців Монтролл сподобався більше, ніж Райт. Це доволі серйозне підтвердження того, що Монтролл міг стати законним переможцем — і все ж його викинуло вже в першому раунді. Це одне зі слабких місць рейтингової системи голосування. Кандидату-центристу, який усім дуже подобається, але якого ніхто не поставив на перше місце, перемогти вкрай тяжко.

Підіб'ємо підсумки:

Традиційна американська система голосування — перемагає Райт
Преференційна система — перемагає Кісс
Пряме протистояння — перемагає Монтролл

Ви спантеличені? Усе стає ще гірше. Припустимо, ті 495 виборців, які написали «Райт, Кісс, Монтролл», вирішили голосувати за Кісса, виключивши інших двох кандидатів з бюлетеня. Припустимо також, що 300 тих, що тільки-но обрали Райта, також вирішують голосувати за Кісса. Тепер Райт втратив 795 голосів за перше місце, тобто у нього залишається 2502 голоси. Тож саме він, а не Монтролл, вибуває в першому ж раунді. Далі — Монтролл проти Кісса, і Монтролл перемагає — 4067 проти 3777.

Бачили, що сталося? Ми дали Кіссу більше голосів — і замість перемоги він програв!

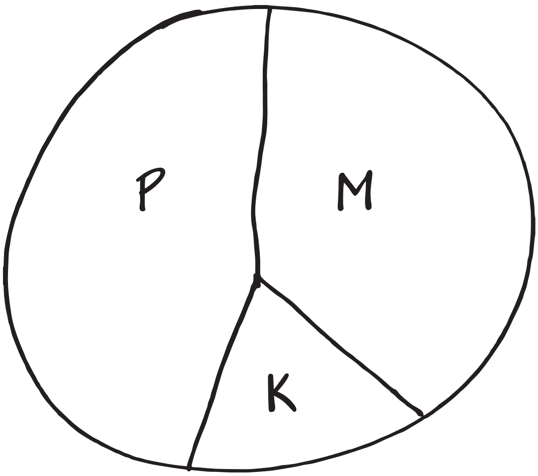
У вас легке запаморочення? Це нормально.

Тримайтеся, тепер хоча б зрозуміло, хто *мав* виграти ці вибори. Це Монтролл, демократ — хлопець, який у прямому протистоянні переміг би і Райта, і Кісса. То, може, варто відмовитися від усіх цих підрахунків і виключення кандидатів методом Борда і просто вибрати кандидата, якому віддає перевагу більшість?

Чи немає у вас відчуття, що я заманюю вас у пастку?

Шалений баранець бореться з парадоксом

Спробуємо трохи спростити умови у Берлінґтоні. Припустимо, у нас є тільки три види бюлетенів:



Монтролл, Кісс, Райт	1332
Кісс, Райт, Монтролл	371
Райт, Монтролл, Кісс	1513

Більшість виборців — усі, хто знаходиться у секторах К і Р, — віддають перевагу Райту перед Монтроллом. І друга більшість, сектори М і К, віддають перевагу Кіссу перед Райтом. Якщо для більшості людей Кісс кращий за Райта і для більшості людей Райт кращий за Монтролла, хіба це не означає, що Кісс має перемогти знову? Є тільки одна проблема: людям Монтролл подобається більше за Кісса з великим відривом: 2845 проти 371. Отримуємо дивний трикутник голосів: Кісс б’є Райта, Райт б’є Монтролла, Монтролл б'є Кісса. *Кожний* кандидат вибув би з перегонів, якби опинився у прямому протистоянні з кимсь одним. Тож хто з них може з повним правом обійняти посаду мера?

Оце прикре явище називають *парадоксом Кондорсе*, на честь французького філософа доби Просвітництва, який відкрив його в кінці XVIII століття. Марі Жан Антуан Ніколя де Каріта, маркіз де Кондорсе, напередодні Французької революції був провідним ліберальним мислителем, а зрештою став президентом Національного конвенту. Кондорсе не скидався на політика — був делікатний і стриманий, не надто витривалий, говорив так тихо і швидко, що його пропозицій часто не було чути. З іншого боку, він дратувався, коли доводилося спілкуватися з людьми, чий інтелектуальний рівень не відповідав його власному. Водночас сором'язливий і запальний, Кондорсе отримав від свого наставника Жака Тюрго прізвисько *le mouton enragé* — шалений баранець[265].

Захоплений політичною діяльністю, Кондорсе зберігав при цьому непохитну віру в силу розуму, особливо в математику, як в організаційну основу людських справ. Віра в розум була притаманна всім мислителям доби Просвітництва, однак новою була переконаність Кондорсе, що соціальний і моральний світ можна проаналізувати за допомогою рівнянь і формул. Він був першим соціологом у сучасному розумінні. (Кондорсе послуговувався терміном «соціальна математика».) Народжений в аристократичній родині, Кондорсе швидко зрозумів, що універсальні закони мислення вищі від примх королів. Він погоджувався із твердженням Руссо, що «загальна воля» народу має бути вищою за державу, але, на відміну від Руссо, для нього це не було самоочевидним. Кондорсе вважав, що принцип більшості треба математично обґрунтувати, і він знайшов це обґрунтування в теорії ймовірності.

Кондорсе викладає свою теорію в трактаті 1785 року «Міркування про застосування аналізу до оцінки виборів більшістю голосів». Проста версія: припустимо, що сім присяжних мають ухвалити рішення про винуватість підсудного. Четверо кажуть, що підсудний винен, і тільки троє вважають його невинуватим. Припустимо, ймовірність правильної думки для кожного з цих громадян становить 51 %. У такому разі ви можете очікувати, що більшість, чотири проти трьох, має вищу ймовірність ухвалити правильне рішення, ніж більшість, чотири проти трьох, — неправильне.

Трохи скидається на Світову серію. Якщо грають команди «Філліс» і «Тайґерс» і ми згодні, що «Філліс» дещо кращий за «Тайґерс» — скажімо, він може виграти кожну гру з імовірністю 51 %, — тоді «Філліс» радше виграє Серію з перевагою 4: 3, ніж програє з таким самим відривом. Якби у Світовій серії передбачалося п'ятнадцять матчів для визначення найкращого, а не сім, перевага Філадельфії була б іще ймовірнішою.

Так звана теорема журі Кондорсе показує, що досить велике журі, скоріш за все, дійде правильного висновку, якщо присяжні мають індивідуальну схильність до правильних суджень, хоч якою незначною вона є*. Якщо більшість людей вірять у щось, казав Кондорсе, це може бути переконливим доказом того, що це правильно. Математика обґрунтовує, чому ми довіряємо думці досить великої більшості, навіть якщо це суперечить нашим попереднім переконанням. «Я маю чинити не так, як я вважаю за розумне[266], — писав Кондорсе, — а керуючись тим, що всі, хто, як і я, абстрагувалися від власної думки, мають вважати відповідним розуму й істині». Роль присяжних багато в чому нагадує роль аудиторії в «Хто хоче стати мільйонером?». Якщо у нас є можливість опитати колектив, думав Кондорсе, нехай навіть людей незнайомих і некваліфікованих, ми маємо цінувати думку більшості вище від своєї власної.

Завдяки прискіпливому підходу Кондорсе став улюбленцем державних діячів, прихильних до науки, як-от Томаса Джефферсона (з яким він поділяв палке захоплення стандартизацією одиниць вимірювання). Джон Адамс, навпаки, зневажав Кондорсе; на берегах його книжок він писав, що автор «ошуканець» і «математичний шарлатан»[267]. Адамс вбачав у Кондорсе безнадійного теоретика із безумним поглядом, чиї ідеї ніколи не втіляться і який негативно впливав на Джефферсона. Утім натхненний математикою жирондистський проект конституції, з її складними виборчими правилами, — так і не був ухвалений ні у Франції, ні деінде. Заслуговує на згадку те, що Кондорсе, дотримуючись принципу доведення ідей до їх логічних висновків, мало не один стверджував, що права людини, які так широко обговорювалися, стосуються і жінок.

1770 року двадцятисемирічний Кондорсе і його математичний наставник Жан Лерон Д'Аламбер, співредактор «Енциклопедії», гостювали у сімдесятирічного Вольтера у Ферні на швейцарському кордоні[268]. Здоров'я Вольтера слабшало, але він досі шанував математику і сприйняв Кондорсе, перспективного молодого чоловіка, як можливість передати раціоналістичні принципи доби Просвітництва наступному поколінню французьких мислителів. Можливо, посприяло й те, що Кондорсе написав для Королівської академії *éloge* (похвальне слово) про ла Кондаміна, старого друга Вольтера, який колись зробив його багатим завдяки своїй схемі виграшу в лотерею. Вольтер і Кондорсе активно листувалися, і Кондорсе розповідав старому останні політичні новини з Парижа.

Деяка незлагода між ними почалася через інше похвальне слово Кондорсе — про Блеза Паскаля. Кондорсе підставово хвалив Паскаля як велико-

* Тут, звісно, багато припущень. Зокрема, що присяжні ухвалюють рішення незалежно одне від одного, тоді як насправді присяжні радяться перед голосуванням.

го вченого. Без розвитку теорії ймовірностей, якому дали поштовх Паскаль і Ферма, не було б і наукових розвідок Кондорсе. Кондорсе, як і Вольтер, відкидав аргументацію парі Паскаля, але з іншої причини. Вольтеру видавалося образливим і несерйозним розглядати метафізичні проблеми як гру в кістки. Кондорсе, як згодом Р. Е. Фішер[269], мав математичні заперечення: він не вважав за можливе говорити про такі питання мовою ймовірностей, як існування Бога, які не керуються випадком. Але рішуче бажання Паскаля за допомогою математики розглядати людське мислення і поведінку неабияк приваблювало молодого «соціального математика».

Вольтер, однак, вважав рушійною силою праці Паскаля релігійний фанатизм і відкидав припущення Паскаля, що математика може пояснити речі за межами спостережуваного світу, як не лише неправильне, а й небезпечне. Вольтер схарактеризував похвальне слово Кондорсе «таким прекрасним, що це аж лякає...[270] Якщо він [Паскаль] був такою великою людиною, тоді всі ми — цілковиті ідіоти, бо не спроможні мислити так, як він. Кондорсе сильно образить нас, якщо опублікує цю книжку в такому вигляді, в якому надіслав її мені». Поряд зі зрозумілими інтелектуальними відмінностями бачимо тут і ревниве роздратування наставника через загравання його протеже з філософським супротивником. Ми майже чуємо, як Вольтер каже: «То з ким же ти, хлопче, з ним чи зі мною?». Кондорсе так ніколи і не зробив цього вибору (хоча, схилившись перед Вольтером, у пізніших виданнях він трохи пом'якшив похвали Паскалю). Він досяг компромісу, поєднавши відданість Паскаля широкому застосуванню математичних принципів із життєствердною вірою Вольтера в розум, секуляризм і прогрес.

Коли ж доходило до голосування, Кондорсе був математиком до нутра кісток. Пересічний чоловік може подивитися на результати Флориди-2000 і сказати: «Як дивно: лівіший кандидат спрацював на користь республіканця». Або, глянувши на виборчі перегони у Берлінґтоні 2009-го, сказати: «Як дивно: той центрист більшості подобався, а вилетів у першому ж раунді». Для математика оте «як дивно» є інтелектуальним викликом. Чи може він точно з'ясувати, що саме *робить* результат дивним? Чи може він формалізувати, яка саме система голосування *не буде* дивною?

Кондорсе був упевнений, що може. Він написав *аксіому*, тобто твердження, що є абсолютно самоочевидним і не потребує доведення. Ось вона:

Якщо більшість виборців віддають перевагу кандидату *A* перед кандидатом *B*, тоді кандидат *B* не може бути вибором народу.

Кондорсе захоплено вітав роботу Борда, але вважав його метод незадовільним — з тієї ж причини, з якої класичний економіст вважає ірраціональною поведінку слизовика. У системі Борда — як за мажоритарної системи голосування — додавання третьої альтернативи може спрацювати на користь кандидата *B*, а не кандидата *A*. Це порушує аксіому Кондорсе: якщо кандидат *A* виграє перегони з двох учасників у *B*, тоді *B* не може перемогти у перегонах з трьох учасників, серед яких є *A*.

Ґрунтуючись на своїй аксіомі, Кондорсе намірявся побудувати математичну теорію голосування — так само, як Евклід побудував цілу теорію геометрії на своїх п'яти аксіомах про поведінку точок, прямих і кіл:

- Через будь-які дві точки можна провести пряму, причому тільки одну.
- Будь-який відрізок прямої можна розширити до відрізка прямої будь-якої потрібної довжини.
- Для будь-якого відрізка прямої *L* є коло з радіусом *L*.
- Усі прямі кути рівні між собою.
- Якщо *P* — точка, а *L* — пряма, що не проходить через *P*, то існує тільки одна пряма, що проходить через точку *P* і паралельна прямій *L*.

Уявіть, що станеться, якщо хтось сконструює складне геометричне доведення, яке показує, що аксіоми Евкліда неминуче призводять до суперечності. Це здається абсолютно неможливим. Будьте пильні — у геометрії є безліч таємниць. 1924 року Стефан Банах і Альфред Тарський показали, як можна розділити сферу на шість частин, перемістити їх і зібрати з них дві сфери, розмір кожної з яких дорівнюватиме розміру початкової сфери. Як таке може бути? Деякі природні аксіоми, у які нас змушує повірити досвід, — про тривимірні тіла, їх об'єм та рух, — істинними є не завжди, хай там що каже інтуїція. Частини сфер Банаха — Тарського — це дуже складні об'єкти, а не щось таке, що можна уявити в примітивному фізичному світі. Тож такий очевидний бізнес-проект: купити платинову кулю, розбити її на шматки Банаха — Тарського, скласти з цих шматків нові кулі й повторювати все це доти, доки не отримаєте вагон дорогоцінного металу, — зазнає краху.

Якби в аксіомах Евкліда існували суперечності, геометри б запанікували, і цілком підставово, бо це означало б, що одна або кілька аксіом, на які вони спиралися, насправді хибні. Можемо сказати ще різкіше: якщо в аксіомах Евкліда є суперечності, то точки, прямі й кола, як їх розумів Евклід, просто *не існують*.

Отакою була мерзенна ситуація, з якою зіткнувся Кондорсе, відкривши свій парадокс. За аксіомою Кондорсе, як бачимо на вищенаведеній круговій діаграмі, Монтролл не може бути обраний, бо він програє у прямому протистоянні з Райтом. Те саме стосується Райта, який програє Кіссу, і Кісса, який програє Монтроллу. Немає такого поняття, як вибір народу. Його просто не існує.

Парадокс Кондорсе зачепив підвалини його логічно обґрунтованого світогляду. Якщо маємо об'єктивний рейтинг кандидатів, навряд чи може бути так, щоб Кісс був кращим за Райта, який кращий за Монтролла, який кращий за Кісса. І Кондорсе мусив визнати, що в разі таких прикладів його аксіому доведеться зробити менш строгою: більшість іноді може помилятися. Утім проблема цим не вирішувалася: як продертися через протиріччя, щоб дізнатися справжню волю народу? А в тому, що вона існує, Кондорсе ніколи не сумнівався.

Розділ 18

«З нічого я створив предивний новий світ»

На думку Кондорсе, такі запитання, як «Хто найкращий лідер?», мають щось подібне до *правильної відповіді*, і що громадяни є чимось на зразок наукових приладів для дослідження таких питань — зі своїми похибками вимірювання, але загалом досить точні. Для нього демократія і принцип більшості були способами не помилятися, завдяки математиці.

Нині про демократію ми так не говоримо. Для більшості людей сьогодні привабливість демократичного вибору в тому, що він *справедливий*; ми говоримо мовою прав людини і з моральних міркувань віримо в те, що люди повинні мати можливість обирати своїх правителів, хоч мудрий цей вибір, а хоч ні.

Це не просто розмова про політику — це фундаментальне питання, застосовне до всіх сфер розумової діяльності. Ми намагаємося з'ясувати, що є *правдою*, чи намагаємося з'ясувати, які висновки є допустимими з огляду на наші правила і процедури. Треба сподіватися, що ці поняття зазвичай узгоджуються; однак усі труднощі, а через те і все концептуально найцікавіше стається там, де вони розходяться.

Для вас може бути очевидним, що з'ясування правди — це те, що ми завжди маємо робити. Проте це не завжди так у кримінальному праві, де розбіжності постають цілком чітко у формі відповідачів, які вчинили злочин, але яких не можна засудити (скажімо, тому, що докази отримані з порушеннями), або невинуватих у злочині, яких усе одно засуджують. Де тут справедливість — покарати винного і звільнити невинуватого чи, хай там як, дотримуватися принципів судочинства? В експериментальній науці ми вже бачили суперечку між Р. Е. Фішером, з одного боку, і Єжи Нейманом та Еґоном Пірсоном, з іншого. Чи намагаємося ми, як гадав Фішер, з'ясувати, які гіпотези ми насправді маємо вважати істинними? Чи потрібно дотримуватися принципів Неймана — Пірсона, за якими треба цілковито відкинути думки про істинність гіпотез, а замість цього ставити питання так: які гіпотези ми маємо визнати правильними — хоч істинні вони, а хоч ні, — згідно з обраними нами правилам виведення?

Навіть у математиці, що мала би бути царством визначеності, ми наражаємося на ці проблеми. І не на таємничому передньому краї сучасних досліджень, а в старій класичній геометрії. Ця тема присутня навіть в аксіомах Евкліда, які ми записували у попередньому розділі. П'ята аксіома:

> Якщо *P* — точка, а *L* — пряма, що не проходить через *P*, то існує тільки одна пряма, що проходить через точку *P* і паралельна прямій *L*.

Трохи кумедно, так? Ця аксіома дещо складніша і дещо менш очевидна за інші*. Принаймні такою вона видавалася геометрам протягом багатьох століть. Дехто вважає, що вона не подобалася і самому Евкліду, який довів перших двадцять вісім теорем своїх «Начал», використовуючи тільки перші чотири.

Некрасива аксіома схожа на пляму в кутку на підлозі; сама по собі вона не заважає, а *дратує*: потрібно витрачати занадто багато часу, щоб відшкребти і відмити ту пляму та зробити підлогу чистою і красивою. У математичному контексті це дорівнювало доведенню того, що п'ята аксіома, так званий постулат паралельності, випливає з решти інших. Якби це було так, п'яту аксіому можна було б виключити з Евклідового списку, залишивши його осяйно чистим.

Минуло дві тисячі років, а пляму ще досі не вивели.

1820 року угорський математик Фаркаш Бояї, який протягом довгих років марно намагався розв'язати цю задачу, попереджав сина Яноша не йти його шляхом:

> Не намагайся застосовувати цей підхід до паралелей[271]. Я знаю цей шлях до самого кінця. Я пройшов крізь цю бездонну ніч, що висотала з мого життя усе світло і радість. Благаю: облиш науку паралелей… Я був готовий стати

* Версія п'ятої аксіоми, яку я тут написав, насправді не оригінальна, але логічно еквівалентна версія Евкліда, яку сформулював Прокл у V столітті нашої ери, а зробив популярною Джон Плейфер 1795 року. Евклідів варіант трохи довший.

мучеником, який зніме з геометрії цю пляму і передасть її очищеною людству. Я виконав страхітливу, гігантську роботу; те, що я зробив, набагато краще за досягнення інших, — і все одно я не маю цілковитого задоволення... Я відступив, побачивши, що жодна людина не здатна сягнути дна цієї ночі. Я відступив, не знайшовши розради, жаліючи себе і все людство. Хай навчить тебе мій приклад...

Сини не завжди радяться зі своїми батьками, а математики не завжди легко відступаються. Молодший Бояї продовжив працювати над паралельними прямими, і 1823 року він розробив свій підхід до розв'язання давньої проблеми. І він написав батькові так:

Я відкрив дивовижні речі, що вразили мене, і було б вічним нещастям їх втратити. Коли ти, дорогий мій батьку, побачиш їх, ти зрозумієш; зараз я не можу сказати нічого, крім того, що з *нічого я створив предивний новий світ*.

Янош Бояї здогадався підійти до проблеми з іншого боку. Замість того щоб намагатися вивести постулат про паралельність з інших аксіом, він дозволив своєму розуму запитати: а якщо аксіома про паралельні прямі хибна? Суперечність? Янош Бояї дійшов висновку, що суперечності немає — що є *інша* геометрія, не Евклідова геометрія, в якій перші чотири аксіоми правильні, а постулат про паралельність — ні. Таким чином, постулат паралельності не доводиться на основі інших аксіом, таке доведення виключало би можливість геометрії Бояї. Але вона є.

Часом математичне відкриття просто носиться в повітрі — з малозрозумілих причин математична спільнота готова до якогось наступного кроку, і цей крок робиться у кількох місцях одночасно. Коли Бояї працював над своєю неевклідовою геометрією в Австро-Угорщині, в Росії те саме робив Микола Лобачевський*. А великий Карл Фрідріх Гаус, старий друг старшого Бояї, сформулював чимало тих самих ідей у праці, що досі не побачила світ. (Дізнавшись про статтю Бояї, Гаус відповів дещо нечемно: «Хвалити це — те саме, що хвалити себе»[272]).

Щоб описати так звану гіперболічну геометрію Бояї, Лобачевського і Гауса, треба набагато більше місця, ніж ми тут маємо. Однак, як зазначив через кілька десятиліть Бернгард Ріман, існує простіша неевклідова геометрія, яка зовсім не є божевільним новим світом: це сферична геометрія.

Згадаймо перші чотири аксіоми:

- Через будь-які дві Точки можна провести Пряму, причому тільки одну.
- Будь-який відрізок Прямої можна розширити до відрізка Прямої будь-якої потрібної довжини.

* Одна з пісень Тома Лерера так і називається — «Лобачевський». І, безперечно, це найкомічніший музичний номер усіх часів про математичну публікацію.

- Для будь-якого відрізка Прямої *L* є Коло з радіусом *L*.
- Усі Прямі Кути рівні між собою.

Можливо, ви зауважили, що я зробив певні зміни щодо типографіки, написавши терміни *точка, пряма, коло і прямий кут* з великої літери. Я зробив це не для того, щоб змавпувати старовинне типографічне оформлення, а щоб підкреслити, що з логічного погляду немає значення, як називати «точки» і «прямі»; їх можна називати *жабами* і *кумкватами*, але структура логічного висновку з цих аксіом залишатиметься тією самою. Це схоже на семиточкову площину Джино Фано, на якій «прямі» виглядають зовсім не так, як нас учили у школі, проте це байдуже. Суть у тому, що ці прямі поводяться як прямі за законами геометрії. У певному сенсі було б *краще* називати точки жабами, а прямі — кумкватами, тому що ідея саме в тому, щоб звільнитися від заданих наперед уявлень, що насправді означають слова *Точка* і *Пряма*.

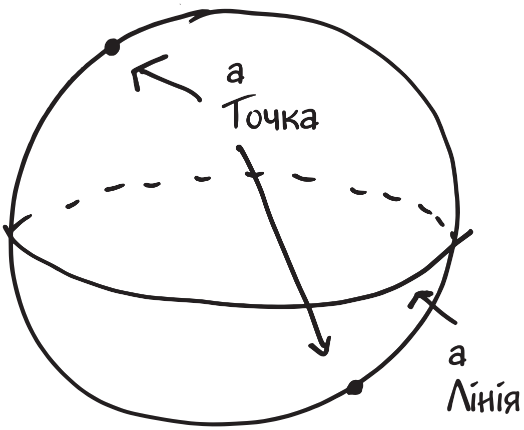
Ось що означають ці терміни у сферичній геометрії Рімана. Точка — це *пара* точок на сфері, які є антиподальними, або діаметрально протилежними. Пряма — це «велике коло» — тобто коло на поверхні сфери, а відрізок Прямої — це відрізок такого кола. А Коло — це і є коло, яке тепер може мати будь-який розмір.

За таких визначень перші чотири аксіоми Евкліда правильні! Для будь-яких двох Точок — тобто будь-яких двох *пар* антиподальних точок на сфері — існує Пряма, тобто Велике Коло, яка їх з'єднує*. Крім того (хоча це не одна з аксіом), будь-які дві Прямі перетинаються в одній точці.

Можливо, ви поскаржитеся на другу аксіому. Як можна стверджувати, що відрізок Прямої можна продовжити до *будь-якої* довжини, якщо він не може бути довший за саму Пряму, яка є колом на сфері? Це обґрунтоване заперечення, але воно зводиться до питання інтерпретації. В інтерпретації Рімана аксіома передбачає, що прямі є *необмеженими*, а не те, що вони мають нескінченну довжину. Між цими двома поняттями є тонка відмінність: прямі Рімана, які є колами, мають скінченну довжину, але не є обмеженими, тобто по них можна подорожувати вічно, ніде не зупиняючись.

Але п'ята аксіома — історія інша. Припустимо, у нас є точка *P* і пряма *L*, яка не містить точки *P*. Чи існує одна і тільки одна пряма, що проходить через точку *P*, паралельна *L*? Ні, і причина дуже проста: у сферичній геометрії *немає таких речей*, як паралельні прямі! Будь-які два великі кола на сфері мають перетинатися.

* Це не має бути відразу очевидно, але нескладно переконатися, що це правда — я наполегливо рекомендую взяти тенісний м'яч і маркер — спробуйте!



ДОВЕДЕННЯ НА ОДИН АБЗАЦ. Будь-яке велике коло C ділить сферу на дві рівні частини, кожна з яких має однакову площу; назвемо цю площу A. Тепер припустимо, що існує ще одне велике коло C', паралельне колу C. Оскільки коло C' не перетинається з колом C, воно має бути повністю розташоване з одного чи з іншого боку C, на одній із півсфер площею A. Але це означає, що площа, обмежена колом C', *менша* за A, що неможливо, оскільки кожне велике коло обмежує площу, що точно дорівнює A.

Тож постулат паралельних прямих зазнав краху. (У геометрії Бояї ситуація протилежна: існує дуже багато паралельних прямих, а не дві, і насправді існує *нескінченно багато* прямих, які проходять через P паралельно L. Ви вже зрозуміли, що таку геометрію унаочнити важкувато.)

Якщо це дивне твердження — що паралельних прямих немає — здається вам знайомим, то це тому, що ми тут уже були. Це явище ми спостерігали на проективній площині, яку Брунеллескі і його друзі-митці застосовували для розробки теорії перспективи*. Там будь-які дві прямі теж перетинаються. І це не простий збіг — можна довести, що геометрія Точок і Прямих Рімана — це *те саме*, що й геометрія проективної площини.

Якщо їх інтерпретувати як твердження про Точки і Прямі на сфері, то перші чотири аксіоми правильні, а п'ята — ні. Якби п'ята аксіома логічно випливала з перших чотирьох аксіом, існування сфери становило б суперечність. П'ята аксіома була б і істинною (бо істинні перші чотири), і хибною (через те, що ми знаємо про сфери). Згідно зі старим добрим доведенням від супротив-

* Художники не мали потреби в розробці формальної геометрії проективної площини, але вони розуміли, як це перетворюється в мазки на полотні — і цього було цілком достатньо для їхніх цілей.

ного це означає, що сфер не існує. Але сфери таки є. Тож п'яту аксіому неможливо вивести з перших чотирьох, — що й потрібно було довести.

Здається, щоб вивести цю пляму з підлоги, знадобилося забагато праці. Однак ми доводимо такі твердження не через саму лише нав'язливу перейнятість естетикою (хоча я не можу заперечувати, що ці почуття таки відіграють певну роль). Річ ось у чому: щойно ви зрозумієте, що перші чотири аксіоми застосовні до багатьох різних геометрій, тоді будь-яка теорема, доведена Евклідом на підставі цих аксіом, має бути істинною не тільки в геометрії Евкліда, а й в *усіх* геометріях, де виконуються ці аксіоми.

І ці теореми не просто про абстрактні геометрії, придумані лише для того, щоб щось довести. Після Ейнштейна ми розуміємо, що неевклідова геометрія не просто гра; це вам може й не подобатися, але саме так виглядає простір—час.

Ця історія повторюється в математиці знову і знову: ми розробляємо метод, який можна застосовувати для розв'язання однієї задачі, і, якщо це *добрий* метод, — який справді містить нову ідею, — як правило, з'ясовується, що це саме доведення діє у багатьох контекстах, які можуть відрізнятися від оригінального так само, як сфера відрізняється від площини або навіть ще більше. Сьогодні молодий італійський математик Олівія Карамелло збурила спільноту своїми твердженнями, що теорії, якими керуються різні галузі математики, є тісно пов'язаними між собою на глибинному рівні — якщо вам подобаються професійні терміни, вони «класифікуються за однаковими топосами Ґротендіка», — і, відповідно, що теореми, доведені в одній галузі математики, можна вільно переносити в галузь, яка видається цілковито іншою. Ще зарано говорити, чи справді Карамелло створила «дивний новий світ», як це зробив Бояї, — але її робота значною мірою суголосна з тією давньою традицією у математиці, частиною якої був Бояї.

Ця традиція зветься «формалізм». Саме про це говорив Ґ. Ґ. Гарді, коли із захопленням зазначив, що математики XIX століття почали нарешті запитувати, як *визначити*

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

а не *чим є* цей вираз. Це дозволяло їм уникнути «непотрібних ускладнень», які переслідували математиків у раніші часи. Згідно з найчистішою версією такого підходу, математика стає такою собі грою із символами і словами. Твердження є теоремою, якщо воно виводиться з аксіом за допомогою логічних операцій. Але до чого відсилають аксіоми і теореми (що позначають), що вони насправді *означають,* — питання принципово відкрите. Що таке Точка, пряма, жаба або кумкват? Це може бути всім, що поводиться, як того вимагають аксіоми, а значення ми маємо вибирати, виходячи з поточних потреб. Суто формальна геометрія — це геометрія, з якою можна працювати, навіть якщо ви ніколи не бачили або не уявляли собі точку або пряму; це геометрія, у якій немає значення, як точки і прямі, у звичайному їхньому розумінні, насправді виглядають.

Гарді напевне сприйняв би душевні муки Кондорсе як непорозуміння найменш необхідного різновиду. Він порадив би Кондорсе не питати, хто насправді найкращий кандидат або навіть кого громадяни насправді хотіли обрати на якусь посаду, а якого кандидата ми повинні *визначити* як вибір народу. І такий формалізм у демократії є більш чи менш загальноприйнятим сьогодні у вільному світі. На спірних президентських виборах у Флориді 2000 року тисячі виборців округу Палм-Біч, які вважали, що голосують за Альберта Ґора, насправді віддали свої голоси за кандидата від печерно-консервативної Партії реформ Патріка Б'юкенена через оформлення «бюлетеня-метелика», яке вводило їх в оману. Якби Ґор отримав ці голоси, він переміг би у Флориді і став президентом США.

Але Ґор їх не отримав; насправді він навіть ніколи серйозно не порушував питання про них. Американська виборча система формалістська: значення має відмітка на бюлетені, а не те, що має на увазі виборець, коли робить цю позначку. Кондорсе турбувався б наміром виборця; нас, принаймні офіційно, це не обходить. Кондорсе також би турбувався флоридцями, які голосували за Ральфа Нейдера. Прийнявши, що здається допустимим, що більшість цих людей віддавали перевагу Ґору перед Бушем, ми бачимо, що саме Ґор є тим кандидатом, якого аксіома Кондорсе проголошує переможцем: більшість виборців віддали перевагу Ґору перед Бушем, а ще значніша більшість віддала йому перевагу перед Нейдером. Проте всі ці переваги не мають жодного значення за чинної виборчої системи. Волю народу для нас уособлює позначка, яка найчастіше з'являється на аркушах паперу, що збираються у кабінках для голосування.

Та й цю кількість можна оскаржити. Як підраховувати частково пробиті бюлетені? Що робити з голосами, які надійшли поштою із закордонних військових баз (точно невідомо, їх вкинули в день виборів чи раніше)? І скільки в округах штату Флорида потрібно було перерахувати бюлетенів, щоб отримати якомога точніші результати виборів?

Саме це останнє питання й потрапило на розгляд Верховного суду, і там його зрештою вирішили. Команда Ґора попросила перерахувати голоси, і Верховний суд штату Флорида погодився, проте Верховний суд США скасував це рішення[273], зафіксувавши результати виборів, згідно з якими Буш здобув перемогу з перевагою 537 голосів. Мабуть, подальший підрахунок дав би точніший результат; але це, як зазначив суд, не є головною метою виборів. Судді заявили, що перераховувати голоси в одних округах і не перераховувати в інших було б несправедливістю до тих виборців, чиї бюлетені не переглядалися. Справжня роль держави не в тому, щоб якомога точніше підрахувати голоси — і знати, що насправді відбулося, — а в тому, щоб виконувати формальний протокол, який, за визначенням Гарді, каже нам, кого слід оголосити переможцем.

Якщо загальніше, то формалізм у сфері права виявляється у дотриманні процедури і формулювань нормативних документів, навіть коли — чи особливо у тих випадках, коли — вони суперечать тому, чого вимагає здоровий глузд. Суддя Антонін Скаліа, найзавзятіший прихильник правового формалізму, прямо каже про це: «Хай живе формалізм[274]. Саме він робить державу державою законів, а не людей».

На думку Скаліа, коли судді намагаються зрозуміти, що має на увазі закон — його дух, — їх неминуче обдурюють власні упередження та бажання. Краще суворо дотримуватися формулювань Конституції і законів, вважаючи їх аксіомами, з яких судові рішення можна виводити за допомогою чогось схожого на логічне виведення.

У питаннях кримінального права Скаліа демонструє ту саму прихильність до формалізму: істиною є те, що визнає таким належно організований судовий процес. Скаліа гранично ясно подає цю позицію у своїй особливій думці у справі Троя Ентоні Девіса 2009 року, у якій він стверджує, що засудженому вбивці не має надаватися право на нове судове слухання свідчень навіть у разі, якщо сім з дев'яти свідків у цій справі відкликали свої свідчення:

> Цей Суд *ніколи* не стверджував, що Конституція забороняє виконання вироку щодо підсудного, визнаного винуватим у результаті повного і справедливого судового розгляду, але якому згодом вдалося переконати суд, що він «дійсно» невинуватий.

(Слово «ніколи» виділено курсивом, а слово «дійсно» взято в лапки самим Скаліа).

Стосовно суду, переконаний Скаліа, значення має тільки вердикт присяжних. Девіс був убивцею незалежно від того, убив він когось чи ні.

Член Верховного суду Джон Робертс не такий затятий формаліст, як Скаліа, але загалом він поділяє погляди колеги. На слуханнях про затвердження на посаді 2005 року він яскраво описав свою роботу за аналогією з бейсболом:

> Судді і судові службовці — це слуги закону, а не навпаки. Судді схожі на спортивних арбітрів. Арбітри не встановлюють правила; вони застосовують їх. Роль арбітра і судді критично важлива. Вони мають бути переконані, що всі грають за правилами. Але це обмежена роль. Ніхто ніколи не ходив на матч, щоб подивитися на арбітра.

Робертс, свідомо чи ні, суголосний Біллу Клему, «старому арбітру» Національної ліги з майже сорокарічним стажем, який сказав: «Гра з найкращим суддівством[275] — це гра, після якої вболівальники не можуть згадати суддів».

Але роль арбітра не така обмежена, як говорять про це Робертс і Клем, бо ж бейсбол — це формалістський вид спорту. Щоб з'ясувати це, достатньо подивитися перший матч чемпіонату Американської ліги бейсболу 1996 року між «Балтимор Оріолс» і «Нью-Йорк Янкіз» у Бронксі. Балтиморці вигравали у другій половині восьмого інінгу, коли гравець «Янкіз» Дерек Джитер високо пробив на правий бік поля недалеко від балтиморця Армандо Бенітеса. Удар був добрий, але доступний для центрального гравця Тоні Тараско, який уже був готовий прийняти м'яч. І тоді дванадцятирічний уболівальник «Янкіз» Джеффрі Маєр, який сидів на трибуні в першому ряду, простягнув руку через паркан і штовхнув м'яч на трибуну.

Джитер знав, що це не гоум-ран[276]. Тараско і Бенітес знали, що це не гоум-ран. П'ятдесят шість тисяч уболівальників «Янкіз» знали, що це не гоум-ран. Єдиною людиною на стадіоні «Янкі», який не бачив, як Маєр простягнув руку через паркан, виявився саме той, що мав значення, — арбітр Річ Гарсія. Гарсія назвав м'яч гоум-раном. Джитер не сперечався з арбітром і не намагався активніше грати, щоб зрівняти рахунок. Ніхто цього й не чекав. І це тому, що бейсбол — формалістський вид спорту. Усе *є* таким, як оголошує арбітр, і більше ніяким. Або, як сказав Клем у, напевно, найвідвертішому висловленні своєї онтологічної позиції, яку колись робив професійний спортивний посадовець: «Це ніщо, доки я його не назву».

Усе потроху змінюється. З 2008 року арбітрам дозволили звертатися до відеоповторів, якщо вони не впевнені в тому, що відбувалося на полі. Це добре, бо дає змогу ухвалювати правильні рішення. Але чимало досвідчених уболівальників бейсболу вважають це якимсь чужим духу цього спорту. Я один з них. Закладаюся, Джон Робертс теж.

Не всі поділяють думки Скаліа про закон (зауважте, що його думка у справі Девіса була у меншості). Як ми бачили у справі «Аткінс проти штату Вірґінія», формулювання Конституції, такі як «жорстоке і незвичайне покарання», дають значний простір для інтерпретації. Якщо навіть великий Евклід залишив деяку двозначність у своїх аксіомах, то як чекати чогось іншого від творців-засновників? Правники-реалісти, як-от суддя і чиказький професор Річард Познер, стверджують, що правова практика Верховного суду — це у *жодному разі* не вправляння у формальному дотриманні правил, чим вона є за словами Скаліа:

> Більшість справ, на розгляд яких дає згоду Верховний суд[277], — це кидання монети, у тому сенсі, що їх не можна вирішити звичайним правовим міркуванням з його покладанням на мову Конституції і законів та на раніші рішення. Якби ці справи можна було б вирішити цими, по суті, семантични-

ми методами, їх би, безперечно, вирішували на рівні верховного суду штату або федерального апеляційного суду і ніколи б не передавали на розгляд Верховного суду.

За такого підходу складні правові питання, тобто ті справи, що доходять до Верховного суду, — це питання, які аксіоми залишають невизначеними. Таким чином, судді перебувають у тому самому становищі, що й Паскаль, коли зрозумів, що шляхом міркувань не дійти якогось висновку стосовно існування Бога. Але все ж таки, як пише Паскаль, ми не можемо ухилитися від цієї гри. Суд мусить вирішити, чи здатен він зробити це шляхом звичайного правового міркування, чи ні. Іноді суд йде за Паскалем: якщо міркування не визначають присуду, ухвали рішення, наслідки якого, як виглядає, будуть найкращими. За Познером, саме цей шлях зрештою обрали члени Верховного суду, серед яких був і Скаліа, у процесі розгляду справи «Буш проти Ґора». Рішення, до якого вони дійшли, насправді не було обґрунтоване ні Конституцією, ні прецедентом; це було прагматичне рішення, ухвалене, щоб уникнути загрози тривалого виборчого хаосу.

Привид суперечності

Формалізму властива строга елегантність. Він приваблює таких людей, як Ґ. Ґ. Гарді, Антонін Скаліа і я сам, що насолоджуються красивою строгою теорією, у якій неможливі суперечності. Але нелегко дотримуватися таких принципів послідовно, до того ж неясно, чи є це мудрим. Навіть суддя Скаліа час від часу визнавав, що, буквальне формулювання закону вимагає ухвалення абсурдного рішення, буквальні формулювання слід облишити на користь достовірного припущення з приводу того, що мав на увазі Конгрес[278]. Так само жоден науковець не хоче бути суворо обмеженим правилами статистичної значущості безвідносно до того, які принципи вони декларують. Коли ви проводите два експерименти, один з яких перевіряє певне лікування, що теоретично здається перспективним, а інший — чи виявляє померлий лосось емоційну реакцію на зображення, які йому показують, і обидва експерименти виявляються успішними з *p*-значенням 0,03, ви не хочете ставитися до цих двох гіпотез однаково. Ви хочете підходити до абсурдних висновків з вищим рівнем скептицизму — і до біса правила.

Найбільшим поборником формалізму в математиці був Давид Гільберт, німецький математик, чий список двадцяти трьох проблем, представлений у Парижі на Міжнародному математичному конгресі 1900 року, визначив розвиток значної частини математики XX століття. Гільберт — такий шанований математик, що будь-яка робота, що має хоч якийсь стосунок до двадцяти трьох проблем, набуває особливого блиску навіть через сто років. Якось я познайомився з істориком німецької культури з Колумбуса (штат Огайо), який розповів мені, що саме звичка Гільберта носити сандалі зі шкарпетками є причиною того, що такий стиль досі популярний серед математиків. Жодних доказів на користь цього я не зміг знайти, але мені подобається так думати, бо це допомагає уявить масштабність впливу Гільберта.

Чимало проблем Гільберта здалися швидко; інші — як-от номер вісімнадцять, про якнайщільніше упакування сфер, — було розв'язано тільки недавно (як ми бачили в розділі 12). Деякі не вирішено досі, і для їх вирішення докладається багато зусиль. Зокрема, за вирішення проблеми номер вісім — гіпотези Рімана — Фонд Клея виплатить вам винагороду мільйон доларів. Принаймні одного разу великий Гільберт помилився: у проблемі під номером десять він запропонував знайти алгоритм, за допомогою якого можна було б з'ясувати, чи має будь-яке рівняння розв'язок, у якому всі змінні матимуть значення, які будуть цілими числами. У низці статей 1960–1970-х років математики Мартін Девіс, Юрій Матіясевіч, Гіларі Патнем і Джулія Робінсон показали, що такого алгоритму немає. (Фахівці з теорії чисел в усьому світі полегшено зітхнули — було б трохи прикро, якби виявилося, що якийсь формальний алгоритм здатний автоматично вирішувати завдання, над якими ми роками мучимося).

Друга проблема Гільберта відрізняється від решти, бо вона була не так математичним питанням, як питанням про саму математику. Починає Гільберт з гучного схвалення формалістського підходу в математиці:

> Коли ми досліджуємо основи науки[279], ми маємо встановити систему аксіом, яка містить точний та вичерпний опис зв'язків, що існують між елементарними ідеями цієї науки. Встановлені таким чином аксіоми є водночас визначеннями цих елементарних ідей; при цьому жодне твердження у сфері науки, основи якої ми досліджуємо, не можна вважати правильним, доки воно не буде виведене з цих аксіом за допомогою скінченного числа логічних кроків.

На момент паризької лекції Гільберт уже звернувся до аксіом Евкліда і переписав їх так, щоб у них не було й натяку на двозначність; при цьому він непохитно дотримувався правила суворої заборони будь-якого звернення до геометричної інтуїції. Його версія аксіом справді зберігає той самий зміст, навіть якщо замінити точки і прямі на жаб та кумкватів. Гільберт сам влучно зауважував: «Треба, щоб у кожному разі можна було сказати — замість точок, прямих і площин — столи, стільці і пивні кухлі»[280]. Одним з перших прихильників нової Гільбертової геометрії був молодий Абрагам Вальд, який ще під час навчання у Відні показав, що деякі аксіоми Гільберта можна вивести з інших, а тому без них можна обійтися*.

---

* Деякі історики і сьогодні зауважують гіперматематизацію економіки, яка бере початок у 1930-х; вони стверджують, що тенденція використовувати аксіоми перейшла від Гільберта

Самої лише геометрії Гільберту було замало. Він мріяв створити математику суто формальну, у якій сказати, що твердження істинне, буде цілковито рівнозначним тому, щоб сказати, що це твердження підпорядковується правилам, установленим на початку гри, — ні більше, ні менше. Така математика сподобалася б Антоніну Скаліа. Аксіоми, які Гільберт планував використовувати для арифметики, вперше сформульовані італійським математиком Джузеппе Пеано, і вони навряд чи можуть спричинитися до цікавих питань або суперечок. У них стверджуються речі на зразок: «Нуль — це число», «Якщо *x* дорівнює *y*, а *y* дорівнює *z*, то *x* дорівнює *z*» та «Якщо число, яке безпосередньо наступне за числом *x*, тотожне числу, безпосередньо наступному за числом *y*, то числа *x* і *y* тотожні». Ці істини є такими, які ми вважаємо самоочевидними.

Аксіоми Пеано цікаві тим, що з цих першопочатків можна вивести значну частину математики. Здається, що самі аксіоми стосуються тільки цілих чисел, але сам Пеано показав, що, почавши з аксіом і рухаючись далі винятково за допомогою визначення та логічного висновування, можна визначити раціональні числа і довести їхні основні властивості*. У математиці XIX століття почалося сум'яття і серйозна криза, коли виявилося, що традиційні визначення в аналізі й геометрії містять логічні помилки. Гільберт вбачав у формалізмі спосіб почати все з нуля, ґрунтуючись на таких підвалинах, які жодним чином не можна поставити під сумнів.

Однак навколо програми Гільберта бродив привид — привид суперечності. Ось вам моторошний сценарій. Члени математичної спільноти узгоджено працюють і перебудовують весь апарат теорії чисел, геометрії й математичного аналізу, починаючи з фундаментальних аксіом — цеглина по цеглині вибудовують нові теореми, прикріплюючи кожен новий рівень до попереднього за допомогою правил висновування. А потім одного чудового дня якийсь математик з Амстердама наводить доказ того, що таке-то математичне твердження істинне, тоді як інший математик з Кіото доводить, що це не так.

І що тут робити? Почавши з тверджень, які неможливо поставити під сумнів, отримали суперечність. Доведення до абсурду. Чи зробите ви висновок, що аксіоми були хибні? А може, помилка у структурі самого логічного висновку? А десятиліття роботи, ґрунтованої на цих аксіомах**?

до економіки через Вальда та інших молодих віденських математиків, які об'єднали гільбертівський метод з потужними прикладними зацікавленнями.

* Мабуть, не можна назвати простим збігом те, що Пеано був ще одним прихильником створення штучних мов на базі раціональних принципів: він створив власну мову «латина без словозміни», якою написав деякі зі своїх пізніших математичних праць.

** У короткому оповіданні Теда Чана «Ділення на нуль» (1991) йдеться про психологічні наслідки, з якими стикається математик, який, собі на біду, відкрив таке протиріччя.

Отже, друга проблема з тих, які Гільберт представив зібранню математиків у Парижі:

> Однак передусім я хотів би позначити це як найважливіше серед численних питань, які можна поставити стосовно аксіом: довести, що вони не є суперечливими, тобто що скінченна кількість ґрунтованих на них логічних міркувань не може привести до отримання суперечливих результатів.

Може виникнути спокуса заявити, що такого жаху статися не може. А як би міг? Очевидно ж, що аксіоми істинні. Але для давніх греків не менш очевидним було те, що геометрична величина мусить бути відношенням двох цілих чисел; так діяло їхнє поняття міри, доки під дією теореми Піфагора й уперто ірраціонального квадратного кореня з двох уся система не посипалась. Математиці притаманна погана звичка демонструвати, що іноді те, що здається очевидно істинним, виявляється цілковито хибним. Візьмімо до прикладу хоч того ж таки Ґотлоба Фреґе — німецького логіка, який, як і Гільберт, наполегливо працював над зміцненням логічних підвалин математики. У центрі уваги Фреґе була не теорія чисел, а теорія множин. Він теж почав з послідовності аксіом, які здавалися такими очевидними, що начебто й не потребували формулювання. У теорії множин Фреґе множина — це ніщо інше, як сукупність предметів, що називаються елементами. Ми часто використовуємо фігурні дужки {} для позначення множин, елементи яких позначені в дужках. Так, {1, 2, свиня} — це множина, елементами якої є число 1, число 2 і свиня.

Коли деякі з цих елементів мають певну властивість, а інші її не мають, існує множина, яка є сукупністю усіх елементів, що мають згадану властивість. Трохи простіше: існує множина свиней, і з них свині жовтої масті становлять множину жовтих свиней. Тут проблем немає. Але ці визначення дуже і дуже загальні. Множина може бути сукупністю свиней, дійсних чисел, ідей, всесвітів або інших множин. І саме це останнє і створює всі проблеми. Чи існує множина всіх множин? Звісно. А множина всіх нескінченних множин? Чому ні? Звісно. Насправді обидві ці множини мають цікаву властивість: *вони є елементами самих себе*. Наприклад, множина нескінченних множин сама, безперечно, є нескінченною множиною. Її елементами є множини на зразок

{цілі числа}
{цілі числа, а також свиня}
{цілі числа, а також Ейфелева вежа}

тощо. Зрозуміло, що кінця-краю цьому немає.

Таку множину можна назвати уроборичною, на честь міфічного змія, який кусає себе за хвоста і сам себе пожирає. Множина нескінченних множин є уроборичною, але множина {1, 2, свиня} ні, бо жоден з її елементів не є самою множиною {1, 2, свиня}: усі її елементи — це або числа, або тварини, але не множини.

Тут настає кульмінація. Нехай **NO** — множина всіх неуроборичних множин. **NO**, здається досить незвичайною річчю, про яку варто подумати, але, якщо визначення Фреґе допускає її у світ множин, то так і має бути.

Чи є **NO** уроборичною множиною, чи ні? Тобто чи є **NO** елементом **NO**? За визначенням, якщо **NO** — уроборична множина, то **NO** не може входити до складу **NO**, яка складається тільки з неуроборичних множин. Але стверджувати, що **NO** не є елементом **NO**, — те саме, що казати, що **NO** — множина неуроборична; вона не містить саму себе.

Заждіть: якщо **NO** — неуроборична множина, тоді це елемент множини **NO**, яка є множиною усіх неуроборичних множин. Тоді **NO** — таки елемент **NO**, тобто **NO** — уроборична множина.

Якщо **NO** — уроборична, вона такою не є, а якщо не є, то є.

Десь такого листа молодий Бертран Рассел написав Фреґе у червні 1902 року. Рассел познайомився з Пеано в Парижі на Міжнародному конгресі — чи слухав він лекцію Гільберта, достеменно невідомо, але він, поза сумнівом, був прихильником програми зведення усієї математики до бездоганної послідовності висновувань з базових аксіом*. Лист Рассела починається як лист молодого шанувальника до старшого логіка: «Я згоден з вами в усіх основних моментах, особливо з вашим неприйняттям психологічного начала в логіці і з тим значенням, яке ви надаєте концептуальному фіксуванню основ математики та формальної логіки, які, до речі, важко розділити».

Але далі: «Я зіткнувся з труднощами лише в одному питанні».

І Рассел пояснює проблему NO, відому нині як парадокс Рассела.

Рассел закінчує листа висловленням жалю з приводу того, що Фреґе ще не опублікував другий том своєї праці «Grundgesetze» («Основи»). Насправді роботу над книжкою було завершено, і вона вже була у видавництві, коли Фреґе отримав Расселового листа. Попри шанобливий тон («Я зіткнувся з труднощами», а не «Привіт! Я щойно зіпсував працю всього вашого життя»), Фреґе відразу ж зрозумів, що означає парадокс Рассела для його версії теорії множин. Змінювати щось у книжці було запізно, але Фреґе швидкома додав епілог з поясненням нищівної ідеї Рассела. Пояснення Фреґе, напевно, — це найсумні-

* Якщо бути точним, Рассел не був формалістом, таким як Гільберт, котрий заявив, що аксіоми — це лише послідовності символів без певного значення. Рассел був радше «логіцистом», на думку якого, аксіоми є істинними твердженнями про логічні факти. Обидві групи дуже цікавилися тим, які твердження можна вивести з аксіом. Те, наскільки ви переймаєтеся цією відмінністю, слугує добрим показником того, чи сподобається вам вивчати аналітичну філософію в магістратурі.

ше в історії речення в науковій математичній праці: «Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als dass ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird». Тобто: «Навряд чи вчений може зіткнутися із чимось більш небажаним, ніж руйнування самої основи своєї роботи одразу після її завершення».

Гільберт та інші формалісти не хотіли залишати відкритою можливість суперечності, вбудовану в аксіоми, як годинникова бомба; він прагнув розробити математичну систему з гарантованою несуперечливістю. Насправді Гільберт не вважав, що в арифметиці, *ймовірно*, є якась прихована суперечність. Як і більшість математиків та навіть більшість нормальних людей, він вважав, що звичні арифметичні правила — це істинні твердження про цілі числа, тож вони не можуть суперечити одне одному. Однак цього було недостатньо — арифметика спирається на положення, що множина цілих чисел *існує насправді*. Для багатьох це виявилося каменем спотикання. Ґеорґ Кантор на кілька десятиліть раніше вперше поставив концепцію нескінченності на міцний математичний підмурівок. Однак його роботу було тяжко зрозуміти, і загального поширення вона не отримала; також чимало математиків вважали, що будь-яке доведення, що ґрунтується на існуванні нескінченних множин, має розглядатися як непевне. Те, що існує число 7, готові були прийняти всі. Те, що існує така річ, як множина *всіх* чисел, було питанням спірним. Гільберт чудово знав, що зробив Рассел з Фреґе, і добре усвідомлював, з якими небезпеками пов’язані буцімто сумирні думки про нескінченні множини. «Уважний читач[281], — писав він 1926 року, — виявить, що в книжках з математики повно дурниць і абсурду, джерелом яких є нескінченність». (Такий тон цілком відповідає деяким із найрізкіших особливих думок судді Антоніна Скаліа.) Гільберт прагнув *фінітного* доведення несуперечності — доведення, в якому не було б посилань на жодні нескінченні множини, доведення, з яким раціональний розум не зміг би нічого зробити, крім як повністю прийняти.

Але на Гільберта чекало розчарування. 1931 року Курт Ґьодель довів свою знамениту другу теорему про неповноту: фінітного доведення несуперечливості арифметики не існує. Він убив програму Гільберта одним ударом.

Тож чи варто турбуватися, що завтра ввечері вся математика впаде? Якщо вже зайшла про це мова, то я не турбуюсь. Я *справді* вірю в нескінченні множини і вважаю доведення несуперечності, у яких застосовуються нескінченні множини, достатньо переконливими для того, щоб спати вночі.

Більшість математиків у цьому на мене схожі, та є і свої дисиденти. 2011 року логік з Принстонського університету Едвард Нельсон представив доведення *суперечливості* арифметики. (На щастя для нас, за кілька днів Террі Тао виявив у цьому доказі помилку[282].) Володимир Воєводський, лауреат

Філдсівської премії, який працює зараз в Інституті перспективних досліджень у Принстоні, став 2010 року автором сенсації, заявивши, що він теж не бачить жодних підстав, щоб вважати арифметику несуперечливою. Разом з великою групою колег з усього світу Воєводський запропонував нове обґрунтування математики. Гільберт починав з геометрії, але швидко прийшов до розуміння того, що несуперечливість арифметики — це проблема фундаментальніша. На відміну від нього, група Воєводського стверджує, що фундаментальнішою є саме геометрія — не геометрія, що була б звичною для Евкліда, а сучасна геометрія, яка зветься *теорія гомотопій*. Чи будуть ці основи опірними до скептицизму і суперечностей? Запитайте мене через двадцять років. На таке потрібен час.

Гільбертів стиль у математиці пережив смерть його формалістської програми. Ще до публікації праці Ґьоделя Гільберт чітко заявив, що насправді не вважає, що математика повинна *створюватися* фундаментально формалістським способом. Це було б занадто тяжко! Навіть якщо геометрію можна представити як вправляння у маніпулюванні беззмістовними послідовностями символів, жодна людина не в змозі будувати геометричні ідеї, не малюючи при цьому картинок, не уявляючи собі фігур і не думаючи про геометричні об'єкти як про *реальні речі*. Мої друзі-філософи вважають такий погляд, який зазвичай називають платонізмом, добряче одіозним: як може бути п'ятнадцативимірний гіперкуб реальною річчю? Я можу тільки відповісти, що для мене такі речі так само реальні, як, скажімо, гори. Зрештою, я можу *визначити* п'ятнадцятивимірний гіперкуб. А ви можете зробити те саме з горою?

Та всі ми Гільбертові діти; коли у вихідні ми п'ємо пиво разом з філософами і філософи починають чіплятися до нас, запитуючи про статус об'єктів, які ми вивчаємо*, ми відступаємо до своєї формалістської фортеці, протестуючи: звичайно, ми вдаємося до геометричної інтуїції для того, щоб зрозуміти, що відбувається, проте наше остаточне *знання* про істинність того, про що ми говоримо, спирається на формальне доведення, яке лежить в основі того, що відбувається. Згідно зі знаменитим формулюванням Філіпа Девіса і Рубена Герша, «типовий професійний математик[283] — це платоніст по буднях і формаліст по неділях».

Гільберт не прагнув зруйнувати платонізм; він хотів зробити світ безпечним для платонізму, поставивши такі предмети, як геометрія, на формальну основу — таку непохитну, щоб ми почувалися цілий тиждень так само впевнено, як і в неділю.

* І вони таки це роблять!

Геній — це явище, що відбувається

Я високо оцінив роль Гільберта — так це і має бути, — однак є небезпека, що, приділяючи таку увагу найвидатнішим, я створюю неправильне враження про математику як про справу нечисленних самотніх геніїв, обраних від народження, що освітлюють шлях решті людства. Таким чином розповідати цю історію легко. У деяких випадках, як-от у випадку Шрініваса Рамануджана, це не така вже й помилка. Рамануджан — вундеркінд з півдня Індії[284]. Він з дитинства придумував дивовижно оригінальні математичні ідеї, які він сам називав одкровеннями богині Намаґірі. Працюючи багато років цілком ізольовано від великого математичного світу, він мав доступ лише до кількох книжок, які могли познайомити його із сучасним станом цієї дисципліни. До 1913 року, коли Рамануджан нарешті встановив контакт з великим світом теорії чисел, він уже списав багато зошитів десь чотирма тисячами теорем, чимало з яких активно досліджуються і сьогодні. (Богиня відкривала Рамануджану формулювання теорем, але не доведення — цю прогалину маємо заповнити ми, спадкоємці Рамануджана).

Однак Рамануджан становить особливий випадок; його історію дуже часто розповідають саме через її нетиповість. Гільберт починав як дуже добрий, але не винятковий студент, і він не був найкращим молодим математиком у Кеніґсберзі; ним був на два роки молодший за Гільберта Герман Мінковський[285]. Згодом Мінковський став видатним математиком, але він не Гільберт.

Один з найбільш болісних аспектів викладання математики — бачити, як культ геніальності шкодить студентам. Саме через культ геніальності студенти вирішують, що займатися математикою не варто, якщо ти не *найкращий* у математиці, бо значення має тільки робота цих особливих людей. Так ми не ставимося до жодного іншого предмета! Ніколи не чув, щоб студенти говорили: «Мені подобається “Гамлет”, але мені не місце на філологічному факультеті; я не той хлопець, що сидить у першому ряду, знає *всі* п’єси і читає Шекспіра з дев’яти років!». Спортсмени не йдуть зі спорту тільки тому, що хтось у команді показує вищі результати. Незважаючи на це, я бачу, як перспективні молоді люди щороку залишають математику, хоча її люблять, — тому що хтось у полі їхнього зору в чомусь «випереджає» їх.

Так ми втрачаємо багатьох студентів-математиків. Отже, ми втрачаємо багатьох майбутніх математиків-учених; але це ще не все. Гадаю, нам потрібно більше студентів, які спеціалізуються на математиці і які потім *не стануть* математиками. Нам потрібно більше спеціалістів-математиків, які стануть лікарями, шкільними вчителями, генеральними директорами і сенаторами. Але цього ми не матимемо, доки не відкинемо стереотип, що математика — справа самих лише вундеркіндів.

Культ геніїв тягне за собою недооцінювання тяжкої праці. Коли я починав, я думав, що «працьовитий» — це така собі завуальована образа, і що так кажуть про студента, якого важко назвати розумним. Тяжко, напружено працювати — зосередити всю увагу й енергію на задачі, міркуючи над нею знову і знову й застосовуючи все, що потенційно може вести до розв'язання, незважаючи на позірну відсутність знаків поступу, — це не кожен уміє. Психологи називають цю рису твердістю[286], і без неї неможливо займатися математикою. Треба постійно й тяжко працювати — але цей аспект легко випустити з уваги, бо ж коли приходить математичне натхнення, все робиться легко й миттєво. Пам'ятаю, як довів свою першу теорему; я писав дипломну роботу в коледжі і зовсім зайшов у глухий кут. Якось увечері я був на засіданні редакції університетського літературного журналу, пив червоне вино і часом вступав у дискусію про якесь нудне оповідання, аж раптом у мене в голові все перевернулося, і я зрозумів, як з того тупика вийти. Жодних подробиць, але це й не важило; я не мав сумніву, що роботу зроблено.

Десь такою може бути математична творчість. Французький математик Анрі Пуанкаре так згадував про свій великий прорив у геометрії 1881 року:

> Ми прибули до Кутанса й пересідали в омнібус, щоб їхати кудись далі; і ось у той момент, коли я ставив ногу на сходинку омнібуса, мені спала на думку ідея (хоча ні про що таке досі я не думав), що ті перетворення, якими я скористався для визначення фуксових функцій, ідентичні перетворенням неевклідової геометрії. Я не перевірив цієї ідеї, просто не мав часу, — бо, щойно сівши в омнібус, продовжив розмову, — але відчував, що маю рацію. Повернувшись до Кана, — щоб заспокоїти совість, — я перевірив*.

Насправді, як пояснює Пуанкаре, це сталося не на сходинці омнібуса. Момент натхнення був наслідком тижнів праці, свідомої і несвідомої, яка готує розум до встановлення необхідних зв'язків між різними ідеями. Чекати, поки прийде натхнення, — шлях до невдачі, хоч яке обдарування маєте.

Мені важко обґрунтувати цю ідею, бо я сам був одним з таких обдарованих дітей. Уже в шість років я знав, що буду математиком. Я вивчав теми, далеко випереджаючи стандартну навчальну програму, на математичних змаганнях виграв медалей на всі груди. І я був повністю впевнений, коли пішов до коледжу, що конкуренти, яких я знав з олімпіад, — найвидатніші математики мого покоління. У дійсності відбулося далеко не так. З цієї групи молодих зірок вийшло багато чудових математиків, таких як Террі Тао — фахівець з гармонійного аналізу, лауреат премії Філдса. Однак більшість математиків, з якими я зараз працюю, у свої тринадцять років призерами математичних

---

* Есе Пуанкаре «Математична творчість» рекомендую прочитати всім, кого цікавить математична творчість або, за великим рахунком, будь-який інший вид творчості.

змагань не були; їхні здібності і таланти розвивалися за іншими графіками. То чи мали вони залишити математику ще у школі?

Що розумієш після тривалої роботи у математиці, — а я думаю, що цей урок застосовний до багато чого ще, — то це, що *завжди* є той, хто в чомусь попереду, чи вчиться він з тобою в одному класі, чи ні. Люди просто починають дивитися на тих, хто має добрі теореми; люди, що мають добрі теореми, починають дивитися на тих, у кого багато добрих теорем; люди, у яких багато добрих теорем, дивляться на тих, хто отримав Філдсівську премію; люди, що мають медаль Філдса, дивляться на тих, хто входить у «внутрішнє коло» філдсівських медалістів, а ці люди завжди можуть дивитися на гігантів минулого. Ніхто ніколи не дивиться у дзеркало й не каже: «Чесно кажучи, я розумніший за Гауса». Проте за останні сто років ці «тупаки-порівняно-з-Гаусом» спільними зусиллями забезпечили найбільший в історії розквіт математичного знання.

Математика — це здебільшого колективна діяльність, у якій кожне відкриття є результатом роботи величезної мережі розумів, які працюють над досягненням спільної мети, навіть якщо ми приписуємо честь цього відкриття людині, яка кладе у будівлю останній камінь. Добре сказав про це Марк Твен: «Потрібна тисяча людей, щоб винайти телеграф або паровий двигун, або фонограф, або телефон, або ще якусь важливу річ, — і останній з них отримує визнання, а решту ми забуваємо».

Тут як у футболі. Звісно, є моменти, коли один гравець бере під свій контроль усю гру, і ці моменти ми пам'ятаємо, ми ними захоплюємося, а потім ще довго про них розповідаємо. Але ці моменти — не звичайні для футболу і не приносять перемогу в більшості зустрічей. Зазвичай перемога — це результат узгодженої дії усієї команди. І не забуваймо про тренерів та їхніх помічників, які підтримують гравців у тонусі, щоб вони могли бігати й кидати м'яча... Ніхто не називає усіх цих людей геніями. Але вони створюють умови, за яких геній може реалізуватися.

Террі Тао пише:

> Популярний образ[287] самотнього (і, можливо, трохи божевільного) генія, який нехтує літературою та іншими джерелами загальноприйнятої мудрості і якому завдяки незбагненному натхненню (посиленому, можливо, уколом страждання) вдається знайти захопливо оригінальне розв'язання задачі, яка виявилася не під силу всім фахівцям, — це чарівний романтичний образ, але він грубо помилковий, принаймні в сучасній математиці. У нас є вражаючі, глибокі й дивовижні результати й ідеї, але їх досягають тяжкою працею, в результаті багатьох років, десятиліть чи навіть століть клопіткої роботи й успіхів багатьох добрих і великих математиків; перехід від одного рівня розуміння до наступного може бути надзвичайно нетривіальним і часом досить несподіваним, але у будь-якому разі він спирається на фундамент попередньої

роботи, а не починається з чистого аркуша... Я вважаю, що реальність сучасних математичних досліджень — у яких поступ досягається природно й сукупно, як наслідок тяжкої праці, в основі якого лежить інтуїція, праця інших і трохи удачі — є набагато кращою, ніж романтичні уявлення, які я мав студентом, про математику як про науку, що розвивається передусім завдяки містичному осяянню якоїсь рідкісної породи «геніїв».

Назвати Гільберта генієм — не помилка. Але правильніше буде сказати, що геніальне те, що зробив Гільберт. Геній — це подія, що відбувається, а не тип особистості.

Політична логіка

Політична логіка — це не формальна система в тому сенсі, який мали на увазі Гільберт та інші фахівці з математичної логіки, але математики з формалістським світоглядом не могли не підходити до політики з тими самими методологічними симпатіями. До цього їх закликав сам Гільберт, який у своїй лекції 1918 року «Аксіоматичне мислення» обстоював ідею, що інші науки теж мають освоїти аксіоматичний підхід, надзвичайно успішний у математиці.

Наприклад, Ґьодель, чия теорема виключила можливість остаточного вигнання суперечностей з арифметики, переймався також Конституцією, яку вивчав, готуючись до іспиту на отримання американського громадянства 1948 року. На його думку, цей документ містить суперечність, яка може дозволити фашистській диктатурі взяти владу в країні цілковито конституційним шляхом. Друзі Ґьоделя Альберт Ейнштейн і Оскар Морґенштерн дуже просили його уникати цієї теми на іспиті, але, як згадує про це Морґенштерн, зрештою сталося так:

Екзаменатор: Отже, пане Ґьодель, звідки ви прибули?
Ґьодель: Звідки прибув? З Австрії.
Екзаменатор: Яка влада у вас в Австрії?
Ґьодель: Це була республіка, але конституція була така, що зрештою вона обернулася на диктатуру.
Екзаменатор: Овва! Це дуже погано! У нашій країні таке неможливо.
Ґьодель: Ще й як можливо. Я можу це довести.

На щастя, екзаменатор швидко змінив тему, і громадянство Ґьоделю дали. А інформація про суперечності[288], які Ґьодель знайшов у Конституції, швидше за все, втрачена для історії математики. Можливо, воно й на краще!

Гільбертова відданість принципу логічності й висновування часто приводила до того, що він, як і Кондорсе, дотримувався напрочуд сучасних поглядів з питань, які не стосуються математики*. Він відмовився підписати опубліковане 1914 року «Звернення до культурного світу»[289] (хоча зрештою це мало для нього деякі негативні наслідки), яке виправдовувало війну кайзера в Європі за допомогою довгого списку заперечень, кожне з яких починалося з «Неправда, що...»: «Неправда, що Німеччина порушила нейтралітет Бельгії» тощо. Звернення підписали багато видатних німецьких учених, як-от Фелікс Кляйн, Вільгельм Рентґен і Макс Планк. Гільберт просто сказав, що не має можливості перевірити правдивість цих тверджень згідно з власними стандартами точності.

Через рік, коли Ґьоттінґенський університет відмовився запропонувати посаду великому алгебраїсту Еммі Нетер, бо нібито студенти не можуть вчитися математики у жінки, Гільберт відповів: «Я не розумію, як стать кандидата може бути аргументом проти її призначення. Ми університет, а не лазня».

Утім аналіз політики за допомогою логічних міркувань має свої межі. У 1930-ті роки, будучи вже старим чоловіком, Гільберт, напевно, не міг до кінця розуміти, що відбувалося на його батьківщині після того, як владу отримали нацисти. Перший аспірант Гільберта Отто Блюменталь відвідав його 1938 року в Ґьоттінґені, щоб привітати з сімдесятивосьмиліттям. Блюменталь був християнином, але походив з єврейської родини, і через це його звільнили з академічної посади в Аахені. (Того самого року Абрагам Вальд перебрався з окупованої німцями Австрії до Сполучених Штатів).

Констанс Рід у своїй біографії Гільберта згадує цю розмову[290] під час святкування дня народження математика:

«Які предмети ви читаєте в цьому семестрі?» — запитав Гільберт.

«Я більше не читаю лекцій», — обережно нагадав йому Блюменталь.

«Як це — не читаєте лекцій?»

«Мені більше не дозволяють їх читати».

«Але це неможливо! Цього не можна зробити. Ніхто не має права звільняти професора, якщо він не вчинив злочину. Чому ви не звертаєтеся до суду?»

* Проте у книжці «Нескінченно малі» Амір Александер стверджує, що в XVII столітті формалістська позиція, яку уособлювала класична евклідова геометрія, асоціювалася із суворою ієрархією та єзуїтською ортодоксією, тоді як більш інтуїтивна і менш сувора доньютонівська теорія нескінченно малих величин була пов’язана з більш прогресивною і демократичною ідеологією.

Поступ людського розуму

Кондорсе також міцно тримався за свої формалістські уявлення про політику, навіть якщо вони не надто відповідали дійсності. Існування циклів Кондорсе означало, що будь-яка виборча система, у якій виконується його базова, позірно незаперечна аксіома, — якщо більшість виборців віддають перевагу кандидату А перед кандидатом *B*, то *B* не може бути переможцем, — може стати жертвою внутрішніх суперечностей. Переважну частину останнього десятиліття свого життя Кондорсе намагався вирішити проблему циклів, розробляючи дедалі складніші системи голосування, які мали на меті виключення проблеми суперечливості колективної думки. Успіху він так і не досяг. 1785 року він з розпачем писав: «Зазвичай ми не можемо уникнути ухвалення таких рішень[291], які можна назвати неоднозначними, за винятком значної більшості голосів або у разі голосування тільки дуже освічених людей… Якщо ми не зможемо знайти виборців, що будуть достатньо освіченими, ми повинні уникати поганого вибору, допускаючи у кандидати тільки тих людей, чиїй компетентності ми можемо довіряти».

Але проблему становили не виборці; то була математика. Кондорсе — тепер ми це розуміємо — від початку був приречений на невдачу. Економіст Кеннет Ерроу довів у своїй дисертації 1951 року, що навіть набагато слабша сукупність аксіом, ніж аксіоми Кондорсе, — сукупність вимог, які на перший погляд так само важко поставити під сумнів, як і правила арифметики Пеано, веде до суперечностей*. Це була неймовірно красива робота, яка допомогла Ерроу отримати Нобелівську премію з економіки за 1971 рік, але вона, безумовно, засмутила б Кондорсе так само, як теорема Ґьоделя засмутила Гільберта.

А може й ні: Кондорсе тяжко було чимось засмутити. У період розвою Французької революції його м'які принципи республіканського устрою швидко витіснилися радикальнішими якобінськими; Кондорсе вперше опинився поза головним політичним потоком, а потім був змушений переховуватися від гільйотини. Проте він і далі вірив у невідворотність прогресу, керованого розумом і математикою. На конспіративній квартирі в Парижі, знаючи, що у нього, можливо, залишилося небагато часу, Кондорсе написав працю «Ес-

* Є одна система голосування, до якої теорема Ерроу незастосовна, — голосування за принципом схвалення: у такому разі немає потреби зазначати всі свої уподобання; ви просто голосуєте за будь-яку кількість кандидатів, і перемагає кандидат, який набрав максимальну кількість голосів. Більшість математиків, яких я знаю, вважають голосування за принципом схвалення і його варіанти досконалішим, ніж голосування більшістю голосів і преференційне голосування. Така система використовувалася на виборах пап, генеральних секретарів ООН і керівників Американського математичного товариства, але так ніколи не обирали посадових осіб у Сполучених Штатах.

кіз історичної картини прогресу людського розуму», в якій виклав своє бачення майбутнього. Це дивовижно оптимістичний документ, що описує світ, в якому такі проблеми, породжені монархічним устроєм, упередженнями щодо статі, голодом і старістю, буде виправлено силою науки. Характерний уривок з цієї праці:

> Чи не можна очікувати того, що людський рід поліпшиться завдяки новим відкриттям у науках і мистецтвах і, як неминучий наслідок цього, — у засобах для забезпечення приватного і загального добробуту; завдяки подальшому розвитку принципів поведінки і моральної практики; і, нарешті, завдяки реальному поліпшенню наших здібностей — розумових, моральних і фізичних, яке може стати результатом або удосконалення інструментів, що збільшують їхню потужність і спрямовують ці здібності, або удосконалення самої нашої природної організації?

Нині «Ескіз» Кондорсе найбільш відомий опосередковано; він надихнув Томаса Мальтуса, який вважав передбачення Кондорсе безнадійно оптимістичними, на створення набагато відомішої і набагато похмурішої праці про майбутнє людства.

Невдовзі після того, як були написані вищенаведені рядки, у березні 1794 року (або, за раціоналізованим революційним календарем, у Жерміналі Другого року), Кондорсе арештували. Через два дні його знайшли мертвим. Одні кажуть, що він наклав на себе руки, інші — що його вбили.

Так само, як вижив математичний стиль Гільберта, незважаючи на руйнування його формальної програми теоремою про неповноту, підхід Кондорсе до політики теж пережив його. Ми більше не сподіваємося знайти виборчі системи, у яких виконується його аксіома. Але ми згодні з фундаментальнішим переконанням Кондорсе — що кількісна «соціальна математика» — те, що ми називаємо соціологією, — має відігравати роль у визначенні належного функціонування держави і влади. Це й було те «удосконалення інструментів, що збільшують потужність і спрямовують ці здібності», про які так яскраво писав Кондорсе в «Ескізі».

Ідея Кондорсе так вросла у сучасний підхід до політики, що ми навряд чи сприймаємо її як питання вибору. Але насправді це вибір. Гадаю — правильний.

Як бути правим

Улітку між другим і третім курсом коледжу я працював в одного дослідника-медика. Цей науковець — за хвилину ви зрозумієте, чому я не називаю його імені — хотів найняти студента-математика, тому що він мав з'ясувати, скільки буде хворих на туберкульоз 2050 року. Це була моя робота на літо — визначити цю кількість. Той науковець дав мені велику папку з документами про туберкульоз: як він передається за різних обставин, типовий перебіг захворювання, максимальна тривалість заразного періоду, криві виживання і дані про ефективність лікування, а також розподіл усіх цих даних за віком, расою, статтю і ВІЛ-інфікованістю. Велика папка. Купа документів. І я заходився працювати, роблячи те, що роблять студенти-математики: розробив модель для визначення рівня захворюваності на туберкульоз, застосовуючи дані, які надав мені медик, з метою оцінки того, як будуть змінюватися і взаємодіяти рівні захворюваності у різних групах населення з часом, десятиліття за десятиліттям, до 2050 року, коли закінчувався період моделювання.

І ось що я з'ясував: я не маю жодної гадки про те, скільки людей хворітимуть на туберкульоз 2050 року. В усіх цих емпіричних дослідженнях була певна невизначеність; вони вказували на те, що швидкість поширення хвороби становить 20 %, але це може бути і 13 %, а може й 25 %, хоча дослідники певні, що не буде 60 % і не буде 0 %. Кожна з цих маленьких локальних невизначеностей поширювалася на всю модель, а невизначеності різних параметрів посилювали одна одну — і до 2050 року шум повністю поглинав сигнал. Модель могла давати які завгодно результати. Можливо, 2050 року туберкульозу не буде зовсім, але також можливо, що хворітиме більшість населення світу. Я не мав принципового способу вибору якогось із варіантів.

Це було не те, що хотів почути той науковець. Це було не те, за що він мені платив. Він платив мені за число, і він терпляче повторив мені своє прохання. Я знаю, що є невизначеність, — сказав він, — вона є в усіх медичних дослідженнях, я це розумію, просто *дай мені твоє найімовірніше припущення*. І байдуже, що я йому казав: будь-яке припущення буде гіршим за те, щоб не робити припущень узагалі. Науковець наполягав. І він був моїм роботодавцем, тому зрештою я здався. Не маю жодного сумніву, що він потім багато розповідав про те, що 2050 року *X* мільйонів осіб будуть хворими на туберкульоз. І готовий закластися: якщо хтось запитував його, звідки він це знає, він казав: «Я найняв математика».

Критик, гідний уваги

Ви можете виснувати, що я рекомендую слабкодухий шлях уникнути помилок, а саме: ніколи нічого не говорити взагалі, відповідаючи на всі важкі запитання знизуванням плечей і ухилянням: *«Ну, звичайно, так може бути, але, з іншого боку, цілком може бути й так...»*

Такі люди — зануди і причепи, «може так, може, не так» — нічого не досягають. Засуджуючи їх, часто наводять цитату з промови Теодора Рузвельта «Громадянство в республіці», виголошеної 1910 року в Сорбонні, незабаром після закінчення його президентства:

> Ні, не критик, який усе розрахував; не людина, яка підмічає, на чому спіткнувся сильний, чи той, хто щось робить, міг би робити це краще. Поваги гідний той, хто насправді перебуває на арені, чиє обличчя вкрите брудом, потом і кров'ю; хто мужньо бореться; хто помиляється, хто раз у раз зазнає невдачі, бо не може бути спроб без помилок і невдач; але той, хто справді намагається щось зробити; хто знає великий ентузіазм, велику відданість; хто присвячує себе гідній справі; хто в кращому разі пізнає тріумф високого досягнення, а в гіршому, зазнавши невдачі, принаймні зазнає її у великій справі, тож його місце ніколи не буде поруч з холодними і боязкими душами, що не знають ні перемог, ні поразок.

Цю частину завжди цитують, але і вся промова фантастично цікава; вона довша і змістовніша за будь-яку з промов сучасних президентів США. У промові можна знайти і проблеми, які ми розглядали у цій книжці, як-от зниження корисності грошей:

> Правда полягає в тому, що після певного рівня відчутного матеріального успіху чи винагороди, якого було досягнуто, питання про його підвищення стає менш важливим у порівнянні з іншими речами, які можна зробити в житті.

А ось про помилку «шведськості»: якщо щось добре, то що його більше, то краще, і навпаки:

> Відмовлятися від прогресу лише тому, що його прихильники часом доходять до абсурдних крайнощів, так само безглуздо, як доходити до тих самих крайнощів через те, що дещо з того, що пропонують прихильники крайніх заходів, є розумним.

Однак головна тема, до якої Рузвельт повертається протягом усієї промови, — це обстоювання думки, що виживання цивілізації залежить від перемоги відважних, розумних і мужніх людей над м'якими, схильними до розумування й безплідними*. Рузвельт виголошував свою промову в Сорбонні — храмі французької науки, де на десять років раніше Давид Гільберт представив свій список двадцяти трьох проблем. Статуя Блеза Паскаля дивилася з балкона. Гільберт вимагав від своїх слухачів піднестися на новий рівень абстракції, відійшовши від геометричної інтуїції і реального світу. Мета Рузвельта була прямо протилежною: визнаючи досягнення французьких учених, він увесь час дає зрозуміти, що їхнє книжне знання є другорядним у творенні національної величі: «Я виступаю у великому університеті, який представляє найвищі інтелектуальні досягнення; я складаю шану інтелекту і цілеспрямованому та спеціалізованому плеканню цього інтелекту; проте я знаю, що всі присутні погодяться зі мною, якщо додам, що ще важливішими є звичайні повсякденні якості і чесноти».

І попри це, — коли Рузвельт говорить: «Кабінетний філософ, витончена й культурна людина, яка зі своєї бібліотеки розповідає, як потрібно керувати людьми за ідеальних умов, не має жодної користі для реальної державної роботи», — я думаю про Кондорсе, який працював у бібліотеці, роблячи саме це, і який зробив для французької держави більше, ніж переважна частина його практичніших сучасників. А коли Рузвельт кепкує з холодних і боязких душ, які сидять збоку і обговорюють дії воїнів, я згадую Абрагама Вальда, який ціле своє життя, наскільки мені відомо, ніколи не брався за зброю[292], але який, незважаючи на це, відіграв серйозну роль у війні, яку вела Америка, — саме даючи рекомендації тим, хто діяв, як їм краще діяти. Вальд не був ні спітнілим, ні забрудненим, ні скривавленим, але він *не помилявся*. Він був критиком, який усе розрахував — і який вартий поваги.

Бо це ж є дія

Утіленням переконань, протилежних Рузвельтовим, є для мене Джон Ешбері, чий вірш «Словами ділу»[293] — найкраще з відомих мені узагальнень того, як невизначеність і одкровення можуть поєднуватися в людині, не знищуючи одне одного. Цей вірш — складніша й точніша картина життя, ніж рузвельтівська справжня людина, що може страждати й зазнавати поразок, але ніко-

* Думка Рузвельта про протистояння «книжної вченості» і мужності яскраво втілена у шекспірівському «Отелло», коли у вступній сцені Яґо презирливо називає свого суперника Кассіо «великим арифметиком», який не нюхав пороху. І цієї миті кожен математик у глядацькій залі розуміє, що саме Яґо — головний злодій.

ли не сходить з обраного шляху. Трагікомічна картина, змальована Ешбері, — це майже відповідь на «Громадянство в республіці» Рузвельта:

Ти бачиш, ми обидва були праві, хоча з нічого
Й виникло нічого; а аватари,
Де ми дотримувались правил і не полишали дому,
Зробили, ну, якоюсь мірою, з нас «добрих громадян»,
Ми зуби чистили, та інше отаке, приймати вчилися
Ударів долі благодійність, як траплялись,
Бо це ж є дія — ця невпевненість, така безпечна
Підготовка, сівба насіння, що у борозну не впало,
Готовність все забути, повертатись завжди,
Аби пришвартуватися, щоб далі плисти в той день — давним-давно.

Бо це ж є дія — ця невпевненість! Це речення я часто повторюю як мантру. Теодор Рузвельт не сказав би, що невпевненість є дією. Він, мабуть, назвав би це боягузливим перечікуванням. «Міські ластівки» — найкраща з марксистських поп-груп, які коли-небудь бралися за гітару, — стала на бік Рузвельта у своїй пісні «Ні тим, ні тим»[294], створивши зневажливий портрет нерішучої людини, прихильника помірності в політиці:

Ні тим, ні тим — ця людина на опитуваннях відповідає по-різному.
Ні тим, ні тим — ця людина бачить обидва боки обох боків...
Але справжня проблема цієї людини в тому,
Що вона говорить, що не може, коли може....

Але Рузвельт і «Міські ластівки» помиляються, а Ешбері — ні. Для нього невпевненість — це ознака сильної людини, а не нікчеми; як ідеться у вірші, в іншому місці, це «нестійка рівновага, вивищена до естетичного ідеалу».

І математика є її частиною. Про математику часто думають як про світ визначеності й абсолютної істини. Десь так воно і є. Ми оперуємо необхідними фактами: $2 + 3 = 5$ і таке інше.

Однак математика — це ще й засіб, з допомогою якого ми можемо міркувати про невизначеність, до якоїсь міри приручаючи її. Так було від часів Паскаля, який спочатку допоміг азартним гравцям зрозуміти примхи випадку, а зрештою визначав шанси у ставках на найбільшу невизначеність, яка тільки може бути. Математика уможливлює для нас принципову невпевненість: не просто розводити руками і казати «ох», а твердо заявляти: «Я не впевнений, ось чому я не впевнений, і ось приблизно наскільки я не впевнений». Або ще більше: «Я не впевнений, і ви маєте бути теж».

Ця людина на опитуваннях відповідає по-різному

Лицарем принципової невизначеності нині є Нейт Сілвер — гравець в онлайн-покер, що перетворився на знавця бейсбольної статистики, що перетворився на політичного аналітика. Його колонки в «Нью-Йорк Таймс» на тему президентських виборів 2012 року привернули до методів теорії ймовірностей більшу, ніж будь-коли, увагу громадськості. Як на мене, Нейт Сілвер — то такий собі Курт Кобейн теорії ймовірностей[295]. Обидва присвятили життя тим культурним практикам, які раніше обмежувалися невеликими замкнутими групами «правовірних» (Сілвер — кількісному прогнозуванню в спорті й політиці, Кобейн — панк-року). І обидва вони довели, що якщо ви виносите свої практики на широкий загал, подаючи їх зрозуміло, але не підлаштовуючи вихідний матеріал під свої цілі, то можете зробити їх надзвичайно популярними.

Що зробило Сілвера таким добрим у своїй справі? Значною мірою це його готовність говорити про невизначеність, готовність обходитися з невизначеністю не як з ознакою нікчемності, а як з реалією цього світу, тим, що можна досліджувати строгими науковими методами і використовувати на практиці. Уявіть, що зараз вересень 2012 року, і ви питаєте купу політичних аналітиків: «Кого оберуть президентом у листопаді?». Багато з них скажуть «Обама», трохи менше — «Ромні», але річ у тому, що всі ці люди помиляються, бо правильною відповіддю є та, яку був готовий дати Сілвер, майже єдиний з-поміж численних ЗМІ: «Кожен з них може перемогти, але в Обами шанси істотно вищі».

Традиційні політичні експерти зустріли цю відповідь так само зневажливо, як колись мої слова роботодавець, який займався проблемою поширення туберкульозу. Вони хотіли *відповіді*. Вони не зрозуміли, що Сілвер її й дає.

Джош Джордан із «Нешнл Рев'ю» писав: «30 вересня, Сілвер дав Обамі шанс на перемогу 85 %[296], що спричинило суперечки, і прогнозує розподіл голосів у колегії виборників 320–218. На сьогодні розрив трохи зменшився, але Сілвер оцінює шанси Обами на перемогу в 67 %, а в колегії виборників — 288–250, що змусило багатьох задуматися, чи зауважив він упродовж минулих трьох тижнів динаміку на користь Ромні, яку побачили всі решта».

Чи зауважив він динаміку на користь Ромні? Таки зауважив. Він дав Ромні 15 %-ві шанси на перемогу в кінці вересня, і 33 % — 22 жовтня, майже удвічі більше. Однак Джордан не зауважив, що Сілвер це зауважив, оскільки Сілвер і раніше абсолютно правильно вважав, що Обама має більші шанси на перемогу, ніж Ромні. Для традиційних політичних оглядачів, таких як Джордан, це означало, що його відповідь не змінилася.

Або візьмімо Ділана Баєрса з «Політіко»: «Тож, якщо 6 листопада переможе Мітт Ромні[297], тяжко уявити, як люди зможуть і далі довіряти прогнозам людини, яка ніколи не оцінювала шанси цього кандидата на перемогу більш як 41 % (давно — 2 червня), і — за тиждень до виборів — дає йому один шанс з чотирьох, хоча, згідно з опитуваннями, він майже не відстає від чинного президента... Попри впевнені прогнози, часто скидається на те, що Сілвер надто перестраховується».

Якщо хоч якось зважати на математику, то після таких рядків хочеться проштрикнути собі руку виделкою. Те, що пропонує Сілвер, — це не перестрахування; це чесність. Коли прогноз погоди каже, що ймовірність дощу — 40 %, ви перестаєте довіряти синоптикам? Ні, ви розумієте, що погода мінлива і що однозначне твердження про те, буде завтра дощ чи його не буде, — це помилка*.

Звичайно, Обама таки переміг, причому з великим розривом, через що критики Сілвера виглядали трохи по-дурному.

Іронія в тому, що, якби критики хотіли зловити Сілвера на хибному прогнозі, вони мали чудову можливість. Вони могли спитати в нього: «Результати скількох штатів виявляться помилковими?». Наскільки мені відомо, ніхто ніколи так питання йому не ставив, але зрозуміло, яка була б відповідь. Двадцять шостого жовтня Сілвер оцінив шанси Обами на перемогу в штаті Нью-Гемпшир у 69 %. Якби ви там і тоді зажадали б від нього відповіді, хто переможе на виборах, він назвав би Обаму. Таким чином, ви могли б сказати, що Сілвер оцінює ймовірність помилки з приводу результатів виборів у Нью-Гемпширі як 0,31. Тобто *очікувана частка неправильних відповідей*, які він дав би на питання про Нью-Гемпшир, становила б 0,31. Пам'ятайте, що очікувана цінність — це не та цінність, яку ви очікуєте, а ймовірнісний компроміс між можливими результатами — у такому разі Сілвер або дасть нуль неправильних відповідей про Нью-Гемпшир (імовірність такого результату 0,69), або одну неправильну відповідь (імовірність такого результату 0,31), що дає очікуване значення

$$(0{,}69) \times 0 + (0{,}31) \times 1 = 0{,}31,$$

отримане методом, викладеним у розділі 11.

Сілвер був більш упевнений у Північній Кароліні, даючи Обамі лише 19 %. А це водночас означає, що Сілвер оцінює як 19 % імовірність того, що він помилився у своєму прогнозі стосовно Ромні; тобто він дає собі ще 0,19 очіку-

* Є й інші, глибші причини скептично ставитися до підходу Сілвера, хоча на них не надто наголошувала вашингтонська преса. Наприклад, дотримуючись лінії Фішера, можна було заявити, що мова теорії ймовірностей не підходить до одиничних подій, а застосовується тільки до таких речей, як підкидання монети, яке можна повторювати знову і знову.

ваних неправильних відповідей. Ось список штатів, які Сілвер вважав потенційно конкурентними 26 жовтня[298]:

Штат	Імовірність перемоги Обами, %	Очікувана частка неправильних відповідей
Ореґон	99	0,01
Нью-Мексико	97	0,03
Міннесота	97	0,03
Мічиґан	98	0,02
Пенсильванія	94	0,06
Вісконсин	86	0,14
Невада	78	0,22
Огайо	75	0,25
Нью-Гемпшир	69	0,31
Айова	68	0,32
Колорадо	57	0,43
Вірґінія	54	0,46
Флорида	35	0,35
Північна Кароліна	19	0,19
Міссурі	2	0,02
Аризона	3	0,03
Монтана	2	0,02

Математичне очікування має властивість адитивності, тому найдостовірніше припущення Сілвера про кількість конкурентних штатів, які він вибрав неправильно, є сумою часток кожного штату, тобто 2,83. Тож Сілвер, імовірно, якби йому поставили таке запитання, відповів би: «У середньому я помилюся у прогнозах для трьох штатів».

Насправді він не помилився стосовно жодного з усіх п'ятдесяти*.

Навіть найдосвідченішому політичному експерту було б важко закинути Сілверу, що його прогнози виявилися точнішими, ніж він сам думав. Певне замішання, яке викликає такий поворот, — річ здорова; так і потрібно! Коли ви міркуєте правильно, як це робив Сілвер, виходить, що ви завжди вважаєте, що маєте рацію, але не вважаєте, що маєте рацію завжди. Як сказав філософ В. В. О. Куайн, «вірити у щось — значить вірити в те, що це правда[299]; тому розумна людина вважає кожне своє переконання істинним; водночас досвід навчив її, що деякі з переконань, невідомо які, будуть помилковими.

* Якщо бути точним, його *остаточний* прогноз був правильним для всіх штатів. 26 жовтня він правильно оцінив усе, крім Флориди. Останні два тижні виборчої кампанії в опитуваннях спочатку лідирував Ромні, а потім голоси розділилися між двома кандидатами майже 50 на 50.

Розумна людина вірить у те, що кожне її переконання є істинним і що деякі з них хибні».

Формально це дуже нагадує позірну суперечливість в американській громадській думці, яку ми розглядали у розділі 17. Американці вважають, що кожна урядова програма заслуговує на фінансування, але це не означає, що вони вважають, що *усі* урядові програми заслуговують на фінансування.

Сілвер відійшов від традиційного висвітлення політичних подій і розповів громадськості правдивішу історію. Замість того щоб сказати, хто переможе чи у кого яка «динаміка», він повідомив свої припущення з приводу шансів кандидатів. Замість того щоб сказати, скільки голосів виборників отримає Обама, він запропонував імовірнісний розподіл: скажімо, Обама має імовірність 67 % отримати 270 голосів виборників[300], які були необхідні йому для переобрання, імовірність отримання 300 голосів — 44 %, 330 голосів — 21 % і так далі. Оцінки Сілвера були невизначеними, *строго* невизначеними, — і громадськість це оцінила. Я не думав, що це можливо.

Це означає діяти, а не просто бути впевненим!

Проти точності

Єдиний закид на адресу Сілвера, який мені здається до певної міри виправданим, це те, що людей вводять в оману твердження на зразок «На даний момент шанси Обами на перемогу становлять 73,1 %». Дробова частина числа засвідчує такий рівень точності оцінювання, якого насправді немає: навряд чи варто говорити про те, що щось сильно зміниться, якщо модель Сілвера дасть значення 73,1 % сьогодні і 73,0 % завтра. Це критичне зауваження стосується подачі Сілвером інформації, а не його програми, але цій обставині політичні експерти приділяли багато уваги: вони вважали, що аудиторію схиляють довіряти прогнозу за допомогою величин, які виглядають так, ніби вони є надзвичайно точними.

Є така річ, як надмірна точність. Моделі, які ми використовуємо для підрахунку результатів стандартизованих шкільних іспитів, можуть вирахувати бал з точністю до кількох десяткових знаків, якщо ми дозволимо; але ми не дозволимо — учні й так дуже нервують, і їм не потрібно хвилюватися ще й через те, що хтось з однокласників попереду на одну соту відсотка.

Фетиш досконалої точності позначається на виборах, і не тільки в період відстежування результатів опитувань, а й після завершення виборів. 2000 року вибори у Флориді завершилися з різницею у кількасот голосів між Джорджем Бушем і Альбертом Ґором — на соту частку відсотка від загальної кількості голосів. Було дуже важливо, згідно із законодавством і звичаєм, визначити, кому з кандидатів може дістатися ця різниця в кілька сотень голосів. Але якщо нас цікавить, кого мешканці Флориди хотіли б бачити президентом, то це абсурд;

неточність, спричинювана зіпсованими, втраченими та неправильно порахованими бюлетенями, набагато більша за мізерну різницю між остаточними результатами. Ми не знаємо, хто отримав більшість голосів у Флориді. Відмінність між суддями і математиками в тому, що судді мають знайти спосіб удати, що ми знаємо, тоді як математики вільні говорити правду.

Журналіст Чарльз Сейфі включив до своєї книжки «Доказовість» кумедну і трохи гнітючу хроніку схожої запеклої боротьби між демократом Елом Франкеном і республіканцем Нормом Коулменом за право представляти штат Міннесота у сенаті США. Було б чудово сказати, що Франкен обійняв посаду сенатора, бо об'єктивна аналітична процедура показала, що рівно на 312 більше виборців штату Міннесота хотіли бачити його там. Однак у дійсності це число відображає результат тривалої юридичної тяганини з таких питань, як-от чинність бюлетеня з відміткою біля прізвища «Франкен» і самостійно вписаним «Рептилоїд». І після такого вже не має сенсу питання, хто «насправді» отримав більше голосів. Сигнал загубився в шумі. Я схильний погодитися із Сейфі, який обстоює думку, що вибори з такими близькими результатами кандидатів мають вирішуватися киданням монети*. Комусь не сподобається ідея випадкового вибору наших лідерів. Але насправді це найбільша перевага кидання монети! Вибори з майже однаковими результатами кандидатів *уже* визначаються випадком. Погана погода у великому місті, поламана машина для голосування в далекому селі, незручний і незрозумілий бюлетень, через що літні євреї голосують за Пета Б'юкенена, — будь-яка з цих випадкових подій може мати значення, якщо голоси виборців розподілилися близько 50 на 50. Вибір за допомогою підкидання монети дає змогу не вдавати, що той чи той кандидат переміг, бо більше людей його підтримали. Іноді люди говорять, і говорять вони: «А хтозна»[301].

Ви можете подумати, що мені якось особливо подобаються знаки після коми. Стереотип, ніби математики відзначаються визначеністю, має брата-близнюка — стереотип, ніби ми завжди точні, непохитно прагнемо все вирахувати до якомога більшої кількості знаків після коми. Це не так. Ми прагнемо вираховувати все до *необхідної* кількості десяткових знаків. У Китаї є молодий чоловік, якого звуть Лу Чао і який вивчив і відтворив 67 890 цифр числа π. Це визначне досягнення у запам'ятовуванні. Але чи цікаво це? Ні, тому що цифри числа π нецікаві. Як усім відомо, вони нічим не кращі за випадкові. А от саме число π цікаве, у цьому немає сумніву. Але π — це не його цифри; воно просто позначається цифрами, так само як Ей-

* Безумовно, якщо ви хочете зробити все правильно, то маєте змінити правила підкидання монети так, щоб дати більше шансів на перемогу тому кандидату, який, здається, трохи попереду, і т. д.

фелева вежа позначається координатами 48,8586 градуса північної широти і 2,2942 градуса східної довготи. Додавайте скільки завгодно знаків після коми до цих чисел — вони все одно не скажуть вам, що робить Ейфелеву вежу Ейфелевою вежею.

Точність — це не просто цифри. Бенджамін Франклін ущипливо писав про члена своєї філадельфійської групи Томаса Ґодфрі: «Він мало що знав, крім свого фаху[302]; він не був приємним співрозмовником; оскільки, подібно до більшості великих математиків, яких я зустрічав у житті, він завжди вимагав надзвичайної точності від кожного слова та чіплявся до дрібниць, що розладнувало будь-яку розмову».

Це зачіпає за живе, бо несправедливо тільки почасти. Математики можуть бути педантичними до логічних тонкощів. Ми з тих людей, які вважають, що це смішно, коли на питання «Вам до цього суп чи салат?» відповісти «Так».

Це не обчислюється

Проте навіть математики не намагаються бути істотами суто логічними, за винятком тих випадків, коли вони жартують. Це може бути небезпечно! Наприклад: якщо ви міркуєте суто логічно, якщо ви вірите у два взаємно суперечливі факти, то логічно ви зобов'язані вірити в те, що *будь-яке твердження є хибним*. Ось як це стається. Припустимо, я одночасно вважаю, що Париж — столиця Франції і що Париж — не столиця Франції. Здається, це не має жодного стосунку до того, що команда «Портленд Трейл Блейзерс» була чемпіоном НБА 1982 року. Але дивіться на фокус. Чи правда, що Париж — столиця Франції і що «Трейл Блейзерс» виграла чемпіонат НБА? Ні, тому що я знаю, що Париж не є столицею Франції.

Якщо неправда, що Париж — столиця Франції і що «Трейл Блейзерс» стали чемпіонами, тоді або Париж *не є* столицею Франції, або «Трейл Блейзерс» не були переможцями в НБА. Однак я знаю, що Париж — столиця Франції, що виключає першу можливість. Отже, «Трейл Блейзерс» не виграли чемпіонат НБА 1982 року.

Неважко перевірити, що така сама аргументація, тільки перевернута догори ногами, доводить істинність будь-якого твердження.

Може здатися дивним, але з погляду логічного висновування заперечити це неможливо; вмонтуйте одну малесеньку суперечність у будь-яку частину формальної системи — і вся система полетить шкереберть. Філософи математичного складу називають таку вразливість формальної логіки *ex falso quodlibet* («з помилкового — що завгодно»), або, тільки серед своїх, принципом вибуху. (Пам'ятаєте, я вам розповідав, що багато математиків полюбляють агресивну термінологію?)

Принцип *ex falso quodlibet* — це саме те, що використовував капітан Джеймс Т. Кірк, щоб вивести з ладу тоталітарні штучні інтелекти: дайте їм парадокс — і їхні модулі логічного висновування заклинює[303]. «Це, — сумно зазначає штучний інтелект перед вимкненням індикатора живлення, — не обчислюється». Бертран Рассел зробив з теорією множин Ґоттлоба Фреґе те, що капітан Кірк з пихатими роботами. Один його підступний парадокс завалив усю конструкцію.

Однак фокус Кірка не діє на людей. Ми так не мислимо, навіть ті з нас, хто заробляє математикою на життя. Ми терпимі до суперечностей, до певної міри. Френсіс Скотт Фіцджеральд сказав: «...Першокласний інтелект перевіряється здатністю одночасно утримувати у свідомості дві протилежні ідеї і при цьому не втрачати можливість діяти»[304].

Математики використовують цю здатність як базовий інструмент мислення. Це важливо в разі доведення від супротивного, коли необхідно утримувати у свідомості припущення, яке ви вважаєте хибним, і міркувати так, начебто воно істинне: припустимо, що квадратний корінь з 2 *є* раціональним числом, хоча я намагаюся довести, що це не так... Усвідомлене сновидіння дуже систематичного типу. І ми можемо так діяти без короткого замикання.

Є поширена порада — я чув її від свого наукового керівника, а він від свого і так далі: коли ви наполегливо намагаєтеся довести теорему, вам слід доводити її вдень і спростовувати вночі. (Частота перемикання ролі не грає; кажуть, що тополог Р. Г. Бінг[305] ділив на дві частини місяць: два тижні він намагався довести гіпотезу Пуанкаре, а наступні два тижні намагався знайти спростування*.)

Навіщо ставити перед собою протилежні цілі? Цьому є дві вагомі причини. По-перше, ви таки можете помилятися; якщо твердження, яке ви вважаєте істинним, насправді хибне, усі ваші зусилля довести його істинність виявляться марними. Спростування вночі — це таке собі страхування від титанічних втрат часу й сил.

Є й глибша причина. Якщо щось є істинним, і ви намагаєтеся його спростувати, це вам не вдасться. Нас привчили, що невдача — це погано, але це не *геть* погано. На невдачах можна вчитися. Ви намагаєтеся спростувати твердження одним способом — і натикаєтеся на стіну. Ви намагаєтеся зробити це по-іншому — і натикаєтеся на ще одну стіну. Щовечора ви робите спробу і щовечора зазнаєте невдачі, щовечора нова стіна, і, якщо вам щастить, стіни починають шикуватися у певну структуру, і ця структура є структурою доведення теореми. Адже якщо ви справді зрозумієте, *що заважає вам* спростува-

* Йому так і не вдалося розв'язати жодної з цих задач; гіпотезу Пуанкаре довів Григорій Перельман 2003 року.

ти теорему, є велика ймовірність того, що ви зрозумієте, раніше недоступним вам способом, чому теорема істинна. Саме це сталося з Бояї, який не послухався доброї батькової поради і спробував, як дуже багато математиків до нього, довести, що постулат про паралельність випливає з решти аксіом Евкліда. Як і інші, Бояї зазнав невдачі. Але, на відміну від інших, він зміг зрозуміти форму своєї невдачі. Те, що зводило нанівець усі його спроби довести, що не існує геометрії без постулату паралельності, — було просто існування такої геометрії! З кожної невдалої спроби Бояї дізнавався дедалі більше про властивості того, що, як він вважав, не існує, взнавав його дедалі ближче, — аж до того моменту, коли він зрозумів, що насправді таке є.

Доведення вдень і спростування вночі можна застосувати не тільки до математики. Як на мене, це добрий спосіб перевірити на міцність усі свої переконання — соціальні, політичні, наукові й філософські. Вірте в те, у що ви вірите, вдень, але ночами шукайте доказів проти найцінніших для вас принципів і постулатів. Не махлюйте! Наскільки можливо, ви мусите думати так, нібито вірите в те, у що не вірите. А якщо вам не вдасться переконати себе в цих переконаннях, ви дізнаєтеся набагато більше про те, *чому* ви вірите у те, у що вірите. Ви підійдете трохи ближче до доведення.

До речі, ця корисна розумова вправа — зовсім не те, про що писав Френсіс Скотт Фіцджеральд. Він схвалював суперечливість в уявленнях і переконаннях в есе 1936 року «Крах», розповідаючи про власне відчуття безпорадності й відчаю. Протилежними ідеями у його свідомості були «відчуття марності зусиль і потреби боротися далі». Пізніше Семюел Беккет сказав про це стисліше: «Далі не можу. Продовжуватиму»[306]. Фітцджеральдова характеристика «першокласного інтелекту» має на увазі заперечення цієї характеристики стосовно інтелекту власного; сам він вважав, що тиск суперечності в підсумку призвів до того, що він припинив існування, — як теорія множин Фреґе чи комп’ютер, зламаний парадоксом Кірка. («Міські ластівки» в пісні «Ні тим, ні тим» певною мірою підбивають підсумок «Краху»: «Я брехав собі від початку / і домігся лиш того, що розламуюся на шматки»). Занепалий духом і зруйнований сумнівами, занурений у книги і самокопання, Фіцджеральд став саме таким сумним молодим книжником, від яких нудило Теодора Рузвельта.

Парадоксами цікавився і Девід Фостер Воллес. У властивій йому математичній манері він сформулював дещо приборкану версію парадоксу Рассела у романі «Мітла системи». Рушієм творчості Воллеса, без перебільшення, була боротьба із суперечностями. Його захоплювало все технічне й аналітичне, але він розумів, що прості релігійні принципи і самовдосконалення — ефективніша зброя проти наркотиків, відчаю і вбивчого соліпсизму. Він знав, що робота письменника — проникати в голови інших людей, але його основною темою стали труднощі, викликані застряганням у власній. Твердо вирішивши задокументувати й нейтралізувати[307] власні упередження, він знав, що така рішучість сама належить до цих упереджень. Поза сумнівом, усе це вивчається у вступі до філософії, але, як знає кожен студент-математик, старі задачі, про які ви дізнаєтеся на першому курсі, належать до найскладніших, з якими стикаєшся в житті. Воллес боровся з парадоксами так само, як це роблять математики. Ви вірите у дві речі, які здаються суперечливими. І ви беретеся за роботу — крок за кроком, розчищаєте місце, відокремлюєте те, що ви знаєте, від того, у що вірите, тримаєте у думці і в полі зору кожну з цих речей у ворожому світлі іншої, доки не постане істина, або найближче до неї з того, чого ви здатні дістатися.

Беккет мав глибше і прихильніше уявлення про суперечність, яка завжди була в його творах, набуваючи різних емоційних відтінків. «Далі не можу. Продовжуватиму» — це сумно; але Беккет також пише і про піфагорійське доведення ірраціональності квадратного кореня з 2, перетворюючи його на веселу розмову двох почарківців[308]:

> — Але зрадь-но мене, — сказав Нірі, — і підеш за Гіппасом.
> — Акусматиком, треба думати? — сказав Вайлі. — Його кара вилетіла мені з голови.
> — Втопили в копанці, — сказав Нірі. — За виказування непомірності сторони й діагоналі.
> — Така кара всім базікам! — сказав Вайлі.

Неясно, наскільки Беккет знав вищу математику, але у своєму пізньому творі «Гіршому назустріч» він описує цінність невдачі у математичній творчості так стисло, як це ніколи не зробить жоден професор:

> Пробував. Не зумів. Немає значення. Знову спробуй. Знову не зумій. Не зумій краще.

Де мені це знадобиться?

Математики, з якими ми зустрілися в цій книжці, не просто люди, які критикують необґрунтовану визначеність, і не просто критики, які все розраховують. Вони щось винаходили і щось створювали. Ґальтон відкрив регресію до середнього значення; Кондорсе побудував нову парадигму ухвалення суспільних рішень; Боя̈ї створив цілковито нову геометрію, «предивний новий світ»; Шеннон і Геммінґ створили свою геометрію — простір, у якому замість кіл і трикутників живуть цифрові сигнали; Вальд визначив, у яких місцях літаків потрібна додаткова броня.

Кожен математик створює нове, іноді велике, іноді мале. Усі математичні праці — це творчість. І сутності, які ми можемо створити математичними засобами, не мають жодних фізичних обмежень; вони можуть бути скінченними і нескінченними, здійсненними у нашому спостережуваному всесвіті і нездійсненними. Часом це спонукає сторонніх гадати, що математики — це мандрівники у психоделічному світі небезпечного розумового вогню, які бачать видіння, що відбирають у звичайної людини розум, і які часом й самі від того розум втрачають.

Як ми вже бачили, це не так. Ми не божевільні, не прибульці і не містики.

Що таки правда, то це те, що відчуття математичного розуміння — раптове знання того, що насправді відбувається, абсолютної визначеності, *до самого кінця*— відчуття особливе, доступне у мало яких іще сферах життя. У вас з'являється усвідомлення, що ви дісталися до самого нутра Всесвіту. Про це тяжко розповідати людям, які цього ніколи не відчували.

Ми не вільні говорити все що завгодно про ті неприборкані сутності, які ми придумуємо. Ці сутності вимагають визначення, а отримавши його, вони стають не більш психоделічними, ніж дерева і риба; вони є тим, чим є. Займатися математикою — це одночасно відчувати нестримність вогню і бути обмеженим розумом. Це не суперечність. Логіка формує вузький канал, яким тече величезною мірою посилена інтуїція.

Уроки математики прості, і в них немає чисел: світ має структуру; ми можемо сподіватися, що зрозуміємо дещо у світі, а не просто будемо бездумно споглядати картину, яку дають нам органи чуття; наша інтуїція сильніша з формальним екзоскелетом, ніж без нього. І що математична визначеність — одна річ, м'якші переконання, які з нами у повсякденному житті, — інша, і ми маємо бачити відмінність між ними, якщо зможемо.

Щоразу, як ви бачите, що більше доброго — не завжди краще; як згадуєте, що неймовірне часто стається, коли є достатньо шансів, і чините опір спокусам балтиморського біржового брокера; як ухвалюєте рішення не просто на підставі найбільш імовірного майбутнього, а цілої хмари всіх можливих варіантів майбутнього, зважаючи на те, які з них ймовірні, а які ні; або коли ви відмовляєтеся від думки, що переконання групи мусять підкорятися тим самим правилам, що й індивідуальні; або коли ви просто знаходите найкраще місце для мислення, де можете дати своїй інтуїції вільно рухатися по мережі шляхів, прокладених для цього розумом; не записуючи рівнянь і не будуючи графіків, ви займаєтеся математикою — продовженням здорового глузду іншими засобами. Де це вам знадобиться? Ви застосовуєте математику від народження і, мабуть, ніколи не перестанете цього робити. Робіть це добре.

Подяки

Близько восьми років тому я задумав написати цю книжку. «Як ніколи не помилятися» — саме її ви зараз тримаєте. Це вже не просто ідея, а результат мудрих настанов мого агента Джея Мендела, який щороку терпляче питав мене, чи готовий я спробувати щось написати, а коли я нарешті сказав «так», допоміг мені вдосконалити концепцію з «Як я хочу розповісти людям, яка ж прекрасна математика!» на щось подібне на справжню книжку.

Мені дуже поталанило, що я віддав книжку до видавництва «Пінґвін Прес», яке віддавна допомагає вченим спілкуватися з широкою аудиторією і водночас дає їм можливість залишатися заглибленими у себе й одержимими. Мені дуже допомогли ідеї Коліна Дікермана, який придбав цю книжку й допоміг довести її до майже завершеного вигляду, а також Скотта Моєрса, який узяв на себе фінальний ривок. Вони обидва чудово розуміли автора-початківця, і зрештою цей проект перетворився на щось зовсім інше, ніж те, що я уявляв спочатку. Мені дуже допомогли також поради та підтримка Меллі Андерсон, Акіфа Саїфі, Сари Гатсон і Ліз Каламарі з «Пінґвін Прес», а також Лори Стікні з «Пінґвін ЮКей».

Я також вдячний редакторам журналу «Слейт», особливо Джошу Левіну, Джеку Шейферу та Девіду Плоцу, які 2001 року вирішили, що «Слейт» потрібна математична колонка. Відтоді вони публікують мої матеріали, допомагаючи мені навчитися розповідати про математику так, щоб це було зрозуміло не-математикам. Деякі частини цієї книжки на основі моїх статей у «Слейт» багато виграли завдяки їхньому редагуванню. Я вдячний також своїм редакторам в інших виданнях: «Нью-Йорк Таймс», «Вашинґтон пост», «Бостон Ґлоб» і «Вол-Стріт Джорнел». (Тут є також дещо з моїх статей у «Вашинґтон пост» і «Бостон Ґлоб».) Я особливо вдячний Гайді Джулавіц з журналу «Білівер» і Ніколасу Томпсону з «Ваєд», які першими запропонували мені писати довгі тексти й дали мені кілька важливих уроків, як за одним разом написати математичний текст на тисячу слів.

Еліз Крейґ чудово впоралася з перевіркою фактів (якщо ви знайдете помилку, то тільки там, де вона не перевіряла). Ґреґ Віллепік відредагував книжку, виправивши багато помилок. Він невтомний ворог зайвих тире.

Баррі Мазур, керівник моєї докторської дисертації, навчив мене багато з того, що я знаю про теорію чисел. Для мене він є прикладом глибокого зв'язку між математикою та іншими способами мислення і вираження почуттів.

За цитату з Рассела я в боргу перед Девідом Фостером Воллесом — він позначив її у своїх робочих нотатках як можливий епіграф до «Усе і ще більше», своєї книжки про теорію множин, але не використав його.

Велика частина «Як ніколи не помилятися» була написана під час академічної відпустки в Університеті Вісконсина у Медісоні. Я вдячний Дослідницькому фонду випускників Університету Вісконсина за надану мені можливість продовжити цю відпустку на весь рік завдяки стипендії Ромнеса, а також моїм колегам у Медісоні за підтримку цього своєрідного і не зовсім академічного проекту.

Я хочу також подякувати працівникам кав'ярні «Барікез Кофі» на Монро-стріт у Медісоні, де було написано більшу частину цієї книги.

Я вдячний за пропозиції і вдумливе читання багатьом моїм друзям, колегам і незнайомим людям, які відповідали на мої електронні листи. Ось вони: Лора Болцано, Мередіт Бруссар, Тім Кармоді, Тім Чоу, Дженні Девідсон, Джон Екгард, Стів Файнберґ, Пелі Ґріцер, Джил Калаї, Еммануель Ковальскі, Девід Кракавер, Лорен Кройц, Таня Летт, Марк Манґель, Аріка Окрент, Джон Квіґґін, Бен Регт, Майкл Реґенветтер, Єн Ролстоун, Ніссім Шлам-Салман, Джеральд Селбі, Косма Шалізі, Мішель Ши, Баррі Саймон, Бред Снайдер, Елліот Собер, Міранда Спайлер, Джейсон Стейнберґ, Гел Стерн, Стефані Тай, Боб Темпл, Раві Вакіл, Роберт Вардроп, Ерік Вепсік, Ліланд Вілкінсон, Джанет Віттес. Безумовно, є й інші; я прошу вибачення у всіх, кого тут не назвав. Я хочу виділити кількох читачів, які дали особливо важливі відгуки. Це Том Скокка, який уважно і ретельно прочитав всю книжку; Ендрю Ґельман і Стівен Стіґлер, які допомагали мені з історією статистики; Стівен Берт, який допоміг мені з віршами; Генрі Кон, який дуже вдумливо прочитав значну частину книжки і запропонував мені цитату Вінстона Черчилля і про проективну площину; Лінда Баррі, яка порадила мені самому намалювати малюнки; а також мої батьки, обидва фахівці з прикладної статистики, які читали весь текст і вказували, де він ставав занадто абстрактним.

Я дякую і сину й дочці за терпіння в численні робочі й вихідні дні, коли я мусив працювати над книжкою; а синову ще й за один малюнок. А найбільше я вдячний Тані Шлам, першій і останній читачці всього, що ви тут побачили, і людині, чия підтримка й любов допомогли мені задумати цей проект. Вона — навіть більше, ніж математика, — допомогла мені зрозуміти, як бути правим.

Примітки

Де мені це знадобиться?

1 Біографічні матеріали про Абрагама Вальда ґрунтуються на Oscar Morgenstern, “Abraham Wald, 1902–1950,” *Econometrica 19, no. 4 (Oct. 1951): 361–67.*

2 Історичні матеріали про ГСД ґрунтуються переважно на W. Allen Wallis, “The Statistical Research Group, 1942–1945,” Journal of the American Statistical Association 75, no. 370 (June 1980): 320–30.

3 Ibid., 322.

4 Ibid., 322.

5 Ibid., 329.

6 Я дізнався про Вальда і відсутні кульові пробоїни з книжки Howard Wainer. *Uneducated Guesses: Using Evidence to Uncover Misguided Education Policies* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 2011), у якій автор застосовує ідеї Вальда до схожих складних і неповних статистичних даних досліджень галузі освіти.

7 Marc Mangel and Francisco J. Samaniego, “Abraham Wald’s Work on Aircraft Survivability,” *Journal of the American Statistical Association* 79, no. 386 (June 1984): 259–67.

8 Jacob Wolfowitz, “Abraham Wald, 1902–1950,” *Annals of Mathematical Statistics* 23, no. 1 (Mar. 1952): 1–13.

9 Amy L. Barrett and Brent R. Brodeski, “Survivor Bias and Improper Measurement: How the Mutual Fund Industry Inflates Actively Managed Fund Performance,” www.savantcapital.com/uploadedFiles/Savant_CMS_Website/Press_Coverage/Press_Releases/Older_releases/sbiasstudy[1].pdf (відвідано 13 січня 2014 року).

10 Martin Rohleder, Hendrik Scholz, and Marco Wilkens, “Survivorship Bias and Mutual Fund Performance: Relevance, Significance, and Methodical Differences,” *Review of Finance* 15 (2011): 441–74; див. таблицю. Ми конвертували надлишковий дохід за місяць у річний, тому показники в тексті не збігаються з даними таблиці.

11 Abraham Wald, A Method of Estimating Plane Vulnerability Based on Damage of Survivors (Alexandria, VA: Center for Naval Analyses, repr., CRC 432, July 1980).

12 Мені подобається, як написано про гіпотезу Рімана у книжках John Derbyshire. *Prime Obsession* та Marcus du Sautoy. *The Music of the Primes*. Якщо говорити про теорему Геделя, то, звісно ж, є Douglas Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach*, що, однак, має тільки дотичний стосунок до самої теореми, яка тут розглядається як один з прикладів рекурсії в мистецтві, музиці й логіці.

Розділ 1. Менш схожі на Швецію

13 Daniel J. Mitchell, "Why Is Obama Trying to Make America More Like Sweden when Swedes Are Trying to Be Less Like Sweden?" Cato Institute, Mar. 16, 2010, www.cato.org/blog/why-obama-trying-make-america-more-sweden-when-swedes-are-trying-be-less-sweden (відвідано 13 січня 2014 року).

14 Лаффер завжди чітко відзначав, що крива Лаффера — не його винахід; цю ідею добре розумів і про неї писав Кейнс, а на глибинному рівні коріння цієї ідеї сягає (щонайменше) XIV століття — історика Ібн Хальдуна.

15 Jonathan Chait, "Prophet Motive," *New Republic*, Mar. 31, 1997.

16 Hal R. Varian, "What Use Is Economic Theory?" (1989), http://people.ischool.berkeley.edu/~hal/Papers/theory.pdf (відвідано 13 січня 2014 року).

17 David Stockman, *The Triumph of Politics: How the Reagan Revolution Failed* (New York: Harper & Row, 1986), 10.

18 N. Gregory Mankiw, *Principles of Microeconomics*, vol. 1 (Amsterdam: Elsevier, 1998), 166.

19 Martin Gardner, "The Laffer Curve," *The Night Is Large: Collected Essays*, 1938–1995 (New York: St. Martin's, 1996), 127–39.

20 1978 року, під час розгляду законопроекту Кемпа—Рота, у якому передбачалося зниження податків.

Розділ 2. Пряма локально, крива глобально

21 Christoph Riedweg, *Pythagoras: His Life, Teaching, and Influence* (Ithaca, NY: Cornell University Press, 2005), 2.

22 George Berkeley, *The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician* (1734), ed. David R. Wilkins, www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/Analyst.pdf (відвідано 13 січня 2014 року).

23 David O. Tall and Rolph L. E. Schwarzenberger, "Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits," *Mathematics Teaching* 82 (1978): 44–49.

24 За теорією Коші, збіжність ряду до границі x означає, що, коли ви додаєте дедалі більше доданків, сума дедалі більше наближається до x. Це вимагає, щоб ми мали певну ідею «близькості» двох чисел. І виявляється, що знайоме нам поняття близькості — не єдино можливе! У 2-адичному світі кажуть, що числа близькі одне до одного, якщо їхня різниця кратна великому степеню 2. Коли ми кажемо, що ряд $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ сходиться до -1, то іншими словами це означає, що часткові суми 1, 3, 7, 15, 31... дедалі більше наближаються до -1. У звичайному значенні «близькості» це не так; але з 2-адичною близькістю річ інша. Різниця 31 і -1 становить 32, тобто 2^5, — дуже мале 2-адичне число. Додаймо ще кілька чисел цього ряду і отримаємо 511, що відрізняється від -1 лише на 512, що ще менше у 2-адичному світі. Переважна частина математики, яку ви знаєте — аналіз, логарифми й експоненти, геометрія, — має свій 2-адичний аналог (насправді свій p-адичний аналог для будь-якого p), а зв'язки між цими різними поняттями близькості — окрема божевільна й чудова історія.

25 Матеріал про Ґранді і його ряд головним чином ґрунтується на статті: Morris Kline, "Euler and Infinite Series", *Mathematics Magazine* 56, no. 5 (Nov. 1983): 307–14.

26 Історію курсу математичного аналізу Коші взято з надзвичайно цікавого історичного дослідження взаємодії математики і культури на початку XIX століття: Amir Alexander. Duel at Dawn. Дещо інший погляд на сучасність підходу Коші можна знайти у: Cauchy's

Intermediate Value Theorem and the History of Analytic Rigor," *Notices of the American Mathematical Society* 60, no. 10 (Nov. 2013): 1334–38.

***Розділ 3.** У всіх ожиріння*

27 Wang et al., "Will All Americans Become Overweight or Obese? Estimating the Progression and Cost of the US Obesity Epidemic," *Obesity* 16, no. 10 (Oct. 2008): 2323–30.
28 abcnews.go.com/Health/Fitness/story?id=5499878&page=1.
29 *Long Beach Press-Telegram*, Aug. 17, 2008.
30 Мої думки про дослідження Ванґа значною мірою збігаються з викладеними у статті: Carl Bialik. "Obesity Study Looks Thin" (*Wall Street Journal*, Aug. 15, 2008). Про згадану статтю я дізнався вже після написання цього розділу.
31 Цифри взято зі сторінки www.soicc.state.nc.us/soicc/planning/c2c.htm, яку згодом було вилучено.
32 Katherine M. Flegal et al., "Prevalence of Obesity and Trends in the Distribution of Body Mass Index Among US Adults, 1999–2010," *Journal of the American Medical Association* 307, no. 5 (Feb. 1, 2012), 491–97.

Розділ 4. Скільки це буде у мертвих американцях?

33 Daniel Byman, "Do Targeted Killings Work?" *Foreign Affairs* 85, no. 2 (Mar.–Apr. 2006), 95.
34 "Expressing Solidarity with Israel in the Fight Against Terrorism," H. R. Res. 280, 107th Congress (2001).
35 Частину матеріалу взято з моєї статті "Proportionate Response," *Slate*, July 24, 2006.
36 Meet the Press, July 16, 2006, www.nbcnews.com/id/13839698/page/2/#.Uf_Gc2TEo9E (відвідано 13 січня 2014 року).
37 Gerald Caplan, "We Must Give Nicaragua More Aid," *Toronto Star*, May 8, 1988.
38 David K. Shipler, "Robert McNamara and the Ghosts of Vietnam," *New York Times Magazine*, Aug. 10, 1997, pp. 30–35.
39 "State Cancer Profiles," National Cancer Institute, http://statecancerprofiles.cancer.gov/cgi-bin/deathrates/deathrates.pl?00&076&00&2&001&1&1&1 (відвідано 13 січня 2014 року).
40 До прикладу з раком мозку я великою мірою прийшов завдяки схожому аналізу статистики по графствах захворювання на рак нирок у книжці Howard Wainer. *Picturing the Uncertain World* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009), у якій цю ідею розкрито набагато глибше.
41 John E. Kerrich, "Random Remarks," *American Statistician* 15, no. 3 (June 1961), 16–20.
42 Kirk Goldsberry, "Extra Points: A New Way to Understand the NBA's Best Scorers," Grantland, Oct. 9, 2013, www.grantland.com/story/_/id/9795591/kirk-goldsberry-introduces-new-way-understand-nba-best-scorers (відвідано 13 січня 2014 року); автор пропонує цікавий підхід, за яким майстерність нападника оцінюється точніше за простий відсоток влучань.
43 Результати 1999 року взято з: "A Report Card for the ABCs of Public Education Volume I: 1998–1999 Growth and Performance of Public Schools in North Carolina 25 Most Improved K-8 Schools," www.ncpublicschools.org/abc_results/results_99/99ABCsTop25.pdf (відвідано 13 січня 2014 року).
44 Thomas J. Kane and Douglas O. Staiger, "The Promise and Pitfalls of Using Imprecise School Accountability Measures," *Journal of Economic Perspectives* 16, no. 4 (Fall 2002), 91–114.
45 Але якщо ви таки не від того, щоб завантажитися, гляньте ці статті: Kenneth G. Manton et al., "Empirical Bayes Procedures for Stabilizing Maps of U.S. Cancer Mortality Rates," *Journal*

of the American Statistical Association 84, no. 407 (Sept. 1989): 637–50; Andrew Gelman and Phillip N. Price, "All Maps of Parameter Estimates Are Misleading," *Statistics in Medicine* 18, no. 23 (1999): 3221–34).

46 Stephen M. Stigler, *Statistics on the Table: The History of Statistical Concepts and Methods* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1999), 95.

47 Див., наприклад, Ian Hacking. *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas About Probability, Induction, and Statistical Inference*, 2d ed. (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006), ch. 18.

48 "30 Worst Atrocities of the 20th Century," http://users.erols.com/mwhite28/atrox.htm (відвідано 13 січня 2014 року).

Розділ 5. Пирога більше, ніж тарілки

49 A. Michael Spence and Sandile Hlatshwayo, "The Evolving Structure of the American Economy and the Employment Challenge," Council on Foreign Relations, Mar. 2011, www.cfr.org/industrial-policy/evolving-structure-american-economy-employment-challenge/p24366 (відвідано 13 січня 2014 року).

50 "Move Over," *Economist*, July 7, 2012.

51 William J. Clinton, Back to Work: *Why We Need Smart Government for a Strong Economy* (New York: Random House, 2011), 167.

52 Jacqueline A. Stedall, *From Cardano's Great Art to Lagrange's Reflections: Filling a Gap in the History of Algebra* (Zurich: European Mathematical Society, 2011), 14.

53 Milwaukee Journal Sentinel, PolitiFact, www.politifact.com/wisconsin/statements/2011/jul/28/republican-party-wisconsin/wisconsin-republican-party-says-more-than-half-nat (відвідано 13 січня 2014 року).

54 WTMJ News, Milwaukee, "Sensenbrenner, Voters Take Part in Contentious Town Hall Meeting over Federal Debt," www.todaystmj4.com/news/local/126122793.html (відвідано 13 січня 2014 року).

55 Усі дані щодо зайнятості за червень 2011 року — з Regional and State Employment and Unemployment (Monthly) News Release by the Bureau of Labor Statistics, July 22, 2011, www.bls.gov/news.release/archives/laus_07222011.htm.

56 Steven Rattner, "The Rich Get Even Richer," *New York Times*, Mar. 26, 2012, A27.

57 elsa.berkeley.edu/~saez/TabFig2010.xls (відвідано 13 січня 2014 року).

58 Mitt Romney, "Women and the Obama Economy," Apr. 10, 2012 (www.scribd.com/doc/88740691/Women-And-The-Obama-Economy-Infographic).

59 Обчислення і аргументацію взято з: Glenn Kessler, "Are Obama's Job Policies Hurting Women?" *Washington Post*, Apr. 10, 2012.

60 Ibid.

Розділ 6. Балтиморський біржовий брокер і біблійний код

61 Maimonides, *Laws of Idolatry* 1.2, за Isadore Twersky, *A Maimonides Reader* (New York: Behrman House, Inc., 1972), 73.

62 Yehuda Bauer, *Jews for Sale? Nazi-Jewish Negotiations*, 1933–1945 (New Haven: Yale University Press, 1996), 74–90.

63 Doron Witztum, Eliyahu Rips, and Yoav Rosenberg, "Equidistant Letter Sequences in the Book of Genesis," *Statistical Science* 9, no. 3 (1994): 429–38.

64 Robert E. Kass, "In This Issue," *Statistical Science* 9, no. 3 (1994): 305–6.

65 Shlomo Sternberg, "Comments on *The Bible Code," Notices of the American Mathematical Society* 44, no. 8 (Sept. 1997): 938–39.

66 Alan Palmiter and Ahmed Taha, "Star Creation: The Incubation of Mutual Funds," *Vanderbilt Law Review* 62 (2009): 1485–1534. Автори статті проводять пряму аналогію між балтиморським брокером і фондовою інкубацією.

67 Ibid., 1503.

68 Leonard A. Stefanski, "The North Carolina Lottery Coincidence," *American Statistician* 62, no. 2 (2008): 130–34.

69 Aristotle, Rhetoric 2.24, trans. W. Rhys Roberts, classics.mit.edu/Aristotle/rhetoric.mb.txt (відвідано 14 січня 2014 року).

70 Ronald A. Fisher, *The Design of Experiments* (Edinburgh: Oliver & Boyd, 1935), 13–14.

71 Brendan McKay and Dror Bar-Natan, "Equidistant Letter Sequences in Tolstoy's War and Peace," cs.anu.edu.au/~bdm/dilugim/WNP/main.pdf (відвідано 14 січня 2014 року).

72 Brendan McKay, Dror Bar-Natan, Maya Bar-Hillel, and Gil Kalai, "Solving the Bible Code Puzzle," *Statistical Science* 14, no. 2 (1999): 150–73, section 6.

73 Ibid.

74 *New York Times*, Dec. 8, 2010, A27.

75 Див., наприклад, статтю Вітцтума "Of Science and Parody: A Complete Refutation of MBBK's Central Claim," www.torahcode.co.il/english/paro_hb.htm (відвідано 14 січня 2014 року).

Розділ 7. Мертва риба не читає думок

76 Craig M. Bennett et al., "Neural Correlates of Interspecies Perspective Taking in the Post-Mortem Atlantic Salmon: An Argument for Proper Multiple Comparisons Correction," *Journal of Serendipitous and Unexpected Results* 1 (2010): 1–5.

77 Ibid., 2.

78 Gershon Legman, *Rationale of the Dirty Joke: An Analysis of Sexual Humor* (New York: Grove, 1968; repr. Simon & Schuster, 2006).

79 Див., наприклад: Stanislas Dehaene, *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics* (New York: Oxford University Press, 1997).

80 Richard W. Feldmann, "The Cardano-Tartaglia Dispute," *Mathematics Teacher* 54, no. 3 (1961): 160–63.

81 Матеріал про Арбетнота ґрунтується на розділі 18 книжки: Ian Hacking, *The Emergence of Probability* (New York: Cambridge University Press, 1975) та розділі 6 книжки: Stephen M. Stigler, *The History of Statistics* (Cambridge, MA: Harvard University Press/Belknap Press, 1986).

82 Див.: Elliot Sober. *Evidence and Evolution: The Logic Behind the Science* (New York: Cambridge University Press, 2008). Автор розглядає дуже багато варіантів, як давніх, так і сучасних, цього «аргументу промислу».

83 Charles Darwin, *The Origin of Species*, 6th ed. (London: 1872), 421.

84 Richard J. Gerrig, Philip George Zimbardo, *Psychology and Life* (Boston: Allyn & Bacon, 2002).

85 David Bakan. "The Test of Significance in Psychological Research," *Psychological Bulletin* 66, no. 6 (1966): 423–37.

86 Цит. за Ann Furedi, "Social Consequences: The Public Health Implications of the 1995 'Pill Scare,'" *Human Reproduction Update* 5, no. 6 (1999): 621–26.

87 Edith M. Lederer, "Government Warns Some Birth Control Pills May Cause Blood Clots," Associated Press, Oct. 19, 1995.

88 ally Hope, "Third Generation Oral Contraceptives: 12% of Women Stopped Taking Their Pill Immediately They Heard CSM's Warning," *BMJ: British Medical Journal* 312, no. 7030 (1996): 576.
89 Furedi, "Social Consequences," 623.
90 Klim McPherson, "Third Generation Oral Contraception and Venous Thromboembolism," *BMJ: British Medical Journal* 312, no. 7023 (1996): 68.
91 Julia Wrigley and Joanna Dreby, "Fatalities and the Organization of Child Care in the United States, 1985–2003," *American Sociological Review* 70, no. 5 (2005): 729–57.
92 Усі статистичні дані про дитячу смертність — з Centers for Disease Control. Sherry L. Murph Jiaguan Xu, and Kenneth D. Kochanek "Deaths: Final Data for 2010," www.cdu.gov/nchs/data/nusr/nusrbl/nusrbl/04.pdf.
93 Біографічний матеріал про Скіннера ґрунтується на його автобіографічній статті "B. F. Skinner... An Autobiography" in Peter B. Dews, ed., *Festschrift for BF Skinner* (New York: Appleton-Century-Crofts, 1970), 1–22 та його автобіографії *Particulars of My Life*, pp. 262–63.
94 Skinner, "Autobiography," 6.
95 Ibid., 8.
96 Skinner, *Particulars*, 262.
97 Skinner, "Autobiography," 7.
98 Skinner, *Particulars*, 292.
99 John B. Watson, *Behaviorism* (Livingston, NJ: Transaction Publishers, 1998), 4.
100 Skinner, "Autobiography," 12.
101 Skinner, "Autobiography," 6.
102 B. F. Skinner, "The Alliteration in Shakespeare's Sonnets: A Study in Literary Behavior," *Psychological Record* 3 (1939): 186–92. Я дізнався про працю Скіннера про алітерацію з класичної статті Persi Diaconis, Frederick Mosteller. Methods for Studying Coincidences, *Journal of the American Statistical Association* 84, no. 408 (1989), 853–61. З цією статтею обов'язково потрібно ознайомитися, якщо ви хочете більше дізнатися про ідеї, що обговорюються у цьому розділі.
103 Skinner, "Alliteration in Shakespeare's Sonnets", 191.
104 Див., наприклад, Ulrich K. Goldsmith, "Words out of a Hat? Alliteration and Assonance in Shakespeare's Sonnets," *Journal of English and Germanic Philology* 49, no. 1 (1950), 33–48.
105 Herbert D. Ward, "The Trick of Alliteration," *North American Review* 150, no. 398 (1890): 140–42.
106 Thomas Gilovich, Robert Vallone, and Amos Tver sky, "The Hot Hand in Basketball: On the Misperception of Random Sequences," *Cognitive Psychology* 17, no. 3 (1985): 295–314.
107 Kevin B. Korb and Michael Stillwell, "The Story of the Hot Hand: Powerful Myth or Powerless Critique?" (International Conference on Cognitive Science, 2003), www.csse.monash.edu.au/~korb/iccs.pdf.
108 Gur Yaar, Shmuel Eisenmann, "The Hot (Invisible?) Hand: Can Time Sequence Patterns of Success/Failure in Sports Be Modeled as Repeated Random Independent Trials?" *PLoS One*, vol. 6, no. 10 (2011): e24532.
109 У зв'язку з цим мені дуже подобається стаття 2011 року Andrew Mauboussin, Samuel Arbesman. "Differentiating Skill and Luck in Financial Markets with Streaks" (papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1664031). Особливо велике враження справляє те, що на момент написання статті перший автор був старшокласником! Я не вважаю, що висновки у цій статті остаточні, але, здається, у ній викладено добрий підхід до цих складних питань.

110 З особистої розмови з Гейзінґою.
111 Yigal Attali, "Perceived Hotness Affects Behavior of Basketball Players and Coaches," *Psychological Science* 24, no. 7 (July 1, 2013): 1151–56.

Розділ 8. Доведення від неймовірного

112 Allison Klein, "Homicides Decrease in Washington Region," *Washington Post*, Dec. 31, 2012.
113 David W. Hughes, Susan Cartwright. "John Michell, the Pleiades, and Odds of 496,000 to 1," *Journal of Astronomical History and Heritage* 10 (2007): 93–99.
114 Yuval Peres. "Gaussian Analytic Functions," http://research.microsoft.com/en-us/um/people/peres/GAF/GAF.html
115 Там само.
116 Ronald A. Fisher, *Statistical Methods and Scientific Inference* (Edinburgh: Oliver & Boyd, 1959), 39.
117 Історія роботи Чжана над проблемою пов'язаних проміжків — з моєї статті "The Beauty of Bounded Gaps," *Slate*, May 22, 2013. Також див.: "Bounded Gaps Between Primes," *Annals of Mathematics*.

Розділ 9. Міжнародний журнал гадання по нутрощах

118 Версію Шалізі можна прочитати у його блозі http://bactra.org/weblog/698.html.
119 John P. A. Ioannidis, "Why Most Published Research Findings Are False," *PLoS Medicine* 2, no. 8 (2005): e124, available at www.plosmedicine.org/article/info:doi/10.1371/journal.pmed.0020124.
120 Оцінку ризиків досліджень недостатньої потужності див. у: Katherine S. Button et al., "Power Failure: Why Small Sample Size Undermines the Reliability of Neuroscience," *Nature Reviews Neuroscience* 14 (2013): 365–76.
121 Kristina M. Durante, Ashley Rae, and Vladas Griskevicius, "The Fluctuating Female Vote: Politics, Religion, and the Ovulatory Cycle," *Psychological Science* 24, no. 6 (2013): 1007–16. Дякую Ендрю Ґельману за консультації стосовно методології цієї статті і його блог-пост (http://andrewgelman.com/2013/05/17/how-can-statisticians-help-psychologists-do-their-research-better). Великою мірою я спираюся саме на ці матеріали.
122 Див. у: Andrew Gelman, David Weakliem, "Of Beauty, Sex, and Power: Statistical Challenges in Estimating Small Effects," *American Scientist* 97 (2009): 310–16, опрацьований приклад цього явища в контексті питання, чи мають гарні на вроду люди більше дочок, ніж синів (не мають).
123 Christopher F. Chabris et al., "Most Reported Genetic Associations with General Intelligence Are Probably False Positives," *Psychological Science* 23, no. 11 (2012): 1314–23.
124 C. Glenn Begley and Lee M. Ellis, "Drug Development: Raise Standards for Preclinical Cancer Research," *Nature* 483, no. 7391 (2012): 531–33.
125 Uri Simonsohn, Leif Nelson, and Joseph Simmons, "P-Curve: A Key to the File Drawer," *Journal of Experimental Psychology: General*. Криві у цьому підрозділі — це *p*-криві, що описуються у названій статті.
126 Кілька яскравих прикладів: Alan Gerber and Neil Malhotra, "Do Statistical Reporting Standards Affect What Is Published? Publication Bias in Two Leading Political Science Journals," *Quarterly Journal of Political Science* 3, no. 3 (2008): 313–26; Alan S. Gerber and Neil Malhotra, "Publication Bias in Empirical Sociological Research: Do Arbitrary Significance Levels Distort Published Results?" *Sociological Methods & Research* 37, no. 1 (2008): 3–30; and E. J. Masicampo

and Daniel R. Lalande, "A Peculiar Prevalence of P Values Just Below.05," *Quarterly Journal of Experimental Psychology* 65, no. 11 (2012): 2271–79.

127 *Matrixx Initiatives, Inc. v. Siracusano*, 131 S. Ct. 1309, 563 U.S., 179 L. Ed. 2d 398 (2011).

128 Robert Rector and Kirk A. Johnson, "Adolescent Virginity Pledges and Risky Sexual Behaviors," Heritage Foundation (2005), www.heritage.org/research/reports/2005/06/adolescent-virginity-pledges-and-risky-sexual-behaviors (відвідано 14 січня 2014 року).

129 Robert Rector, Kirk A. Johnson, and Patrick F. Fagan, "Understanding Differences in Black and White Child Poverty Rates," *Heritage Center for Data Analysis report* CDA01-04 (2001), p. 15 (n. 20), цит. у Jordan Ellenberg, "Sex and Signifance," *Slate*, July 5, 2005, http://thf_media.s3.amazonaws.com/2001/pdf/cda01-04.pdf (відвідано 14 січня 2014 року).

130 Michael Fitzgerald, Ioan James, *The Mind of the Mathematician* (Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2007), 151, цит. у "The Widest Cleft in Statistics: How and Why Fisher Opposed Neyman and Pearson," by Francisco Louçã, Department of Economics of the School of Economics and Management, Lisbon, Working Paper 02/2008/DE/UECE, www.iseg.utl.pt/departamentos/economia/wp/wp022008deuece.pdf (відвідано 14 січня 2014 року). Зверніть увагу, що автори згаданої книжки, здається, наполягають на тому, що у значної частини вдатних математиків був синдром Аспергера, тож їхню оцінку соціалізації Фішера варто сприймати, зважаючи на це.

131 Лист до Hick від 8 жовтня 1951 року. Цит. за: J. H. Bennett, ed., *Statistical Inference and Analysis: Selected Correspondence of R. A. Fisher* (Oxford: Clarendon Press, 1990), 144. Цит. у Louçã, "Widest Cleft."

132 Ronald A. Fisher, *Statistical Methods and Scientific Inference* (Edinburgh: Oliver & Boyd, 1956), 41–42, також цит. у Dallal, "Why p = 0.05?"

Розділ 10. Чуєш, Боже? Це я, баєсівський висновок

133 Charles Duhigg, "How Companies Learn Your Secrets," *New York Times* Magazine, Feb. 16, 2012.

134 Peter Lynch Owen Lynch, "Forecasts by PHONIAC," *Weather* 63, no. 11 (2008): 324–26.

135 Ian Roulstone, John Norbury, *Invisible in the Storm: The Role of Mathematics in Understanding Weather* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 2013), 281.

136 Edward N. Lorenz, "The Predictability of Hydrodynamic Flow," *Transactions of the New York Academy of Sciences*, series 2, vol. 25, no. 4 (1963): 409–32.

137 Eugenia Kalnay, *Atmospheric Modeling, Data Assimilation, and Predictability* (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2003), 26.

138 Jordan Ellenberg, "This Psychologist Might Outsmart the Math Brains Competing for the Netflix Prize," *Wired*, Mar. 2008, pp. 114–22.

139 Xavier Amatriain and Justin Basilico, "Netflix Recommendations: Beyond the 5 Stars," techblog.netflix.com/2012/04/netflix-recommendations-beyond-5-stars.html (відвідано 14 січня 2014 року).

140 Добру тогочасну розповідь про екстрасенсорну лихоманку див. у: Francis Wickware, "Dr. Rhine and ESP," *Life*, Apr. 15, 1940.

141 Thomas L. Griffiths and Joshua B. Tenenbaum, "Randomness and Coincidences: Reconciling Intuition and Probability Theory," *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Cognitive Science Society*, 2001.

142 Особиста бесіда з Ґері Лапіаном.

143 Griffiths, Tenenbaum, "Randomness and Coincidences," fig. 2.

144 Bernd Beber, Alexandra Scacco, "The Devil Is in the Digits," *Washington Post*, June 20, 2009.

145 Ronald A. Fisher, “Mr. Keynes's Treatise on Probability,” *Eugenics Review* 14, no.1 (1922): 46–50.
146 Richard Feynman, Six Easy Pieces (New York: Basic Books, 2011), xxi.
147 У цьому підрозділі я великою мірою спираюся на Elliott Sober, *Evidence and Evolution* (New York: Cambridge University Press, 2008).
148 Aileen Fyfe, “The Reception of William Paley's Natural Theology in the University of Cambridge,” *British Journal for the History of Science* 30, no. 106 (1997): 324.
149 Лист Дарвіна до Джона Лаббока від 22 листопада 1859 року (Darwin Correspondence Project, www.darwinproject.ac.uk/letter/entry-2532, відвідано 14 січня 2014 року).
150 Аргумент Бострома на користь гіпотези «СИМИ» насправді складніший; він не є незаперечним, проте відразу відкинути його теж неможливо.
151 Nick Bostrom, “Are We Living in a Computer Simulation?” *Philosophical Quarterly* 53, no. 211 (2003): 243–55.

Розділ 11. Чого очікувати, сподіваючись на виграш у лотерею

152 Уся інформація про генуезьку лотерею — зі статті David R. Bellhouse, “The Genoese Lottery,” *Statistical Science* 6, no. 2 (May 1991): 141–48.
153 Будівлі Стоутон-Гол та Голворті-Гол.
154 Adam Smith, *The Wealth of Nations* (New York: Wiley, 2010), bk. 1, ch. 10, p. 102.
155 Історія Галлея і неправильна оцінка ренти викладається за розділом 13 книжки Ian Hacking, *The Emergence of Probability* (New York: Cambridge University Press, 1975).
156 See Edwin W. Kopf, “The Early History of the Annuity,” *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 13 (1926): 225–66.
157 Особиста бесіда з представниками департаменту зв'язків з громадськістю лотереї.
158 “Jackpot History,” www.lottostrategies.com/script/jackpot_history/draw_date/101 (відвідано 14 січня 2014 року).
159 Про те, які варіанти комбінацій гравці вибирають частіше чи рідше, див. у: John Haigh, “The Statistics of Lotteries,” ch. 23 of Donald B. Hausch and William Thomas Ziemba, eds., *Handbook of Sports and Lottery Markets* (Amsterdam: Elsevier, 2008).
160 Текст відповідного листа генерального інспектора штату Саллівана див. на www.mass.gov/ig/publications/reports-and-recommendations/2012/lottery-cash-winfall-letter-july-2012.pdf (відвідано 14 січня 2014 року).
161 Я не зміг перевірити, як саме було обрано цю назву; можливо, група так ще не називалася, коли 2005 року робилися перші великі ставки.
162 Телефонне інтерв'ю з Джеральдом Селбі 11 лютого 2013 року.
163 Дякую за переклад Франсуа Дора.
164 Jacques Roger, *Buffon: A Life in Natural History*, trans. Sarah Lucille Bonnefoi (Ithaca, NY: Cornell University Press, 1997), розділи 1 і 2.
165 Axel Ockenfels, Abdolkarim Sadrieh, *The Selten School of Behavioral Economics* (Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2010), 54.
166 Pierre Deligne, “Quelques idées maîtresses de l'œuvre de A. Grothendieck,” у збірнику: *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle: Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné*, Nice, 1996 (Paris: Société Mathématique de France, 1998); в оригіналі: rien ne semble de passer et pourtant à la fin de l'exposé un théorème clairement non trivial est là. Переклад цит. за “The Rising Sea: Grothendieck on Simplicity and Generality,” part 1, з *Episodes in the History of Modern Algebra* (1800–1950) (Providence: American Mathematical Society, 2007), 301–22.

167 Цит. за McCarty, “Rising Sea,” 302.
168 Телефонне інтерв’ю з Джеральдом Селбі 11 лютого 2013 року. Уся інформація про роль Селбі подається на основі цього інтерв’ю.
169 Електронне повідомлення від Андреа Естес від 5 лютого 2013 року.
170 Andrea Estes, Scott Allen, “A Game with a Windfall for a Knowing Few,” *Boston Globe*, July 31, 2011.
171 Haydn Mason, *Voltaire* (Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1981), 22–23; Brendan Mackie, “The Enlightenment Guide to Winning the Lottery,” www.damninteresting.com/the-enlightenment-guide-to-winning-the-lottery (відвідано 14 січня 2014 року).
172 Листа генерального інспектора штату Саллівана див. на www.mass.gov/ig/publications/reports-and-recommendations/2012/lottery-cash-winfall-letter-july-2012.pdf (відвідано 14 січня 2014 року).
173 Andrea Estes, Scott Allen, “A Game with a Windfall for a Knowing Few,” *Boston Globe*, July 31, 2011.

Розділ 12. Більше спізнюйтеся на літаки!

174 Принаймні всі кажуть, що він так казав. Мені не вдалося знайти жодного підтвердження тому, що він колись так писав.
175 “Social Security Kept Paying Benefits to 1,546 Deceased,” *Washington Wire (blog), Wall Street Journal*, June 24, 2013.
176 Nicholas Beaudrot, “The Social Security Administration Is Incredibly Well Run,” www.donkeylicious.com/2013/06/the-social-security-administration-is.html.
177 З листа Паскаля до Ферма від 10 серпня 1660 року.
178 Усі 25 з його «Філософських листів».
179 N. Gregory Mankiw, “My personal work incentives,” Oct. 26, 2008, gregmankiw.blogspot.com/2008/10/blog-post.html. Менк’ю повертається до теми у колонці “I Can Afford Higher Taxes, but They’ll Make Me Work Less,” *New York Times*, BU3, Oct. 10, 2010.
180 У фільмі 2010 року: *Public Speaking*.
181 Buffon, “Essays on Moral Arithmetic,” 1777.
182 За Tom Wells, *Wild Man: The Life and Times of Daniel Ellsberg* (New York: St. Martin’s, 2001); Daniel Ellsberg, *Secrets: A Memoir of Vietnam and the Pentagon Papers* (New York: Penguin, 2003).
183 Daniel Ellsberg, “The Theory and Practice of Blackmail,” RAND Corporation, July 1968, www.rand.org/content/dam/rand/pubs/papers/2005/P3883.pdf (відвідано 14 січня 2014 року).
184 **«Відомий зараз як парадокс Еллсберга»**: Daniel Ellsberg, “Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms,” *Quarterly Journal of Economics* 75, no.4 (1961): 643–69.

Розділ 13. Де сходяться рейки

185 Сам ЛТКМ довго не прожив, але його головні дійові особи вийшли звідти багатіями й закріпилися у фінансовому секторі, незважаючи на крах компанії.
186 Otto-Joachim Gruesser, Michael Hagner, “On the History of Deformation Phosphenes and the Idea of Internal Light Generated in the Eye for the Purpose of Vision,” *Documenta Ophthalmologica* 74, no. 1–2 (1990): 57–85.
187 Інтерв’ю Девіда Фостера Воллеса інтернет-виданню «Ворд», 17 травня 1996 року (www.badgerinternet.com/~bobkat/jest11a.html, відвідано 14 січня 2014 року).

188 Gino Fano, "Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva," *Giornale di matematiche* 30.S 106 (1892).

189 C. H. Kimberling, "The Origins of Modern Axiomatics: Pasch to Peano," *American Mathematical Monthly* 79, no.2 (Feb. 1972): 133–36.

190 Дуже коротке пояснення: згадаймо, що проективну площину можна розглядати як множину ліній, що проходять через початок координат у тривимірному просторі. Лінії на проективній площині відповідають площинам, які проходять через початок координат. Площина, що проходить через початок координат у тривимірному просторі, описується рівнянням виду $ax + by + cz = 0$. Площина, що проходить через початок координат у булевому тривимірному просторі, також задається рівнянням $ax + by + cz = 0$, тільки тепер *a, b, c* можуть набувати значень 0 або 1. Отже, існує вісім можливих рівнянь такого виду. Крім того, у разі $a = b = c = 0$, рівняння набуває вигляду $(0 = 0)$, яке виконується при будь-яких значеннях *x, y і z*, а тому не визначає площину. Таким чином, усього існує сім площин, що проходять через початок координат у булевому тривимірному просторі, а це значить, що на булевій проективній площині існує сім прямих ліній — як і має бути.

191 Thomas M. Thompson, *From Error-Correcting Codes Through Sphere Packing to Simple Groups (Washington, DC: Mathematical Association of America, 1984)*.

192 Ibid., 27.

193 Ibid., 5, 6.

194 Ibid., 29.

195 "Dictionary of Ro" (www.sorabji.com/r/ro).

196 George Szpiro, *The Kepler Conjecture* (New York: Wiley, 2003).

197 Henry Cohn and Abhinav Kumar, "Optimality and Uniqueness of the Leech Lattice Among Lattices," *Annals of Mathematics* 170 (2009): 1003–50.

198 Thompson, From Error-Correcting Codes, 121.

199 Ralph H. F. Denniston, "Some New 5-designs," *Bulletin of the London Mathematical Society* 8, no. 3 (1976): 263–67.

200 Pascal, Pensées, no. 139.

201 Інформація про «типового підприємця» — з розділу 6 книжки Scott A. Shane, *The Illusions of Entrepreneurship: The Costly Myths That Entrepreneurs, Investors, and Policy Makers Live By* (New Haven, CT: Yale University Press, 2010).

Розділ 14. Тріумф посередності

202 Horace Secrist, *An Introduction to Statistical Methods: A Textbook for Students, a Manual for Statisticians and Business Executives* (New York: Macmillan, 1917).

203 Horace Secrist, *The Triumph of Mediocrity in Business* (Chicago: Bureau of Business Research, Northwestern University, 1933), 7.

204 Robert Riegel, *Annals of the American Academy of Political and Social Science* 170, no. 1 (Nov. 1933): 179.

205 Secrist, *Triumph of Mediocrity in Business*, 24.

206 Ibid., 25.

207 Karl Pearson, *The Life, Letters and Labours of Francis Galton* (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1930), 66.

208 Francis Galton, *Memories of My Life* (London: Methuen, 1908), 288. І спогади Гальтона, і біографія Пірсона повністю публікуються у чудовій збірці матеріалів в інтернеті galton.org.

209 Цит. у Emel Aileen Gökyigit, "The Reception of Francis Galton's Hereditary Genius," *Journal of the History of Biology* 27, no. 2 (Summer 1994).

210 From Charles Darwin, "Autobiography," in Francis Darwin, ed., *The Life and Letters of Charles Darwin* (New York and London: Appleton, 1911), 40.

211 Eric Karabell, "Don't Fall for Another Hot April for Ethier," Eric Karabell Blog, Fantasy Baseball, http://insider.espn.go.com/blog/eric-karabell/post/_/id/275/andre-ethier-los-angeles-dodgers-great-start-perfect-sell-high-candidate-fantasy-baseball (відвідано 14 січня 2014 року).

212 Джерело даних: "All-Time Leaders at the All-Star Break," *CNN Sports Illustrated*, http://sportsillustrated.cnn.com/baseball/mlb/2001/allstar/news/2001/07/04/leaders_break_hr.

213 Harold Hotelling, "Review of The Triumph of Mediocrity in Business by Horace Secrist," *Journal of the American Statistical Association* 28, no. 184 (Dec. 1933): 463–65.

214 Див.: Walter L. Smith, "Harold Hotelling, 1895–1973," *Annals of Statistics* 6, no. 6 (Nov 1978).

215 Виклад у книжці спирається на статтю Stephen M. Stigler, "The History of Statistics in 1933," *Statistical Science* 11, no. 3 (1996): 244–52.

216 Walter F. R. Weldon, "Inheritance in Animals and Plants" у книжці *Lectures on the Method of Science* (Oxford: Clarendon Press, 1906). Про есе Велдона я дізнався від Стівена Стіґлера.

217 A. J. M. Broadribb, Daphne M. Humphreys, "Diverticular Disease: Three Studies: Part II: Treatment with Bran," *British Medical Journal* 1, no. 6007 (Feb. 1976): 425–28.

218 Anthony Petrosino, Carolyn Turpin-Petrosino, James O. Finckenauer, "Well-Meaning Programs Can Have Harmful Effects! Lessons from Experiments of Programs Such as Scared Straight," *Crime and Delinquency* 46, no. 3 (2000): 354–79.

Розділ 15. Еліпс Ґальтона

219 Francis Galton, "Kinship and Correlation," *North American Review* 150 (1890), 419–31.

220 Усі матеріали з історії діаграм розсіювання — зі статті: Michael Friendly, Daniel Denis. "The Early Origins and Development of the Scatterplot," *Journal of the History of the Behavioral Sciences* 41, no. 2 (Spring 2005): 103–30.

221 Stanley A. Changnon, David Changnon, Thomas R. Karl. "Temporal and Spatial Characteristics of Snowstorms in the Continuous United States," *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 45, no. 8 (2006): 1141–55.

222 Див.: Mark Monmonier, *Air Apparent: How Meteorologists Learned to Map, Predict, and Dramatize Weather*, (Chicago: University of Chicago Press, 2000), 24–25.

223 Дані і графіка використовуються з дозволу Ендрю Ґельмана.

224 Michael Harris, "An Automorphic Reading of Thomas Pynchon's Against the Day" (2008) (www.math.jussieu.fr/~harris/Pynchon.pdf, відвідано 14 січня 2014 року). Див. також: Roberto Natalini, "David Foster Wallace and the Mathematics of Infinity," у *A Companion to David Foster Wallace Studies* (New York: Palgrave MacMillan, 2013), 43–58; автор інтерпретує роман схожим чином, знаходячи в ньому не тільки параболи й гіперболи, а й циклоїду — її ви отримаєте, інвертувавши параболу.

225 Francis Galton, *Natural Inheritance* (New York: Macmillan, 1889), 102.

226 Francis Galton, "Co-relations and Their Measurement, Chiefly from Anthropometric Data," *Proceedings of the Royal Society of London* 45 (1888): 135–45; а також "Kinship and Correlation," *North American Review* 150 (1890): 419–31. Як писав сам Ґальтон у статті 1890 року, «далі природно постало питання меж уточнення, які можуть бути корисними для системи пана Бертильйона. Поза сумнівом, додаткові дані отримуються через вимірювання інших органів чи інших вимірів тіла; але як це відбивається на точності ідентифікації? Розміри різ-

них частин тіла однієї особи до певної міри пов'язані між собою. Велика рукавиця чи черевик указують на те, що вони належать людині, яка має великі розміри. Але знання того, що якась людина носить великі рукавиці і великі черевики, не дає нам набагато більше інформації, ніж ми мали б, якби були обмеженими всього одним з цих двох фактів. Було б найбільшою помилкою припускати, що точність антропометричного методу ідентифікації зростає з кількістю вимірюваних параметрів так само швидко, як зростає надійність замків із ключами, кількість виїмок на яких збільшується. Заглибини на борідках ключів робляться цілковито незалежно одна від одної; відповідно, додавання ще однієї заглибини збільшує надійність. Але ж довжина кінцівок і розміри тіла тієї самої особи не відрізняються незалежним чином; тож додавання нових вимірів веде до дедалі меншого зростання ступеня надійності ідентифікації».

227 Raymond B. Fosdick, "The Passing of the Bertillon System of Identification,"*Journal of the American Institute of Criminal Law and Criminology* 6, no. 3 (1915): 363–69.

228 Francis Galton, *Memories of My Life*, 310.

229 Briscoe v. Virginia, oral argument, Jan. 11, 2010, (www.oyez.org/cases/2000-2009/2009/2009_07_11191, відвідано 14 січня 2014 року).

230 David Brooks, "One Nation, Slightly Divisible," *Atlantic*, Dec. 2001.

231 Andrew E. Gelman et al, "Rich State, Poor State, Red State, Blue State: What's the Matter with Connecticut?" *Quarterly Journal of Political Science* 2, no. 4 (2007): 345–67.

232 Див. книжку Ґельмана *Rich State, Poor State, Red State, Blue State* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 2008), 68–70.

233 "NIH Stops Clinical Trial on Combination Cholesterol Treatment," *NIH News*, May 26, 2011 (www.nih.gov/news/health/may2011/nhlbi-26.htm, відвідано 14 січня 2014 року).

234 "NHLBI Stops Trial of Estrogen Plus Progestin Due to Increased Breast Cancer Risk, Lack of Overall Benefit," *NIH press release*, July 9, 2002, www.nih.gov/news/pr/jul2002/nhlbi-09.htm (відвідано 14 січня 2014 року).

235 Philip M. Sarrel et al., "The Mortality Toll of Estrogen Avoidance: An Analysis of Excess Deaths Among Hysterectomized Women Aged 50 to 59 Years," *American Journal of Public Health* 103, no. 9 (2013): 1583–88.

Розділ 16. Чи змушує вас рак легенів курити?

236 Про перші дослідження зв'язку куріння з раком легенів див.: Colin White, "Research on Smoking and Lung Cancer: A Landmark in the History of Chronic Disease Epidemiology," *Yale Journal of Biology and Medicine* 63 (1990): 29–46.

237 Richard Doll and A. Bradford Hill, "Smoking and Carcinoma of the Lung," *British Medical Journal* 2, no. 4682 (Sept. 30, 1950): 739–48.

238 Фішер написав це 1958 року. Цит. у Paul D. Stolley, "When Genius Errs: R. A. Fisher and the Lung Cancer Controversy," *American Journal of Epidemiology* 133, no. 5 (1991).

239 Див., наприклад Dorret I. Boomsma, Judith R. Koopmans, Lorenz J. P. Van Doornen, and Jacob F. Orlebeke, "Genetic and Social Influences on Starting to Smoke: A Study of Dutch Adolescent Twins and Their Parents," *Addiction* 89, no. 2 (Feb. 1994): 219–26.

240 Jan P. Vandenbroucke, "Those Who Were Wrong," *American Journal of Epidemiology* 130, no. 1 (1989), 3–5.

241 Цит. у: Jon M. Harkness, "The U.S. Public Health Service and Smoking in the 1950s: The Tale of Two More Statements," *Journal of the History of Medicine and Allied Sciences* 62, no. 2 (Apr. 2007): 171–212.

242 Ibid.
243 Jerome Cornfield, “Statistical Relationships and Proof in Medicine,” *American Statistician* 8, no. 5 (1954): 20.
244 Про пандемію 2009 року див. Angus Nicoll, Martin McKee, “Moderate Pandemic, Not Many Dead — Learning the Right Lessons in Europe from the 2009 Pandemic,” *European Journal of Public Health* 20, no. 5 (2010): 486–88. Але зауважте, що новіші дослідження оцінюють смертність як набагато вищу, ніж це вважалося раніше — на рівні 250 тис. осіб.
245 Joseph Berkson, “Smoking and Lung Cancer: Some Observations on Two Recent Reports,” *Journal of the American Statistical Association* 53, no. 281 (Mar. 1958): 28–38.
246 Ibid.
247 Ibid.

Розділ 17. Немає ніякої громадської думки

248 “Lowering the Deficit and Making Sacrifices,” Jan. 24, 2011, www.cbsnews.com/htdocs/pdf/poll_deficit_011411.pdf (відвідано 14 січня 2014 року).
249 “Fewer Want Spending to Grow, But Most Cuts Remain Unpopular,” Feb. 10, 2011, www.people-press.org/files/2011/02/702.pdf.
250 Bryan Caplan, “Mises and Bastiat on How Democracy Goes Wrong, Part II” (2003), Library of Economics and Liberty, www.econlib.org/library/Columns/y2003/CaplanBastiat.html (відвідано 14 січня 2014 року).
251 Paul Krugman, “Don’t Cut You, Don’t Cut Me,” New York Times, Feb. 11, 2011, http://krugman.blogs.nytimes.com/2011/02/11/dont-cut-you-dont-cut-me.
252 “Cutting Government Spending May Be Popular but There Is Little Appetite for Cutting Specific Government Programs,” Harris Poll, Feb. 16, 2011, www.harrisinteractive.com/NewsRoom/HarrisPolls/tabid/447/mid/1508/articleId/693/ctl/ReadCustom%20Default/Default.aspx (відвідано 14 січня 2014 року).
253 Результати зі згадуваного вище опитування «Сі-Бі-Ес Ньюз».
254 “The AP-GfK Poll, November 2010,” запитання HC1 та HC14a, http://surveys.ap.org/data/GfK/AP-GfK%20Poll%20November%20Topline-nonCC.pdf.
255 Annals of the Congress of the United States, Aug. 17, 1789. (Washington, DC: Gales and Seaton, 1834), 782.
256 Atkins v. Virginia, 536 US 304 (2002).
257 “Akhil Reed Amar and Vikram David Amar, Eighth Amendment Mathematics (Part One): How the Atkins Justices Divided When Summing,” *Writ*, June 28, 2002, writ.news.findlaw.com/amar/20020628.html (відвідано 14 січня 2014 року).
258 Death Penalty Information Center, www.deathpenaltyinfo.org/executions-year (відвідано 14 січня 2014 року).
259 See, e.g., Atsushi Tero, Ryo Kobayashi, Toshiyuki Nakagaki, “A Mathematical Model for Adaptive Transport Network in Path Finding by True Slime Mold,” *Journal of Theoretical Biology* 244, no. 4 (2007): 553–64.
260 Tanya Latty and Madeleine Beekman, “Irrational Decision Making in an Amoeboid Organism: Transitivity and Context-Dependent Preferences,” *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* 278, no. 1703 (Jan. 2011): 307–12.
261 Susan C. Edwards, Stephen C. Pratt, “Rationality in Collective Decision-Making by Ant Colonies,” *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* 276, no. 1673 (2009): 3655–61.

262 Constantine Sedikides, Dan Ariely, and Nils Olsen, “Contextual and Procedural Determinants of Partner Selection: Of Asymmetric Dominance and Prominence,” *Social Cognition* 17, no. 2 (1999): 118–39. Але зауважте також статтю Shane Frederick, Leonard Lee, Ernest Baskin, “The Limits of Attraction” (препринт), у якій стверджується, що зазначені ефекти у позалабораторних умовах дуже слабкі.
263 John Stuart Mill, *On Liberty and Other Essays* (Oxford: Oxford University Press, 1991), 310.
264 The vote totals here are all drawn from “Burlington Vermont IRV Mayor Election,” http://rangevoting.org/Burlington.html (відвідано 14 січня 2014 року). Див. також Anthony Gierzynski’s,“Instant Runoff Voting,” www.uvm.edu/~vlrs/IRVassessment.pdf (відвідано 14 січня 2014 року).
265 Ian MacLean and Fiona Hewitt, eds., Condorcet: Foundations of Social Choice and Political Theory (Cheltenham, UK: Edward Elgar Publishing, 1994), 7.
266 “Essay on the Applications of Analysis to the Probability of Majority Decisions,” у Ian MacLean and Fiona Hewitt, *Condorcet*, 38.
267 MacLean, Hewitt, *Condorcet*, 64.
268 David Williams, “Signposts to the Secular City: The Voltaire-Condorcet Relationship,” in T. D. Hemming, Edward Freeman, David Meakin, eds., *The Secular City: Studies in the Enlightenment* (Exeter, UK: University of Exeter Press, 1994), 120–33.
269 Lorraine Daston, Classical Probability in the Enlightenment (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995), 99.
270 Цит. за Williams, “Signposts,” 128.

Розділ 18. «З нічого я створив предивний новий світ»

271 Amir Alexander, *Duel at Dawn: Heroes, Martyrs, and the Rise of Modern Mathematics* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 2011), Part 4.
272 Steven G. Krantz, *An Episodic History of Mathematics* (Washington, DC: Mathematical Association of America, 2010), 171.
273 Bush v. Gore, 531 U.S. 98 (2000).
274 Antonin Scalia, *A Matter of Intepretation: Federal Courts and the Law* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997), 25.
275 Див., наприклад, Paul Dickson, Baseball’s Greatest Quotations, rev. ed. (Glasgow: Collins, 2008), 298.
276 Чесно кажучи, питання «Що Дерек Джитер знав і чого не знав?» так і залишається без остаточної відповіді. Див., наприклад, його інтерв’ю 2011 року Келу Ріпкену-молодшому.
277 Richard A. Posner, “What’s the Biggest Flaw in the Opinions This Term?” *Slate*, June 21, 2013.
278 Див., наприклад, Scalia’s concurrence in Green v. Bock Laundry Machine Co., 490 U.S. 504 (1989).
279 *Bulletin of the American Mathematical Society*, July 1902, 437–79.
280 Reid, Hilbert, 57.
281 Hilbert, “Über das unendliche,” *Mathematische Annalen* 95 (1926): 161–90; trans. Erna Putnam, Gerald J. Massey, “On the Infinite,” in Paul Benacerraf and Hilary Putnam, *Philosophy of Mathematics*, 2d ed. (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1983).
282 Див.: “The Inconsistency of Arithmetic,” http://golem.ph.utexas.edu/category/2011/09/the_inconsistency_of_arithmeti.html (відвідано 15 січня 2014 року).
283 Phillip J. Davis, Reuben Hersh, *The Mathematical Experience* (Boston: Houghton Mifflin, 1981), 321.

284 Див.: Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity* (New York: Scribner, 1991).
285 Reid, Hilbert, 7.
286 "The Bulk of All Human Utterances Is Plagiarism," Letters of Note, www.lettersofnote.com/2012/05/bulk-of-all-human-utterances-is.html (відвідано 15 січня 2014 року).
287 Terry Tao, "Does One Have to Be a Genius to Do Maths?" http://terrytao.wordpress.com/career-advice/does-one-have-to-be-a-genius-to-do-maths (відвідано 15 січня 2014 року).
288 "Kurt Gödel and the Institute," *Institute for Advanced Study*, www.ias.edu/people/godel/institute.
289 Reid, Hilbert, 137.
290 Constance Reid, *Hilbert* (Berlin: Springer-Verlag, 1970), 210.
291 MacLean and Hewitt, *Condorcet*.

Як бути правим

292 Проте Вальд служив за призовом у румунській армії, тож я з абсолютною певністю сказати цього не можу.
293 Див.: www.poetryfoundation.org/poem/177260 (відвідано 15 січня 2014 року).
294 З дебютного альбому групи: *London 0 Hull 4*.
295 Частково цей матеріал взято з моєї рецензії на книжку Сілвера «Сигнал і шум» (*Boston Globe*, Sept. 29, 2012).
296 Josh Jordan, "Nate Silver's Flawed Model," *National Review Online*, Oct. 22, 2012, www.nationalreview.com/articles/331192/nate-silver-s-flawed-model-josh-jordan (відвідано 15 січня 2014 року).
297 Dylan Byers, "Nate Silver: One-Term Celebrity?" *Politico*, Oct. 29, 2012.
298 Nate Silver, "October 25: The State of the S tates," *New York Times*, Oct. 26, 2012.
299 Willard Van Orman Quine, *Quiddities: An Intermittently Philosophical Dictionary* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1987), 21.
300 Показники подано для ілюстрації.
301 З моєї статті "To Resolve Wisconsin's State Supreme Court Election, Flip a Coin," *Washington Post*, Apr. 11, 2011.
302 *The Autobiography of Benjamin Franklin* (New York: Collier, 1909), www.gutenberg.org/cache/epub/148/pg148.html (відвідано 15 січня 2014 року).
303 Див., наприклад, епізод "I, Mudd," *Star Trek*, перший показ 3 листопада 1967 року.
304 F. Scott Fitzgerald, "The Crack-Up," *Esquire*, Feb. 1936.
305 Див., наприклад: George G. Szpiro, *Poincaré's Prize: The Hundred-Year Quest to Solve One of Math's Greatest Puzzles* (New York: Dutton, 2007).
306 Samuel Beckett, *The Unnameable* (New York: Grove Press, 1958).
307 З моєї статті у *Slate* 18 вересня 2008 року, "Finite Jest: Editors and Writers Remember David Foster Wallace," www.slate.com/articles/arts/culturebox/2008/09/finite_jest_2.html.
308 Samuel Beckett, *Murphy* (London: Routledge, 1938).